

ISSN: 2658–5782

Номер 3

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org



ИМех

им. Р.Р. Мавлютова



Продольно-поперечный изгиб упругого стержня при кратковременном осевом воздействии

М.И. Макаров^{1,2} , И.Л. Кузьмин³

¹ Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

³ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: ufamax2@gmail.com

В работе рассматривается задача о динамическом продольно-поперечном изгибе упругого стержня с начальными искривлениями при кратковременном осевом воздействии. Мотивацией исследования являются актуальные проблемы, связанные с анализом устойчивости и прочности элементов конструкций при ударных нагрузках, применимых, в частности, к проблемам запуска летательных аппаратов, свайных фундаментов и транспортных средств. Основное внимание уделено двум частным случаям: воздействию кратковременного продольного удара постоянной силы и приложению осевой силы, линейно возрастающей во времени. В постановке задачи специально учтен тот факт, что временной диапазон приложения нагрузки вдвое меньше времени распространения волны по длине стержня, что позволяет корректно моделировать волновые эффекты. В отличие от классических приближенных моделей, в которых распространение продольной волны предполагается мгновенным и напряжение считается постоянным вдоль стержня, в настоящей работе использованы уравнения с учетом конечной скорости распространения продольных волн. Для численного исследования динамики малых поперечных отклонений применяется разложение по собственным функциям и решается система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд Фурье. Детально анализируется влияние различных форм начального изгиба, а также изменение максимальных амплитуд колебаний для различных параметров модели. Проведен сравнительный анализ поведения стержня для простых и сложных начальных форм искривления, показано возникновение неравномерностей, близких к тем, что наблюдаются в физических экспериментах. Полученные результаты подтверждают важность учета волновых эффектов в кратковременных динамических задачах и расширяют область применения разработанных моделей.

Ключевые слова: упругий стержень, динамический изгиб, кратковременный удар, начальное искривление, волновое уравнение, численное моделирование, динамическая устойчивость

Longitudinal-transverse bending of an elastic rod under short-term axial action

M.I. Makarov^{1,2} , I.L. Kuzmin³

¹ Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia

² National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

³ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: ufamax2@gmail.com

The paper considers the problem of dynamic longitudinal-transverse bending of an elastic rod with initial curvatures under short-term axial action. The motivation of the research is the current problems related to the analysis of the stability and strength of structural elements under shock loads, applicable, in particular, to the problems of launching aircraft, pile foundations and vehicles. The main attention is paid to two special cases: the effect of a short-term longitudinal impact of constant force and the application of an axial force that increases linearly over time. The problem statement specifically takes into account the fact that the time range of the load application is half the time of wave propagation along the length of the rod, which makes it possible to correctly simulate wave effects. Unlike classical approximate models, in which the propagation of a longitudinal wave is assumed to be instantaneous and the voltage is assumed to be constant along the rod, equations are used in this work taking into account the finite velocity of propagation of longitudinal waves. To numerically study the dynamics of small transverse deviations, eigenfunction decomposition is applied and a system of ordinary differential equations for Fourier amplitudes is solved. The influence of various shapes of the initial bend is analyzed in detail, as well as changes in the maximum oscillation amplitudes for various parameters of the model. A comparative analysis of the behavior of the rod for simple and complex initial forms of

curvature is carried out, and the occurrence of irregularities close to those observed in physical experiments is shown. The results obtained confirm the importance of taking into account wave effects in short-term dynamic tasks and expand the scope of the developed models.

Keywords: elastic rod, dynamic bending, short-term impact, initial curvature, wave equation, numerical modeling, dynamic stability

1. Введение

Динамические нагрузки, в частности, удар, являются наиболее опасным видом воздействия на стержневые системы. Следует отметить, что при ударе скорость движения выделенного элемента стержня приобретает конечную скорость за малый промежуток времени. То есть ударная нагрузка вызывает значительные ускорения и, соответственно, инерционные силы, направление действия которых устремлено в сторону, противоположную ускорению.

В работе исходят из следующих физических допущений:

1. При ударе выполняется закон сохранения энергии — переход начальной кинетической энергии в потенциальную энергию упругого изгиба стержня [1, 2].
2. Движущееся тело с момента соприкосновения движется совместно со стержнем — нагрузка неупругая; если масса тела мала относительно стержня, она может быть проигнорирована, но импульсом — нет.
3. Деформации соответствуют закону Гука, модуль упругости E постоянен для малых деформаций.

Допущение о выполнении закона сохранения энергии разрешает связывать начальную кинетическую энергию динамического воздействия с потенциальной энергией упругой деформации при инициализации задачи и выборе критерия перехода в колебательный режим. Это позволяет использовать классические методы расчета динамического изгиба без учета необратимых потерь энергии в процессе удара [1, 2].

При динамическом продольном воздействии задача моделирования усложняется тем фактом, что распространение по стержню продольных упругих волн может вызвать интенсивные поперечные колебания, связанные с начальным изгибом относительно прямолинейной формы стержня. Однако, так как время распространения продольной волны по длине стержня существенно меньше наименьшего периода поперечных колебаний, как правило, используется упрощенная приближенная модель, в которой принимается гипотеза о том, что продольная волна распространяется по стержню мгновенно, а осевая сжимающая сила постоянна по длине. В такой постановке были решены задачи [1–5] при внезапном приложении конечной нагрузки выше критической, с линейно возрастающей со временем нагрузкой, а также с периодически меняющейся со временем нагрузкой.

В динамических задачах продольного воздействия распространение по стержню упругих волн может инициализировать интенсивные поперечные колебания при на-

личии начального искривления. Для случаев коротких ударов критична скорость волнового процесса. Наряду с классическими приближенными моделями [1, 5] в настоящей работе реализовано построение с учетом конечной скорости распространения волн. Постановка задачи, формулы и граничные условия приведены согласно работам [3, 6].

Целью исследования являются построение и сравнение моделей с различными начальными искривлениями стержня, анализ отличий динамики на основе численного решения соответствующих уравнений с помощью метода Рунге–Кутты.

2. Постановка задачи и модель

Постановка задачи, основные предположения и решения волновых уравнений отражены согласно [3], формулировка динамического уравнения изгиба — [3], постановка задачи линейно возрастающей нагрузки — [5, 6].

Рассматривается шарнирно-закрепленный трубопровод с заданным начальным искривлением и нулевыми начальными условиями. Конец упругого стержня постоянного сечения подвергается кратковременному продольному удару постоянной силы. Считается, что пробег продольной волны по удвоенной длине стержня больше времени удара. Отметим, что задача дает разумные результаты для сравнительно небольшого интервала времени.

Для первой подзадачи дополнительно будет использоваться волновое уравнение для нахождения внешней силы P , а для второй — сразу рассматриваться P специального вида.

Распространение продольных волн в стержне описывается уравнением

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} -P_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t \geq T; \end{cases}$$

$$u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное смещение сечения; x — продольная координата; t — время; T — время действия ударной силы; E и ρ — модуль Юнга и плотность материала. При сжатии $P_0 \geq 0$.

Необходимо найти $P(x, t) = ES(\partial u / \partial x)$. Общее решение волнового уравнения будет иметь следующий

вид:

$$P(x, t) = -P_0(f(x - ct) + g(x + ct)), \quad c^2 = \frac{E}{\rho},$$

где c — скорость звука; функции $f(z)$, $g(z)$ определяются из граничных и начальных условий.

Пусть $T_0 = L/c$ — время пробега волны по длине стержня. Рассмотрим случай $T < 2T_0$, то есть действие импульса заканчивается до прихода волны, отраженной от правого края, к левому. В этом случае:

$$\begin{cases} f(x) = 1, & -L_T \leq z \leq 0 \\ f(x) = 0, & -2L < z < -L_T, \quad -4L < z < -2L - L_T, \\ & g(z) = f(2L - z), \\ f(x) = -1, & -2L - L_T < z < -2L, \end{cases} \quad (2)$$

где $L_T = cT_0 < 2L$. Функции $f(z)$, $g(z)$ периодичны с периодом $4L$, то есть $P(x, t + 4T_0) = P(x, t)$ при $t > T$.

Малые поперечные движения стержня описываются динамическим уравнением изгиба следующего вида:

$$EJ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P(x, t) \frac{\partial(\omega_0 + \omega)}{\partial x} \right) + \rho S \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0 + \omega$ — полное отклонение стержня от прямолинейной формы; $\omega_0(x) = \varphi(x)$ — заданное начальное отклонение; $\omega(x, t)$ — дополнительное отклонение; J — геометрический момент инерции поперечного сечения.

Начальные условия имеют вид:

$$\omega(x, 0) = \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Граничные условия при шарнирном закреплении:

$$\omega = EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L.$$

Запишем уравнение (3) в безразмерном виде. Будем считать, что длина стержня L^* и время пробега волны по его длине T_0^* равны 1:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon(x_1, t_1) \frac{\partial(\omega_0 + \omega)}{\partial x_1} \right) + \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t_1^2} = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L^*, 0 \leq t_1 \leq T_0^*, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} x = Lx_1, \quad t = T_0 t_1, \quad \mu = \frac{J}{SL^2} = \left(\frac{r}{L} \right)^2 \ll 1, \\ \varepsilon(x_1, t_1) = \frac{P}{ES} = \varepsilon_0(f(x_1 - t_1) + g(x_1 + t_1)), \\ r = \sqrt{\frac{J}{S}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь r — радиус инерции сечения; $\varepsilon(x_1, t_1)$ — продольная деформация оси стержня. Относительная деформация $\varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES}$ в типичных задачах не превышает 0.01

(малые деформации); безразмерный параметр инерции $\mu = \frac{J}{SL^2}$ всегда мал для длинных тонких стержней, например, для труб $\mu \sim 10^{-4} \dots 10^{-2}$.

Решение ищется в виде ряда Фурье

$$\omega(x_1, t_1) = \sum_{n=1}^N X_n(x_1) T_n(t_1) \quad (6)$$

по собственным функциям $X^{IV} - \alpha^4 X = 0$ и граничным условиям $X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0$. Получаем

$$\alpha_n = n\pi, \quad X_n = \sin n\pi x. \quad (7)$$

Функции T_n удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_n}{dt^2} + \mu \alpha_n^4 T_n(t) - \\ - \frac{\varepsilon_0}{K_n} \sum_{k=1}^N a_{nk}(t) (T_k(t) + \varphi_k) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^1 X_n^2 dx, \quad a_{nk}(t) = \\ &= \int_0^1 (f(x - t) + g(x + t)) X'_k X'_n dx, \\ \varphi_k &= \int_0^1 \varphi X_k dx, \end{aligned} \quad (9)$$

и нулевым начальным условиями $T_n(0) = T'_n(0) = 0$. Система (8) решается численно.

Далее рассмотрим задачу при условии линейно возрастающей нагрузки. Она отличается тем, что продольные волны не рассматриваются, а сила представляется в виде $P(t) = P_0 c_p t S$ или как безразмерная величина $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_0(c_p t S)$, где c_p — скорость изменения сжимающего напряжения; S — поперечное сечение.

Все остальные формулы и выражения остаются прежними, кроме выражения для величины a_{nk} , которая вычисляется следующим образом

$$a_{nk}(t) = \int_0^1 (c_p t S) X'_k X'_n dx. \quad (10)$$

3. Результаты моделирования

Для моделирования использовалась библиотека SciPy для Python. Постановка задачи, основные предположения и решения волновых уравнений (1)–(9) взяты из работы Морозова и Товстика [3]. Линейно возрастающая нагрузка (10) представлена согласно подходу Вольмира [5].

Зададим $\varepsilon_0 = 0.01$ (относительная деформация 1 %), $\mu = 0.0002$ (соответствует отношению $(r/L)^2$ для тонкостенных конструкций), $\tau = 0.5$ (соответствует длительности импульса, при которой продольная волна проходит половину длины стержня. В формуле (6) положим $N = 10$).

Численное моделирование показало, что результат сильно зависит от начального искривления φ_k . Для численного интегрирования системы (8) использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом $h_t = 0.05$. Будем моделировать до момента времени $t = 2$ (два периода распространения волны по длине стержня).

3.1. Кратковременный удар при различных искривлениях

- 1) $\varphi_1 = 1, \varphi_k = 0, k \neq 1$: сначала сильно растет амплитуда первой полуволны, затем энергия перераспределяется по остальным модам (рис. 1);
- 2) $\varphi_4 = 1, \varphi_k = 0, k \neq 4$: изгиб концентрируется в середине стержня (рис. 2);
- 3) $\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.8, \varphi_3 = 1, \varphi_4 = 0.8, \varphi_5 = 0.5, \varphi_k = 0, k > 5$: формируется колебательный процесс (рис. 3).

3.2. Влияние количества учитываемых мод

Для сравнения с изгибом стержня в канале [7] рассмотрим влияние числа мод $N = 3, 5, 7, 9$ при $\varphi_k = 0.1$ для всех k (рис. 4).

3.3. Сравнительный анализ с приближенными моделями

Выполнено сопоставление результатов волновой модели с классической приближенной моделью Ишлинского–Лаврентьева, в которой продольная сила

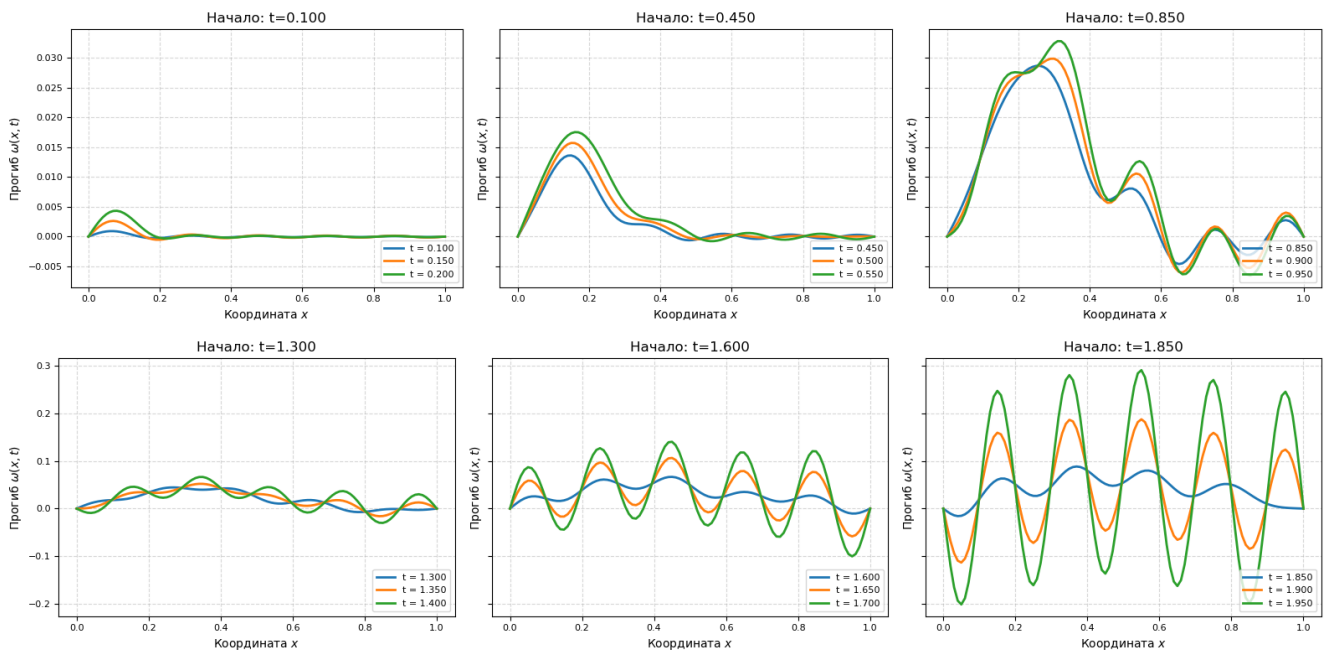


Рис. 1. Простое искривление φ_1 : пространственные профили в различные моменты времени

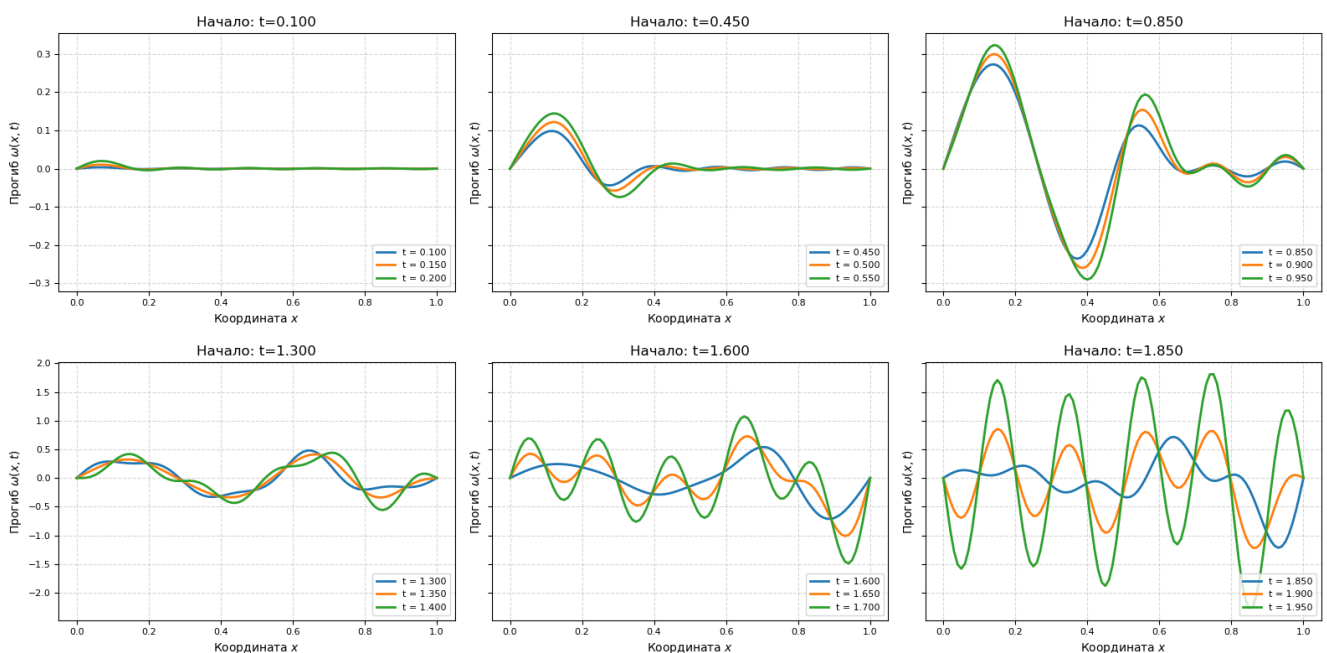


Рис. 2. Простое искривление φ_4 : концентрация деформации в центральной части стержня

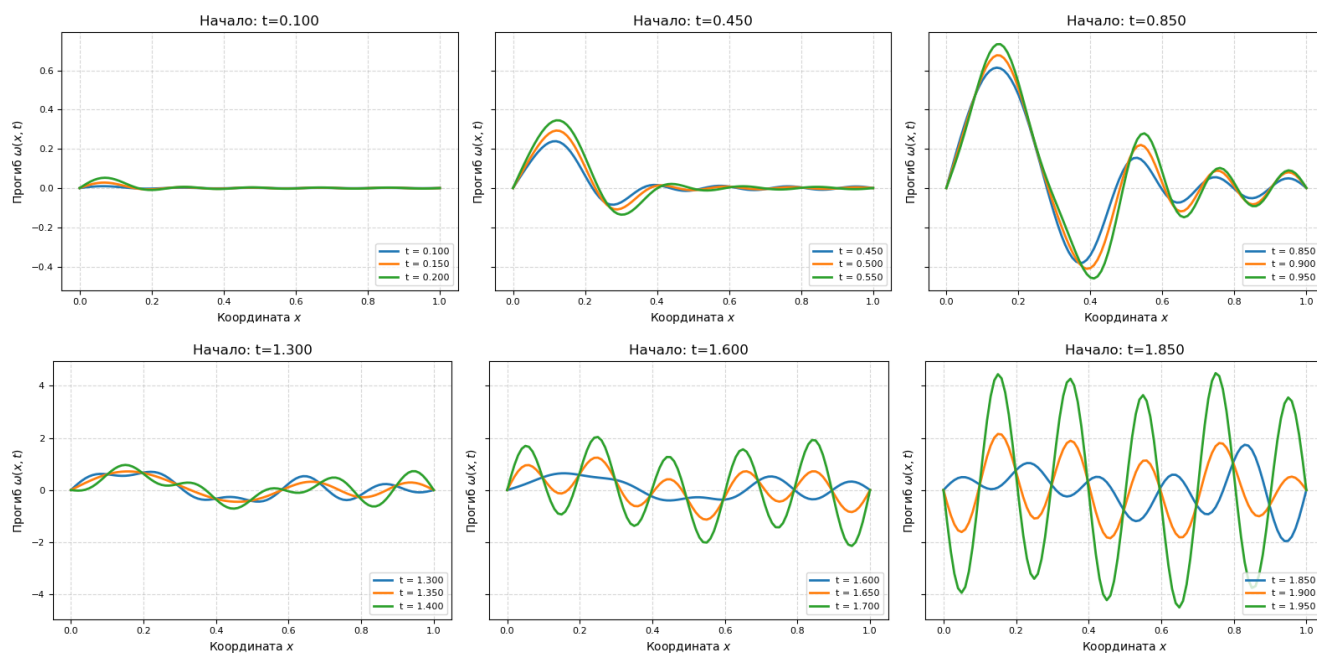


Рис. 3. Сложное искривление: формирование многомодовых колебаний

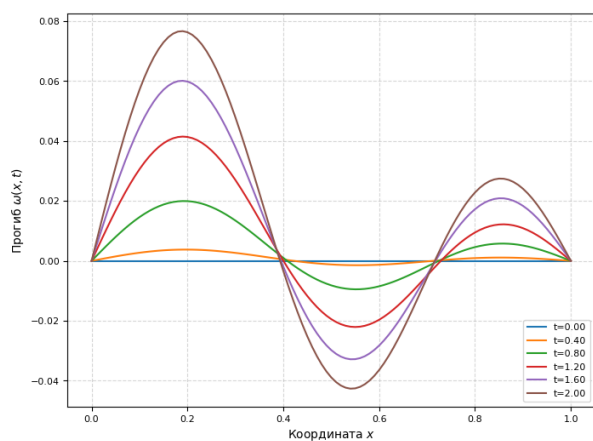
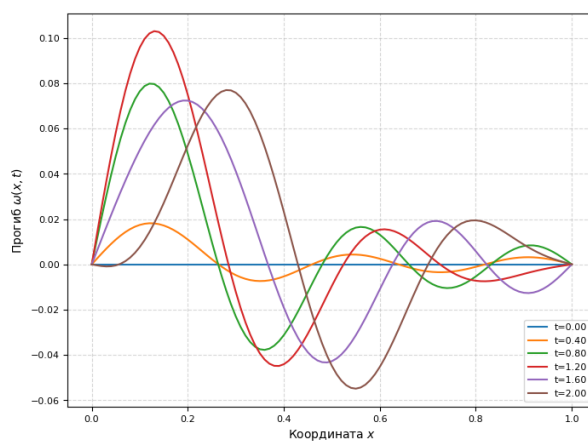
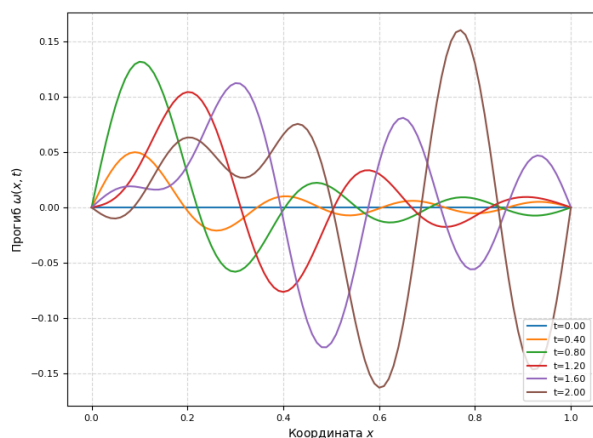
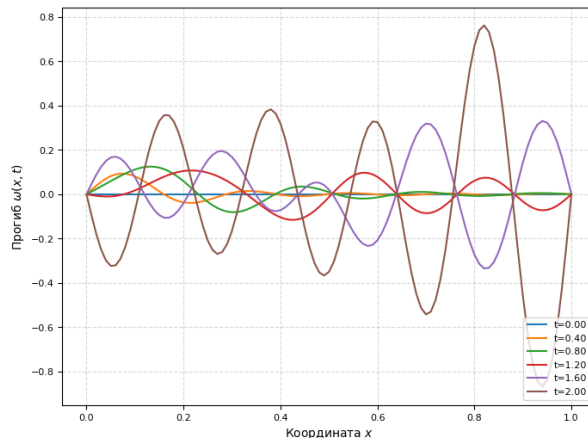

 (a) $N = 3$

 (б) $N = 5$

 (в) $N = 7$

 (г) $N = 9$

 Рис. 4. Влияние числа учитываемых мод при равномерном начальном искривлении $\varphi_k = 0.1$

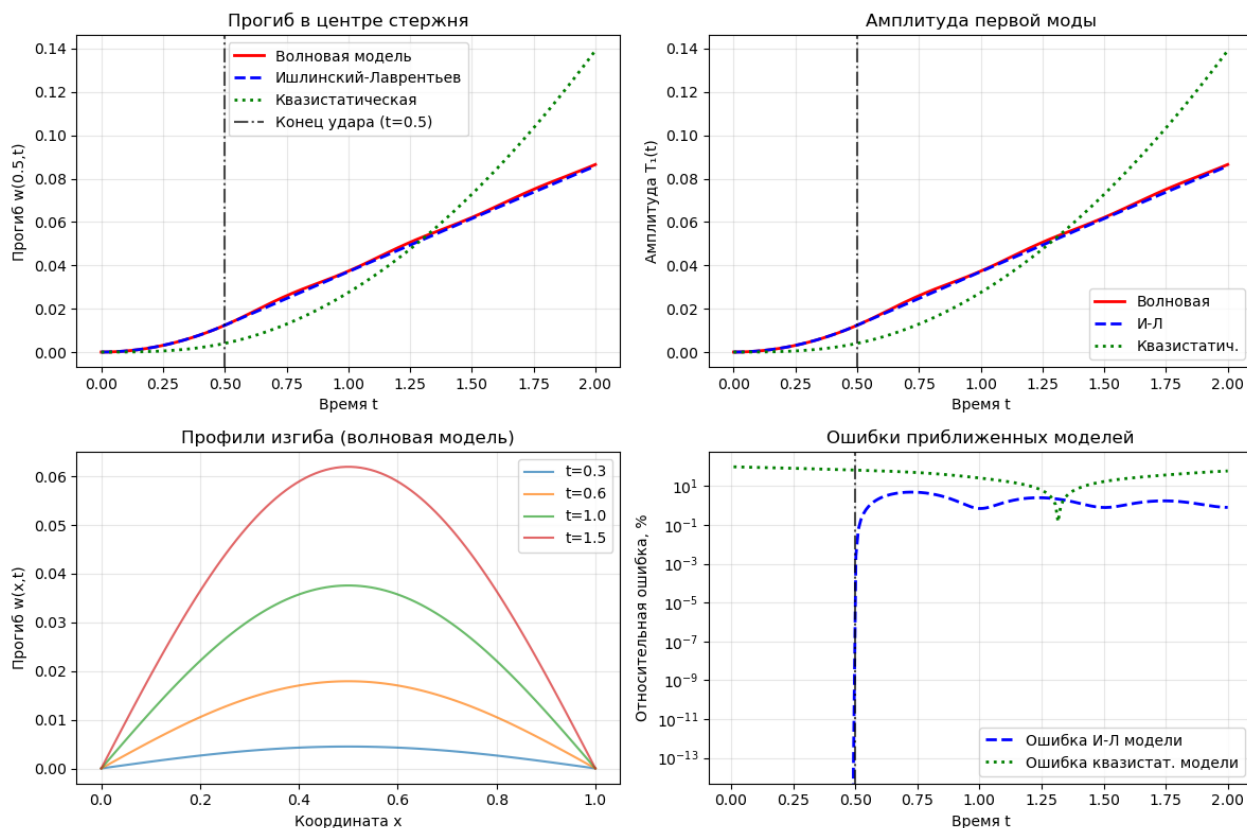


Рис. 5. Сравнительный анализ с приближенными моделями при простом искривлении $\varphi_1 = 1$

мгновенно распространяется вдоль стержня. Было показано, что максимальные амплитуды изгиба волновой модели превышают значения, полученные в приближенной теории, на 25–40 % при кратковременных ударах, а также сильнее выражена неравномерность распределения энергии между формами (рис. 5). В классических статических и квазистатических моделях (например, в работах Феодосьева [8]) структура изгиба определяется только геометрией начального искривления, тогда как динамическая модель выявляет критическую роль временной структуры нагружения.

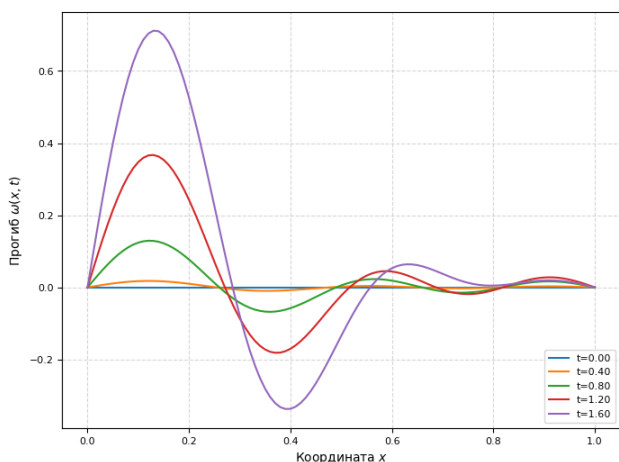


Рис. 6. Линейно возрастающее нагружение при сложном начальном искривлении: преимущественное возбуждение низших мод

Данное различие особенно существенно для применения в проектировании элементов конструкций, испытывающих быстрые или импульсные нагрузки, так как приближенные модели могут существенно недооценивать значения максимальных деформаций и неверно оценивать устойчивость системы.

3.4. Линейно возрастающая нагрузка

Согласно подходу Вольмира [6], рассмотрим случай линейно возрастающей нагрузки с параметрами $c_p = 1 \text{ кг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$, $S = 0.5 \text{ см}^2$.

В первом графике на рис. 6 рассматривается случай с сложным начальным искривлением $\varphi_1 = 0.5$, $\varphi_2 = 0.8$, $\varphi_3 = 1$, $\varphi_4 = 0.8$, $\varphi_5 = 0.5$, $\varphi_k = 0$, $k > 5$. На втором графике рассмотрим влияние числа мод $N = 3, 5, 7, 9$ при $\varphi_k = 0.1$ для всех k (рис. 7).

4. Заключение

В рамках настоящей работы рассмотрено влияние волновых эффектов на динамику продольно-поперечного изгиба упругого стержня при кратковременном осевом воздействии. Численное моделирование, выполненное на основе уравнений с конечной скоростью распространения продольной волны [3], показало, что учет волновой природы нагрузки принципиально влияет на характер развития изгиба и распределение энергии между формами колебаний, особенно для случаев кратковременного удара.

Проведен сопоставительный анализ с приближенными классическими моделями [1, 5], в которых мгновенно

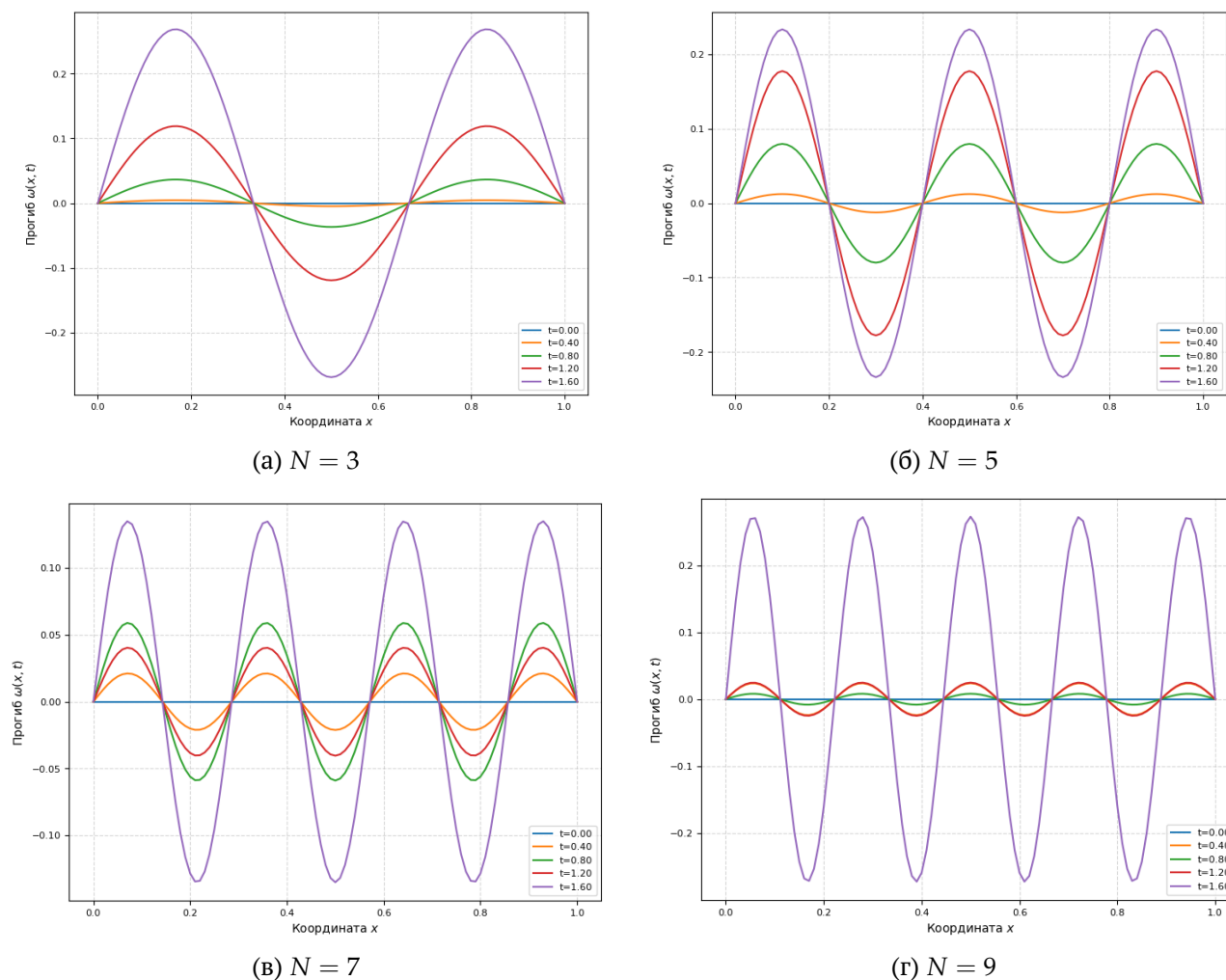


Рис. 7. Линейный рост амплитуд при возрастающей нагрузке для различного числа мод

венное распределение осевой силы по длине стержня приводит к существенному занижению максимальных амплитуд и иной структуре колебательного процесса. Результаты подтверждают, что для динамических задач с коротким временем удара моделирование, основанное на волновых уравнениях, необходимо для получения адекватных оценок отклика конструкций и объяснения наблюдаемых эффектов, аналогичных зарегистрированным в физических экспериментах [9].

Показано, что при применении линейно возрастающей нагрузки [6] для простых начальных искривлений достигнутые формы повторяют результаты классических задач (например, модели Феодосьева [8]), однако для более сложных начальных форм возникает неравномерность и существенно различающиеся амплитуды мод, что подчеркивает важность учета реальной формы начального отклонения.

Ограничением работы остается отсутствие демпфирования и неучет нелинейных эффектов при больших деформациях, кроме того, задача решалась в допущении идеального закрепления концов и постоянных физических свойств материала. Эффективность приме-

ненных численных методов ограничивается вычислительными затратами для больших N , что может быть преодолено в перспективе с помощью оптимизированных алгоритмов или асимптотических подходов.

В перспективе целесообразно развивать комбинированные методы для задач изгиба стержней в каналах с ограничением, а также уделить внимание вариационным или аналитико-численным схемам для учета более сложных граничных условий и реальных инженерных ситуаций. Полученные результаты могут быть полезны для анализа устойчивости и проектирования элементов машин и сооружений, испытывающих ударные или быстро меняющиеся нагрузки.

Список литературы / References

- [1] Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР. 1949;64(6):779–782. Lavrentyev M.A., Ishlinsky A.Yu. Dynamic Forms of Elastic Systems Stability Loss. Reports of the Academy of Sciences of USSR. 1949;64(6):779–782. (in Russian).
- [2] Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева. Известия РАН. Механика твердого тела. 2013;5:28–33. EDN: RFKVDX
Belyaev A.K., Il'in D.N., Morozov N.F. Dynamic Approach to the

- Ishlinsky-Lavrent'ev Problem. *Mechanics of Solids*. 2023;48(5):504–508. DOI: [10.3103/S002565441305004X](https://doi.org/10.3103/S002565441305004X)
- [3] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при продольном ударе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2009;2:105–111. Morozov N.F., Tovstik P.E. The Rod Dynamics under Longitudinal Impact. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2009;2:105–111. (in Russian). EDN: KKKJQL
- [4] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Статика и динамика стержня при продольном нагружении. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2014;7(1):76–89. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Static and Dynamics of a Rod at the Longitudinal Loading. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming and Computer Software»*. 2014;7(1):76–89. (in Russian) DOI: [10.14529/mmp140107](https://doi.org/10.14529/mmp140107)
- [5] Вольмир А.С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1960;1:6–9. Volmir A.S. Stability of Compressed Rods under Dynamic Loading. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1960;1:6–9. (in Russian).
- [6] Вольмир А.С. *Устойчивость упругих систем*. М.: Физматгиз; 1963. 880 с. Volmir A.S. *Stability of Elastic Systems*. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio: Foreign Technology, Division, Air Force Systems Command; 1965. 1047 p.
- [7] Макаров М.И., Кузьмин И.Л. Устойчивость трубопровода при продольно-поперечном изгибе в плоском канале. *Многофазные системы*. 2025;20(2):98–104. Makarov M.I., Kuzmin I.L. Pipeline stability under longitudinal and transverse bending in a plane channel. *Multiphase Systems*. 2025;20(2):98–104. (in Russian) DOI: [10.21662/mfs2025.2.014](https://doi.org/10.21662/mfs2025.2.014)
- [8] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. 5-е изд., испр. и доп. Москва: Наука, Физматлит; 1996. 368 с. Feodosyev V.I. *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*. Beekman Books Inc.; 1977. 432 p.
- [9] Овчинников Н.Т., Сорокин Ф.Д. Численное и физическое моделирование деформирования стержня при осевом нагружении в канале. Часть 1. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2020;10(106):1–23. Ovchinnikov N.T., Sorokin F.D. Physical modeling and numerical simulation of bar deformation under axial loading in the channel. Part 1. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2020;10(106):1–23. (in Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2020-10-2021](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-10-2021)

Сведения об авторах / Information about the Authors

Макаров Максим Игоревич

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Кузьмин Игорь Леонидович

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Makarov Maksim Igorevich

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia;
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
ufamax2@gmail.com
ORCID: [0009-0001-8159-1134](https://orcid.org/0009-0001-8159-1134)

Kuzmin Igor Leonidovich

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
igor_l_kuzmin@mail.ru
ORCID: [0009-0002-7197-1544](https://orcid.org/0009-0002-7197-1544)