



ISSN: 2658–5782

Номер 3

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Моделирование динамики капли, движущейся в плоском канале с вязким барьером

Д.Р. Галева[✉], В.Н. Киреев

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: lara_wood@mail.ru

В статье исследуется влияние высоковязкой области на деформацию одиночной капли, движущейся в потоке термовязкой жидкости с аномальной зависимостью вязкости от температуры. Численное моделирование производится с помощью метода фазового поля, состоящего из системы уравнений Кана–Хилларда–Навье–Стокса, дополненной уравнением для температурного поля. Представлены результаты численного моделирования для ламинарного течения с установившимся температурным полем в плоском канале. Проанализировано влияние вязкого барьера, расположенного посередине канала, на скорость капли и ее деформацию для трех капиллярных чисел. Составлены графики зависимости скорости капли от капиллярного числа. Показано, что для всех случаев капиллярных чисел образующийся в канале вязкий барьер придает капле дополнительное ускорение. Для всех расчетов была рассчитана общая нормированная масса системы по времени, показано, что максимальная погрешность не превышает 5 %. Приведены изображения формы капли на выходе из канала для разных случаев вязкого барьера. Показано, что если капиллярное число большое, то в капле могут образоваться вкрапления окружающей жидкости, однако если капля движется в канале с вязким барьером, то высоковязкая область не позволяет образовываться в капле вкраплениям из другой жидкости за счет более интенсивной деформации капли. Установлено, что относительная скорость капли в потоке аномально-вязкой жидкости выше, чем в потоке жидкости с постоянной минимальной вязкостью. Представлены графики зависимости относительной скорости капли от параметра аномалии жидкости для трех капиллярных чисел. Показано, что чем больше параметр аномалии жидкости, тем выше относительная скорость капли. Установлено, что образующийся в канале вязкий барьер придает капле ускорение и увеличивает относительную скорость капли.

Ключевые слова: модель фазового поля, уравнение Кана–Хилларда–Навье–Стокса, аномально-вязкая жидкость, поверхностное натяжение, движение капли, ламинарное течение

Modeling the dynamics of a drop moving in a plane channel with a viscous barrier

D.R. Galeeva[✉], V.N. Kireev

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: lara_wood@mail.ru

This article examines the influence of a highly viscous region on the deformation of a single droplet moving in a thermoviscous fluid flow with an anomalous viscosity-temperature dependence. Numerical modeling is performed using the phase field method, consisting of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system of equations, supplemented by an equation for the temperature field. The results of numerical modeling for laminar flow with a steady-state temperature field in a flat channel are presented. The influence of a viscous barrier located in the middle of the channel on the droplet velocity and its deformation is analyzed for three capillary numbers. Graphs of the droplet velocity dependence on the capillary number are plotted. It is shown that for all cases of capillary numbers, the viscous barrier formed in the channel imparts additional acceleration to the droplet. For all calculations, the total normalized mass of the system was calculated over time, and the maximum error is shown to not exceed 5%. The droplet shape at the channel exit is shown for different cases of a viscous barrier. It is shown that if the capillary number is high, inclusions of the surrounding liquid can form in the droplet. However, if the droplet moves through a channel with a viscous barrier, the high-viscosity region prevents the formation of inclusions of other liquids due to more intense droplet deformation. It is established that the relative velocity of a droplet in a flow of an anomalously viscous liquid is higher than in a flow of liquid with a constant minimum viscosity. Graphs of the droplet's relative velocity versus the liquid anomaly parameter are presented for three capillary numbers. It is shown that the higher the liquid anomaly parameter, the higher the relative velocity of the droplet. It is established that the viscous barrier formed in the channel accelerates the droplet and increases its relative velocity.

Keywords: phase field model, Cahn–Hilliard–Navier–Stokes equation, anomalously viscous liquid, surface tension, droplet motion, laminar flow

1. Введение

Исследование свойств anomalously-вязких жидкостей в последние годы вызывает интерес у множества ученых из самых разных областей науки — от нефтепереработки до медицины [1–4]. В отличие от обычных жидкостей, где вязкость монотонно убывает при увеличении температуры, у anomalously-вязких сред вязкость изменяется немонотонно, а именно: в определенном температурном диапазоне она может резко увеличиться, а затем уменьшиться. К таким жидкостям можно отнести растворы полимеров и мицеллярные растворы, anomalously-вязкие нефти с высоким содержанием серы, а также термочувствительные гидрогели. При определенных температурных условиях в таких жидкостях возникает интересное явление — вязкий барьер [5]. Это локализованная область с высокой вязкостью, которая может оказывать влияние на движение основного потока жидкости вплоть до закупорки. В существующих работах исследовалось воздействие вязкого барьера на скорость однофазной жидкости, однако не изучалось влияние вязкого барьера на двухфазные системы, в частности, на деформацию капли, движущейся в канале. В настоящей работе численно моделируется движение капли, движущейся в потоке anomalously-вязкой жидкости с вязким барьером в плоском канале, с целью исследования влияния вязкого барьера на скорость и деформацию капли.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский канал длиной L и высотой $2H$, в который втекает жидкость при постоянной температуре T_{in} . На стенках канала происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна $T_{out} < T_{in}$. После того, как в канале установятся ламинарное течение и постоянное температурное поле, в него помещается круглая капля радиусом R_0 и с температурой T_d . Схема задачи и основные обозначения представлены на рис. 1. Предполагается, что слои жидкости являются несжимаемыми и не смешиваются. Вязкость капли равна μ_d , несущей жидкости — μ_s , плотности одинаковы $\rho_d = \rho_s = \rho$.

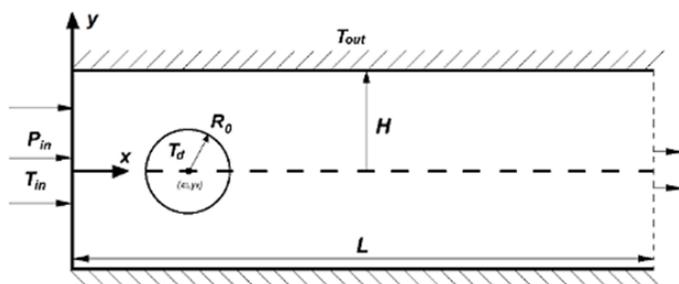


Рис. 1. Капля в плоском канале

Проведем численное моделирование ламинарного течения anomalously-вязкой жидкости в плоском канале под действием перепада давления Δp .

Для моделирования поставленной задачи в безразмерном виде в декартовой системе координат использовалась система уравнений Кана–Хилларда–Навье–Стокса [6], дополненная уравнением для температуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -Eu \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Ca}} \eta(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -Eu \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Ca}} \eta(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pe}} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pe}_\varphi} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right], \\ \eta &= \varphi^3 - \varphi - \text{Cn} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right], \end{aligned}$$

$$\mu(\varphi, T) = \frac{1 + \varphi}{2} \lambda + \frac{1 - \varphi}{2} \mu_{\min} \left[1 + A e^{-B(T-1/2)^2} \right],$$

где ρ — плотность; $\mathbf{u}(u, v)$ — поле скорости; p — давление; $\mu(\varphi, T)$ — вязкость среды; T — температура; φ — параметр порядка для отслеживания межфазной границы; η — химический потенциал; $\lambda = \mu_d / \mu_s$ — отношение вязкости капли к вязкости жидкости; μ_{\min} — значение вязкости несущей жидкости при $T = T_{in}$; $B > 0$ — параметр, характеризующий толщину вязкого барьера; A — параметр аномалии жидкости, характеризующий изменение вязкостей.

Безразмерные физические параметры — число Рейнольдса Re , число Эйлера Eu , капиллярное число Ca , число Пекле Pe , диффузионное число Пекле Pe_φ и число Кана Cn :

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{\rho U_0 L_0}{\mu_s}, \quad \text{Eu} = \frac{P_0}{\rho U_0^2}, \quad \text{Ca} = \frac{\sqrt{2k} \mu_s U_0}{3 \sigma}, \\ \text{Pe} &= \frac{U_0 L_0}{\chi}, \quad \text{Pe}_\varphi = \frac{U_0 L_0}{M}, \quad \text{Cn} = \frac{k}{L_0^2}, \end{aligned}$$

где $L_0 = H$, $U_0 = \sqrt{P_0 / \rho}$, $P_0 = P_{in}$ — характерные длина, скорость, давление соответственно; k — положительная

константа, связанная с толщиной межфазной границы; σ — поверхностное натяжение; χ — коэффициент температуропроводности; M — подвижность межфазной границы (функция мобильности).

Безразмерные граничные условия:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & p(0, y, t) &= 1, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & T(0, y, t) &= 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} &= \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, & p(L, y, t) &= 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} &= \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, & \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} &= 0, \\ u(x, 1, t) &= v(x, 1, t) = 0, & \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=1} &= \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, & \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} &= -Nu \cdot T, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \\ &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

Безразмерные начальные условия:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= v(x, y, 0) = 0, \\ p(x, y, 0) &= 0, \quad T(x, y, 0) = 0, \\ \varphi(x, y, t) &= \begin{cases} -1, & 0 \leq t < t_0, \\ \text{th} \left(\frac{a - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{2k}} \right), & t = t_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $Nu = (h \cdot H) / K$ — безразмерное число Нуссельта, характеризующее интенсивность теплообмена на стенках канала; h — коэффициент теплоотдачи; K — коэффициент теплопроводности; $a = R_0 / H$ — относительный радиус капли, определяющийся как отношение начального радиуса капли к половине высоты канала; t_0 — время установления развитого течения и постоянного

температурного поля, после которого в канал помещается капля.

Средняя скорость капли рассчитывалась по формуле

$$U_d = L / t_d,$$

где t_d — время, за которое фронтальная точка капли достигла координаты $x = L$.

Относительная скорость капли:

$$U_{dn} = U_d / V_{\max},$$

где V_{\max} — максимальная осевая скорость жидкости в канале без капли.

Исследование проведено для случая, когда в канал с горячей жидкостью помещается горячая капля $T_d = T_{in}$. В работе исследовано влияние трех значений параметра аномалии жидкости $A = 0; 5$ и 10 на скорость капли.

3. Результаты моделирования

Для численного моделирования движения капли в плоском канале разработана компьютерная программа [7]. Валидация данной программы проводилась путем сравнения результатов с точным решением в одномерном случае [8], а также с экспериментальными данными. Для расчетов использовалась сетка 1020×51 ; безразмерное время моделирования $\text{time} = \Delta t \cdot N_t$, где шаг по времени $\Delta t = 10^{-3}$, а N_t — общее число временных шагов. Безразмерные параметры имеют следующие фиксированные значения: $Re = 1.5$, $Eu = 1$, $Cn = 0.0016$, $Re_\varphi = 10^{15}$, $\Delta P = 5$, $a = 0.8$. Капиллярное число варьировалось в диапазоне $Ca = 0.1 \div 10$, параметр аномалии $B = 0.01$.

Изменения относительной скорости капли U_{dn} от времени с различными значениями параметра A для трех капиллярных чисел Ca представлены на рис. 2. Видно, что для всех Ca в случае отсутствия вязкого барьера ($A = 0$) относительная скорость капли монотонно выходит на постоянное значение, а в случаях, когда в канале есть вязкий барьер ($A = 5$ и $A = 10$), относительная скорость капли изменяется немонотонно.

При малом капиллярном числе $Ca = 0.1$ капля сохраняет круглую установившуюся форму даже в случае

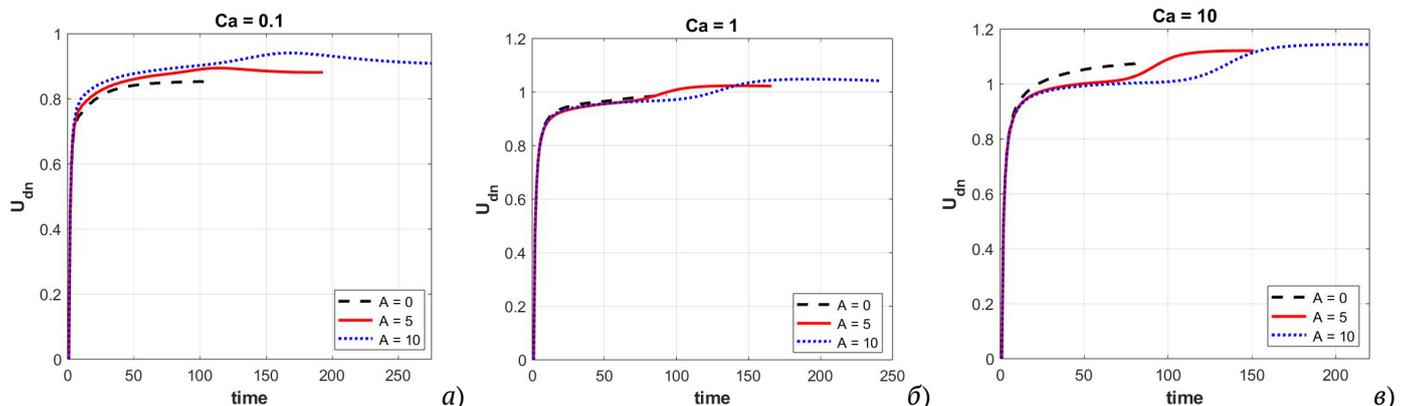


Рис. 2. Изменение относительной скорости капли U_{dn} с капиллярным числом а) $Ca = 0.1$, б) $Ca = 1$, в) $Ca = 10$

ярко-выраженного вязкого барьера ($A = 10$). При этом относительная скорость капли сначала возрастает, затем снижается и выходит на установившееся значение (рис. 2(а)). Такая немонотонность вызвана деформацией капли в вязком барьере. При входе в высоковязкую область круглая капля начинает вытягиваться (см. рис. 3), приобретая форму капли Тейлора, и ее скорость возрастает. После пересечения вязкого барьера капля снова становится круглой, потому что силы поверхностного натяжения достаточно велики, возрастает сопротивление капли несущему потоку, поэтому скорость капли падает до значения, которое было до входа в высоковязкую область.

При увеличении капиллярного числа $Ca = 1$ в случаях с вязким барьером ($A = 5, A = 10$) скорость капли меняется по-другому. До того как капля попадет в высоковязкую область, ее относительная скорость выходит на некоторое установившееся значение, а после прохож-

дения капель вязкого барьера скорость увеличивается и становится выше, чем скорость капли в канале без вязкого барьера (рис. 2(б), (в)). Такое ускорение связано с тем, что, находясь в высоковязкой области, капля испытывает максимальное сопротивление движению. После выхода капли из вязкого барьера сопротивление резко уменьшается, тем самым придавая капле ускорение. При больших капиллярных числах капля деформируется в вязком барьере, а после выхода из барьера силы поверхностного натяжения придают капле эллиптическую форму, которая более аэродинамична (см. рис. 4), что тоже приводит к ускорению.

При большом капиллярном числе $Ca = 10$ форма капли сильно изменяется (см. рис. 5). Сначала капля вытягивается, ее границы отдаляются от стенок, на задней стенке капли образуется прогиб. Когда капля попадает в высоковязкую область, задние концы капли замыкаются, а внутри капли образуется замкнутая область,

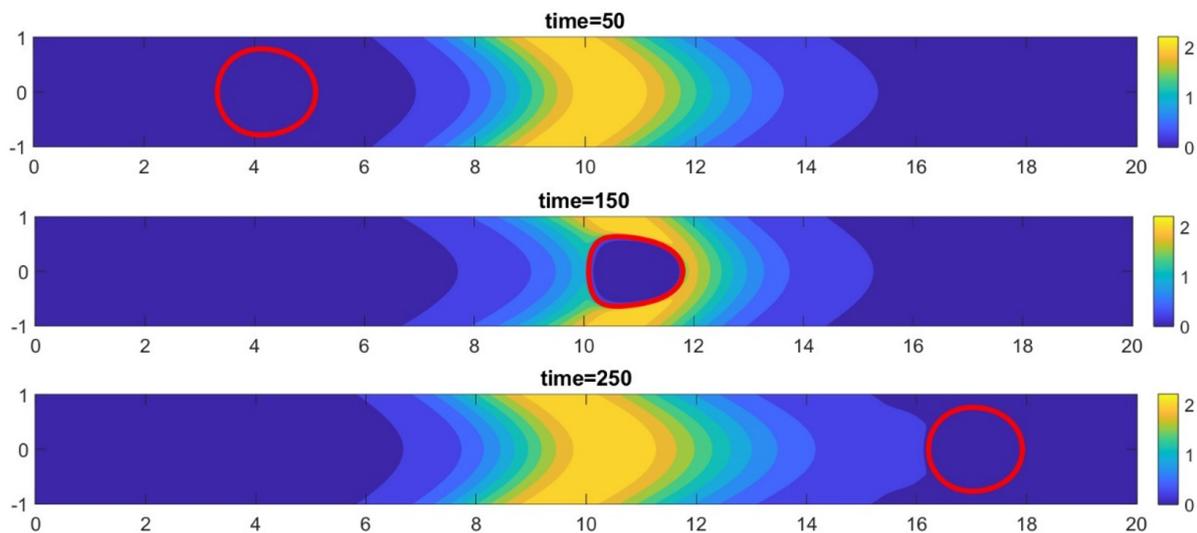


Рис. 3. Форма горячей капли с $Ca = 0.1$ в разные моменты времени в канале с вязким барьером $A = 10$

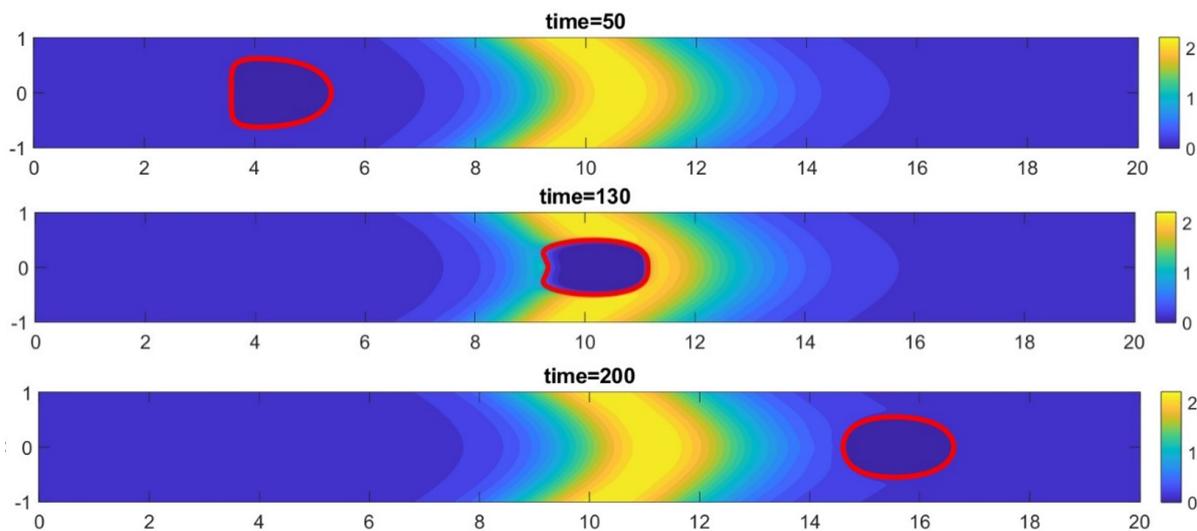


Рис. 4. Форма горячей капли с $Ca = 1$ в разные моменты времени в канале с вязким барьером $A = 10$

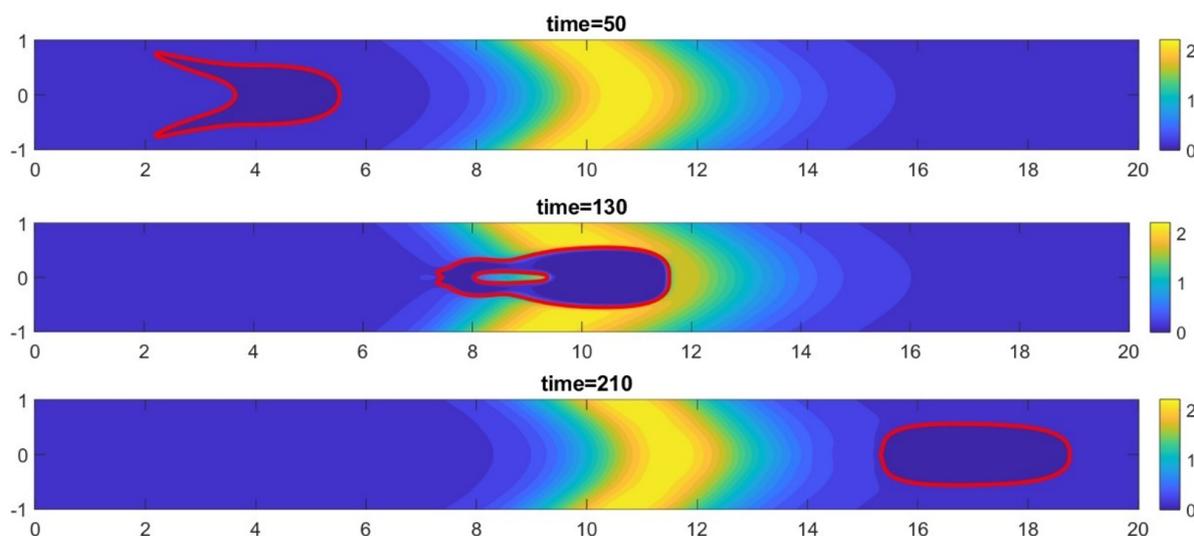


Рис. 5. Форма горячей капли с $Ca = 10$ в разные моменты времени в канале с вязким барьером $A = 10$

состоящая из жидкости окружающей среды. После прохождения капель вязкого барьера эта замкнутая область диффундирует и исчезает. К моменту выхода из канала капля содержит в себе только жидкость капли. Таким образом, вязкий барьер влияет на форму капли, сплющивая края капли и не позволяя образоваться в капле замкнутой области из другой жидкости. На рис. 6 показаны формы капли с $Ca = 10$ на выходе из канала для случая без вязкого барьера, с небольшим вязким барьером и с большим. Видно, что при отсутствии вязкого барьера ($A = 0$) в капле остается вкрапление из несущей жидкости, при $A = 5$ это вкрапление уменьшается, а при $A = 10$ вязкий барьер не позволяет такому вкраплению из другой жидкости образоваться в капле.

На рис. 7 представлен график общей нормированной массы всей системы по времени для $Ca = 0.1$ при

$A = 0$. Видно, что для выбранной расчетной сетки 1020×51 погрешность не превышает 3 %. Также были проведены расчеты для всех остальных параметров Ca и A и максимальная погрешность не превышает 5 %.

На рис. 8 приведены графики относительной скорости капли U_{dn} для разных капиллярных чисел и различных параметров аномалии A . Видно, что во всех случаях чем больше A , тем выше относительная скорость капли. В канале без вязкого барьера относительная скорость капли самая низкая для всех капиллярных чисел. В канале с самым большим вязким барьером ($A = 10$) — самая высокая относительная скорость капли. Видно, что чем больше вязкий барьер, тем более сильное ускорение он придает капле: вязкий барьер выступает как своеобразная «вязкая пушка», придавая капле ускорение и увеличивая ее скорость.

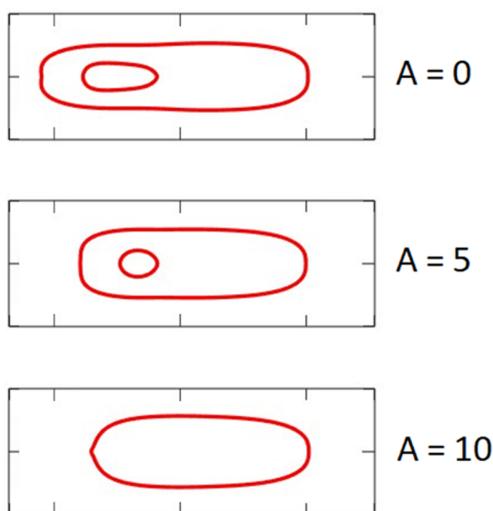


Рис. 6. Формы капли на выходе из канала при $Ca = 10$ для разных параметров

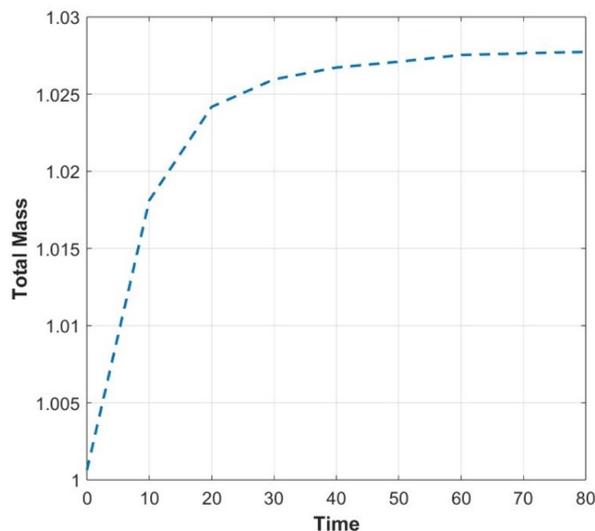


Рис. 7. Общая нормированная масса системы по времени при $A = 0, Ca = 0.1$

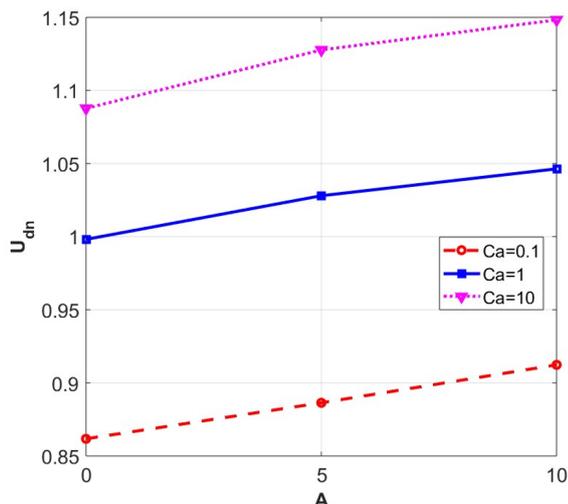


Рис. 8. Относительная скорость горячей капли на выходе из канала для разных Ca и A

4. Заключение

По результатам моделирования показано, что относительная скорость капли в потоке аномально-вязкой жидкости выше, чем в потоке жидкости с постоянной минимальной вязкостью. Образующийся в канале вязкий барьер придает капле дополнительное ускорение. Чем выше параметр аномалии вязкости, тем интенсивнее ускорение капли и выше относительная скорость капли. Показано, что можно регулировать скорости капель, движущихся в каналах с аномально-вязкой жидкостью, задавая им определенную первоначальную температуру.

Список литературы / References

- [1] Laurano R, Boffito M. Thermosensitive micellar hydrogels as vehicles to deliver drugs with different wettability. *Frontiers in Bioengineering*

and *Biotechnology*. 2020;**8**:00708. DOI: 10.3389/fbioe.2020.00708

- [2] Домнина ЮМ, Жаворонок ЕС, Суслов ВВ, Решетняк ДВ, Кедик СА. Термообратимое повышение вязкости при нагревании водных растворов блок-сополимеров этилен- и пропиленоксида, не сопровождающееся образованием геля. *Высокомолекулярные соединения (серия А)*. 2022;**64**(3):163–170. Domnina YM, Zhavoronok ES, Suslov VV, Reshetnyak DV, Kedik SA. Thermoreversible Growth Of Viscosity Upon Heating Of The Aqueous Solutions Of Ethylene Oxide-Propylene Oxide Block Copolymers Unaccompanied By Gelation. *Polymer Science, Series A*. 2022;**64**(3):163–170. (in Russian) DOI: 10.31857/S2308112022200019
- [3] Киреев ВН, Урманчиев СФ. Течение жидкостей с температурной аномалией вязкости. *Труды Института механики Уфимского научного центра РАН*. 2003;**3**:232–245. Kireev VN, Urmancheev SF. Flow of liquids with temperature anomaly of viscosity. *Proceedings of the Institute of Mechanics of Ufa Branch of RAS*. 2003;**3**:232–245. (in Russian) DOI: 10.21662/uim2003.1.017
- [4] Мухутдинова АА, Низамова АД, Киреев ВН, Урманчиев СФ. Экспериментальная установка для исследования устойчивости течения жидкости. *Многофазные системы*. 2024;**19**(1):35–39. Mukhutdinova AA, Nizamova AD, Kireev VN, Urmancheev SF. Experimental setup for studying the stability of fluid flow. *Multiphase systems*. 2024;**19**(1):35–39. (in Russian) DOI: 10.21662/mfs2024.1.005
- [5] Nizamova AD, Kireev VN, Urmancheev SF. The Influence Of The Annular Gap Thickness On The Critical Reynolds Number During The Flow Of Thermoviscous Liquids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024;**45**(5):2119–2127. DOI: 10.1134/S1995080224602315
- [6] Badalassi VE, Cenicerros HD, Banerjee S. Computation of multiphase systems with phase field models. *Journal of computational physics*. 2003;**190**(2):371–397. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00280-8
- [7] Галеева ДР, Киреев ВН, Галеева ГЯ, УУНиТ. Программа для расчета скорости капли в плоском канале методом фазового поля. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614539. 2025. Galeeva DR, Kireev VN, Galeeva GYa, UUS&T. Program for calculating the velocity of a drop in a flat channel using the phase field method. Certificate of state registration of the computer program No. 2025614539. 2025. (in Russian) EDN: UPVEMH
- [8] Галеева ДР, Киреев ВН, Ковалева ЛА, Мусин АА. Консервативная численная схема для решения уравнения Кана–Хилларда. *Прикладная математика и механика*. 2025;**89**(1):136–148. Galeeva DR, Kireev VN, Kovaleva LA, Musin AA. A Conservative Numerical Method For Solving The Cahn-Hilliard Equation. *Applied Mathematics And Mechanics*. 2025. 2025;**89**(1):136–148. (in Russian) DOI: 10.31857/S0032823525010101

Сведения об авторах / Information about the Authors

Галеева Дилара Рустэмовна

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Киреев Виктор Николаевич

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Dilara R. Galeeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

lara_wood@mail.ru

ORCID: 0009-0004-5263-3691

Victor N. Kireev

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

kireevvn@uust.ru

ORCID: 0000-0002-3550-6541