



ISSN: 2658–5782

Номер 3

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Численный анализ рассеяния волны на паре звуконепроходимых сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования

Э.Ш. Насибуллаева✉

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: elvira@anrb.ru

В настоящей работе проведен анализ рассеяния волны на системе двух звуконепроходимых сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования. Основными целями работы являются: определение основных параметров, изменение которых существенным образом влияет на всю систему; определение значений варьируемых параметров системы, при которых искомые функции (полное сечение рассеяния и нормированное давление в фиксированной точке) принимают наименьшее и наибольшее значения, а также исследование системы при оптимальных значениях параметров. Метод ортогонального композиционного планирования реализован для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов были выбраны три основные параметры системы: волновой радиус, отношение радиусов сфер и расстояние между центрами сфер. Для полученного уравнения регрессии проведены проверки значимости коэффициентов с помощью t -критерия Стьюдента и адекватности модели с использованием F -критерия Фишера. Показано, что в случае воздействия сферической волны от монополюсного источника излучения нелинейное влияние факторов более выражено, чем в случае плоской волны; нормальное давление в точке является нечувствительным к изменению параметров в случае воздействия плоской волны, а также в случае монополюсного источника излучения для малых величин комплексной проводимости поверхности сфер; полное сечение рассеяния является сильно чувствительным в случае системы с идеально жесткими сферами; наибольшее и наименьшее значения целевые функции достигают на границе трехмерной параметрической области изменения факторов. Построены диаграммы распределения давления, которые позволили определить для найденных оптимальных значений факторов зоны повышенного или пониженного давления.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, звуконепроходимая сфера, вычислительный эксперимент, метод ортогонального центрального композиционного планирования, полное сечение рассеяния, плоская волна, монополюсный источник излучения

Работа выполнена в рамках государственного задания 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Numerical analysis of wave scattering by a pair of soundproof spheres by orthogonal central compositional design method

E.Sh. Nasibullaeva✉

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: elvira@anrb.ru

In the paper, the analysis of wave scattering on a system of two soundproof spheres was carried out using the orthogonal central compositional design method. The main objectives of the work are to determine the main parameters, the change of which significantly affects on the whole system; to determine the variable parameter values of the system, at which the loss functions (the total scattering cross section and the normalized pressure at a fixed point) take the minimum and maximum values, and to study the system at optimal parameter values. The orthogonal compositional design method is implemented for a three-factor computational experiment, where three main parameters of the system were selected as factors: the wave radius, the ratio of the sphere radii, and the distance between the sphere centers. For the obtained regression equation, the significance of the coefficients was checked using Student's t -test and the adequacy of the model using Fisher's F -test. It was found that in the case of a spherical wave from a monopole radiation source, the nonlinear influence of the factors is more pronounced than in the case of a plane wave; normal pressure calculated at a fixed point is insensitive to changes in parameters in the case of a plane wave, as well as in the case of a monopole radiation source for small values of the sphere surface complex conductivity; the total scattering cross section is highly sensitive in the case of a system with ideally rigid spheres; the highest and lowest values of the loss functions are achieved at the boundary of the three-dimensional parametric region of factors changes. Pressure distribution diagrams were constructed, which made it possible to determine the zones of high or low pressure for the found optimal values of the factors.

Keywords: acoustic scattering, soundproof sphere, computational experiment, orthogonal central compositional design method, total scattering cross section, plane wave, monopole radiation source.

1. Введение

При исследовании задачи рассеяния акустической волны на множестве препятствий малых размеров особый интерес представляет изучение рассеяния волны на системе, состоящей из двух сфер. Связано это с тем, что, с одной стороны, в таких системах имеет место взаимодействие рассеянных от сферических частиц полей, а, с другой стороны, данное взаимодействие является достаточно простым для того чтобы его можно было подробно изучить. На сегодняшний день существует множество работ, посвященных данной тематике (см., например, [1–12]), с обзором которых можно подробно ознакомиться в работе [13].

В настоящей работе впервые проведен анализ рассеяния волны (плоской или сферической от монополярного источника излучения) на системе двух звуконепроходимых (волна не проходит через поверхность) сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования (ОЦКП) [14–18]. Данный метод реализуется для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов берутся один физический (волновой радиус) и два геометрических (отношение радиусов сфер и расстояние между центрами сфер) параметра системы. Основными целями работы являются: определение основных параметров, изменение которых существенным образом влияет на всю систему; определение значений варьируемых параметров системы, при которых искомые функции (полное сечение рассеяния и нормированное давление в фиксированной точке) принимают наименьшее и наибольшее значения, а также исследование системы при оптимальных значениях параметров.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим две звуконепроходимые сферы различных радиусов a_1 и a_2 , которые расположены в трехмерном пространстве, заполненном однородной средой с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . Без ограничения общности выберем общую систему декартовых координат так, чтобы ось z проходила через центры этих сфер, а начало располагалось в середине отрезка, соединяющего данные центры (см. рис. 1). Тогда декартовы координаты центров сфер будут равны $\mathbf{r}'_1 = (0, 0, \delta l)$ и $\mathbf{r}'_2 = (0, 0, -\delta l)$. Предполагается, что центры сфер неподвижны.

Будем рассматривать два вида внешнего воздействия:

- сферическая волна от монополярного источника излучения, расположенного в точке M_S с декартовыми координатами $(x_{M_S}, y_{M_S}, z_{M_S}) = (-d_{M_S}, 0, 0)$;
- плоская волна с нормальным вектором $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$ к

ее фронту, имеющим сферические координаты $(r_{PW}, \theta_{PW}, \varphi_{PW}) = (1, \pi/2, 0)$.

Математическая модель, описывающая рассеяние волны на паре звуконепроходимых сфер в случае осевой симметрии, приведена в работе [12]. В настоящей работе представим модель в общем случае, которая состоит из уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала $\psi(\mathbf{r})$ произвольной точки пространства M с радиус-вектором \mathbf{r} :

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0,$$

где k — волновое число, и граничных условий общего сопротивления на поверхностях S_1 и S_2 сфер в случае, когда волна не может пройти через эти поверхности:

$$\left. \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + i \sigma_v \psi \right) \right|_{S_v} = 0, \quad v = 1, 2,$$

где n — нормаль к поверхности; σ_v — комплексная полная проводимость для v -й сферы; i — мнимая единица. Отметим, что при $\sigma_v = 0$ имеет место случай идеально жесткой сферы, а при $\sigma_v \rightarrow \infty$ — идеально мягкой сферы.

Потенциал внешнего поля представляется в виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{in}(\mathbf{r}) + \psi_{scat}(\mathbf{r}) = \psi_{in}(\mathbf{r}) + \psi_{scat}^{(1)}(\mathbf{r}) + \psi_{scat}^{(2)}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{in}(\mathbf{r})$ — потенциал падающего поля; $\psi_{scat}(\mathbf{r})$ — потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда [19]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi_{scat}}{\partial r} - ik \psi_{scat} \right) = 0,$$

соответствующему затуханию уходящим на бесконечность волнам; $\psi_{scat}^{(v)}$ — потенциал, регулярный вне v -й сферы и также удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда. Отметим, что потенциал $\psi_{scat}^{(v)}$ вызывает изменения в поле рассеяния, вызванные v -й сферой, но с учетом влияния соседней сферы.

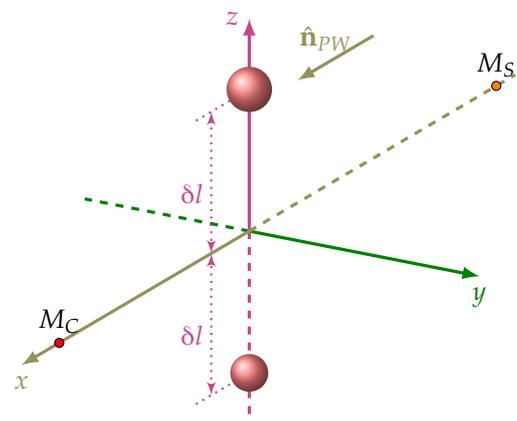


Рис. 1. Схема задачи

В случае монопольного источника излучения потенциал падающего поля определяется по формуле

$$\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|},$$

где V_0 — производительность монопольного источника излучения; \mathbf{r}_s — радиус-вектор точки M_s . В случае плоской волны имеет место следующая формула:

$$\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{p_0}{i\omega\rho_0} e^{i\mathbf{k}\hat{\mathbf{n}}_{pw}\cdot\mathbf{r}},$$

где p_0 — амплитуда плоской волны; $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота внешнего поля.

В соответствии с методом разложения по мультиполям [20] осуществляется переход к сферической системе координат, связанной с центром v -й сферы ($\mathbf{r} - \mathbf{r}'_v = \mathbf{r}_v = (r_v, \theta_v, \varphi_v)$), и потенциал поля рассеяния $\Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ представляется в следующем виде:

$$\Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_n^{(1)m} S_n^m(\mathbf{r}_1) + A_n^{(2)m} S_n^m(\mathbf{r}_2) \right).$$

Здесь $A_n^{(v)m}$ — коэффициенты разложения по мультиполям; $S_n^m(\mathbf{r}_v) = h_n(kr_v) Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ — мультиполь порядка n и степени m ; $h_n(kr)$ — сферические функции Ханкеля 1-го типа; $Y_n^m(\theta, \varphi)$ — ортогональные сферические гармоники [21]. Неизвестные коэффициенты $A_n^{(v)m}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая в общем случае записывается в следующем матричном виде [22]:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (1)$$

с матрицей и векторами в случае двух сфер определяемые как:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_{u_0}\} = \left(\{A_l^{(1)s}\}^T, \{A_l^{(2)s}\}^T \right)^T, \\ \mathbf{D} &= \{D_{t_0}\} = \left(\{D_n^{(1)m}\}^T, \{D_n^{(2)m}\}^T \right)^T = \\ &= \left(\{-B_n^{(1)} C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_1)\}^T, \{-B_n^{(2)} C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_2)\}^T \right)^T, \\ \mathbf{L} &= \{L_{u_0 t_0}\} = \begin{pmatrix} \{L_{u_1 t_1}^{(11)}\} & \{L_{u_1 t_1}^{(12)}\} \\ \{L_{u_1 t_1}^{(21)}\} & \{L_{u_1 t_1}^{(22)}\} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \{\delta_{u_1 t_1}\} & \{B_n^{(1)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{12})\} \\ \{B_n^{(2)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{21})\} & \{\delta_{u_1 t_1}\} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $B_l^{(w)} = \frac{kj'_n(ka) + i\sigma j_n(ka)}{kh'_n(ka) + i\sigma h_n(ka)}$; $u_0 = (v-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s)$; $t_0 = (w-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m)$; $u_1 = (l+1)^2 - (l-s)$; $t_1 = (n+1)^2 - (n-m)$; $l = 0, 1, \dots, n_{\text{tr}}$; $s = -l, \dots, l$; $n = 0, 1, \dots, n_{\text{tr}}$; $m = -n, \dots, n$; $v, w = 1, 2$. Здесь $j_n(kr)$ и $j'_n(kr)$ — сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [21]; $C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)$ —

коэффициенты разложения падающего поля Ψ_{in} около центра w -й сферы ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$); $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ — коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям [20]; \mathbf{r}'_{vw} — вектор с началом в центре v -й и концом в центре w -й сферы; $\delta_{u_1 t_1}$ — символ Кронекера; n_{tr} — число членов рядов после их усечения по l и n , которое необходимо проводить, поскольку при численной реализации система уравнений (1) должна быть конечной.

Поскольку давление p и потенциал Ψ связаны соотношением $p = i\omega\rho\Psi$, то значение $p(\mathbf{r}_c)$ в некоторой точке M_c с радиус-вектором \mathbf{r}_c может быть вычислено как

$$p_{M_c} \equiv p(\mathbf{r}_c) = i\omega\rho_0 \left(\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}_c) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_n^{(1)m} S_n^m(\mathbf{r}_1) + A_n^{(2)m} S_n^m(\mathbf{r}_2) \right) \right) \quad (2)$$

с коэффициентами $A_n^{(v)m}$, определяемыми из решения системы уравнений (1).

Основной характеристикой при исследовании задачи акустического рассеяния на препятствиях малых размеров является полное сечение рассеяния σ_s . Явная формула данной характеристики в случае двух сфер примет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\omega\rho_0}{2kI_0} \left(\sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n \left(|A_n^{(1)m}|^2 + |A_n^{(2)m}|^2 \right) + \right. \\ &+ \text{Re} \left(\sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{s=-l}^l (-1)^{n+m} i^{n+l} c^{(nmls)} \times \right. \\ &\quad \times \left(A_n^{(1)m} \left(A_l^{(2)s} \right)^* e^{i(m-s)\varphi_{12}} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{i_1=|n-l|}^{n+l} b_{i_1}^{(nmls)} i^{i_1} j_{i_1}(kr_{12}) P_{i_1}^{m-s}(\cos(\theta_{12})) + \\ &\quad \left. \left. + A_n^{(2)m} \left(A_l^{(1)s} \right)^* e^{i(m-s)\varphi_{21}} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{i_1=|n-l|}^{n+l} b_{i_1}^{(nmls)} i^{i_1} j_{i_1}(kr_{21}) P_{i_1}^{m-s}(\cos(\theta_{21})) \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где I_0 — интенсивность падающей волны; знак «*» в верхнем индексе обозначает сопряженную величину; $c^{(nmls)}$ — коэффициент, определяемый по формуле

$$c^{(nmls)} = (-1)^{(m-|m|+s-|s|)/2} \times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!}}$$

$b_{i_1}^{(nmls)}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, которые могут быть вычислены, например, по формулам, представленным в книге [24]; $(r_{vw}, \theta_{vw}, \varphi_{vw})$ — сферические координаты радиус-вектора \mathbf{r}_{vw} с началом в центре v -й и концом в центре w -й сферах; $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра [21].

3. Трехфакторный вычислительный эксперимент

Исследуем влияние одного геометрического (волновой радиус ka_1) и двух геометрических (отношение радиусов сфер a_2/a_1 и расстояния δl , характеризующее расстояние между центрами сфер) параметров системы. Для этого рассмотрим отклонение на 20 % данных параметров (факторов) от их фиксированных (средних) значений $(ka_1)_0$, $(a_2/a_1)_0$ и $(\delta l)_0$ соответственно. В этом случае малое отклонение от средних величин будет задаваться как $\delta_{\text{fix}} = 0.2$.

В рамках метода ОЦКП проведем трехфакторный вычислительный эксперимент ($n = 3$) с факторами $X_j = 1 \pm \delta_{\text{fix}}$ ($j = 1, 2, 3$), задающими отклонения величин от средних значений, в следующем виде:

$$ka = X_1(ka_1)_0; \quad a_2/a_1 = X_2(a_2/a_1)_0; \quad \delta l = X_3(\delta l)_0,$$

что позволяет свести их рассмотрение к одному диапазону $[X_{j,-1}, X_{j,+1}] = [0.8, 1.2]$ ($j = 1, 2, 3$), где $X_{j,-1}$ и $X_{j,+1}$ — нижний и верхний уровни j -го фактора.

Рассмотрим две функции отклика (целевые функции):

- Y_1 — полное сечение рассеяния для системы двух сфер, вычисленное с помощью формулы (3), т.е. $Y_1 \equiv \sigma_s$;
- Y_2 — нормированное давление в точке M_c (см. рис. 1), т.е. $Y_2 \equiv |p_{M_c}/p_{\text{in},M_c}|$, где p_{M_c} — давление, определяемое по формуле (2); p_{in,M_c} — давление падающего поля в точке M_c .

Первая целевая функция позволяет провести анализ чувствительности системы к малому изменению параметров в целом, а вторая — проанализировать изменение в одной определенной точке пространства.

Построим регрессионную модель (уравнение регрессии) второго порядка, которая записывается в виде следующего квадратичного полинома:

$$p(x_1, \dots, x_n) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7(x_1^2 - \beta) + b_8(x_2^2 - \beta) + b_9(x_3^2 - \beta), \quad (4)$$

где b_j ($j = 0, 1, \dots, 9$) — коэффициенты регрессии, определяемые после реализации плана соответствующего вычислительного эксперимента; $\beta = \sqrt{2^n/n_t}$ — параметр смещения.

Далее строится соответствующая матрица ОЦКП. В качестве примера в табл. 1 представлена расширенная матрица ОЦКП для монополюсного источника излучения, целевой функции Y_1 при значении комплексной полной проводимости $\sigma_v = 10k_0$:

- первый столбец u обозначает номер эксперимента (от 1 до n_t). Поскольку общее число опытов n_t состоит из $n_y = 2^n$ опытов на нижних и верхних

уровнях, $n_* = 2n$ опытов в так называемых «звездных» точках $x_j = \pm\alpha$ ($\alpha = \sqrt{(\sqrt{n_y n_t} - n_y)/2}$ — расстояние до центральной точки плана (так называемое звездное плечо), и одного опыта в центральной точке, в которой все кодированные значения $x_j = 0$, имеем $n_t = n_y + n_* + 1 = 15$;

- следующие 10 столбцов — кодированные значения фиктивного параметра $x_0 \equiv 1$, линейных слагаемых x_{j_1} , парных взаимодействий $x_{j_1}x_{j_2}$ и квадратичных слагаемых $x_{j_1}^2 - \beta$. Кодированное значение j -го фактора x_j определяется следующим выражением:

$$x_j = \frac{X_j - X_{j,c}}{X_{j,l}},$$

где $X_{j,c} = (X_{j,-1} + X_{j,+1})/2$ и $X_{j,l} = (X_{j,+1} - X_{j,-1})/2$ — центральное значение и интервал варьирования j -го фактора;

- 12-й столбец $Y_{1,u}$ — значения функции отклика Y_1 при решении полной модели в u -м вычислительном эксперименте;
- последний столбец добавлен для демонстрации относительной погрешности аппроксимации (4), выраженной в процентах, которая определяется следующим выражением:

$$\delta_{p,u} = \left| \frac{p_u(x_1, x_2, x_3) - Y_{1,u}(x_1, x_2, x_3)}{Y_{1,u}(x_1, x_2, x_3)} \right| \cdot 100\%.$$

Отметим, что столбцы со 2-го по 12-й составляют основную матрицу ОЦКП (см., например, [17]), однако расширенная матрица ОЦКП [25] является более информативной. В табл. 1 последние две строки приведены для удобства дальнейшего изложения: Σ_q — значения суммы квадратов элементов q -го столбца матрицы планирования; b_q — вычисленные коэффициенты регрессии.

Обозначим через x_{ju} значение кодированной переменной x_j ($j = 0, 1, 2, 3$) в u -м эксперименте. Тогда коэффициенты регрессии для ОЦКП определяются по следующей формуле:

$$b_q = \frac{\Sigma_{Y,q}}{\Sigma_q}, \quad (5)$$

где

$$\Sigma_{Y,q} = \begin{cases} \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1 u} Y_u & \text{при } q = j_1 \quad (j_1 = 0, 1, 2, 3); \\ \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1 u} x_{j_2 u} Y_u & \text{при } q = n + 1, \dots, n_q - n \\ & (j_1 = 1, \dots, n - 1, \quad j_2 = j_1 + 1, \dots, n); \\ \sum_{u=1}^{n_t} (x_{j_1 u}^2 - \beta) Y_u & \text{при } q = n_q - n + 1, \dots, n_q \\ & (j_1 = 1, \dots, n); \end{cases}$$

Таблица 1. Расширенная матрица ОЦКП при $n = 3$ для целевой функции Y_1 в случае монополюсного источника излучения и $\sigma_v = 10k_0$ при отклонении основных параметров на 20 %

u	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1^2-\beta$	$x_2^2-\beta$	$x_3^2-\beta$	$Y_{1,u}$	$\delta_{p,u}, \%$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0.27	0.27	0.27	5.415	0.064
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0.27	0.27	0.27	4.053	0.206
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	0.27	0.27	0.27	8.088	0.289
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	0.27	0.27	0.27	6.478	1.075
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0.27	0.27	0.27	3.856	2.169
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	0.27	0.27	0.27	3.882	0.242
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	0.27	0.27	0.27	5.794	0.385
8	1	1	1	1	1	1	1	0.27	0.27	0.27	5.41	0.194
9	1	-1.215	0	0	0	0	0	0.747	-0.73	-0.73	5.718	1.84
10	1	1.215	0	0	0	0	0	0.747	-0.73	-0.73	4.47	1.507
11	1	0	-1.215	0	0	0	0	-0.73	0.747	-0.73	3.706	1.43
12	1	0	1.215	0	0	0	0	-0.73	0.747	-0.73	6.215	0.244
13	1	0	0	-1.215	0	0	0	-0.73	-0.73	0.747	5.99	0.771
14	1	0	0	1.215	0	0	0	-0.73	-0.73	0.747	4.621	1.819
15	1	0	0	0	0	0	0	-0.73	-0.73	-0.73	4.774	1.207
Σ_q	15	10.954	10.954	10.954	8	8	8	4.364	4.364	4.364		
b_q	5.231	-0.442	1.06	-0.617	-0.082	0.327	-0.204	0.165	0.075	0.308		

$$\Sigma_q = \begin{cases} \sum_{u=1}^{n_t} x_{0u} = n_t & \text{при } q = 0; \\ \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1u} = n_y + 2\alpha^2 & \text{при } q = 1, \dots, n; \\ \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1u}x_{j_2u} = n_y & \text{при } q = n + 1, \dots, n_q - n; \\ \sum_{u=1}^{n_t} (x_{j_1u}^2 - \beta) = n_y(1-\beta)^2 + 2(\alpha^2 - \beta)^2 + (2n-1)\beta^2 & \text{при } q = n_q - n + 1, \dots, n_q. \end{cases}$$

где

$$s_{ад}^2 = \frac{1}{n_t - (n_q + 1)} \sum_{u=1}^{n_t} (Y_u - p_u)^2;$$

$$s_{ср}^2 = \frac{1}{n_t - 1} \sum_{u=1}^{n_t} (Y_u - \bar{Y})^2, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_t} \sum_{u=1}^{n_t} Y_u.$$

Значение F , полученное в (6), сравнивается с табличным критическим значением $F_{кр,\alpha_F}(f_1, f_2)$ для чисел степеней свободы $f_1 = n_t - 1$ и $f_2 = n_t - (n_q + 1)$ и необходимого уровня значимости α_F (см., например, [14, 27]). Модель является адекватной, если

$$F > F_{кр,\alpha_F}(f_1, f_2).$$

При этом, чем больше полученное значение F , тем более эффективно уравнение регрессии (4). В настоящей работе применяется 5 % уровень значимости ($\alpha_F = 5 \%$), тогда $F_{кр,\alpha_F}(14, 5) = 2.96$.

5. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Если модель является адекватной, то проводится проверка значимости коэффициентов построенного уравнения регрессии (4). При вычислительном эксперименте в результате проведения одних и тех же опытов (расчетов при одних и тех же значениях параметров) получается тот же результат в отличие от натуральных испытаний, поэтому для проверки значимости коэффициентов регрессии в настоящей работе применяется t -критерий Стьюдента [27, 28]. Для этого определяется среднеквадратичное отклонение полинома p от расчетных данных y , полученных в опытных точках u :

Значения коэффициентов b_q позволяют определить степень влияния факторов: чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние оказывает соответствующий данному коэффициенту фактор. При этом, если $b_q > 0$, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если $b_q < 0$ — уменьшается. Так, в примере, представленном в табл. 1, видно, что параметр оптимизации уменьшается благодаря линейным воздействиям 1-го и 3-го факторов ($b_1 < 0$ и $b_3 < 0$), а также взаимодействию второго фактора с остальными ($b_4 < 0$ и $b_6 < 0$).

4. Проверка адекватности модели регрессии

После построения уравнения регрессии (4) необходимо провести проверку его адекватности. В случае вычислительного эксперимента, когда нет данных для расчета дисперсии воспроизводимости и основная серия опытов проводится без параллельных, применяется модификация F -критерий Фишера [26], заключающаяся в сравнении дисперсии адекватности $s_{ад}^2$ и дисперсии относительно среднего $s_{ср}^2$ с помощью формулы:

$$F = \frac{s_{ср}^2}{s_{ад}^2}, \tag{6}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{n_t} |p_u - Y_u|^2}{n_t}}. \tag{7}$$

Далее вычисляются оценки дисперсий коэффициентов квадратичной модели по следующей формуле:

$$\sigma_{b_q} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\sum q}}, \quad q = 0, 1, \dots, n_q.$$

По известной таблице распределения Стьюдента (см., например, [27, 28]) определяется критическое значение $t_{кр, \alpha_t}(f_1) = t_{табл}$ исходя из числа степеней свободы f_t и принятого уровня значимости α_t и вычисляются критические величины

$$b_{кр, q} = t_{кр, \alpha_t}(f_t) \sigma_{b_q}$$

для четырех типов коэффициентов b_q . Если

$$b_{кр, q} \leq |b_q|, \tag{8}$$

то коэффициент b_q считается значимым, в противном случае, он признается незначимым и исключается из уравнения регрессии (4). В настоящей работе $\alpha_t = 5\%$ и $t_{кр, \alpha_t}(14) = 2.14$.

6. Поиск оптимальных значений параметров системы

В случае когда проверка показала адекватность модели, уравнение регрессии (4), полученное методом ОЦКП, можно исследовать любыми аналитическими методами, позволяющими определить оптимальное значение квадратичного полинома p , а, следовательно, и целевой функции Y в зависимости от поставленных целей задачи (например, определение наибольшего или наименьшего значения, нахождение точек локального максимума или минимума в исследуемой области и пр.).

В настоящей работе определяются наибольшее и наименьшее значения функций отклика. Для этого последовательно определим все точки, подозрительные на экстремум:

- внутри области. Для этого, поскольку $n = 3$, исследуется функция трех переменных внутри трехмерной области $[-1, 1]^3$;
- на границах области $[-1, 1]^3$, когда одна из кодированных переменных фиксирована и принимает граничные значения $x_j = \pm 1$ ($j = 1, 2, 3$), а остальные две меняются на отрезке $[-1, 1]$, т.е. исследуются функции двух переменных внутри двумерных областей $[-1, 1]^2$;
- на границах областей $[-1, 1]^2$, когда две кодированные переменные фиксированы и принимают граничные значения $x_{j_1}, x_{j_2} = \pm 1$ ($j_1 \neq j_2 = 1, 2, 3$), а третья меняется на отрезке $[-1, 1]$, т.е. исследуются функции одной переменной.

С помощью уравнения регрессии (4) вычисляются значения полинома p_j ($j = 1, 2$) в найденных точках. К данному множеству значений p_j присоединяется множество значений $Y_{j,u}$, полученных ранее в результате

вычислительного эксперимента для $j = 1, 2$ и $u = 1, \dots, 8$. Максимальное и минимальное значения всех элементов данного множества дает наибольшее $Y_{j,max}$ (соответствующий набор кодированных параметров обозначим как $\bar{x}_{j,max} = (x_{j,1}^{(max)}, x_{j,2}^{(max)}, x_{j,3}^{(max)})$) и наименьшее $Y_{j,min}$ (набор кодированных параметров — $\bar{x}_{j,min} = (x_{j,1}^{(min)}, x_{j,2}^{(min)}, x_{j,3}^{(min)})$) значения для целевой функций Y_j .

Далее диапазон изменения значений функции Y_j ($j = 1, 2$) представляется в виде $[Y_{j,min}, Y_{j,max}] \equiv Y_{j,cp} \pm \delta Y_j$, где $Y_{j,cp}$ — среднее значение функции Y_j . Если $\delta Y_j \leq \delta_{fix}$, то делается вывод, что целевая функция Y_j нечувствительна, а при $\delta Y_j > \delta_{fix}$ — чувствительна к изменению параметров. При этом, чем выше δY_j , тем больше степень влияния параметров на всю систему.

7. Результаты численного анализа

Вычислительные эксперименты проводились для средних значений волнового радиуса $(ka_1)_0 = 1$, отношения радиусов $(a_2/a_1)_0 = 1$ (при расчетах значение a_1 было фиксировано, менялось только значение a_2), расстояния $(\delta l)_0 = 3a_1$. В случае монополюсного источника излучения $d_{Ms} = 10a_1$. Для функции отклика Y_2 нормированное давление определялось в точке M_c , симметричной точке M_s относительно плоскости Oyz , т.е. за системой сфер в точке $M_c = (d_{Ms}, 0, 0)$. Исследовались случаи сфер с четырьмя различными значениями комплексной полной проводимости $\sigma_v = 0, k_0, 10k_0, 100k_0$ ($\sigma \equiv \sigma_1 = \sigma_2$). Для численной реализации метода ОЦКП разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64). Программная реализация техники разложения по мультиполям, необходимая для решения системы уравнений (1), представлена в работе [22].

При выборе числа усечения рядов при разложении n_{tr} применялся подход [29], при котором сравниваются два последовательных значения суммы искомого ряда Σ при $n = n_i$ и n_{i+1} , и, как только их относительная погрешность

$$\delta = \left| \frac{\Sigma_{n_i} - \Sigma_{n_{i+1}}}{\Sigma_{n_i}} \right| \cdot 100\%$$

становится меньше δ_0 , дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение $n_{tr} = n_i$. В настоящей работе принималось $\delta_0 = 1\%$, тогда в случае монополюсного источника имеем $n_{tr} = 10$, а для плоской волны — $n_{tr} = 9$.

Результаты, полученные с помощью представленной численной техники для различных значений σ , приведены в табл. 2 для случая монополюсного источника излучения, а в табл. 3 — для плоской волны. Данные таблицы содержат коэффициенты полинома (4), для которых не выполняется условие (8), значения числа Фишера F , полученные по формуле (6), среднеквадратичные отклонения полинома от расчетных данных σ_Y (7), наборы кодированных параметров \bar{x}_{min} и \bar{x}_{max} , в которых целевая функция Y достигает наименьшего и наибольшего значений, диапазон значений целевой функции

Таблица 2. Результаты вычислительного эксперимента для монополюсного источника излучения при $d_{M_5} = 10a_1$

σ	j	$b_q < b_{кр,q}$	F	σ_{Y_j}	$\bar{x}_{j,min}$	$\bar{x}_{j,max}$	$Y_{j,ср} \pm \delta Y_j$	$\delta Y_j, \%$
0	1	b_7, b_9	228.724	0.012	(-1, -1, -1)	(1, 1, 1)	0.725 ± 0.526	72.574
	2	b_8, b_9	31.16	0.003	(1, 1, 1)	(-0.12, -1, -1)	0.956 ± 0.054	5.617
k_0	1	$b_5 - b_7, b_9$	96.283	0.021	(1, -1, 1)	(-1, 1, -1)	1.626 ± 0.509	31.312
	2	$b_4, b_6 - b_8$	29.178	0.005	(1, 1, 0.438)	(-1, -1, -1)	0.772 ± 0.083	10.713
$10k_0$	1	b_8	164.836	0.054	(0.903, -1, 0.191)	(-1, 1, -1)	5.866 ± 2.222	37.878
	2	$b_1, b_4, b_6 - b_8$	21.969	0.013	(1, 1, -1)	(1, -1, 1)	0.583 ± 0.183	31.3
$100k_0$	1	b_4, b_8	124.762	0.078	(0.428, -1, 0.386)	(-1, 1, -1)	6.989 ± 2.756	39.437
	2	$b_4, b_6 - b_9$	20.971	0.016	(1, 1, -1)	(1, -1, 1)	0.58 ± 0.215	37.121

Таблица 3. Результаты вычислительного эксперимента для плоской волны при $\theta_{PW} = \pi/2, \varphi_{PW} = 0$

σ	j	$b_q < b_{кр,q}$	F	σ_{Y_j}	$\bar{x}_{j,min}$	$\bar{x}_{j,max}$	$Y_{j,ср} \pm \delta Y_j$	$\delta Y_j, \%$
0	1	$b_3 - b_9$	9.218	0.063	(-1, -1, 1)	(1, 1, -0.369)	0.725 ± 0.525	72.364
	2	$b_2 - b_6, b_8, b_9$	2.823	0.011	(-0.263, 1, 0.564)	(1, 1, -1)	1.015 ± 0.052	5.103
k_0	1	b_3, b_5, b_6, b_8, b_9	208.49	0.015	(1, -1, 0.773)	(-1, 1, 0.751)	1.752 ± 0.521	29.741
	2	$b_2 - b_4, b_6, b_8$	18.294	0.006	(0.059, 0.957, 0.227)	(1, 1, -1)	0.98 ± 0.055	5.635
$10k_0$	1	b_4, b_6, b_7, b_9	47.6	0.067	(1, -1, -1)	(-1, 1, 1)	5.116 ± 1.285	25.122
	2	b_1, b_3, b_4, b_6, b_8	36.45	0.007	(0.026, 1, 0.118)	(1, -1, -1)	0.947 ± 0.087	9.21
$100k_0$	1	$b_4 - b_9$	30.002	0.093	(1, -1, -1)	(-1, 1, 1)	5.888 ± 1.338	22.75
	2	b_1, b_3, b_4, b_6, b_8	32.428	0.008	(0.009, 1, 0.143)	(1, -1, -1)	0.944 ± 0.098	10.411

$[Y_{min}, Y_{max}]$, представленный в виде $Y_{ср} \pm \delta Y$, и отклонение от среднего значения $\delta Y, \% = \delta Y / Y_{ср} \cdot 100\%$, выраженное в процентах.

На рис. 2–5 приведены зависимости целевых функций от факторов в случае когда один из них изменяется, а два остальных имеют фиксированное значение в центральной точке, для разных значений величины σ при воздействии сферической волны от монополюсного источника излучения (рис. 2, 3) или плоской волны (рис. 4, 5). Представлены результаты расчета полинома (4) (толстые линии) с коэффициентами, вычисленными методом ОЦКП по формуле (5), и данные вычислительного эксперимента (символы), определенные для Y_1 по формуле (3) (рис. 2, 4), а для Y_2 — по формуле (2) (рис. 3, 5).

Анализ результатов, представленных в табл. 2 и 3, позволяют сделать следующие выводы:

1. Регрессионная модель (4) является адекватной во всех случаях кроме случая плоской волны при $\sigma = 0$ для целевой функции Y_2 . На рис. 2–5 наглядно видно, что уменьшение значения F ведет к росту различий между уравнением регрессии и расчетными данными по полной модели. Случай, когда модель является неадекватной по F -критерию Фишера, представлен на рис. 5(a). Отметим, что во всех рассмотренных случаях среднее квадратичное отклонение полинома от расчетных данных является небольшим — $\sigma_Y < 0.093$.
2. В случае монополюсного источника излучения построенный полином (4) содержит большее число значимых коэффициентов, чем в случае плоской волны. Кроме того, степень влияния факторов в данном случае также выше. Следовательно, наибольшее влияние факторов имеет место в случае воздействия сферической волны от монополюсного

источника излучения. Причем, поскольку плоскую волну можно рассматривать как предельный случай сферической волны при удалении монополюсного источника излучения от системы, то степень данного влияния будет уменьшаться при $d_{M_5} \rightarrow \infty$. Отметим также, что в случае, когда коэффициенты при нелинейных слагаемых являются незначимыми, соответствующая кривая для данного фактора имеет линейный вид.

3. При отклонении основных параметров на 20 % отклонение целевых функций $\delta Y_j, \% < 20\%$ ($j = 1, 2$), когда система является нечувствительной к изменению параметров, имеет место для функции Y_2 при $\sigma = 0$ и $\sigma = k_0$ в случае монополюсного источника излучения и для всех рассмотренных σ в случае плоской волны. При этом функция полного сечения рассеяния (Y_1) является наиболее чувствительной при $\sigma = 0$, т.е. в случае системы с идеально жесткими сферами; для монополюсного источника при $\sigma = k_0$ чувствительность системы падает, но при дальнейшем росте σ начинает расти, а для плоской волны наблюдается падение чувствительности системы с ростом значения σ .
4. Наименьшее значение целевая функция Y_2 внутри трехмерной параметрической области достигает только в случае $\sigma = k_0$. Во всех остальных случаях обе целевые функции достигают наименьшее и наибольшее значения на границе данной области.

Следует заметить, что на рис. 2–5 видно, что с увеличением значения σ кривые стремятся к кривым, построенным для случая идеально мягких сфер, которые изображены тонкими пунктирными линиями на рис. 2(z)–5(z).

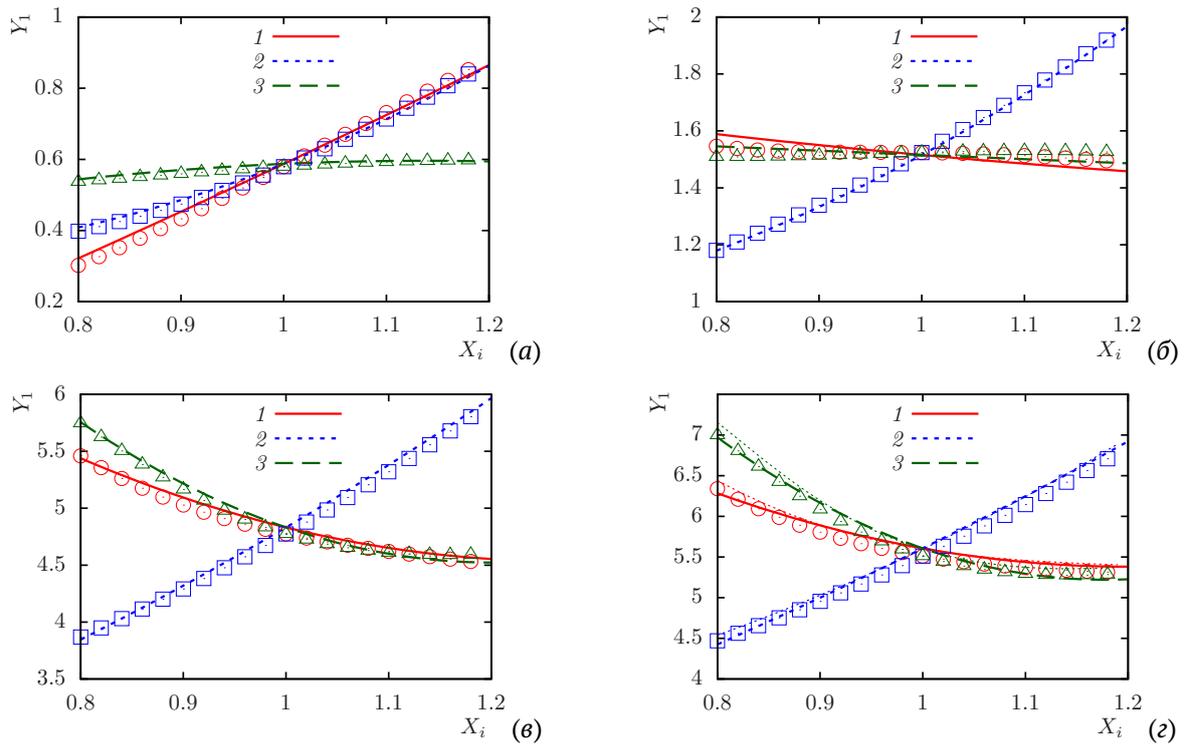


Рис. 2. Зависимость функции Y_1 от факторов X_i в случае монополюсного источника излучения для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

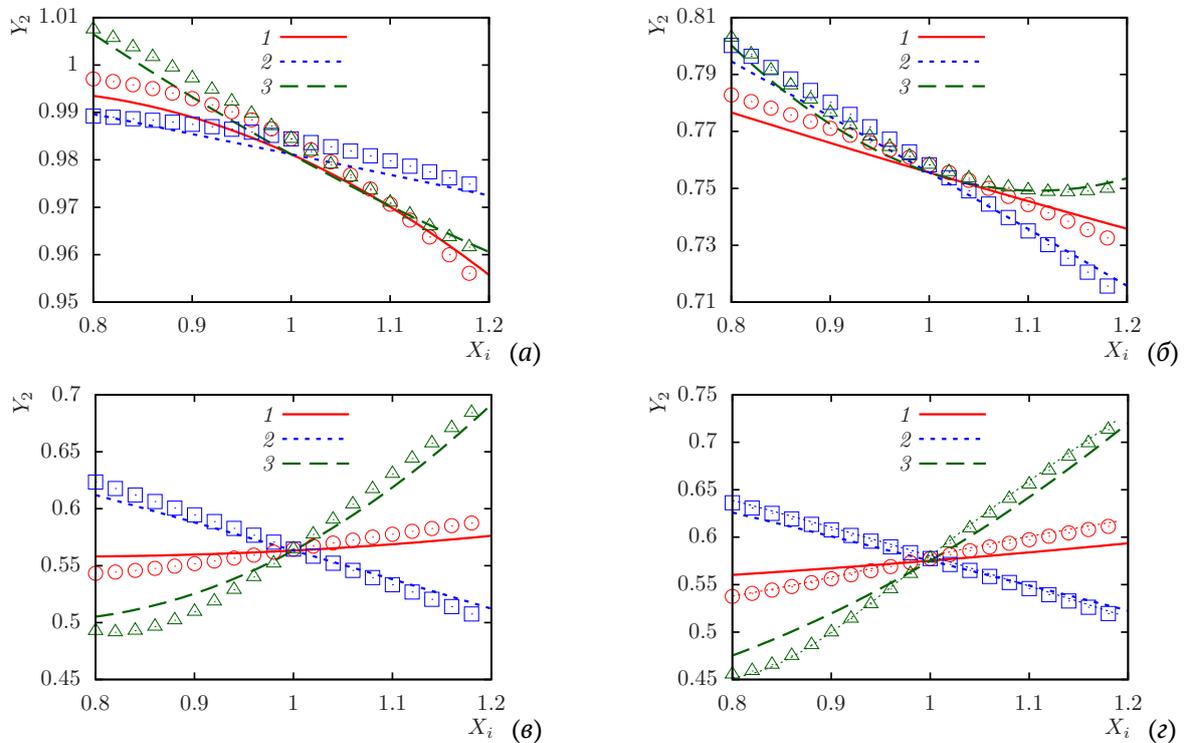


Рис. 3. Зависимость функции Y_2 от факторов X_i в случае монополюсного источника излучения для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

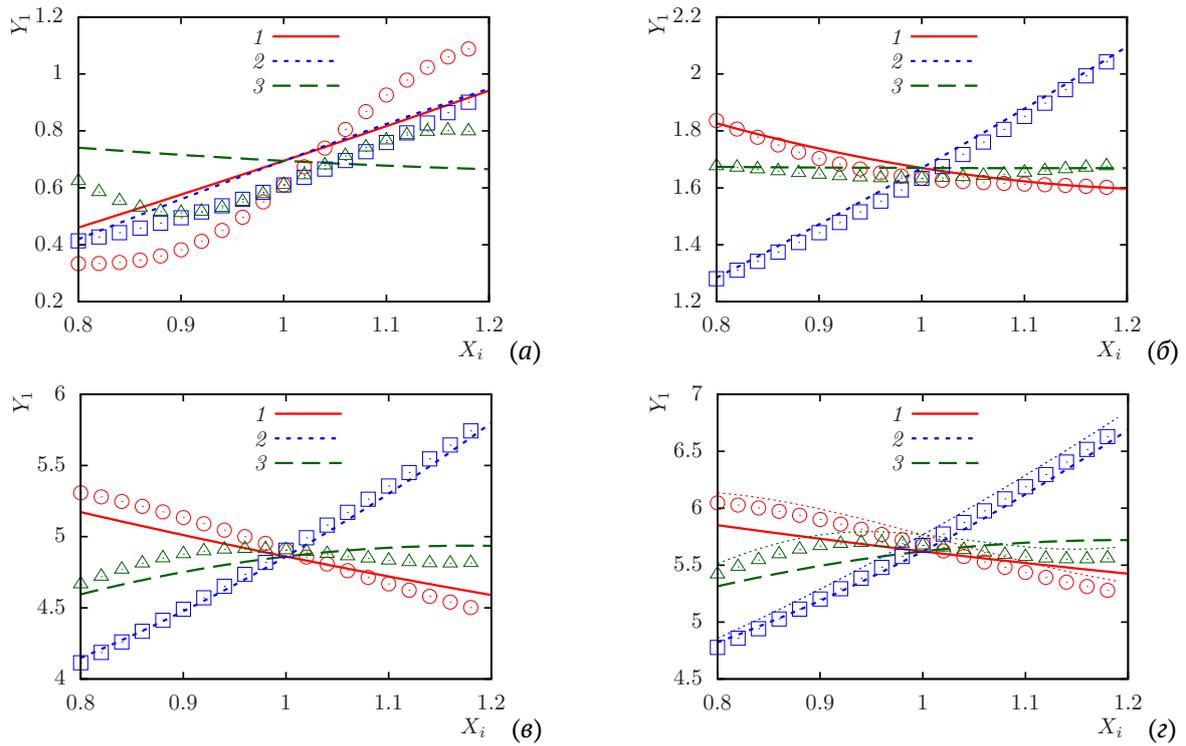


Рис. 4. Зависимость функции Y_1 от факторов X_i в случае плоской волны для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

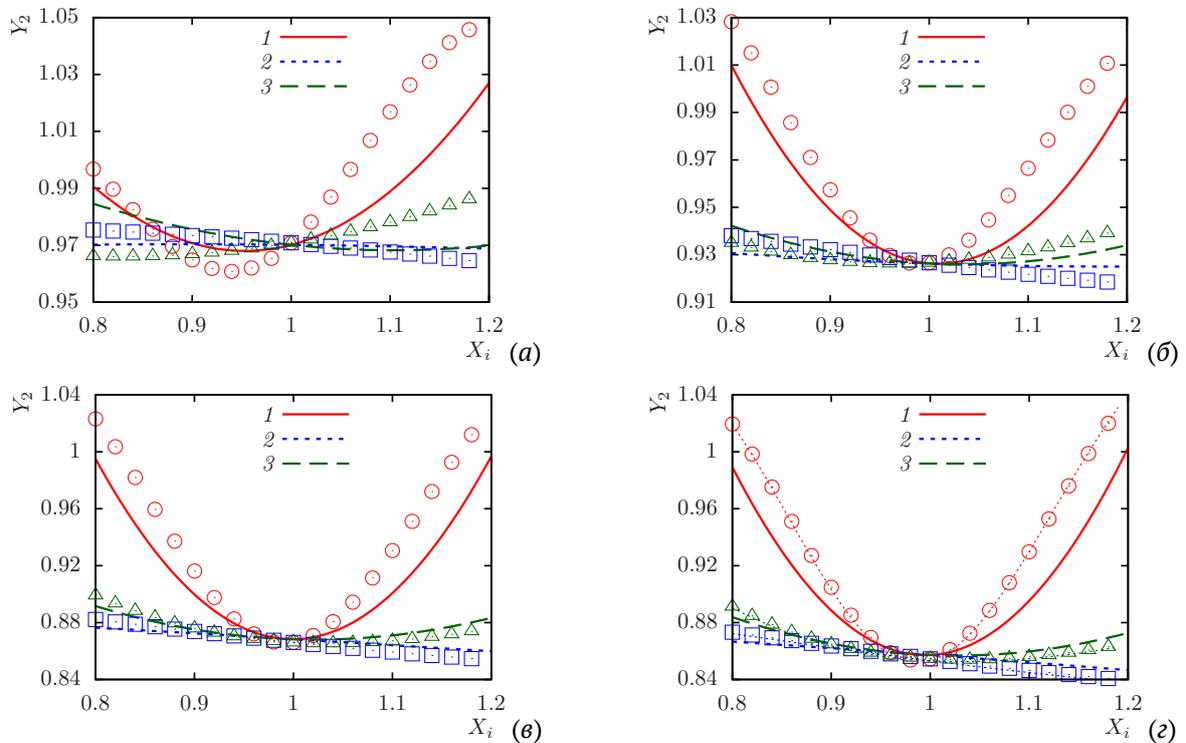


Рис. 5. Зависимость функции Y_2 от факторов X_i в случае плоской волны для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

На рис. 6 и 7 представлены диаграммы распределения нормированного давления p/p_{in} в плоскости $y = 0$ при наборе кодированных параметров, соответствующих найденным минимальному $\bar{x}_{1,min}$ и максимальному $\bar{x}_{1,max}$ значениям целевой функции Y_1 , определяющей полное сечение рассеяния системы, при $\sigma = 0, k_0, 100k_0$ в случае монополюсного источника излучения и плоской волны соответственно.

Видно, что в случае идеально жестких сфер ($\sigma = 0$) зоны наибольшего повышения давления наблюдаются перед сферами, т.е. волна практически полностью отражается от сфер в случае минимального значения полного сечения рассеяния, либо незначительно пропускает волну в случае максимального значения данной характеристики. В остальных случаях зоны повышения давления наблюдаются в области между сферами (вдоль оси x), а при максимальном значении полного сечения рассеяния σ_s за системой сфер видна также область сильного понижения давления. При $\sigma > 0$ также видно, что при минимальном значении σ_s система сфер лучше пропускает волну, чем при максимальном значении.

8. Заключение

Проведен численный анализ рассеяния волны на системе, состоящей из двух звуконепропускаемых сфер с различной комплексной полной проводимостью их поверхности. Для этого метод ОЦКП реализован для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов были выбраны три основных параметра системы: волновой радиус, отношение радиусов сфер и характерное расстояние между центрами сфер. Для полученного уравнения регрессии проведены проверки значимости коэффициентов с помощью t -критерия Стьюдента и адекватности модели с помощью F -критерия Фишера. Найдены параметры, при которых целевые функции (полное сечение рассеяния и нормированное давление в определенной точке пространства) достигают наибольшего и наименьшего значений.

В результате применения представленной численной методики были получены следующие результаты. В случае воздействия сферической волны от монополюсного источника излучения нелинейное влияние факторов более выражено, чем в случае плоской волны. Целевая функция, характеризующая нормальное давление в точке, является нечувствительной к изменению параметров в случае воздействия плоской волны, а также в случае монополюсного источника излучения для малых величин комплексной проводимости σ . Целевая функция, характеризующая полное сечение рассеяния, является сильно чувствительной в случае системы с идеально жесткими сферами. Практически во всех случаях наибольшее и наименьшее значения целевые функции достигают на границе трехмерной параметрической области изменения факторов.

Диаграммы распределения давления, построенные для найденных оптимальных значений факторов, позволили выявить зоны повышенного или пониженного давления. Отметим, что за сферами наблюдаются зоны,

где давление близко по значению к давлению падающей волны. Аналогичная картина имеет место в случае одиночной сферы, где появляется так называемое пятно Пуассона [30] (освещение теневой зоны за сферой). Причем для системы двух сфер такие зоны имеют место как в случае плоской волны, так и для сферической волны от монополюсного источника излучения. Однако наложение волн приводит к тому, что за сферами может появиться также зона резкого падения давления, как хорошо видно, например, на рис. 6(б), (в) при наибольшем значении целевой функции.

В дальнейшем планируется проведение исследований для случая звукопроницаемых сфер, поскольку результаты, полученные в настоящей работе, показали, что значение комплексной полной проводимости сильно меняет общую картину, особенно значительно различие в предельных случаях идеально жестких и мягких сфер, к которым близки случаи звукопроницаемых сфер, а именно, капель жидкости в газе и газовых пузырьков в жидкости (вне резонансной области).

Список литературы / References

- [1] Embleton TFW. Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field. *J. Acoust. Soc. Am.* 1962;**34**(11):1714–1720. DOI: 10.1121/1.1909104
- [2] Марневская ЛА. К дифракции плоской скалярной волны на двух сферах. *Акустический журнал*. 1968;**14**(3):427–434. Marnevskaia LA. On diffraction of a plane scalar wave on two spheres. *Akusticheskij Zhurnal*. 1968;**14**(3):427–434 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1968_3_427-434.pdf
- [3] Марневская ЛА. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах. *Акустический журнал*. 1969;**15**(4):579–583. Marnevskaia LA. To scattering of a plane wave on two acoustic rigid spheres. *Akusticheskij Zhurnal*. 1969;**15**(4):579–583 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf
- [4] Bruning JH, Lo YT. *Multiple scattering by spheres*. UIUC EM Lab Technical Report, Illinois; 1969. 169 p. https://wccchew.ece.illinois.edu/chew/Efficient_Addition_Theorem/BL_MSUR.pdf
- [5] New R, Eisler TJ. Acoustic radiation from multiple spheres. *Journal of Sound and Vibration*. 1972;**22**(1):1–17. DOI: 10.1016/0022-460x(72)90839-5
- [6] Peterson B, Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.* 1974;**56**(3):771–780. DOI: 10.1121/1.1903325
- [7] Gaunaurd GC, Huang H, Strifors H. Acoustic scattering by a pair of spheres. *J. Acoust. Soc. Am.* 1995;**98**(1):495–507. DOI: 10.1121/1.414447
- [8] Лебедев АВ, Хилько АИ. Интегральный поперечный рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах. *Акустический журнал*. 1997;**43**(5):661–667. Lebedev AV, Hil'ko AI. The Integral Scattering Cross-Section of a Plane Acoustic Wave from Two Dose Impedance Spheres. *Akusticheskij Zhurnal*. 1997;**43**(5):661–667 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf
- [9] Gabrielli P, Mercier-Finidori M. Acoustic Scattering By Two Spheres: Multiple Scattering And Symmetry Considerations. *Journal of Sound and Vibration*. 2001;**241**(3):423–439. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3309
- [10] Шарфарец БП. Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде. *Акустический журнал*. 2005;**51**(5):672–681. EDN: HRYEMF Sharfarets BP. Method for solving the problems of multiple scattering by several bodies in a homogeneous unbounded medium. *Acoustical Physics*. 2005;**51**(5):578–586. DOI: 10.1134/1.2042578

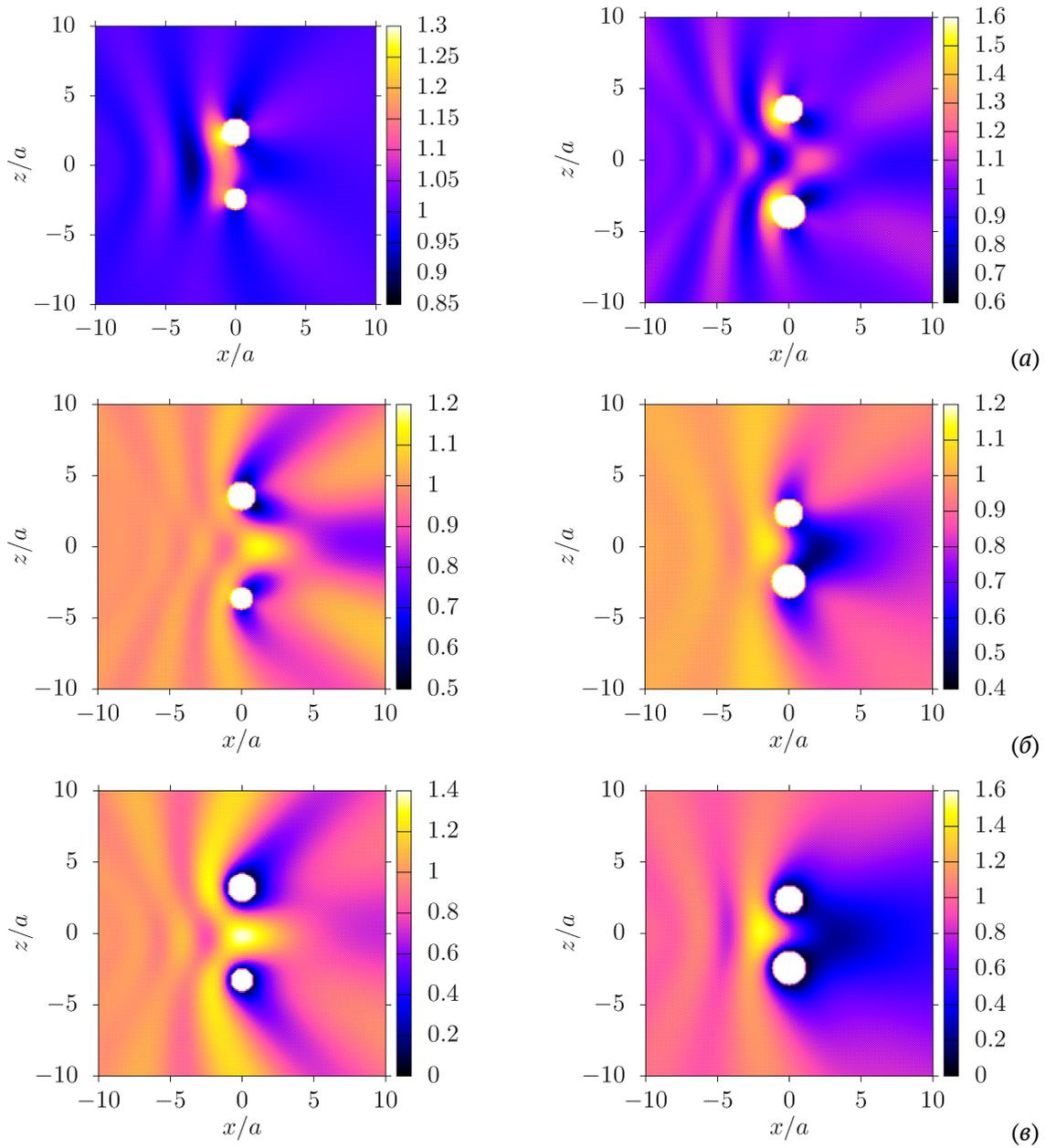


Рис. 6. Диаграмма распределения нормированного давления p/p_{in} в плоскости $y = 0$ в случае монополюсного источника излучения при $\bar{x}_{1,min}$ (слева) и $\bar{x}_{1,max}$ (справа), представленным в табл. 2: $\sigma = 0$ (a); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 100k_0$ (в)

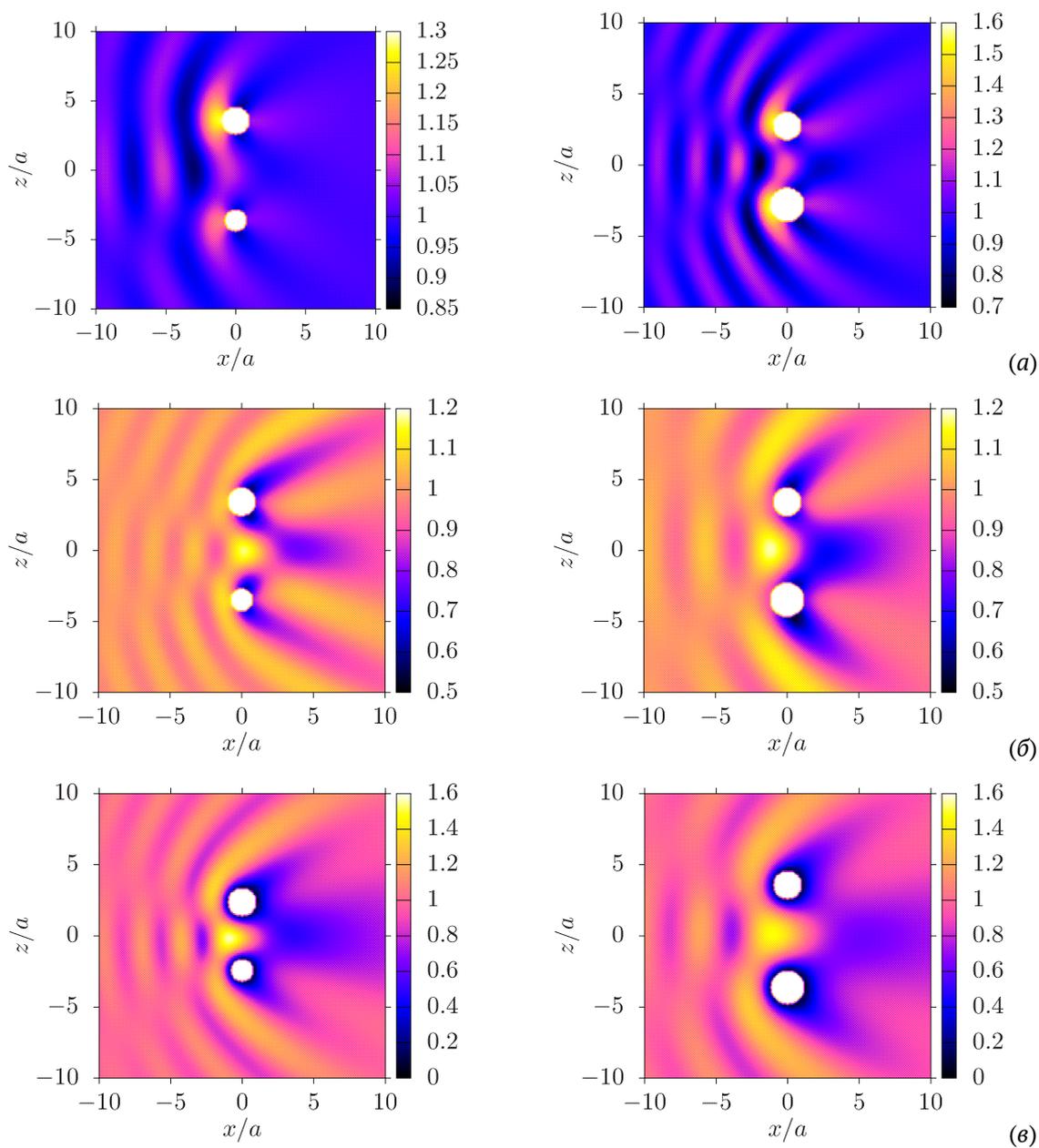


Рис. 7. Диаграмма распределения нормированного давления p/p_{in} в плоскости $y = 0$ в случае плоской волны при $\bar{x}_{1,min}$ (слева) и $\bar{x}_{1,max}$ (справа), представленным в табл. 3: $\sigma = 0$ (a); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 100k_0$ (e)

- [11] Румелиотис ДА, Котсис АД. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус. *Акустический журнал*. 2007;**53**(1):38–49.
EDN: HYPYTW
Roumeliotis JA, Kotsis AD. Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius. *Acoustical Physics*. 2007;**53**(1):33–43.
DOI: [10.1134/S1063771007010046](https://doi.org/10.1134/S1063771007010046)
- [12] Насибуллаева ЭШ. Исследование акустического рассеяния от пары звуконепропускаемых сфер при внешнем воздействии. *Многофазные системы*. 2019;**14**(1):44–51.
Nasibullaeva ESh. Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence. *Multiphase Systems*. 2019;**14**(1):44–51 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2019.1.006](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.006)
- [13] Насибуллаева ЭШ. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор). *Многофазные системы*. 2021;**16**(3–4):88–104.
Nasibullaeva ESh. Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review). *Multiphase Systems*. 2021;**16**(3–4):88–104 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2021.3.013](https://doi.org/10.21662/mfs2021.3.013)
- [14] Володарский ЕТ, Малиновский БН, Туз ЮМ. *Планирование и организация измерительного эксперимента*. Киев: Высшая школа; 1987. 280 с.
Volodarsky ET, Malinovsky BN, Tuz YuM. *Designing and Organizing of a Measurement Experiment*. Kiev: Vysshaya shkola; 1987. 280 p. (in Russian).
- [15] Петков АА. *Ортогональное центральное композиционное планирование в технике и электрофизике высоких напряжений: учеб.-метод. пособие*. Харьков: НТУ «ХПИ»; 2007. 61 с.
Petkov AA. *Orthogonal Central Compositional Designing in Technology and High Voltage Electrophysics: Educational and Methodological Manual*. Kharkov: NTU «KhPI»; 2007. 61 p. (in Russian).
- [16] Реброва ИА. *Планирование эксперимента: учеб. пособие*. Омск: СибАДИ; 2010. 105 с.
Rebrova IA. *Designing an Experiment: Tutorial*. Omsk: SibADI; 2010. 105 p. (in Russian).
- [17] Казаков АВ. *Планирование эксперимента и измерение физических величин: учеб. пособие*. Пермь: Изд-во Перм. нац. иссл. политехн. ун-та; 2014. 89 с.
Kazakov A.V. *Designing an Experiment and Measuring Physical Quantities: Tutorial*. Perm: Izdatel'stvo Permskogo natsional'nogo issledel'skogo politekhnicheskogo universiteta; 2014. 89 p. (in Russian).
- [18] Oyejola BA, Nwanya JC. Selecting the Right Central Composite Design. *International Journal of Statistics and Applications*. 2015;**5**(1):21–30.
<http://article.sapub.org/10.5923.jstatistics.20150501.04.html>
- [19] Владимиров ВС. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука; 1981. 512 с.
Vladimirov VS. *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcell Dekker Incorporated; 1971. 427 p.
- [20] Gumerov NA, Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. *J. Acoust. Soc. Am*. 2002;**112**(6):2688–2701.
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [21] Корн Г, Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука; 1974. 832 с.
Korn GA, Korn ThM. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York: McGraw Hill Book Company; 1968. 943 p.
- [22] Насибуллаева ЭШ. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопропускаемых сфер в трехмерном пространстве. *Вычислительные технологии*. 2022;**27**(2):19–36.
Nasibullaeva ESh. Simulation of Acoustic Scattering from a Set of Sound-permeable Spheres in 3D Space. *Computational Technologies*. 2022;**27**(2):19–36. (in Russian).
DOI: [10.25743/ICT.2022.27.2.003](https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003)
- [23] Насибуллаева ЭШ. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопропускаемых сфер в трехмерном пространстве. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022;**15**(4):383–398.
Nasibullaeva ESh. Numerical Analysis of Multiple Scattering of an Acoustic Wave on a Set of Sound-permeable Spheres in 3D Space. *Computational Continuum Mechanics*. 2022;**15**(4):383–398 (in Russian).
DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.4.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.4.29)
- [24] Иванов ЕА. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах*. Минск: Наука и техника; 1968. 584 с.
Ivanov YeF. *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*. Washington: National Aeronautics and Space Administration; 1970. 597 p.
- [25] Насибуллаев ИШ. Использование свободных программ для обработки и визуализации результатов научных исследований. *Многофазные системы*. 2021;**16**(2):58–71.
Nasibullaev ISh. Application of Free Software for Processing and Visualization of Scientific Research Results. *Multiphase Systems*. 2021;**16**(2):58–71 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2021.2.009](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.009)
- [26] Блохин АВ. *Теория эксперимента. Курс лекций. В 2х частях. Часть 2*. Минск: Белорусский государственный университет; 2002. 67 с.
Blokhin AV. *Theory of experiment. Lecture course. In 2 parts. Part 2*. Minsk: Belarusian State University; 2002. 67 p. (in Russian)
- [27] Дюерфель К. *Статистика в аналитической химии*. Москва: Мир; 1969. 247 с.
Doerffel K. *Statistik in der analytischen Chemie*. Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie; 1966. 211 p. (in Deutsch)
- [28] Адлер ЮП, Маркова ЕВ, Грановский ЮВ. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий*. Москва: Наука; 1976. 254 с.
Adler UP, Markova EV, Granovskiy UV. *Experiment design with selecting the optimal conditions*. Moscow: Nauka; 1976. 280 p. (in Russian)
- [29] Duda RO, Martens WL. Range dependence of the response of a spherical head model. *J. Acoust. Soc. Am*. 1998;**104**(5):3048–3058.
DOI: [10.1121/1.423886](https://doi.org/10.1121/1.423886)
- [30] Гринченко ВТ, Вовк ИВ, Мацыпура ВТ. *Основы акустики*. Киев: Наукова думка; 2009. 867 с.
Grinchenko VT, Vovk IV, Macyura VT. *Basics of acoustics*. Kiev: Naukova Dumka; 2009. 867 p. (in Russian).

Сведения об авторах / Information about the Authors

Эльвира Шамилевна Насибуллаева

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Elvira Sh. Nasibullaeva

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russia

elvira@anrb.ru

ORCID: [0000-0003-1242-9800](https://orcid.org/0000-0003-1242-9800)