ISSN: 2658–5782

Номер 1

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 **20** (2025) 1: 7–11

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2025.1.002
DOI 10.21662/mfs2025.1.002
УДК / UDC 51-72

Получена / Received 18.02.2025
Принята / Accepted 12.03.2025

Сопоставление численных реализаций метода квадратур решения интегрального уравнения

Д.А. Тукмаков✉
ИММ КазНЦ РАН, Казань

E-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

Интегральные уравнения встречаются в различных разделах физики — в акустике, теории фильтраций, электрофизике, механике твердого деформируемого тела. Интегральные уравнения Фредгольма могут быть применены для математического описания процессов излучения и рассеяния звуковых волн. Часто отыскание точного аналитического решения интегральных уравнений представляется затруднительным, в связи с чем для решения таких уравнений применяются численные методы. Настоящая работа посвящена анализу алгоритмов численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В работе представлены результаты реализации некоторых алгоритмов численного метода квадратур решения интегральных уравнений. Метод квадратур сводит решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений, которое можно реализовать различными способами. Выбор квадратурной формулы предполагается произвольным, в рассматриваемом исследовании в качестве квадратурной формулы применялась формула трапеций. При сведении интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений также существует свобода в выборе метода решения линейных уравнений. Для решения система линейных уравнений применялись метод Гаусса, метод «простых итераций» и итерационный метод Якоби. Исследование свойств интегрального уравнения показывает, что ядро интегрального оператора удовлетворяет свойствам, при которых интегральный оператор является сжимающим оператором и, следовательно, интегральное уравнение имеет единственное решение. Сопоставление численных расчетов для различных методик решения системы линейных уравнений демонстрирует, что метод Якоби решения системы линейных алгебраических уравнений сходится к точному решению существенно быстрее метода «простых итераций». Полученные результаты возможно применить при разработке алгоритмов решения интегральных уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения, метод квадратур, система линейных уравнений

Работа выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

Comparison of numerical implementations of the quadrature method for solving an integral equation

D.A. Tukmakov✉
IME KazSC RAS, Kazan, Russia

E-mail: tukmakovda@imm.knc.ru

Integral equations are encountered in various sections of physics — in acoustics, filtration theory, in electrophysics, in mechanics of solid deformable bodies. Fredholm integral equations can be used for mathematical description of processes of radiation and scattering of sound waves. Often finding an exact analytical solution to integral equations seems difficult, in connection with which numerical methods are used to solve such equations. This work is devoted to the analysis of algorithms for the numerical solution of the Fredholm integral equation of the second kind. The paper presents the results of the implementation of some algorithms for the numerical quadrature method for solving integral equations. The quadrature method reduces the solution of the integral equation to the solution of a system of linear algebraic equations, which can be implemented in various ways. The choice of the quadrature formula is assumed to be arbitrary; in the study under consideration, the trapezoid formula was used as a quadrature formula. When reducing an integral equation to a system of linear algebraic equations, there is also arbitrariness in the choice of the method for solving linear equations. To solve the system of linear equations, the Gauss method, the method of simple iterations and the iterative Jacobi method were used. The study of the properties of the integral equation shows that the kernel of the integral operator satisfies the properties under which the integral operator is a contracting operator and, therefore, the integral equation has a unique solution. Comparison of numerical calculations for various methods of solving a system of linear equations demonstrates that the Jacobi method for solving a system of linear algebraic equations converges to an exact solution significantly faster than the method of simple iterations. The results obtained can be used in developing algorithms for solving integral equations.

Keywords: integral equations, quadrature method, system of linear equations

1. Введение

Для математического моделирования процессов механики жидкости и газа применяются как дифференциальные [1–6] так и интегральные уравнения [7–12]. В работе [7] представлена математическая модель двухфазной фильтрации в пористой среде, основанная на решении интегро-дифференциального уравнения. В статье [8] представлен обзор работ по теоретическим методам решения задач рассеяния акустических волн на сферах и по определению основных характеристик данного явления. В [9] разработаны методы численного решения пространственных задач дифракции стационарных акустических волн в средах с включениями в трехмерной постановке. В исследовании [10] рассматривается развитие теории аналитических методов решения интегральных уравнений применительно к различным задачами физики. В работе [11] предлагается развитие методов решения интегральных уравнений применяющихся в различных инженерных областях. В монографии [12] изложено применение интегральных уравнений при решении различных задача акустики.

Из анализа работ по тематике интегральных уравнений следует, что развиваются как приложения теории интегральных уравнений для моделирования различных физических процессов, так и совершенствование методов решения интегральных уравнений.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода имеют важное значение для описания излучения и рассеяния акустических волн [12]. В настоящей работе анализируется применение различных алгоритмов для реализации метода квадратур численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, исследуется влияние выбора метода решения системы линейных уравнений, получаемой методом квадратур, на скорость сходимости численного решения интегрального уравнения.

2. Методы исследования

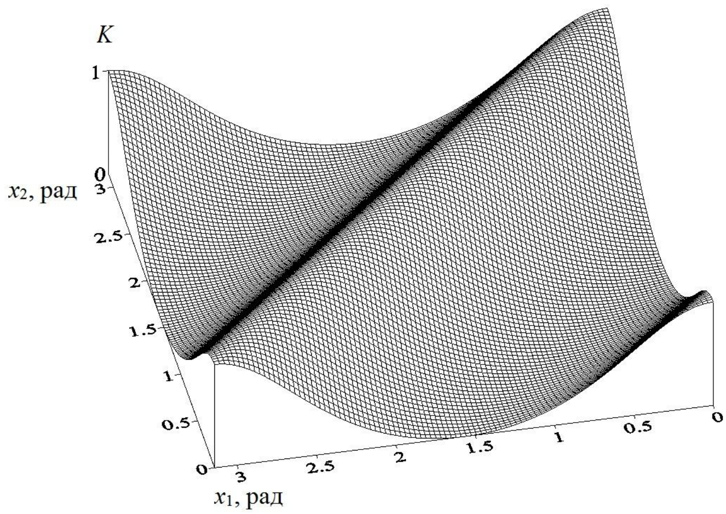
Интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид [13, 14]:

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) y(s)\, ds = f(x) \tag{1}$$

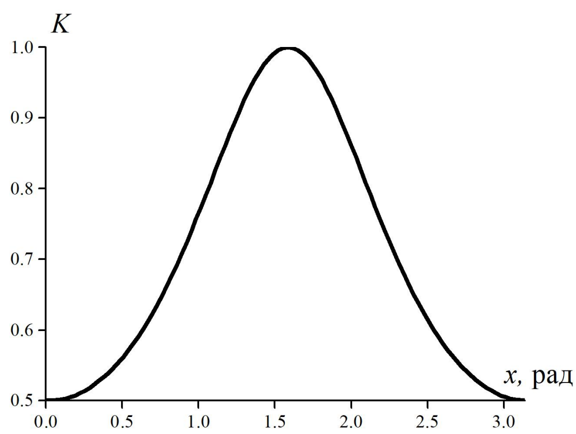
с значениями функции и величин:

$$\begin{gathered} a = 0,\ b = \pi,\ \lambda = 0.1, \\ K(x,s) = \left(1 + \sin^2(x+s)\right)^{-1}, \quad f(x) = \cos(x). \end{gathered} \tag{2}$$

Если для коэффициента λ выполняется условие $\lambda < ((b-a)\cdot M)^{-1}$ [14], то в таком случае существует решение интегрального уравнения, к которому возможно организовать сходящийся итерационный процесс. Здесь $M = \max|K(x,s)|\,; x,s \in [a,b]$, для уравнения (1) с параметрами (2) эти значения составляют соответственно $-M = 1$, $\lambda < 1/\pi$. Двухмерное распределение величины функции ядра интегрального оператора (рис. 1) достигает максимального значения $-M = 1$, для сечения $K(\pi/2, x)$ максимум достигается в точке $x = \pi/2$.



а)



б)

Рис. 1. Пространственные распределения: значений ядра интегрального оператора (а); вдоль сечения $x = \pi/2$ (б)

Для численного решения уравнения (1) с параметрами (2) применяется метод квадратур [13], сводящий решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$y(x_i) + \lambda \sum_{1}^{n} p_j \cdot K_{i,j} y_j = f(x_i). \tag{3}$$

Здесь $K_{i,j} = K(x_i, x_j)$, $x_i = (i-1) \cdot h, h = (b-a)/n$; сеточное разбиение предполагалось равномерным; p_j — веса квадратурной формулы. В качестве квадратурной формулы выбрана формула трапеций [15], при равномерном разбиении отрезка веса квадратурной формулы трапеции определяются следующим образом: $p_1 = p_n = h/2$, $p_i = 1/h$. Для решения 3 применялись метод Гаусса, метод «простых итераций» и метод Якоби [16]. Численные алгоритмы реализовывались в виде программного кода на языке программирования Fortran.

3. Результаты расчетов

При увеличении числа узлов квадратурной формулы наблюдается сходимость численного решения интегрального уравнения (рис. 2).

Результаты применения метода «простых итераций» демонстрируют, что, начиная с количества шагов $m = 20$, расчеты искомой функции близки (рис. 3).

В случае, если система линейных уравнений интегрируется методом Якоби, то, уже начиная с величины $m = 3$, результаты расчетов близки (рис. 4).

Сопоставление результатов расчетов, полученных методом «простых итераций» и методом Якоби, демонстрирует большую скорость сходимости при применении метода Якоби (рис. 5(а),(б)).

4. Заключение

Представлены результаты расчетов различных реализаций численного метода квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Сопоставление алгоритмов решения системы линейных уравнений, получаемой в результате реализации численного метода квадратур, демонстрирует, что численное решение методом Якоби сходится быстрее к точному решению системы линейных уравнений, определяемому методом Гаусса, чем численное решение методом «простых итераций». Выявленные закономерности возможно применять при реализации метода квадратур решения интегральных уравнений в различных прикладных задачах, в том числе в задачах излучения и распространения звуковых волн.

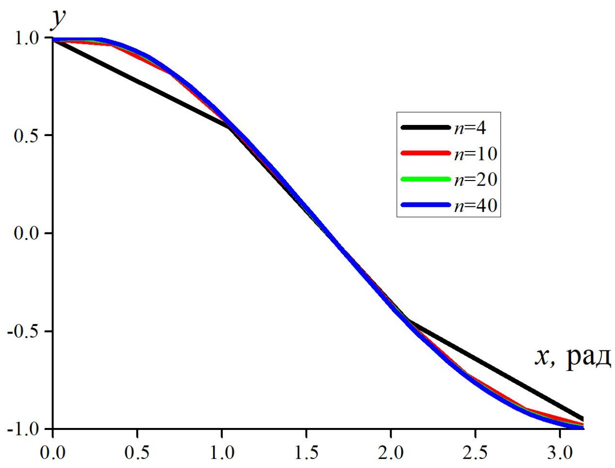


Рис. 2. Результаты расчетов сходимости решения полученного методом Гаусса для различных значений количества узлов квадратурной формулы трапеций

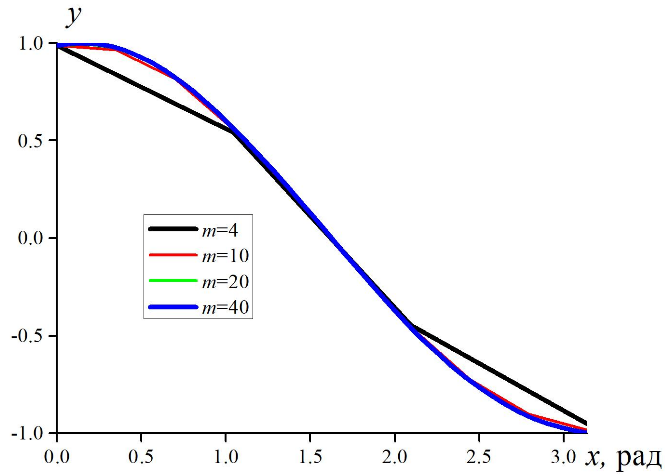


Рис. 3. Результаты расчетов сходимости решения, полученного методом «простых итераций», для значения количества узлов квадратурной формулы трапеций $n = 40$

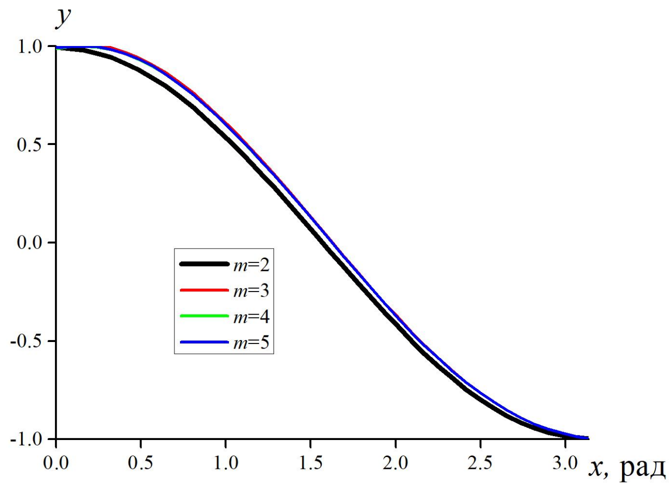


Рис. 4. Результаты расчетов сходимости решения полученного методом Якоби для значения количества узлов квадратурной формулы трапеций $n = 40$

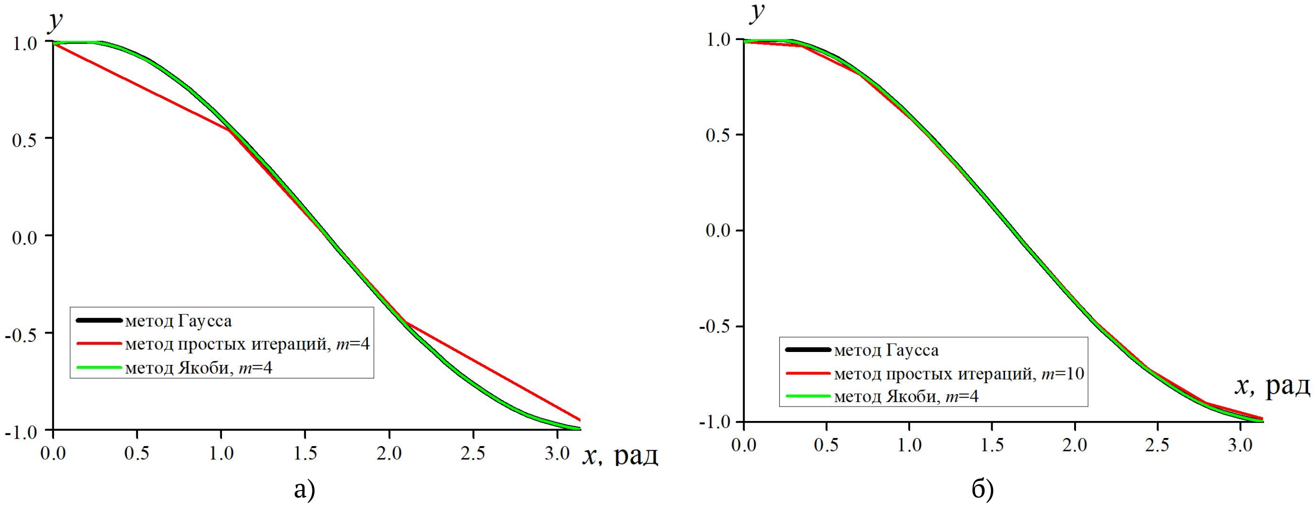


Рис. 5. Сравнение метода «простых итераций» с методом Якоби: метод «простых итераций» $m = 4$ (а); метод «простых итераций» $m = 10$ (б)

Список литературы / References

[1] Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.
Tukmakov A.L. Numerical modeling of acoustic flows with resonant oscillations of gas in a closed pipe // Bulletin of higher educational institutions. Aviation engineering. 2006. No. 4. Pp. 33–36. EDN: kntxyf

[2] Тукмаков Д.А. Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запыленную среду // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 125–131.
Tukmakov D.A. Numerical study of high-speed phase sliding during the passage of a low-intensity shock wave from a pure gas into a dusty environment // Multiphase systems. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 125–131.
DOI: 10.21662/mfs2019.2.017

[3] Тукмаков Д.А. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с электрически заряженной запыленной средой // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 101.
Tukmakov D.A. Mathematical modeling of the interaction of a shock wave with an electrically charged dusty environment // Multiphase systems. 2020. V. 15, No. 1–2. Pp. 101 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.1-2

[4] Тукмаков Д. А. Аналитическая модель нестационарного течения несжимаемой монодисперсной газовзвеси с одномерной геометрией потока // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 3. С. 57–70.
Tukmakov D. A. Analytical model of unsteady flow of an incompressible monodisperse gas suspension with one-dimensional flow geometry // Bulletin of higher educational institutions. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021. No. 3. Pp. 57–70 (in Russian).
DOI: 10.21685/2072-3040-2021-3-5

[5] Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики скоплений твердых частиц // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 3. С. 244–246.
Tukmakov D.A. Numerical modeling of the dynamics of solid particle clusters // Multiphase systems. 2023. V. 18, No. 3. Pp. 244–246 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2023.3.071

[6] Тукмаков Д.А. Аналитическая модель гравитационного осаждения дисперсной примеси в движущемся потоке // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 1s. С. 110–112.
Tukmakov D.A. Analytical model of gravitational sedimentation of a dispersed impurity in a moving flow // Multiphase systems. 2024. V. 19, No. 1s. Pp. 110–112 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2024.1s

[7] Лукащук С.Ю. Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 2. С. 58–67.
Lukashchuk S.Y. Fractional integral generalization of the Rapoport–Lisa equation // Multiphase systems. 2023. V. 18, No. 2. Pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2023.2.009

[8] Насибуллаева Э.Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 88–104.
Nasibullaeva E.Sh. Scattering of sound waves on spheres: solution methods and main characteristics (review) // Multiphase systems. 2021. V. 16, No. 3–4. Pp. 88–104 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2021.3.013

[9] Ершов Н.Е., Илларионова Л.В., Смагин С.И.Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 60–76.
Ershov N.E., Illarionova L.V., Smagin S.I. Numerical solution of a three-dimensional stationary problem of acoustic wave diffraction // Computational technologies. 2010. V. 15, No. 1. Pp. 60–76 (in Russian).
EDN: muylnt

[10] Cuha F.A., Peker H.A. Solution of Abel's integral equation by Kashuri Fundo transform // Thermal Science. 2022. V. 26, No. 4, Part A. Pp. 3003–3010.
DOI: 10.2298/TSCI2204003C

[11] Antoine X., Darbas M. An introduction to operator preconditioning for the fast iterative integral equation solution of time-harmonic scattering problems // Multiscale Science and Engineering. 2021. V. 3. Pp. 1–35.
DOI: 10.1007/s42493-021-00057-6

[12] Осетров А. В. Интегральные уравнения в теории дифракции акустических волн. Санкт-Петербург: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002. 56 с.
Osetrov A. V. Integral equations in the theory of diffraction of acoustic waves. St. Petersburg: SPbGETU "LETI", 2002. 56 p. (in Russian).

[13] Карчевский Е.М. Интегральные уравнения: применение в математическом моделировании, численные методы решения и комплекс программ на языке MatLab. Казань: Вестфалика, 2022. 89 с.
Karchevsky E.M. Integral equations: application in mathematical modeling, numerical solution methods and a program package in the MatLab language. Kazan: Vestfalika, 2022. 89 p. (in Russian).

[14] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Москва: «Наука», 1975. 304 с.
Krasnov M.L. Integral equations. Moscow: «Nauka», 1975. 304 p. (in Russian).

[15] Авхадиев Ф.Г. Основы численных методов. Казань: Издательство Казанского университета, 2022. 444 с.
Avkhadiev F.G. Fundamentals of numerical methods. Kazan: Kazan University Publishing House, 2022. 444 p. (in Russian).

[16] Вержбийкий В.М. Вычислительная линейная алгебра. Москва: Высшая школа, 2009. 351 с. Verzhbiysky V.M. Computational linear algebra. Moscow: Higher School, 2009. 351 p. (in Russian).

Сведения об авторах / Information about the Authors

Дмитрий Алексеевич Тукмаков
кандидат физ.-мат. наук
ИММ КазНЦ РАН

Dmitry A. Tukmakov
Ph.D. (Phys. & Math.)
IME KazSC RAS
tukmakovda@imm.knc.ru
ORCID: 0000-0002-0335-8548