

ISSN: 2658–5782

Номер 3

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org



ИМех

им. Р.Р. Мавлютова

Институт механики
им. Р.Р. Мавлютова
Уфимского федерального
исследовательского центра
Российской Академии наук

eISSN 2658–5782
DOI: 10.21662

ЭЛЕКТРОННЫЙ
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1994 г.
Издается 4 раза в год

до 2017: «Труды Института
механики им. Р.Р.
Мавлютова Уфимского
научного центра РАН»
до 2003: «Проблемы
механики и управления»

Редакция

Урманчев С.Ф.
главный редактор
Насибуллаева Э.Ш.
ответственный секретарь
Михайленко К.И.
технический редактор
Налобина Е.А.
литературный редактор

Адрес издателя и редакции:
450054, г. Уфа, пр. Октября,
д. 69, лит. Ж

Учредитель: Федеральное
государственное бюджетное
научное учреждение
Уфимский федеральный
исследовательский центр
Российской академии наук

© УФИЦ РАН, 2025
© Редколлегия, 2025
© Авторы, 2025

e-mail:
multiphase.systems@mail.ru

www:
<http://mfs.uimech.org>

Главный редактор

Урманчев С.Ф. доктор физико-математических наук, профессор
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Редакционная коллегия

Михайленко К.И. зам. гл. редактора, кандидат физико-математических наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия
Насибуллаева Э.Ш. отв. секретарь, кандидат физико-математических наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия
Аганин А.А. доктор физико-математических наук, профессор, Институт механики
и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия
Галимзянов М.Н. кандидат физико-математических наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия
Гималтдинов И.К. доктор физико-математических наук, профессор, Уфимский
Государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия
Даринцев О.В. доктор технических наук, профессор,
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
Хабилов С.В. доктор физико-математических наук, профессор
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Редакционный совет

Балапанов Д.М. кандидат физико-математических наук
Центр исследований и разработок в области космических технологий
(CREST), ULB, Бельгия
Губайдуллин А.А. доктор физико-математических наук, профессор, Тюменский филиал
ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия
Губайдуллин Д.А. доктор физико-математических наук, член-корр. РАН, Институт
механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань, Россия
Губайдуллин И.М. доктор физико-математических наук, профессор
Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, Уфа, Россия
Демин В.А. доктор физико-математических наук, профессор
Пермский государственный национальный исследовательский
университет, Пермь, Россия
Мусакаев Н.Г. доктор физико-математических наук, профессор, Тюменский филиал
ИТПМ им. С.А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия
Нигматулин Р.И. доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН
Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия
Осипцов А.Н. доктор физико-математических наук, профессор
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Панов А.В. кандидат физико-математических наук
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
Прибатурин Н.А. доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
Новосибирск, Россия
Рамазанов А.Ш. доктор технических наук, профессор
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия
Рыбдылова О. кандидат физико-математических наук
Университет Брайтона, Брайтон, Великобритания
Смирнов Н.Н. доктор физико-математических наук, профессор
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Москва, Россия
Хуан Ч. Доктор философии
Северо-Западный политехнический университет, Сиань, Китай
Шукла П. Доктор философии
Индийский технологический институт Мадраса, Ченнаи, Индия

Editor-in-chief

S.F. Urmancheev Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Editorial board

C.I. Mikhaylenko *deputy editor-in-chief*, Ph.D. (Phys. & Math.), Assistant Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E.Sh. Nasibullaeva *executive secretary*, Ph.D. (Phys. & Math.), Assistant Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

A.A. Aganin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Institute of Mechanics and Engineering FIC Kazan SC of RAS, Kazan, Russia

M.N. Galimzyanov Ph.D. (Phys. & Math.), Assistant Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

I.K. Gimaltdinov Sc.D. (Phys. & Math.), Prof.
Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

O.V. Darintsev Sc.D. (Eng.), Professor
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

S.V. Khabirov Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Editorial council

Balapanov D.M. Ph.D., Centre for Research and Engineering in Space Technologies (CREST),
ULB, Belgium

A.A. Gubaidulin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied
Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

D.A. Gubaidulin Sc.D. (Phys. & Math.), Corresponding Member of the RAS
Institute of Mechanics and Engineering FIC Kazan SC RAS, Kazan, Russia

I.M. Gubaydulin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS, Ufa, Russia,

V.A. Demin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Perm State National Research University, Perm, Russia

N.G. Musakaev Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied
Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

R.I. Nigmatulin Sc.D. (Phys. & Math.), Prof., Academician of RAS
Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Moscow, Russia

A.N. Osipov Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia

A.V. Panov Ph.D. (Phys. & Math.)
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

N.A. Pribaturin Sc.D. (Phys. & Math.), Professor, Corresponding Member of the RAS
Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

A.Sh. Ramazanov Sc.D. (Eng.), Prof.
Ufa University of Science & Technology, Ufa, Russia

O. Rybdylova Ph.D., University of Brighton, Brighton, UK

N.N. Smirnov Sc.D. (Phys. & Math.), Professor
Moscow M.V.Lomonosov State University, Moscow, Russia

C. Huang Ph.D., Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

P. Shukla Ph.D., Indian Institute of Technology Madras, Department of Mathematics,
Chennai, India

*Mavlyutov Institute of
Mechanics, Ufa Federal
Research Center of the Russian
Academy of Sciences*

eISSN 2658–5782
DOI: 10.21662

ELECTRONIC
SCIENTIFIC JOURNAL

First published in 1994
Published 4 times a year

before 2017: "Bulletin of
Mavlyutov Institute of
Mechanics Ufa Scientific
Center of RAS"
before 2003: "Issues of
Mechanics and Control"

Technical editorial board

Urmancheev S.F.
editor-in-chief

Nasibullaeva E.Sh.
executive secretary

Mikhaylenko C.I.
technical editor

Nalobina E.A.
literary editor

Publisher and editorial
office Address:
450054, Ufa, Oktyabrya
Prospect, 69, lit. Zh

Founder: Ufa Federal Research
Centre of the Russian
Academy of Sciences

© UFRC of RAS, 2025
© Editorial board, 2025
© The Authors, 2025

e-mail:
multiphase.systems@mail.ru

www:
<http://mfs.uimech.org>



Численный анализ рассеяния волны на паре звуконепроницаемых сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования

Э.Ш. Насибуллаева✉

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: elvira@anrb.ru

В настоящей работе проведен анализ рассеяния волны на системе двух звуконепроницаемых сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования. Основными целями работы являются: определение основных параметров, изменение которых существенным образом влияет на всю систему; определение значений варьируемых параметров системы, при которых искомые функции (полное сечение рассеяния и нормированное давление в фиксированной точке) принимают наименьшее и наибольшее значения, а также исследование системы при оптимальных значениях параметров. Метод ортогонального композиционного планирования реализован для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов были выбраны три основных параметра системы: волновой радиус, отношение радиусов сфер и расстояние между центрами сфер. Для полученного уравнения регрессии проведены проверки значимости коэффициентов с помощью t -критерия Стьюдента и адекватности модели с использованием F -критерия Фишера. Показано, что в случае воздействия сферической волны от монопольного источника излучения нелинейное влияние факторов более выражено, чем в случае плоской волны; нормальное давление в точке является нечувствительным к изменению параметров в случае воздействия плоской волны, а также в случае монопольного источника излучения для малых величин комплексной проводимости поверхности сфер; полное сечение рассеяния является сильно чувствительным в случае системы с идеально жесткими сферами; наибольшее и наименьшее значения целевые функции достигают на границе трехмерной параметрической области изменения факторов. Построены диаграммы распределения давления, которые позволили определить для найденных оптимальных значений факторов зоны повышенного или пониженного давления.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, звуконепроницаемая сфера, вычислительный эксперимент, метод ортогонального центрального композиционного планирования, полное сечение рассеяния, плоская волна, монопольный источник излучения

Работа выполнена в рамках государственного задания 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Numerical analysis of wave scattering by a pair of soundproof spheres by orthogonal central compositional design method

E.Sh. Nasibullaeva✉

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: elvira@anrb.ru

In the paper, the analysis of wave scattering on a system of two soundproof spheres was carried out using the orthogonal central compositional design method. The main objectives of the work are to determine the main parameters, the change of which significantly affects on the whole system; to determine the variable parameter values of the system, at which the loss functions (the total scattering cross section and the normalized pressure at a fixed point) take the minimum and maximum values, and to study the system at optimal parameter values. The orthogonal compositional design method is implemented for a three-factor computational experiment, where three main parameters of the system were selected as factors: the wave radius, the ratio of the sphere radii, and the distance between the sphere centers. For the obtained regression equation, the significance of the coefficients was checked using Student's t -test and the adequacy of the model using Fisher's F -test. It was found that in the case of a spherical wave from a monopole radiation source, the nonlinear influence of the factors is more pronounced than in the case of a plane wave; normal pressure calculated at a fixed point is insensitive to changes in parameters in the case of a plane wave, as well as in the case of a monopole radiation source for small values of the sphere surface complex conductivity; the total scattering cross section is highly sensitive in the case of a system with ideally rigid spheres; the highest and lowest values of the loss functions are achieved at the boundary of the three-dimensional parametric region of factors changes. Pressure distribution diagrams were constructed, which made it possible to determine the zones of high or low pressure for the found optimal values of the factors.

Keywords: acoustic scattering, soundproof sphere, computational experiment, orthogonal central compositional design method, total scattering cross section, plane wave, monopole radiation source.

1. Введение

При исследовании задачи рассеяния акустической волны на множестве препятствий малых размеров особый интерес представляет изучение рассеяния волны на системе, состоящей из двух сфер. Связано это с тем, что, с одной стороны, в таких системах имеет место взаимодействие рассеянных от сферических частиц полей, а, с другой стороны, данное взаимодействие является достаточно простым для того чтобы его можно было подробно изучить. На сегодняшний день существует множество работ, посвященных данной тематике (см., например, [1–12]), с обзором которых можно подробно ознакомиться в работе [13].

В настоящей работе впервые проведен анализ рассеяния волны (плоской или сферической от монополярного источника излучения) на системе двух звуконепроницаемых (волна не проходит через поверхность) сфер методом ортогонального центрального композиционного планирования (ОЦКП) [14–18]. Данный метод реализуется для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов берутся один физический (волновой радиус) и два геометрических (отношение радиусов сфер и расстояние между центрами сфер) параметра системы. Основными целями работы являются: определение основных параметров, изменение которых существенным образом влияет на всю систему; определение значений варьируемых параметров системы, при которых искомые функции (полное сечение рассеяния и нормированное давление в фиксированной точке) принимают наименьшее и наибольшее значения, а также исследование системы при оптимальных значениях параметров.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим две звуконепроницаемые сферы различных радиусов a_1 и a_2 , которые расположены в трехмерном пространстве, заполненном однородной средой с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . Без ограничения общности выберем общую систему декартовых координат так, чтобы ось z проходила через центры этих сфер, а начало располагалось в середине отрезка, соединяющего данные центры (см. рис. 1). Тогда декартовы координаты центров сфер будут равны $\mathbf{r}'_1 = (0, 0, \delta l)$ и $\mathbf{r}'_2 = (0, 0, -\delta l)$. Предполагается, что центры сфер неподвижны.

Будем рассматривать два вида внешнего воздействия:

- сферическая волна от монополярного источника излучения, расположенного в точке M_S с декартовыми координатами $(x_{M_S}, y_{M_S}, z_{M_S}) = (-d_{M_S}, 0, 0)$;
- плоская волна с нормальным вектором $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$ к

ее фронту, имеющим сферические координаты $(r_{PW}, \theta_{PW}, \varphi_{PW}) = (1, \pi/2, 0)$.

Математическая модель, описывающая рассеяние волны на паре звуконепроницаемых сфер в случае осевой симметрии, приведена в работе [12]. В настоящей работе представим модель в общем случае, которая состоит из уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала $\psi(\mathbf{r})$ произвольной точки пространства M с радиус-вектором $\mathbf{r}$:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0,$$

где k — волновое число, и граничных условий общего сопротивления на поверхностях S_1 и S_2 сфер в случае, когда волна не может пройти через эти поверхности:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + i \sigma_v \psi \right) \Big|_{S_v} = 0, \quad v = 1, 2,$$

где n — нормаль к поверхности; σ_v — комплексная полная проводимость для v -й сферы; i — мнимая единица. Отметим, что при $\sigma_v = 0$ имеет место случай идеально жесткой сферы, а при $\sigma_v \rightarrow \infty$ — идеально мягкой сферы.

Потенциал внешнего поля представляется в виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}^{(1)}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}^{(2)}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ — потенциал падающего поля; $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ — потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда [19]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik \psi_{\text{scat}} \right) = 0,$$

соответствующему затуханию уходящим на бесконечность волнам; $\psi_{\text{scat}}^{(v)}$ — потенциал, регулярный вне v -й сферы и также удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда. Отметим, что потенциал $\psi_{\text{scat}}^{(v)}$ вызывает изменения в поле рассеяния, вызванные v -й сферой, но с учетом влияния соседней сферы.

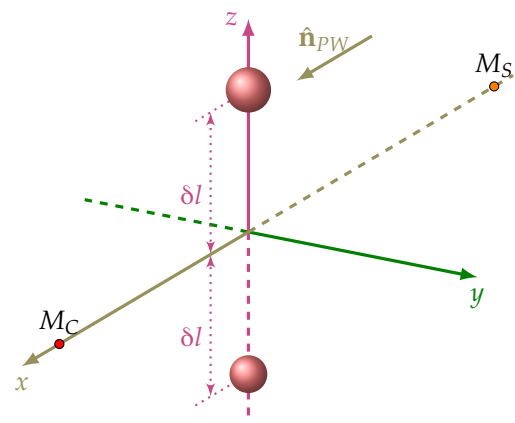


Рис. 1. Схема задачи

В случае монопольного источника излучения потенциал падающего поля определяется по формуле

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|},$$

где V_0 — производительность монопольного источника излучения; $\mathbf{r}_s$ — радиус-вектор точки M_s . В случае плоской волны имеет место следующая формула:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{p_0}{i\omega\rho_0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где p_0 — амплитуда плоской волны; $\omega = 2\pi f$ — угловая частота; f — частота внешнего поля.

В соответствии с методом разложения по мультиполям [20] осуществляется переход к сферической системе координат, связанной с центром v -й сферы ($\mathbf{r} - \mathbf{r}'_v = \mathbf{r}_v = (r_v, \theta_v, \varphi_v)$), и потенциал поля рассеяния $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ представляется в следующем виде:

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_n^{(1)m} S_n^m(\mathbf{r}_1) + A_n^{(2)m} S_n^m(\mathbf{r}_2) \right).$$

Здесь $A_n^{(v)m}$ — коэффициенты разложения по мультиполям; $S_n^m(\mathbf{r}_v) = h_n(kr_v) Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ — мультиполь порядка n и степени m ; $h_n(kr)$ — сферические функции Ханкеля 1-го типа; $Y_n^m(\theta, \varphi)$ — ортогональные сферические гармоники [21]. Неизвестные коэффициенты $A_n^{(v)m}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая в общем случае записывается в следующем матричном виде [22]:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (1)$$

с матрицей и векторами в случае двух сфер определяемые как:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_{u_0}\} = \left(\{A_l^{(1)s}\}^T, \{A_l^{(2)s}\}^T \right)^T, \\ \mathbf{D} &= \{D_{t_0}\} = \left(\{D_n^{(1)m}\}^T, \{D_n^{(2)m}\}^T \right)^T = \\ &= \left(\{-B_n^{(1)} C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_1)\}^T, \{-B_n^{(2)} C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_2)\}^T \right)^T, \\ \mathbf{L} &= \{L_{u_0 t_0}\} = \begin{pmatrix} \{L_{u_1 t_1}^{(11)}\} & \{L_{u_1 t_1}^{(12)}\} \\ \{L_{u_1 t_1}^{(21)}\} & \{L_{u_1 t_1}^{(22)}\} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \{\delta_{u_1 t_1}\} & \{B_n^{(1)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{12})\} \\ \{B_n^{(2)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{21})\} & \{\delta_{u_1 t_1}\} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $B_l^{(w)} = \frac{kj'_n(ka) + i\sigma j_n(ka)}{kh'_n(ka) + i\sigma h_n(ka)}$; $u_0 = (v-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s)$; $t_0 = (w-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m)$; $u_1 = (l+1)^2 - (l-s)$; $t_1 = (n+1)^2 - (n-m)$; $l = 0, 1, \dots, n_{\text{tr}}$; $s = -l, \dots, l$; $n = 0, 1, \dots, n_{\text{tr}}$; $m = -n, \dots, n$; $v, w = 1, 2$. Здесь $j_n(kr)$ и $j'_n(kr)$ — сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [21]; $C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)$ —

коэффициенты разложения падающего поля ψ_{in} около центра w -й сферы ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$); $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ — коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям [20]; $\mathbf{r}'_{vw}$ — вектор с началом в центре v -й и концом в центре w -й сферы; $\delta_{u_1 t_1}$ — символ Кронекера; n_{tr} — число членов рядов после их усечения по l и n , которое необходимо проводить, поскольку при численной реализации система уравнений (1) должна быть конечной.

Поскольку давление p и потенциал ψ связаны соотношением $p = i\omega\rho\psi$, то значение $p(\mathbf{r}_c)$ в некоторой точке M_c с радиус-вектором $\mathbf{r}_c$ может быть вычислено как

$$p_{M_c} \equiv p(\mathbf{r}_c) = i\omega\rho_0 \left(\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}_c) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(A_n^{(1)m} S_n^m(\mathbf{r}_1) + A_n^{(2)m} S_n^m(\mathbf{r}_2) \right) \right) \quad (2)$$

с коэффициентами $A_n^{(v)m}$, определяемыми из решения системы уравнений (1).

Основной характеристикой при исследовании задачи акустического рассеяния на препятствиях малых размеров является полное сечение рассеяния σ_s . Явная формула данной характеристики в случае двух сфер примет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\omega\rho_0}{2kI_0} \left(\sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n \left(|A_n^{(1)m}|^2 + |A_n^{(2)m}|^2 \right) + \right. \\ &+ \text{Re} \left(\sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{s=-l}^l (-1)^{n+m} i^{n+l} c^{(nmls)} \times \right. \\ &\times \left(A_n^{(1)m} \left(A_l^{(2)s} \right)^* e^{i(m-s)\varphi_{12}} \times \right. \\ &\times \sum_{i_1=|n-l|}^{n+l} b_{i_1}^{(nmls)} i^{i_1} j_{i_1}(kr_{12}) P_{i_1}^{m-s}(\cos(\theta_{12})) + \\ &+ A_n^{(2)m} \left(A_l^{(1)s} \right)^* e^{i(m-s)\varphi_{21}} \times \\ &\times \left. \left. \sum_{i_1=|n-l|}^{n+l} b_{i_1}^{(nmls)} i^{i_1} j_{i_1}(kr_{21}) P_{i_1}^{m-s}(\cos(\theta_{21})) \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где I_0 — интенсивность падающей волны; знак «*» в верхнем индексе обозначает сопряженную величину; $c^{(nmls)}$ — коэффициент, определяемый по формуле

$$c^{(nmls)} = (-1)^{(m-|m|+s-|s|)/2} \times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!}};$$

$b_{i_1}^{(nmls)}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, которые могут быть вычислены, например, по формулам, представленным в книге [24]; $(r_{vw}, \theta_{vw}, \varphi_{vw})$ — сферические координаты радиус-вектора $\mathbf{r}_{vw}$ с началом в центре v -й и концом в центре w -й сферах; $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра [21].

3. Трехфакторный вычислительный эксперимент

Исследуем влияние одного геометрического (волновой радиус ka_1) и двух геометрических (отношение радиусов сфер a_2/a_1 и расстояния δl , характеризующее расстояние между центрами сфер) параметров системы. Для этого рассмотрим отклонение на 20 % данных параметров (факторов) от их фиксированных (средних) значений $(ka_1)_0$, $(a_2/a_1)_0$ и $(\delta l)_0$ соответственно. В этом случае малое отклонение от средних величин будет задаваться как $\delta_{\text{fix}} = 0.2$.

В рамках метода ОЦКП проведем трехфакторный вычислительный эксперимент ($n = 3$) с факторами $X_j = 1 \pm \delta_{\text{fix}}$ ($j = 1, 2, 3$), задающими отклонения величин от средних значений, в следующем виде:

$$ka = X_1(ka_1)_0; \quad a_2/a_1 = X_2(a_2/a_1)_0; \quad \delta l = X_3(\delta l)_0,$$

что позволяет свести их рассмотрение к одному диапазону $[X_{j,-1}, X_{j,+1}] = [0.8, 1.2]$ ($j = 1, 2, 3$), где $X_{j,-1}$ и $X_{j,+1}$ — нижний и верхний уровни j -го фактора.

Рассмотрим две функции отклика (целевые функции):

- Y_1 — полное сечение рассеяния для системы двух сфер, вычисленное с помощью формулы (3), т.е. $Y_1 \equiv \sigma_s$;
- Y_2 — нормированное давление в точке M_c (см. рис. 1), т.е. $Y_2 \equiv |p_{M_c}/p_{\text{in},M_c}|$, где p_{M_c} — давление, определяемое по формуле (2); p_{in,M_c} — давление падающего поля в точке M_c .

Первая целевая функция позволяет провести анализ чувствительности системы к малому изменению параметров в целом, а вторая — проанализировать изменение в одной определенной точке пространства.

Построим регрессионную модель (уравнение регрессии) второго порядка, которая записывается в виде следующего квадратичного полинома:

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_n) = & b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + \\ & + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + \\ & + b_7(x_1^2 - \beta) + b_8(x_2^2 - \beta) + b_9(x_3^2 - \beta), \end{aligned} \quad (4)$$

где b_j ($j = 0, 1, \dots, 9$) — коэффициенты регрессии, определяемые после реализации плана соответствующего вычислительного эксперимента; $\beta = \sqrt{2^n/n_t}$ — параметр смещения.

Далее строится соответствующая матрица ОЦКП. В качестве примера в табл. 1 представлена расширенная матрица ОЦКП для монопольного источника излучения, целевой функции Y_1 при значении комплексной полной проводимости $\sigma_v = 10k_0$:

- первый столбец u обозначает номер эксперимента (от 1 до n_t). Поскольку общее число опытов n_t состоит из $n_y = 2^n$ опытов на нижних и верхних

уровнях, $n_* = 2n$ опытов в так называемых «звездных» точках $x_j = \pm\alpha$ ($\alpha = \sqrt{(\sqrt{n_y n_t} - n_y)/2}$ — расстояние до центральной точки плана (так называемое звездное плечо), и одного опыта в центральной точке, в которой все кодированные значения $x_j = 0$, имеем $n_t = n_y + n_* + 1 = 15$;

- следующие 10 столбцов — кодированные значения фиктивного параметра $x_0 \equiv 1$, линейных слагаемых x_{j_1} , парных взаимодействий $x_{j_1}x_{j_2}$ и квадратичных слагаемых $x_{j_1}^2 - \beta$. Кодированное значение j -го фактора x_j определяется следующим выражением:

$$x_j = \frac{X_j - X_{j,c}}{X_{j,l}},$$

где $X_{j,c} = (X_{j,-1} + X_{j,+1})/2$ и $X_{j,l} = (X_{j,+1} - X_{j,-1})/2$ — центральное значение и интервал варьирования j -го фактора;

- 12-й столбец $Y_{1,u}$ — значения функции отклика Y_1 при решении полной модели в u -м вычислительном эксперименте;
- последний столбец добавлен для демонстрации относительной погрешности аппроксимации (4), выраженной в процентах, которая определяется следующим выражением:

$$\delta_{p,u} = \left| \frac{p_u(x_1, x_2, x_3) - Y_{1,u}(x_1, x_2, x_3)}{Y_{1,u}(x_1, x_2, x_3)} \right| \cdot 100\%.$$

Отметим, что столбцы со 2-го по 12-й составляют основную матрицу ОЦКП (см., например, [17]), однако расширенная матрица ОЦКП [25] является более информативной. В табл. 1 последние две строки приведены для удобства дальнейшего изложения: Σ_q — значения суммы квадратов элементов q -го столбца матрицы планирования; b_q — вычисленные коэффициенты регрессии.

Обозначим через x_{ju} значение кодированной переменной x_j ($j = 0, 1, 2, 3$) в u -м эксперименте. Тогда коэффициенты регрессии для ОЦКП определяются по следующей формуле:

$$b_q = \frac{\Sigma_{Y,q}}{\Sigma_q}, \quad (5)$$

где

$$\Sigma_{Y,q} = \begin{cases} \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1 u} Y_u & \text{при } q = j_1 \quad (j_1 = 0, 1, 2, 3); \\ \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1 u} x_{j_2 u} Y_u & \text{при } q = n + 1, \dots, n_q - n \\ & (j_1 = 1, \dots, n - 1, \quad j_2 = j_1 + 1, \dots, n); \\ \sum_{u=1}^{n_t} (x_{j_1 u}^2 - \beta) Y_u & \text{при } q = n_q - n + 1, \dots, n_q \\ & (j_1 = 1, \dots, n); \end{cases}$$

Таблица 1. Расширенная матрица ОЦКП при $n = 3$ для целевой функции Y_1 в случае монопольного источника излучения и $\sigma_v = 10k_0$ при отклонении основных параметров на 20 %

u	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1^2-\beta$	$x_2^2-\beta$	$x_3^2-\beta$	$Y_{1,u}$	$\delta_{p,u}, \%$
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0.27	0.27	0.27	5.415	0.064
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	0.27	0.27	0.27	4.053	0.206
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	0.27	0.27	0.27	8.088	0.289
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	0.27	0.27	0.27	6.478	1.075
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	0.27	0.27	0.27	3.856	2.169
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	0.27	0.27	0.27	3.882	0.242
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	0.27	0.27	0.27	5.794	0.385
8	1	1	1	1	1	1	1	0.27	0.27	0.27	5.41	0.194
9	1	-1.215	0	0	0	0	0	0.747	-0.73	-0.73	5.718	1.84
10	1	1.215	0	0	0	0	0	0.747	-0.73	-0.73	4.47	1.507
11	1	0	-1.215	0	0	0	0	-0.73	0.747	-0.73	3.706	1.43
12	1	0	1.215	0	0	0	0	-0.73	0.747	-0.73	6.215	0.244
13	1	0	0	-1.215	0	0	0	-0.73	-0.73	0.747	5.99	0.771
14	1	0	0	1.215	0	0	0	-0.73	-0.73	0.747	4.621	1.819
15	1	0	0	0	0	0	0	-0.73	-0.73	-0.73	4.774	1.207
Σ_q	15	10.954	10.954	10.954	8	8	8	4.364	4.364	4.364		
b_q	5.231	-0.442	1.06	-0.617	-0.082	0.327	-0.204	0.165	0.075	0.308		

$$\Sigma_q = \begin{cases} \sum_{u=1}^{n_t} x_{0u} = n_t & \text{при } q = 0; \\ \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1 u} = n_y + 2\alpha^2 & \text{при } q = 1, \dots, n; \\ \sum_{u=1}^{n_t} x_{j_1 u} x_{j_2 u} = n_y & \text{при } q = n+1, \dots, n_q - n; \\ \sum_{u=1}^{n_t} (x_{j_1 u}^2 - \beta) = n_y(1-\beta)^2 + 2(\alpha^2 - \beta)^2 + (2n-1)\beta^2 & \text{при } q = n_q - n + 1, \dots, n_q. \end{cases}$$

Значения коэффициентов b_q позволяют определить степень влияния факторов: чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние оказывает соответствующий данному коэффициенту фактор. При этом, если $b_q > 0$, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если $b_q < 0$ — уменьшается. Так, в примере, представленном в табл. 1, видно, что параметр оптимизации уменьшается благодаря линейным воздействиям 1-го и 3-го факторов ($b_1 < 0$ и $b_3 < 0$), а также взаимодействию второго фактора с остальными ($b_4 < 0$ и $b_6 < 0$).

4. Проверка адекватности модели регрессии

После построения уравнения регрессии (4) необходимо провести проверку его адекватности. В случае вычислительного эксперимента, когда нет данных для расчета дисперсии воспроизводимости и основная серия опытов проводится без параллельных, применяется модификация F -критерий Фишера [26], заключающаяся в сравнении дисперсии адекватности $s_{ад}^2$ и дисперсии относительно среднего $s_{ср}^2$ с помощью формулы:

$$F = \frac{s_{ср}^2}{s_{ад}^2}, \quad (6)$$

где

$$s_{ад}^2 = \frac{1}{n_t - (n_q + 1)} \sum_{u=1}^{n_t} (Y_u - p_u)^2;$$

$$s_{ср}^2 = \frac{1}{n_t - 1} \sum_{u=1}^{n_t} (Y_u - \bar{Y})^2, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n_t} \sum_{u=1}^{n_t} Y_u.$$

Значение F , полученное в (6), сравнивается с табличным критическим значением $F_{кр, \alpha_F}(f_1, f_2)$ для чисел степеней свободы $f_1 = n_t - 1$ и $f_2 = n_t - (n_q + 1)$ и необходимого уровня значимости α_F (см., например, [14, 27]). Модель является адекватной, если

$$F > F_{кр, \alpha_F}(f_1, f_2).$$

При этом, чем больше полученное значение F , тем более эффективно уравнение регрессии (4). В настоящей работе применяется 5 % уровень значимости ($\alpha_F = 5\%$), тогда $F_{кр, \alpha_F}(14, 5) = 2.96$.

5. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии

Если модель является адекватной, то проводится проверка значимости коэффициентов построенного уравнения регрессии (4). При вычислительном эксперименте в результате проведения одних и тех же опытов (расчетов при одних и тех же значениях параметров) получается тот же результат в отличие от натурных испытаний, поэтому для проверки значимости коэффициентов регрессии в настоящей работе применяется t -критерий Стьюдента [27, 28]. Для этого определяется среднеквадратичное отклонение полинома p от расчетных данных y , полученных в опытных точках u :

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{n_t} |p_u - Y_u|^2}{n_t}}. \quad (7)$$

Далее вычисляются оценки дисперсий коэффициентов квадратичной модели по следующей формуле:

$$\sigma_{b_q} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\sum q}}, \quad q = 0, 1, \dots, n_q.$$

По известной таблице распределения Стьюдента (см., например, [27, 28]) определяется критическое значение $t_{кр, \alpha_t}(f_1) = t_{табл}$ исходя из числа степеней свободы f_t и принятого уровня значимости α_t и вычисляются критические величины

$$b_{кр, q} = t_{кр, \alpha_t}(f_t) \sigma_{b_q}$$

для четырех типов коэффициентов b_q . Если

$$b_{кр, q} \leq |b_q|, \quad (8)$$

то коэффициент b_q считается значимым, в противном случае, он признается незначимым и исключается из уравнения регрессии (4). В настоящей работе $\alpha_t = 5\%$ и $t_{кр, \alpha_t}(14) = 2.14$.

6. Поиск оптимальных значений параметров системы

В случае когда проверка показала адекватность модели, уравнение регрессии (4), полученное методом ОЦКП, можно исследовать любыми аналитическими методами, позволяющими определить оптимальное значение квадратичного полинома p , а, следовательно, и целевой функции Y в зависимости от поставленных целей задачи (например, определение наибольшего или наименьшего значения, нахождение точек локального максимума или минимума в исследуемой области и пр.).

В настоящей работе определяются наибольшее и наименьшее значения функций отклика. Для этого последовательно определим все точки, подозрительные на экстремум:

- внутри области. Для этого, поскольку $n = 3$, исследуется функция трех переменных внутри трехмерной области $[-1, 1]^3$;
- на границах области $[-1, 1]^3$, когда одна из кодированных переменных фиксирована и принимает граничные значения $x_j = \pm 1$ ($j = 1, 2, 3$), а остальные две меняются на отрезке $[-1, 1]$, т.е. исследуются функции двух переменных внутри двумерных областей $[-1, 1]^2$;
- на границах областей $[-1, 1]^2$, когда две кодированные переменные фиксированы и принимают граничные значения $x_{j_1}, x_{j_2} = \pm 1$ ($j_1 \neq j_2 = 1, 2, 3$), а третья меняется на отрезке $[-1, 1]$, т.е. исследуются функции одной переменной.

С помощью уравнения регрессии (4) вычисляются значения полинома p_j ($j = 1, 2$) в найденных точках. К данному множеству значений p_j присоединяется множество значений $Y_{j, u}$, полученных ранее в результате

вычислительного эксперимента для $j = 1, 2$ и $u = 1, \dots, 8$. Максимальное и минимальное значения всех элементов данного множества дает наибольшее $Y_{j, \max}$ (соответствующий набор кодированных параметров обозначим как $\bar{x}_{j, \max} = (x_{j, 1}^{(\max)}, x_{j, 2}^{(\max)}, x_{j, 3}^{(\max)})$) и наименьшее $Y_{j, \min}$ (набор кодированных параметров — $\bar{x}_{j, \min} = (x_{j, 1}^{(\min)}, x_{j, 2}^{(\min)}, x_{j, 3}^{(\min)})$) значения для целевой функции Y_j .

Далее диапазон изменения значений функции Y_j ($j = 1, 2$) представляется в виде $[Y_{j, \min}, Y_{j, \max}] \equiv Y_{j, \text{cp}} \pm \delta Y_j$, где $Y_{j, \text{cp}}$ — среднее значение функции Y_j . Если $\delta Y_j \leq \delta_{\text{fix}}$, то делается вывод, что целевая функция Y_j нечувствительна, а при $\delta Y_j > \delta_{\text{fix}}$ — чувствительна к изменению параметров. При этом, чем выше δY_j , тем больше степень влияния параметров на всю систему.

7. Результаты численного анализа

Вычислительные эксперименты проводились для средних значений волнового радиуса $(ka_1)_0 = 1$, отношения радиусов $(a_2/a_1)_0 = 1$ (при расчетах значение a_1 было фиксировано, менялось только значение a_2), расстояния $(\delta l)_0 = 3a_1$. В случае монополюсного источника излучения $d_{Ms} = 10a_1$. Для функции отклика Y_2 нормированное давление определялось в точке M_c , симметричной точке M_s относительно плоскости Oyz , т.е. за системой сфер в точке $M_c = (d_{Ms}, 0, 0)$. Исследовались случаи сфер с четырьмя различными значениями комплексной полной проводимости $\sigma_v = 0, k_0, 10k_0, 100k_0$ ($\sigma \equiv \sigma_1 = \sigma_2$). Для численной реализации метода ОЦКП разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64). Программная реализация техники разложения по мультиполям, необходимая для решения системы уравнений (1), представлена в работе [22].

При выборе числа усечения рядов при разложении n_{tr} применялся подход [29], при котором сравниваются два последовательных значения суммы искомого ряда Σ при $n = n_i$ и n_{i+1} , и, как только их относительная погрешность

$$\delta = \left| \frac{\Sigma_{n_i} - \Sigma_{n_{i+1}}}{\Sigma_{n_i}} \right| \cdot 100\%$$

становится меньше δ_0 , дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение $n_{tr} = n_i$. В настоящей работе принималось $\delta_0 = 1\%$, тогда в случае монополюсного источника имеем $n_{tr} = 10$, а для плоской волны — $n_{tr} = 9$.

Результаты, полученные с помощью представленной численной техники для различных значений σ , приведены в табл. 2 для случая монополюсного источника излучения, а в табл. 3 — для плоской волны. Данные таблицы содержат коэффициенты полинома (4), для которых не выполняется условие (8), значения числа Фишера F , полученные по формуле (6), среднеквадратичные отклонения полинома от расчетных данных σ_Y (7), наборы кодированных параметров $\bar{x}_{\min}$ и $\bar{x}_{\max}$, в которых целевая функция Y достигает наименьшего и наибольшего значений, диапазон значений целевой функции

Таблица 2. Результаты вычислительного эксперимента для монопольного источника излучения при $d_{M_S} = 10a_1$

σ	j	$b_q < b_{кр,q}$	F	σ_{Y_j}	$\bar{x}_{j,min}$	$\bar{x}_{j,max}$	$Y_{j,cp} \pm \delta_{Y_j}$	$\delta_{Y_j}, \%$
0	1	b_7, b_9	228.724	0.012	$(-1, -1, -1)$	$(1, 1, 1)$	0.725 ± 0.526	72.574
	2	b_8, b_9	31.16	0.003	$(1, 1, 1)$	$(-0.12, -1, -1)$	0.956 ± 0.054	5.617
k_0	1	$b_5 - b_7, b_9$	96.283	0.021	$(1, -1, 1)$	$(-1, 1, -1)$	1.626 ± 0.509	31.312
	2	$b_4, b_6 - b_8$	29.178	0.005	$(1, 1, 0.438)$	$(-1, -1, -1)$	0.772 ± 0.083	10.713
$10k_0$	1	b_8	164.836	0.054	$(0.903, -1, 0.191)$	$(-1, 1, -1)$	5.866 ± 2.222	37.878
	2	$b_1, b_4, b_6 - b_8$	21.969	0.013	$(1, 1, -1)$	$(1, -1, 1)$	0.583 ± 0.183	31.3
$100k_0$	1	b_4, b_8	124.762	0.078	$(0.428, -1, 0.386)$	$(-1, 1, -1)$	6.989 ± 2.756	39.437
	2	$b_4, b_6 - b_9$	20.971	0.016	$(1, 1, -1)$	$(1, -1, 1)$	0.58 ± 0.215	37.121

Таблица 3. Результаты вычислительного эксперимента для плоской волны при $\theta_{PW} = \pi/2, \varphi_{PW} = 0$

σ	j	$b_q < b_{кр,q}$	F	σ_{Y_j}	$\bar{x}_{j,min}$	$\bar{x}_{j,max}$	$Y_{j,cp} \pm \delta_{Y_j}$	$\delta_{Y_j}, \%$
0	1	$b_3 - b_9$	9.218	0.063	$(-1, -1, 1)$	$(1, 1, -0.369)$	0.725 ± 0.525	72.364
	2	$b_2 - b_6, b_8, b_9$	2.823	0.011	$(-0.263, 1, 0.564)$	$(1, 1, -1)$	1.015 ± 0.052	5.103
k_0	1	b_3, b_5, b_6, b_8, b_9	208.49	0.015	$(1, -1, 0.773)$	$(-1, 1, 0.751)$	1.752 ± 0.521	29.741
	2	$b_2 - b_4, b_6, b_8$	18.294	0.006	$(0.059, 0.957, 0.227)$	$(1, 1, -1)$	0.98 ± 0.055	5.635
$10k_0$	1	b_4, b_6, b_7, b_9	47.6	0.067	$(1, -1, -1)$	$(-1, 1, 1)$	5.116 ± 1.285	25.122
	2	b_1, b_3, b_4, b_6, b_8	36.45	0.007	$(0.026, 1, 0.118)$	$(1, -1, -1)$	0.947 ± 0.087	9.21
$100k_0$	1	$b_4 - b_9$	30.002	0.093	$(1, -1, -1)$	$(-1, 1, 1)$	5.888 ± 1.338	22.75
	2	b_1, b_3, b_4, b_6, b_8	32.428	0.008	$(0.009, 1, 0.143)$	$(1, -1, -1)$	0.944 ± 0.098	10.411

$[Y_{min}, Y_{max}]$, представленный в виде $Y_{cp} \pm \delta_{Y_j}$, и отклонение от среднего значения $\delta_{Y_j}, \% = \delta_{Y_j} / Y_{cp} \cdot 100\%$, выраженное в процентах.

На рис. 2–5 приведены зависимости целевых функций от факторов в случае когда один из них изменяется, а два остальных имеют фиксированное значение в центральной точке, для разных значений величины σ при воздействии сферической волны от монопольного источника излучения (рис. 2, 3) или плоской волны (рис. 4, 5). Представлены результаты расчета полинома (4) (толстые линии) с коэффициентами, вычисленными методом ОЦКП по формуле (5), и данные вычислительного эксперимента (символы), определенные для Y_1 по формуле (3) (рис. 2, 4), а для Y_2 — по формуле (2) (рис. 3, 5).

Анализ результатов, представленных в табл. 2 и 3, позволяют сделать следующие выводы:

1. Регрессионная модель (4) является адекватной во всех случаях кроме случая плоской волны при $\sigma = 0$ для целевой функции Y_2 . На рис. 2–5 наглядно видно, что уменьшение значения F ведет к росту различий между уравнением регрессии и расчетными данными по полной модели. Случай, когда модель является неадекватной по F -критерию Фишера, представлен на рис. 5(a). Отметим, что во всех рассмотренных случаях среднее квадратичное отклонение полинома от расчетных данных является небольшим — $\sigma_Y < 0.093$.
2. В случае монопольного источника излучения построенный полином (4) содержит большее число значимых коэффициентов, чем в случае плоской волны. Кроме того, степень влияния факторов в данном случае также выше. Следовательно, наибольшее влияние факторов имеет место в случае воздействия сферической волны от монопольного

источника излучения. Причем, поскольку плоскую волну можно рассматривать как предельный случай сферической волны при удалении монопольного источника излучения от системы, то степень данного влияния будет уменьшаться при $d_{M_S} \rightarrow \infty$. Отметим также, что в случае, когда коэффициенты при нелинейных слагаемых являются незначимыми, соответствующая кривая для данного фактора имеет линейный вид.

3. При отклонении основных параметров на 20 % отклонение целевых функций $\delta_{Y_j}, \% < 20\%$ ($j = 1, 2$), когда система является нечувствительной к изменению параметров, имеет место для функции Y_2 при $\sigma = 0$ и $\sigma = k_0$ в случае монопольного источника излучения и для всех рассмотренных σ в случае плоской волны. При этом функция полного сечения рассеяния (Y_1) является наиболее чувствительной при $\sigma = 0$, т.е. в случае системы с идеально жесткими сферами; для монопольного источника при $\sigma = k_0$ чувствительность системы падает, но при дальнейшем росте σ начинает расти, а для плоской волны наблюдается падение чувствительности системы с ростом значения σ .
4. Наименьшее значение целевая функция Y_2 внутри трехмерной параметрической области достигает только в случае $\sigma = k_0$. Во всех остальных случаях обе целевые функции достигают наименьшее и наибольшее значения на границе данной области.

Следует заметить, что на рис. 2–5 видно, что с увеличением значения σ кривые стремятся к кривым, построенным для случая идеально мягких сфер, которые изображены тонкими пунктирными линиями на рис. 2(z)–5(z).

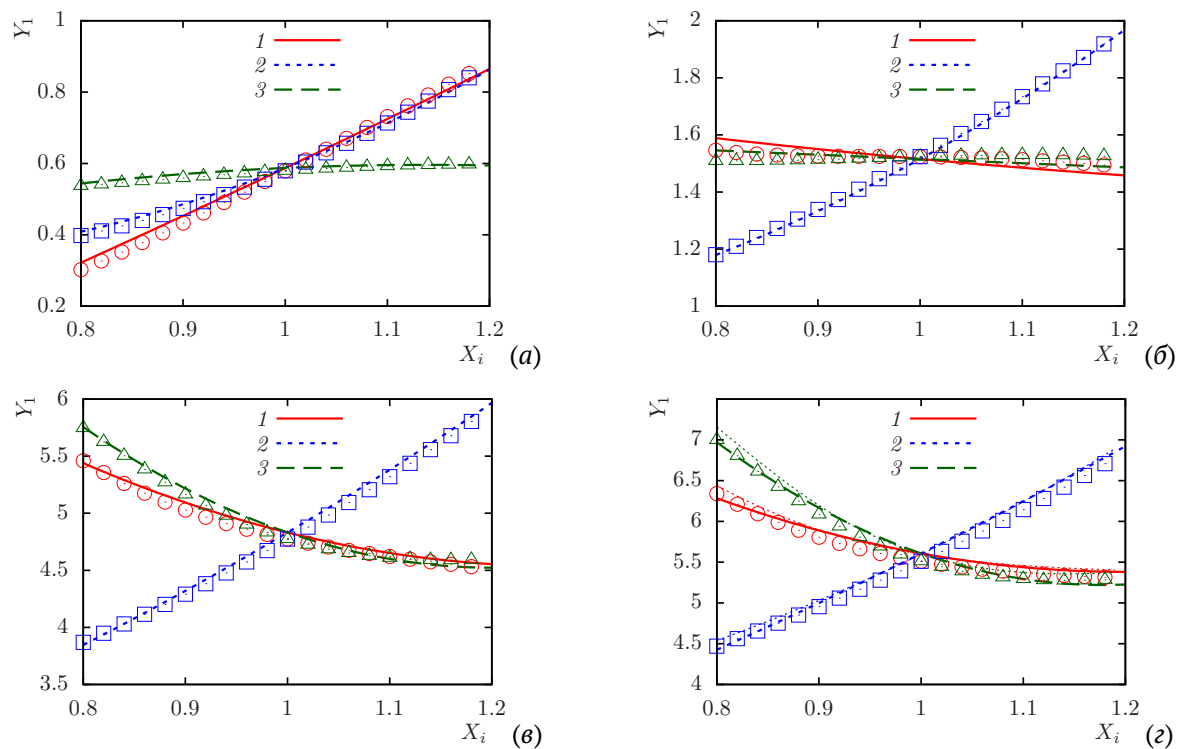


Рис. 2. Зависимость функции Y_1 от факторов X_i в случае монопольного источника излучения для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

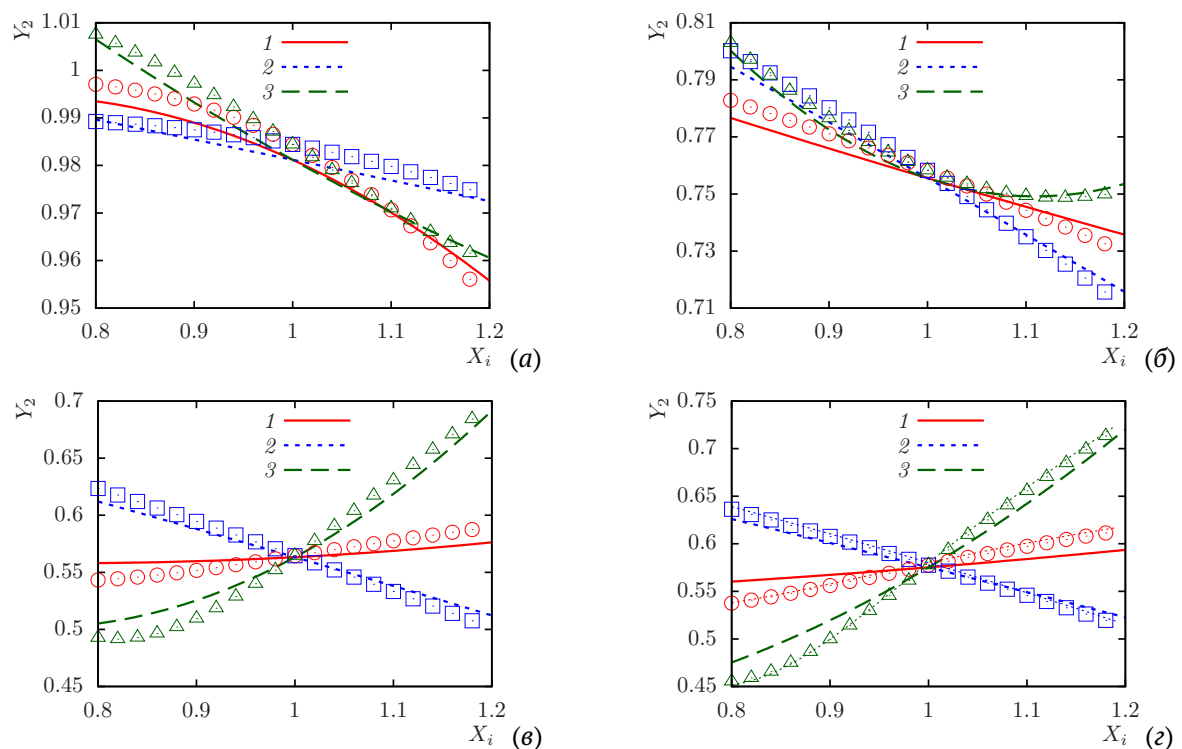


Рис. 3. Зависимость функции Y_2 от факторов X_i в случае монопольного источника излучения для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

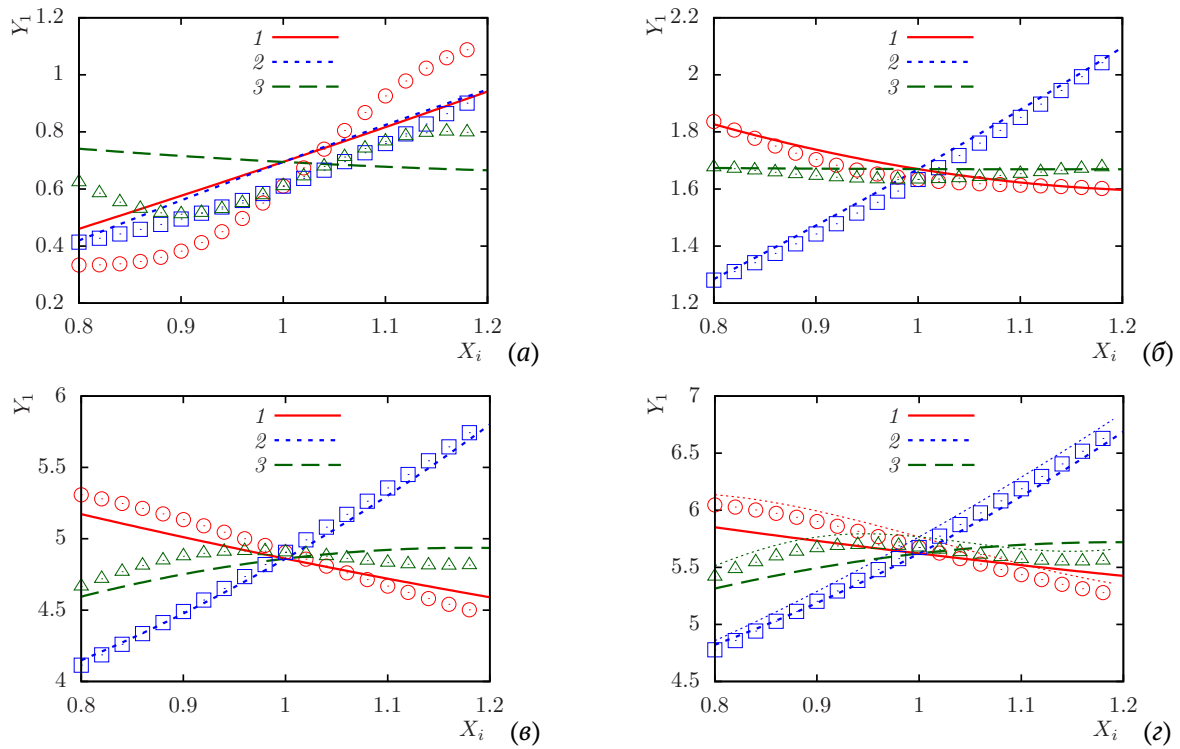


Рис. 4. Зависимость функции Y_1 от факторов X_i в случае плоской волны для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

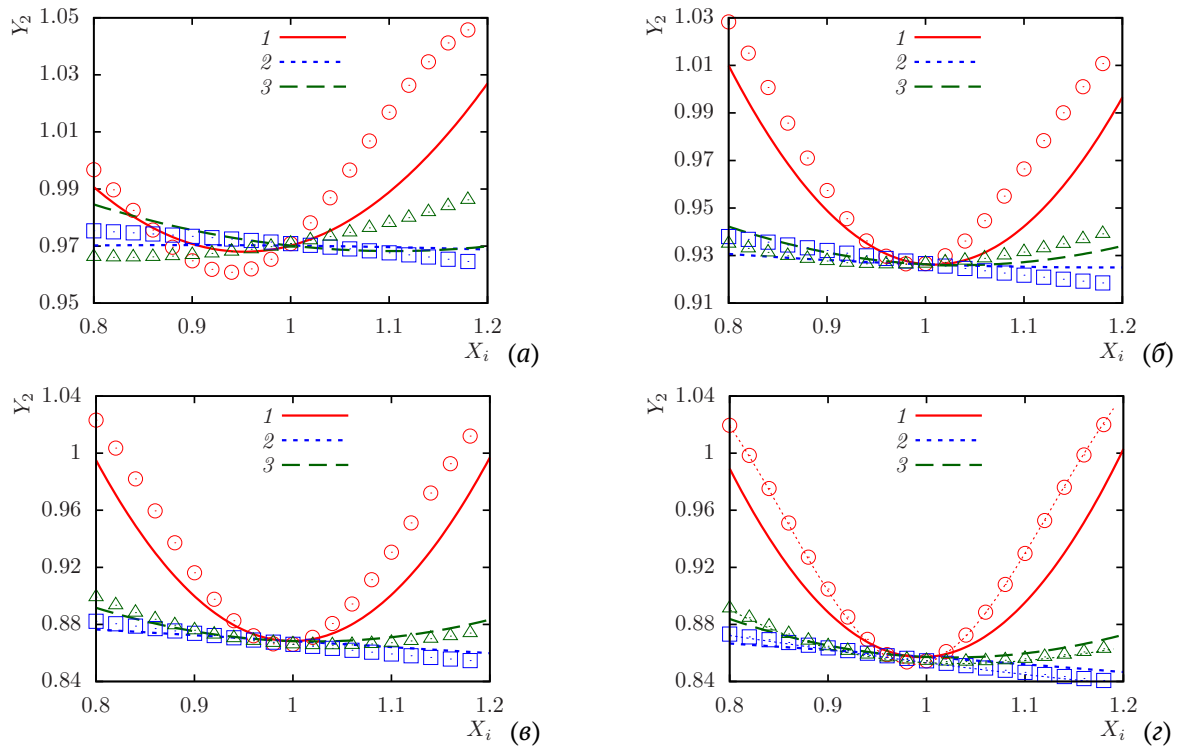


Рис. 5. Зависимость функции Y_2 от факторов X_i в случае плоской волны для $\sigma = 0$ (а); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 10k_0$ (в); $\sigma = 100k_0$ (г): 1 – X_1 меняется, $X_2 = X_3 = 1$; 2 – X_2 меняется, $X_1 = X_3 = 1$; 3 – X_3 меняется, $X_1 = X_2 = 1$. Толстые линии – полином (4); символы – данные вычислительного эксперимента; тонкие пунктирные линии – предельный случай при $\sigma \rightarrow \infty$

На рис. 6 и 7 представлены диаграммы распределения нормированного давления p/p_{in} в плоскости $y = 0$ при наборе кодированных параметров, соответствующих найденным минимальному $\bar{x}_{1,min}$ и максимальному $\bar{x}_{1,max}$ значениям целевой функции Y_1 , определяющей полное сечение рассеяния системы, при $\sigma = 0, k_0, 100k_0$ в случае монополюсного источника излучения и плоской волны соответственно.

Видно, что в случае идеально жестких сфер ($\sigma = 0$) зоны наибольшего повышения давления наблюдаются перед сферами, т.е. волна практически полностью отражается от сфер в случае минимального значения полного сечения рассеяния, либо незначительно пропускает волну в случае максимального значения данной характеристики. В остальных случаях зоны повышения давления наблюдаются в области между сферами (вдоль оси x), а при максимальном значении полного сечения рассеяния σ_s за системой сфер видна также область сильного понижения давления. При $\sigma > 0$ также видно, что при минимальном значении σ_s система сфер лучше пропускает волну, чем при максимальном значении.

8. Заключение

Проведен численный анализ рассеяния волны на системе, состоящей из двух звуконепроницаемых сфер с различной комплексной полной проводимостью их поверхности. Для этого метод ОЦКП реализован для трехфакторного вычислительного эксперимента, где в качестве факторов были выбраны три основных параметра системы: волновой радиус, отношение радиусов сфер и характерное расстояние между центрами сфер. Для полученного уравнения регрессии проведены проверки значимости коэффициентов с помощью t -критерия Стьюдента и адекватности модели с помощью F -критерия Фишера. Найдены параметры, при которых целевые функции (полное сечение рассеяния и нормированное давление в определенной точке пространства) достигают наибольшего и наименьшего значений.

В результате применения представленной численной методики были получены следующие результаты. В случае воздействия сферической волны от монополюсного источника излучения нелинейное влияние факторов более выражено, чем в случае плоской волны. Целевая функция, характеризующая нормальное давление в точке, является нечувствительной к изменению параметров в случае воздействия плоской волны, а также в случае монополюсного источника излучения для малых величин комплексной проводимости σ . Целевая функция, характеризующая полное сечение рассеяния, является сильно чувствительной в случае системы с идеально жесткими сферами. Практически во всех случаях наибольшее и наименьшее значения целевые функции достигают на границе трехмерной параметрической области изменения факторов.

Диаграммы распределения давления, построенные для найденных оптимальных значений факторов, позволили выявить зоны повышенного или пониженного давления. Отметим, что за сферами наблюдаются зоны,

где давление близко по значению к давлению падающей волны. Аналогичная картина имеет место в случае одиночной сферы, где появляется так называемое пятно Пуассона [30] (освещение теневой зоны за сферой). Причем для системы двух сфер такие зоны имеют место как в случае плоской волны, так и для сферической волны от монополюсного источника излучения. Однако наложение волн приводит к тому, что за сферами может появиться также зона резкого падения давления, как хорошо видно, например, на рис. 6(б), (в) при наибольшем значении целевой функции.

В дальнейшем планируется проведение исследований для случая звукопроницаемых сфер, поскольку результаты, полученные в настоящей работе, показали, что значение комплексной полной проводимости сильно меняет общую картину, особенно значительно различие в предельных случаях идеально жестких и мягких сфер, к которым близки случаи звукопроницаемых сфер, а именно, капель жидкости в газе и газовых пузырьков в жидкости (вне резонансной области).

Список литературы / References

- [1] Embleton TFW. Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field. *J. Acoust. Soc. Am.* 1962;**34**(11):1714–1720. DOI: 10.1121/1.1909104
- [2] Марневская ЛА. К дифракции плоской скалярной волны на двух сферах. *Акустический журнал*. 1968;**14**(3):427–434. Marnevskaia LA. On diffraction of a plane scalar wave on two spheres. *Akusticheskij Zhurnal*. 1968;**14**(3):427–434 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1968_3_427-434.pdf
- [3] Марневская ЛА. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах. *Акустический журнал*. 1969;**15**(4):579–583. Marnevskaia LA. To scattering of a plane wave on two acoustic rigid spheres. *Akusticheskij Zhurnal*. 1969;**15**(4):579–583 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf
- [4] Bruning JH, Lo YT. *Multiple scattering by spheres*. UIUC EM Lab Technical Report, Illinois; 1969. 169 p. https://wccchew.ece.illinois.edu/chew/Efficient_Addition_Theorem/BL_MSUR.pdf
- [5] New R, Eisler TJ. Acoustic radiation from multiple spheres. *Journal of Sound and Vibration*. 1972;**22**(1):1–17. DOI: 10.1016/0022-460x(72)90839-5
- [6] Peterson B, Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.* 1974;**56**(3):771–780. DOI: 10.1121/1.1903325
- [7] Gaunaurd GC, Huang H, Strifors H. Acoustic scattering by a pair of spheres. *J. Acoust. Soc. Am.* 1995;**98**(1):495–507. DOI: 10.1121/1.414447
- [8] Лебедев АВ, Хилько АИ. Интегральный поперечник рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах. *Акустический журнал*. 1997;**43**(5):661–667. Lebedev AV, Hil'ko AI. The Integral Scattering Cross-Section of a Plane Acoustic Wave from Two Dose Impedance Spheres. *Akusticheskij Zhurnal*. 1997;**43**(5):661–667 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf
- [9] Gabrielli P, Mercier-Finidori M. Acoustic Scattering By Two Spheres: Multiple Scattering And Symmetry Considerations. *Journal of Sound and Vibration*. 2001;**241**(3):423–439. DOI: 10.1006/jsvi.2000.3309
- [10] Шарфарец БП. Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде. *Акустический журнал*. 2005;**51**(5):672–681. EDN: HRYEMF Sharfarets BP. Method for solving the problems of multiple scattering by several bodies in a homogeneous unbounded medium. *Acoustical Physics*. 2005;**51**(5):578–586. DOI: 10.1134/1.2042578

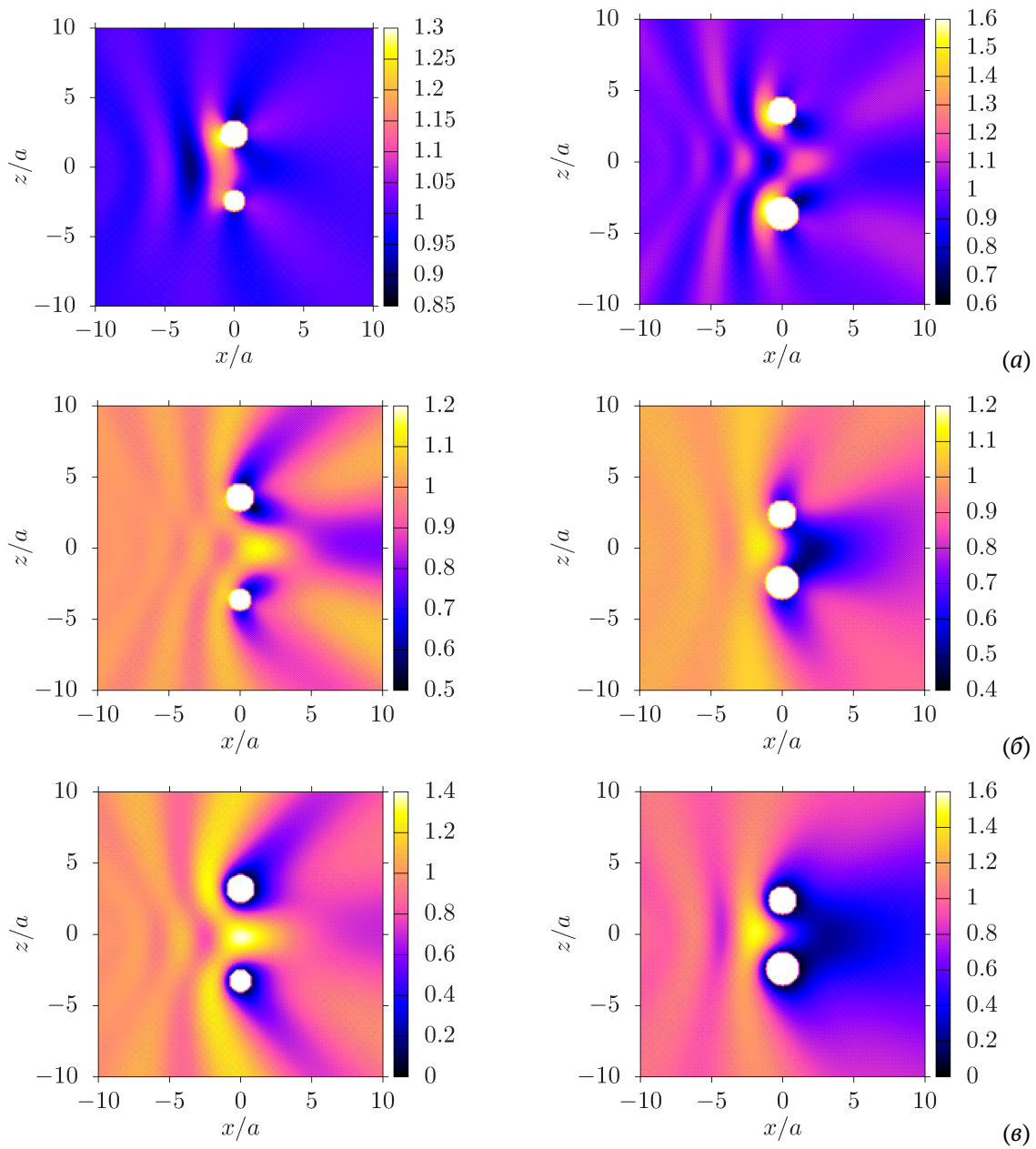


Рис. 6. Диаграмма распределения нормированного давления p/p_{in} в плоскости $y = 0$ в случае монопольного источника излучения при $\bar{x}_{1,min}$ (слева) и $\bar{x}_{1,max}$ (справа), представленным в табл. 2: $\sigma = 0$ (a); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 100k_0$ (в)

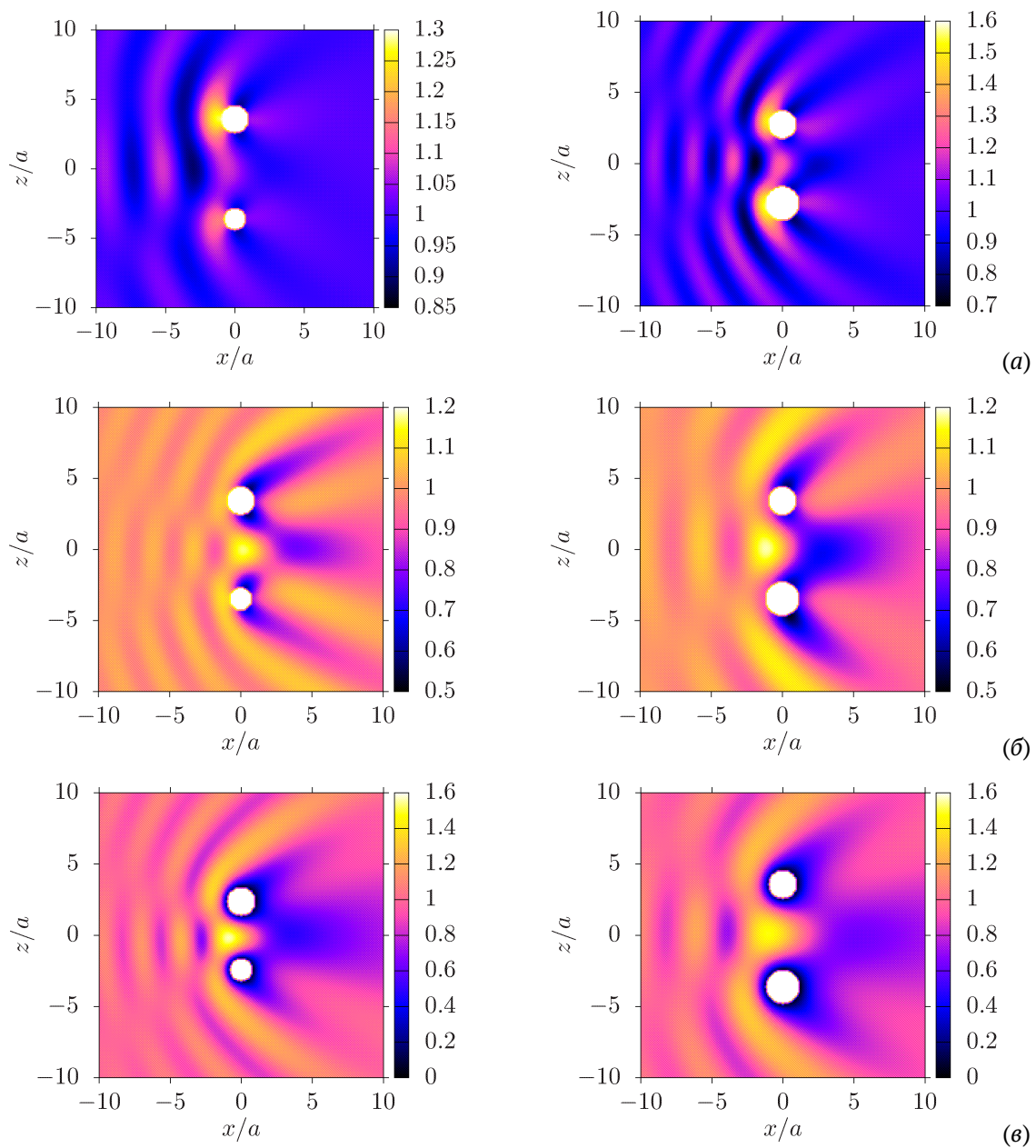


Рис. 7. Диаграмма распределения нормированного давления p/p_{in} в плоскости $y = 0$ в случае плоской волны при $\bar{x}_{1,min}$ (слева) и $\bar{x}_{1,max}$ (справа), представленным в табл. 3: $\sigma = 0$ (a); $\sigma = k_0$ (б); $\sigma = 100k_0$ (в)

- [11] Румелиотис ДА, Котсис АД. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус. *Акустический журнал*. 2007;**53**(1):38–49.
EDN: HYPTWR
Roumeliotis JA, Kotsis AD. Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius. *Acoustical Physics*. 2007;**53**(1):33–43.
DOI: 10.1134/S1063771007010046
- [12] Насибуллаева ЭШ. Исследование акустического рассеяния от пары звуконепропускаемых сфер при внешнем воздействии. *Многофазные системы*. 2019;**14**(1):44–51.
Nasibullaeva ESh. Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence. *Multiphase Systems*. 2019;**14**(1):44–51 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.006
- [13] Насибуллаева ЭШ. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор). *Многофазные системы*. 2021;**16**(3–4):88–104.
Nasibullaeva ESh. Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review). *Multiphase Systems*. 2021;**16**(3–4):88–104 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2021.3.013
- [14] Володарский ЕТ, Малиновский БН, Туз ЮМ. *Планирование и организация измерительного эксперимента*. Киев: Высшая школа; 1987. 280 с.
Volodarsky ET, Malinovsky BN, Tuz YuM. *Designing and Organizing of a Measurement Experiment*. Kiev: Vysshaya shkola; 1987. 280 p. (in Russian).
- [15] Петков АА. *Ортогональное центральное композиционное планирование в технике и электрофизике высоких напряжений: учеб.-метод. пособие*. Харьков: НТУ «ХПИ»; 2007. 61 с.
Petkov AA. *Orthogonal Central Compositional Designing in Technology and High Voltage Electrophysics: Educational and Methodological Manual*. Kharkov: NTU «KhPI»; 2007. 61 p. (in Russian).
- [16] Реброва ИА. *Планирование эксперимента: учеб. пособие*. Омск: СибАДИ; 2010. 105 с.
Rebrova IA. *Designing an Experiment: Tutorial*. Omsk: SibADI; 2010. 105 p. (in Russian).
- [17] Казаков АВ. *Планирование эксперимента и измерение физических величин: учеб. пособие*. Пермь: Изд-во Перм. нац. иссл. политехн. ун-та; 2014. 89 с.
Kazakov A.V. *Designing an Experiment and Measuring Physical Quantities: Tutorial*. Perm: Izdatel'stvo Permskogo natsional'nogo issledel'skogo politekhnicheskogo universiteta; 2014. 89 p. (in Russian).
- [18] Oyejola BA, Nwanya JC. Selecting the Right Central Composite Design. *International Journal of Statistics and Applications*. 2015;**5**(1):21–30.
<http://article.sapub.org/10.5923.j.statistics.20150501.04.html>
- [19] Владимиров ВС. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука; 1981. 512 с.
Vladimirov VS. *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcell Dekker Incorporated; 1971. 427 p.
- [20] Gumerov NA, Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. *J. Acoust. Soc. Am.* 2002;**112**(6):2688–2701.
DOI: 10.1121/1.1517253
- [21] Корн Г, Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука; 1974. 832 с.
Korn GA, Korn TH. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York: McGraw Hill Book Company; 1968. 943 p.
- [22] Насибуллаева ЭШ. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопропускаемых сфер в трехмерном пространстве. *Вычислительные технологии*. 2022;**27**(2):19–36.
Nasibullaeva ESh. Simulation of Acoustic Scattering from a Set of Sound-permeable Spheres in 3D Space. *Computational Technologies*. 2022;**27**(2):19–36. (in Russian).
DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [23] Насибуллаева ЭШ. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопропускаемых сфер в трехмерном пространстве. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022;**15**(4):383–398.
Nasibullaeva ESh. Numerical Analysis of Multiple Scattering of an Acoustic Wave on a Set of Sound-permeable Spheres in 3D Space. *Computational Continuum Mechanics*. 2022;**15**(4):383–398 (in Russian).
DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [24] Иванов ЕА. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах*. Минск: Наука и техника; 1968. 584 с.
Ivanov YeF. *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*. Washington: National Aeronautics and Space Administration; 1970. 597 p.
- [25] Насибуллаев ИШ. Использование свободных программ для обработки и визуализации результатов научных исследований. *Многофазные системы*. 2021;**16**(2):58–71.
Nasibullayev ISH. Application of Free Software for Processing and Visualization of Scientific Research Results. *Multiphase Systems*. 2021;**16**(2):58–71 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2021.2.009
- [26] Блохин АВ. *Теория эксперимента. Курс лекций. В 2х частях. Часть 2*. Минск: Белорусский государственный университет; 2002. 67 с.
Blokhin AV. *Theory of experiment. Lecture course. In 2 parts. Part 2*. Minsk: Belarusian State University; 2002. 67 p. (in Russian)
- [27] Дюерфель К. *Статистика в аналитической химии*. Москва: Мир; 1969. 247 с.
Doerffel K. *Statistik in der analytischen Chemie*. Leipzig: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie; 1966. 211 p. (in Deutsch)
- [28] Адлер ЮП, Маркова ЕВ, Грановский ЮВ. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий*. Москва: Наука; 1976. 254 с.
Adler UP, Markova EV, Granovskiy UV. *Experiment design with selecting the optimal conditions*. Moscow: Nauka; 1976. 280 p. (in Russian)
- [29] Duda RO, Martens WL. Range dependence of the response of a spherical head model. *J. Acoust. Soc. Am.* 1998;**104**(5):3048–3058.
DOI: 10.1121/1.423886
- [30] Гринченко ВТ, Вовк ИВ, Мацыпура ВТ. *Основы акустики*. Киев: Наукова думка; 2009. 867 с.
Grinchenko VT, Vovk IV, Macypura VT. *Basics of acoustics*. Kiev: Naukova Dumka; 2009. 867 p. (in Russian).

Сведения об авторах / Information about the Authors

Эльвира Шамилевна Насибуллаева

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Elvira Sh. Nasibullaeva

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russia

elvira@anrb.ru

ORCID: 0000-0003-1242-9800



Моделирование динамики капли, движущейся в плоском канале с вязким барьером

Д.Р. Галеева✉, В.Н. Киреев

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: lara_wood@mail.ru

В статье исследуется влияние высоковязкой области на деформацию одиночной капли, движущейся в потоке термовязкой жидкости с аномальной зависимостью вязкости от температуры. Численное моделирование производится с помощью метода фазового поля, состоящего из системы уравнений Кана–Хилларда–Навье–Стокса, дополненной уравнением для температурного поля. Представлены результаты численного моделирования для ламинарного течения с установившимся температурным полем в плоском канале. Проанализировано влияние вязкого барьера, расположенного посередине канала, на скорость капли и ее деформацию для трех капиллярных чисел. Составлены графики зависимости скорости капли от капиллярного числа. Показано, что для всех случаев капиллярных чисел образующийся в канале вязкий барьер придает капле дополнительное ускорение. Для всех расчетов была рассчитана общая нормированная масса системы по времени, показано, что максимальная погрешность не превышает 5 %. Приведены изображения формы капли на выходе из канала для разных случаев вязкого барьера. Показано, что если капиллярное число большое, то в капле могут образоваться вкрапления окружающей жидкости, однако если капля движется в канале с вязким барьером, то высоковязкая область не позволяет образовываться в капле вкраплениям из другой жидкости за счет более интенсивной деформации капли. Установлено, что относительная скорость капли в потоке аномально-вязкой жидкости выше, чем в потоке жидкости с постоянной минимальной вязкостью. Представлены графики зависимости относительной скорости капли от параметра аномалии жидкости для трех капиллярных чисел. Показано, что чем больше параметр аномалии жидкости, тем выше относительная скорость капли. Установлено, что образующийся в канале вязкий барьер придает капле ускорение и увеличивает относительную скорость капли.

Ключевые слова: модель фазового поля, уравнение Кана–Хилларда–Навье–Стокса, аномально-вязкая жидкость, поверхностное натяжение, движение капли, ламинарное течение

Modeling the dynamics of a drop moving in a plane channel with a viscous barrier

D.R. Galeeva✉, V.N. Kireev

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: lara_wood@mail.ru

This article examines the influence of a highly viscous region on the deformation of a single droplet moving in a thermoviscous fluid flow with an anomalous viscosity-temperature dependence. Numerical modeling is performed using the phase field method, consisting of the Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system of equations, supplemented by an equation for the temperature field. The results of numerical modeling for laminar flow with a steady-state temperature field in a flat channel are presented. The influence of a viscous barrier located in the middle of the channel on the droplet velocity and its deformation is analyzed for three capillary numbers. Graphs of the droplet velocity dependence on the capillary number are plotted. It is shown that for all cases of capillary numbers, the viscous barrier formed in the channel imparts additional acceleration to the droplet. For all calculations, the total normalized mass of the system was calculated over time, and the maximum error is shown to not exceed 5%. The droplet shape at the channel exit is shown for different cases of a viscous barrier. It is shown that if the capillary number is high, inclusions of the surrounding liquid can form in the droplet. However, if the droplet moves through a channel with a viscous barrier, the high-viscosity region prevents the formation of inclusions of other liquids due to more intense droplet deformation. It is established that the relative velocity of a droplet in a flow of an anomalously viscous liquid is higher than in a flow of liquid with a constant minimum viscosity. Graphs of the droplet's relative velocity versus the liquid anomaly parameter are presented for three capillary numbers. It is shown that the higher the liquid anomaly parameter, the higher the relative velocity of the droplet. It is established that the viscous barrier formed in the channel accelerates the droplet and increases its relative velocity.

Keywords: phase field model, Cahn–Hilliard–Navier–Stokes equation, anomalously viscous liquid, surface tension, droplet motion, laminar flow

1. Введение

Исследование свойств anomalously-вязких жидкостей в последние годы вызывает интерес у множества ученых из самых разных областей науки — от нефтепереработки до медицины [1–4]. В отличие от обычных жидкостей, где вязкость монотонно убывает при увеличении температуры, у anomalously-вязких сред вязкость изменяется немонотонно, а именно: в определенном температурном диапазоне она может резко увеличиться, а затем уменьшиться. К таким жидкостям можно отнести растворы полимеров и мицеллярные растворы, anomalously-вязкие нефти с высоким содержанием серы, а также термочувствительные гидрогели. При определенных температурных условиях в таких жидкостях возникает интересное явление — вязкий барьер [5]. Это локализованная область с высокой вязкостью, которая может оказывать влияние на движение основного потока жидкости вплоть до закупорки. В существующих работах исследовалось воздействие вязкого барьера на скорость однофазной жидкости, однако не изучалось влияние вязкого барьера на двухфазные системы, в частности, на деформацию капли, движущейся в канале. В настоящей работе численно моделируется движение капли, движущейся в потоке anomalously-вязкой жидкости с вязким барьером в плоском канале, с целью исследования влияния вязкого барьера на скорость и деформацию капли.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский канал длиной L и высотой $2H$, в который втекает жидкость при постоянной температуре T_{in} . На стенках канала происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна $T_{out} < T_{in}$. После того, как в канале установятся ламинарное течение и постоянное температурное поле, в него помещается круглая капля радиусом R_0 и с температурой T_d . Схема задачи и основные обозначения представлены на рис. 1. Предполагается, что слои жидкости являются несжимаемыми и не смешиваются. Вязкость капли равна μ_d , несущей жидкости — μ_s , плотности одинаковы $\rho_d = \rho_s = \rho$.

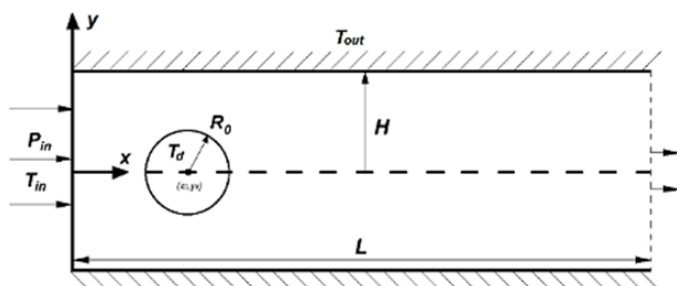


Рис. 1. Капля в плоском канале

Проведем численное моделирование ламинарного течения anomalously-вязкой жидкости в плоском канале под действием перепада давления Δp .

Для моделирования поставленной задачи в безразмерном виде в декартовой системе координат использовалась система уравнений Кана–Хилларда–Навье–Стокса [6], дополненная уравнением для температуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -Eu \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{Re \cdot Ca} \eta(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -Eu \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(\varphi, T) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{Re \cdot Ca} \eta(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{Pe} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{Pe_\varphi} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right], \\ \eta &= \varphi^3 - \varphi - Cn \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right], \end{aligned}$$

$$\mu(\varphi, T) = \frac{1 + \varphi \lambda}{2} + \frac{1 - \varphi}{2} \mu_{\min} \left[1 + A e^{-B(T-1/2)^2} \right],$$

где ρ — плотность; $\mathbf{u}(u, v)$ — поле скорости; p — давление; $\mu(\varphi, T)$ — вязкость среды; T — температура; φ — параметр порядка для отслеживания межфазной границы; η — химический потенциал; $\lambda = \mu_d / \mu_s$ — отношение вязкости капли к вязкости жидкости; $\mu_{\min}$ — значение вязкости несущей жидкости при $T = T_{in}$; $B > 0$ — параметр, характеризующий толщину вязкого барьера; A — параметр аномалии жидкости, характеризующий изменение вязкостей.

Безразмерные физические параметры — число Рейнольдса Re , число Эйлера Eu , капиллярное число Ca , число Пекле Pe , диффузионное число Пекле Pe_φ и число Кана Cn :

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho U_0 L_0}{\mu_s}, \quad Eu = \frac{P_0}{\rho U_0^2}, \quad Ca = \frac{\sqrt{2k} \mu_s U_0}{3 \sigma}, \\ Pe &= \frac{U_0 L_0}{\chi}, \quad Pe_\varphi = \frac{U_0 L_0}{M}, \quad Cn = \frac{k}{L_0^2}, \end{aligned}$$

где $L_0 = H$, $U_0 = \sqrt{P_0 / \rho}$, $P_0 = P_{in}$ — характерные длина, скорость, давление соответственно; k — положительная

константа, связанная с толщиной межфазной границы; σ — поверхностное натяжение; χ — коэффициент температуропроводности; M — подвижность межфазной границы (функция мобильности).

Безразмерные граничные условия:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & p(0, y, t) &= 1, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, & T(0, y, t) &= 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} &= \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, & p(L, y, t) &= 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} &= \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, & \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} &= 0, \\ u(x, 1, t) &= v(x, 1, t) = 0, & \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=1} &= 0, \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=1} &= \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, & \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} &= -\text{Nu} \cdot T, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} &= \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \\ &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=0} = 0. \end{aligned}$$

Безразмерные начальные условия:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= v(x, y, 0) = 0, \\ p(x, y, 0) &= 0, \quad T(x, y, 0) = 0, \\ \varphi(x, y, t) &= \\ &= \begin{cases} -1, & 0 \leq t < t_0, \\ \text{th} \left(\frac{a - \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\sqrt{2k}} \right), & t = t_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\text{Nu} = (h \cdot H)/K$ — безразмерное число Нуссельта, характеризующее интенсивность теплообмена на стенках канала; h — коэффициент теплоотдачи; K — коэффициент теплопроводности; $a = R_0/H$ — относительный радиус капли, определяющийся как отношение начального радиуса капли к половине высоты канала; t_0 — время установления развитого течения и постоянного

температурного поля, после которого в канал помещается капля.

Средняя скорость капли рассчитывалась по формуле

$$U_d = L/t_d,$$

где t_d — время, за которое фронтальная точка капли достигла координаты $x = L$.

Относительная скорость капли:

$$U_{dn} = U_d/V_{\max},$$

где $V_{\max}$ — максимальная осевая скорость жидкости в канале без капли.

Исследование проведено для случая, когда в канал с горячей жидкостью помещается горячая капля $T_d = T_{in}$. В работе исследовано влияние трех значений параметра аномалии жидкости $A = 0; 5$ и 10 на скорость капли.

3. Результаты моделирования

Для численного моделирования движения капли в плоском канале разработана компьютерная программа [7]. Валидация данной программы проводилась путем сравнения результатов с точным решением в одномерном случае [8], а также с экспериментальными данными. Для расчетов использовалась сетка 1020×51 ; безразмерное время моделирования $\text{time} = \Delta t \cdot N_t$, где шаг по времени $\Delta t = 10^{-3}$, а N_t — общее число временных шагов. Безразмерные параметры имеют следующие фиксированные значения: $\text{Re} = 1.5$, $\text{Eu} = 1$, $\text{Cn} = 0.0016$, $\text{Re}_\varphi = 10^{15}$, $\Delta P = 5$, $a = 0.8$. Капиллярное число варьировалось в диапазоне $\text{Ca} = 0.1 \div 10$, параметр аномалии $B = 0.01$.

Изменения относительной скорости капли U_{dn} от времени с различными значениями параметра A для трех капиллярных чисел Ca представлены на рис. 2. Видно, что для всех Ca в случае отсутствия вязкого барьера ($A = 0$) относительная скорость капли монотонно выходит на постоянное значение, а в случаях, когда в канале есть вязкий барьер ($A = 5$ и $A = 10$), относительная скорость капли изменяется немонотонно.

При малом капиллярном числе $\text{Ca} = 0.1$ капля сохраняет круглую установившуюся форму даже в случае

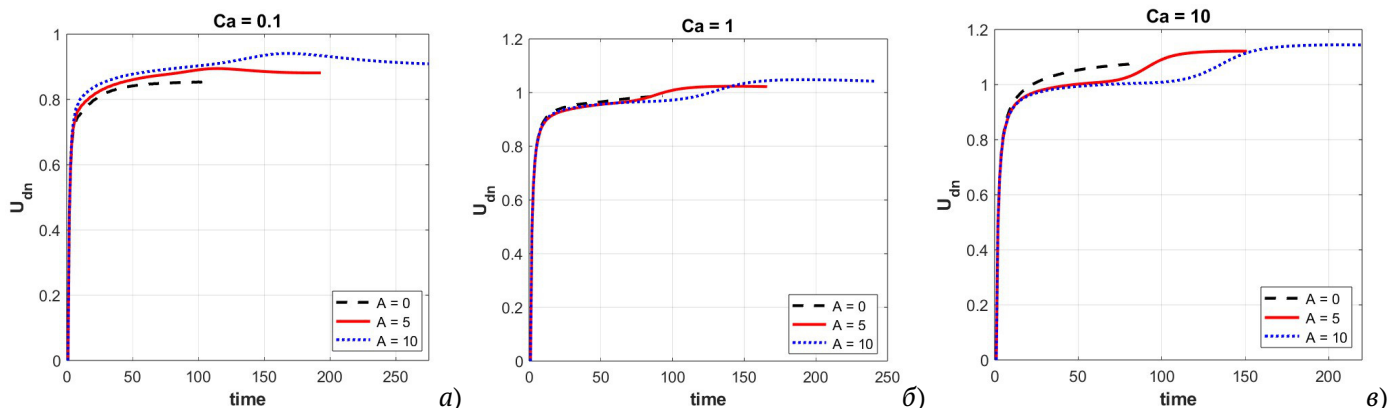


Рис. 2. Изменение относительной скорости капли U_{dn} с капиллярным числом а) $\text{Ca} = 0.1$, б) $\text{Ca} = 1$, в) $\text{Ca} = 10$

ярко-выраженного вязкого барьера ($A = 10$). При этом относительная скорость капли сначала возрастает, затем снижается и выходит на установившееся значение (рис. 2(а)). Такая немонотонность вызвана деформацией капли в вязком барьере. При входе в высоковязкую область круглая капля начинает вытягиваться (см. рис. 3), приобретая форму капли Тейлора, и ее скорость возрастает. После пересечения вязкого барьера капля снова становится круглой, потому что силы поверхностного натяжения достаточно велики, возрастает сопротивление капли несущему потоку, поэтому скорость капли падает до значения, которое было до входа в высоковязкую область.

При увеличении капиллярного числа $Ca = 1$ в случаях с вязким барьером ($A = 5$, $A = 10$) скорость капли меняется по-другому. До того как капля попадет в высоковязкую область, ее относительная скорость выходит на некоторое установившееся значение, а после прохож-

дения капель вязкого барьера скорость увеличивается и становится выше, чем скорость капли в канале без вязкого барьера (рис. 2(б), (в)). Такое ускорение связано с тем, что, находясь в высоковязкой области, капля испытывает максимальное сопротивление движению. После выхода капли из вязкого барьера сопротивление резко уменьшается, тем самым придавая капле ускорение. При больших капиллярных числах капля деформируется в вязком барьере, а после выхода из барьера силы поверхностного натяжения придают капле эллиптическую форму, которая более аэродинамична (см. рис. 4), что тоже приводит к ускорению.

При большом капиллярном числе $Ca = 10$ форма капли сильно изменяется (см. рис. 5). Сначала капля вытягивается, ее границы отдаляются от стенок, на задней стенке капли образуется прогиб. Когда капля попадает в высоковязкую область, задние концы капли замыкаются, а внутри капли образуется замкнутая область,

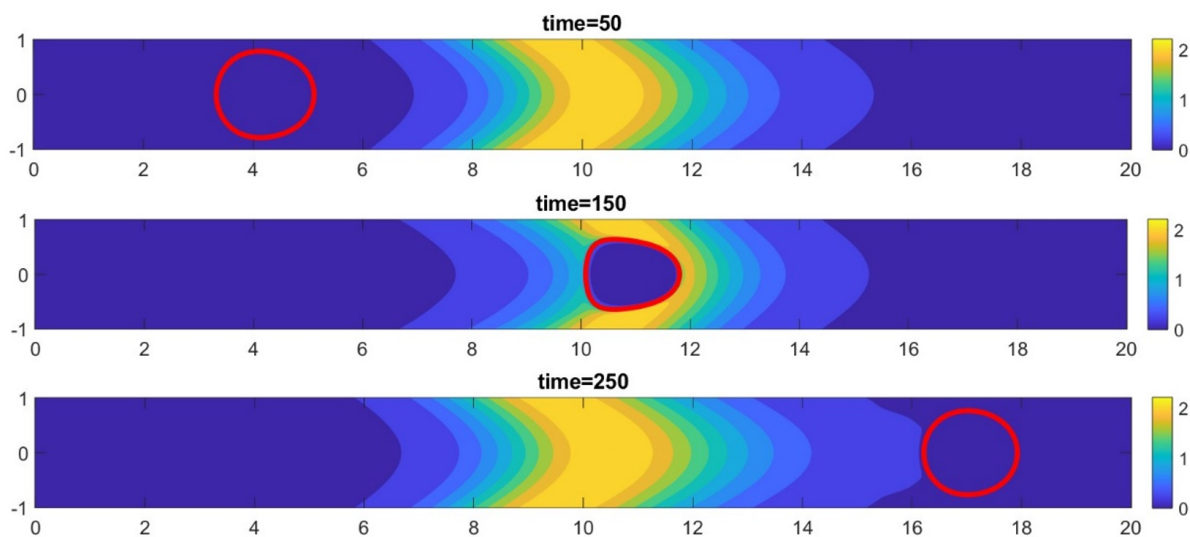


Рис. 3. Форма горячей капли с $Ca = 0.1$ в разные моменты времени в канале с вязким барьером $A = 10$

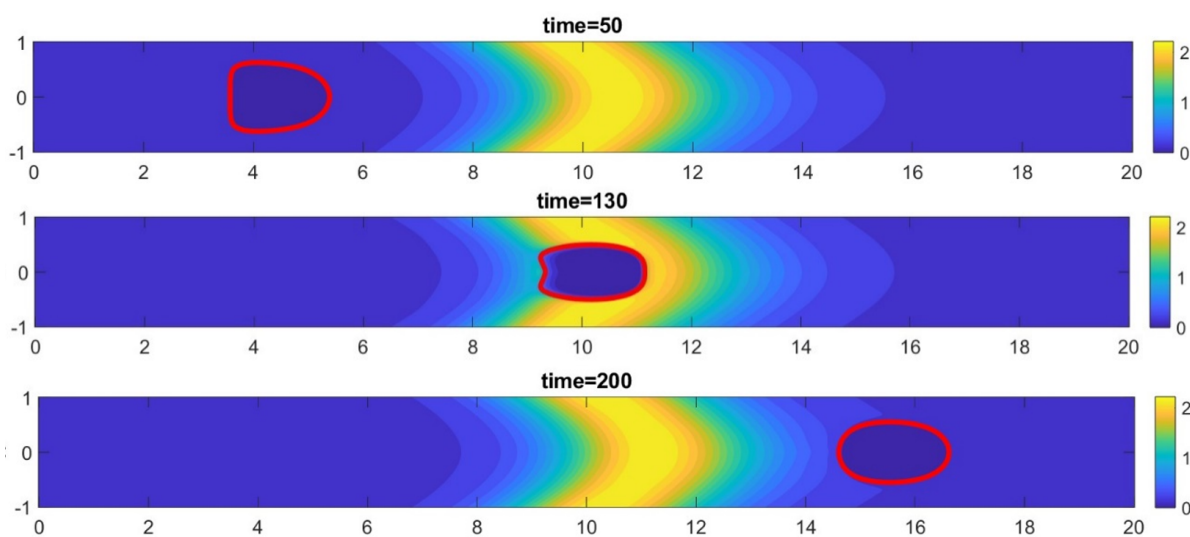
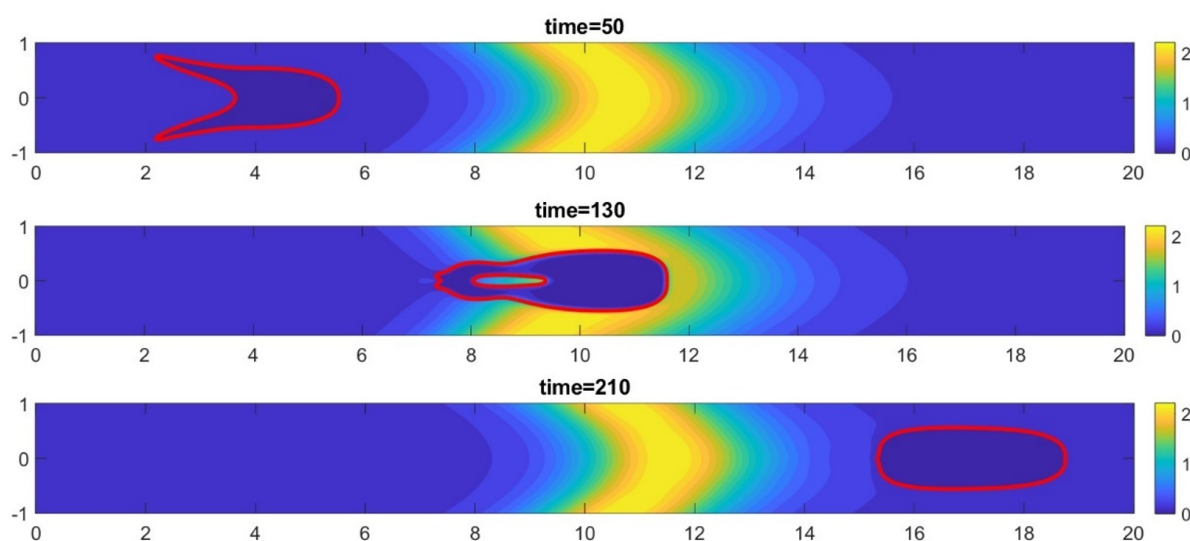


Рис. 4. Форма горячей капли с $Ca = 1$ в разные моменты времени в канале с вязким барьером $A = 10$

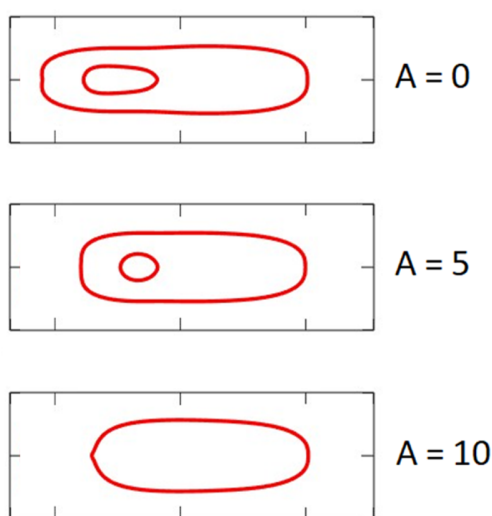
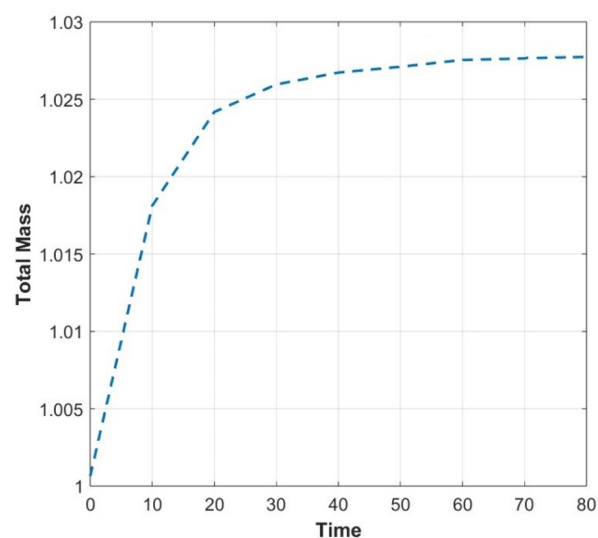

 Рис. 5. Форма горячей капли с $Ca = 10$ в разные моменты времени в канале с вязким барьером $A = 10$

состоящая из жидкости окружающей среды. После прохождения капель вязкого барьера эта замкнутая область диффундирует и исчезает. К моменту выхода из канала капля содержит в себе только жидкость капли. Таким образом, вязкий барьер влияет на форму капли, сплющивая края капли и не позволяя образоваться в капле замкнутой области из другой жидкости. На рис. 6 показаны формы капли с $Ca = 10$ на выходе из канала для случая без вязкого барьера, с небольшим вязким барьером и с большим. Видно, что при отсутствии вязкого барьера ($A = 0$) в капле остается вкрапление из несущей жидкости, при $A = 5$ это вкрапление уменьшается, а при $A = 10$ вязкий барьер не позволяет такому вкраплению из другой жидкости образоваться в капле.

На рис. 7 представлен график общей нормированной массы всей системы по времени для $Ca = 0.1$ при

$A = 0$. Видно, что для выбранной расчетной сетки 1020×51 погрешность не превышает 3 %. Также были проведены расчеты для всех остальных параметров Ca и A и максимальная погрешность не превышает 5 %.

На рис. 8 приведены графики относительной скорости капли U_{dn} для разных капиллярных чисел и различных параметров аномалии A . Видно, что во всех случаях чем больше A , тем выше относительная скорость капли. В канале без вязкого барьера относительная скорость капли самая низкая для всех капиллярных чисел. В канале с самым большим вязким барьером ($A = 10$) — самая высокая относительная скорость капли. Видно, что чем больше вязкий барьер, тем более сильное ускорение он придает капле: вязкий барьер выступает как своеобразная «вязкая пушка», придавая капле ускорение и увеличивая ее скорость.


 Рис. 6. Формы капли на выходе из канала при $Ca = 10$ для разных параметров

 Рис. 7. Общая нормированная масса системы по времени при $A = 0$, $Ca = 0.1$

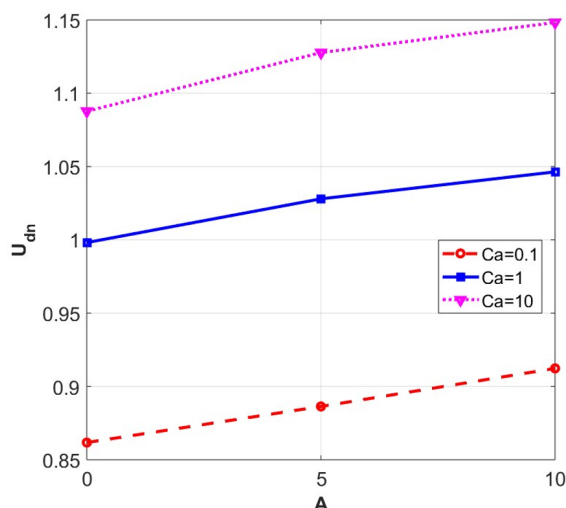


Рис. 8. Относительная скорость горячей капли на выходе из канала для разных Ca и A

4. Заключение

По результатам моделирования показано, что относительная скорость капли в потоке аномально-вязкой жидкости выше, чем в потоке жидкости с постоянной минимальной вязкостью. Образующийся в канале вязкий барьер придает капле дополнительное ускорение. Чем выше параметр аномалии вязкости, тем интенсивнее ускорение капли и выше относительная скорость капли. Показано, что можно регулировать скорости капель, движущихся в каналах с аномально-вязкой жидкостью, задавая им определенную первоначальную температуру.

Список литературы / References

- [1] Laurano R, Boffito M. Thermosensitive micellar hydrogels as vehicles to deliver drugs with different wettability. *Frontiers in Bioengineering*

and Biotechnology. 2020;**8**:00708. DOI: 10.3389/fbioe.2020.00708

- [2] Домнина ЮМ, Жаворонок ЕС, Суслов ВВ, Решетняк ДВ, Кедик СА. Термообратимое повышение вязкости при нагревании водных растворов блок-сополимеров этилен- и пропиленоксида, не сопровождающееся образованием геля. *Высокомолекулярные соединения (серия А)*. 2022;**64**(3):163–170.
Domnina YM, Zhavoronok ES, Suslov VV, Reshetnyak DV, Kedik SA. Thermoreversible Growth Of Viscosity Upon Heating Of The Aqueous Solutions Of Ethylene Oxide-Propylene Oxide Block Copolymers Unaccompanied By Gelation. *Polymer Science, Series A*. 2022;**64**(3):163–170. (in Russian) DOI: 10.31857/S2308112022200019
- [3] Киреев ВН, Урманчиев СФ. Течение жидкостей с температурной аномалией вязкости. *Труды Института механики Уфимского научного центра РАН*. 2003;**3**:232–245.
Kireev VN, Urmancheev SF. Flow of liquids with temperature anomaly of viscosity. *Proceedings of the Institute of Mechanics of Ufa Branch of RAS*. 2003;**3**:232–245. (in Russian) DOI: 10.21662/uim2003.1.017
- [4] Мухутдинова АА, Низамова АД, Киреев ВН, Урманчиев СФ. Экспериментальная установка для исследования устойчивости течения жидкости. *Многофазные системы*. 2024;**19**(1):35–39.
Mukhutdinova AA, Nizamova AD, Kireev VN, Urmancheev SF. Experimental setup for studying the stability of fluid flow. *Multiphase systems*. 2024;**19**(1):35–39. (in Russian) DOI: 10.21662/mfs2024.1.005
- [5] Nizamova AD, Kireev VN, Urmancheev SF. The Influence Of The Annular Gap Thickness On The Critical Reynolds Number During The Flow Of Thermoviscous Liquids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024;**45**(5):2119–2127. DOI: 10.1134/S1995080224602315
- [6] Badalassi VE, Cenicer HD, Banerjee S. Computation of multiphase systems with phase field models. *Journal of computational physics*. 2003;**190**(2):371–397. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00280-8
- [7] Галеева ДР, Киреев ВН, Галеева ГЯ, УУНТ. Программа для расчета скорости капли в плоском канале методом фазового поля. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614539. 2025.
Galeeva DR, Kireev VN, Galeeva GYa, UUS&T. Program for calculating the velocity of a drop in a flat channel using the phase field method. Certificate of state registration of the computer program No. 2025614539. 2025. (in Russian) EDN: UPVEMH
- [8] Галеева ДР, Киреев ВН, Ковалева ЛА, Мусин АА. Консервативная численная схема для решения уравнения Кана–Хилларда. *Прикладная математика и механика*. 2025;**89**(1):136–148.
Galeeva DR, Kireev VN, Kovaleva LA, Musin AA. A Conservative Numerical Method For Solving The Cahn-Hilliard Equation. *Applied Mathematics And Mechanics*. 2025. 2025;**89**(1):136–148. (in Russian) DOI: 10.31857/S0032823525010101

Сведения об авторах / Information about the Authors

Галеева Дилара Рустэмовна

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Dilara R. Galeeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

lara_wood@mail.ru

ORCID: 0009-0004-5263-3691

Киреев Виктор Николаевич

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Victor N. Kireev

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

kireevvn@uust.ru

ORCID: 0000-0002-3550-6541



Экспериментальное исследование влияния поверхностно-активного вещества на динамику бидисперсного пузырькового кластера

В.А. Архипов, С.А. Басалаев, К.В. Костюшин, А.С. Усанина✉

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

E-mail: usaninaanna@mail.ru

Представлены результаты экспериментального исследования процесса всплытия кластера, состоящего из пузырьков двух разных размеров, в неограниченном стенками объеме жидкости при наличии и в отсутствие поверхностно-активного вещества в жидкой среде в диапазонах чисел Рейнольдса $Re = 200 \div 600$ и $Re = 0.1 \div 50$. Проанализировано влияние концентрации поверхностно-активного вещества и параметров кластера (начальной концентрации, соотношения количества и диаметров пузырьков в кластере) на качественную картину всплытия и скорость бидисперсного пузырькового кластера. Экспериментально установлено условие существования кластера бидисперсных пузырьков.

Ключевые слова: бидисперсный пузырьковый кластер, поверхностно-активное вещество (ПАВ), качественная картина всплытия, скорость кластера, экспериментальное исследование

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 22-79-10028,

<https://rscf.ru/project/22-79-10028>

Experimental study of the surfactant effect on the dynamics of bidispersed bubble cluster

V.A. Arkhipov, S.A. Basalaev, K.V. Kostyushin, A.S. Usanina✉

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

E-mail: usaninaanna@mail.ru

The article presents the results of an experimental study of the process of ascent of a cluster consisting of bubbles of two different sizes in a volume of liquid unlimited by walls in the presence and absence of surfactant in a liquid medium in the ranges of Reynolds numbers $Re = 200 \div 600$ and $Re = 0.1 \div 50$. The effect of the concentration of the surfactant and the cluster parameters (initial concentration, ratio of the number and diameters of bubbles in the cluster) on the qualitative picture of ascent and the velocity of the bidispersed bubble cluster is analyzed. The condition for the existence of the cluster of bidispersed bubbles is experimentally established.

Keywords: bidispersed bubble cluster, surfactant, qualitative picture of ascent, cluster velocity, experimental study

1. Введение

Динамика пузырьковых течений является одним из актуальных вопросов в области исследований двухфазных потоков. Закономерности пузырьковых течений играют важную роль в ряде технологических процессов, охватывающих различные отрасли промышленности, такие как нефтегазовая, пищевая, химическая, косметическая и др. Одним из ключевых факторов, влияющих на динамику пузырькового двухфазного потока, является сила поверхностного натяжения на границе между газом и жидкостью. Для изменения свойств граничной поверхности в жидкие дисперсионные среды в различных

технологических процессах добавляют поверхностно-активное вещество (ПАВ). В частности, применение ПАВ способствует более эффективному извлечению углеводородов из нефтяных пластов, улучшает смешивание реагентов, ускоряет реакции и стабилизирует эмульсии в химических технологиях.

Физическое и математическое моделирование процессов, связанных с закономерностями движения деформируемых частиц дисперсной фазы (капель, пузырьков) при наличии ПАВ во внешней дисперсионной среде, проводилось преимущественно для случая движения одиночной частицы [1–10]. Известно, что введение

ПАВ в жидкость приводит к увеличению коэффициента сопротивления пузырька, в частности, при числах Рейнольдса $Re < 1$ в уравнении движения одиночного пузырька под действием силы Архимеда выражение для коэффициента сопротивления, полученное из решения Адамара–Рыбчинского, в присутствии ПАВ на поверхности раздела фаз газ–жидкость сменяется выражением Стокса для коэффициента сопротивления твердой сферы. При всплытии пузырька в жидкости, содержащей ПАВ, в кормовой части пузырька содержание ПАВ будет больше, чем в лобовой части, поскольку в процессе всплытия реализуется скольжение жидкости по поверхности пузырька, приводящее к накоплению молекул ПАВ в его тыловой части [11]. В результате этого вдоль поверхности пузырька появляются дополнительные тангенциальные силы F , стремящиеся уравновесить поверхностную плотность ПАВ путем торможения циркуляционной зоны (рис. 1).

Задача о закономерностях движения совокупности пузырьков, в том числе с учетом наличия ПАВ на граничной поверхности, рассматривалась, по большей части, для пристенного пузырькового течения [12–22], для которого существенное влияние оказывают процессы взаимодействия со стенками канала. Исследования закономерностей движения совокупности пузырьков в неограниченном объеме внешней жидкой среды проведены в единичных работах [23–25].

Наибольший прогресс достигнут в математическом моделировании процессов динамического взаимодействия деформируемых частиц дисперсной фазы. Анализ известных публикаций показывает, что для повышения достоверности результатов численных расчетов характеристик двухфазных потоков с деформируемыми частицами необходима база экспериментальных данных по динамике дисперсных частиц в присутствии и в отсутствие ПАВ на граничной поверхности.

В отдельную группу можно выделить исследования, посвященные закономерностям движения полидисперсных систем [26–28]. Влияние полидисперсности пузырькового потока и доли газовой фазы на коэффициент сопротивления группы пузырьков, стесненно всплывающих в воде при заданных давлениях, исследовано в работе [26]. Авторы использовали в качестве ПАВ этанол. Показано, что на коэффициент сопротивления отдельных пузырьков влияет полидисперсная природа пузырькового течения.

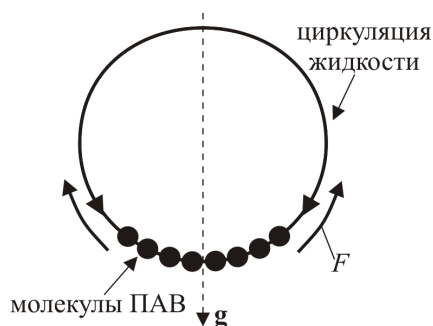


Рис. 1. Схема распределения ПАВ при всплытии пузырька

Влияние давления на коэффициент сопротивления отдельных пузырьков в полидисперсном пузырьковом потоке, движущемся в стесненных условиях в присутствии ПАВ, исследовалось в работе [27]. Размер пузырьков варьировался от 0.4 до 6 мм. Исследование проведено при значениях давления 0.14, 0.46, 2.4 МПа. В качестве газовой фазы использовался азот. Обнаружено, что коэффициенты сопротивления отдельных пузырьков уменьшаются по мере увеличения давления при постоянном содержании газовой фазы. При росте давления распределение пузырьков по размерам смещалось в сторону меньших размеров. Авторы [27] полагают, что пузырьки меньшего размера вызывают незначительные возмущения жидкости, что приводит к уменьшению сопротивления. В диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 46 \div 2089$ и Бонда $Bo = 0.02 \div 4.54$ авторами предложено эмпирическое выражение для коэффициента сопротивления, учитывающее давление во внешней среде.

Особое внимание уделяется бидисперсным пузырьковым кластерам [29–31], которые представляют собой системы, состоящие из пузырьков двух размеров. Для бидисперсных систем представляется возможным проанализировать экспериментальные данные по влиянию отдельных «элементарных» процессов на динамику множества частиц в двухфазном потоке, что является затруднительным для полидисперсных систем.

Авторы работы [29] подчеркивают необходимость учета содержания пузырьков разных размеров при прогнозировании гидродинамики бидисперсных систем. В работе путем численного моделирования показано, что бидисперсность может приводить к снижению коэффициента сопротивления группы пузырьков по сравнению с монодисперсным аналогом. Изменение сопротивления напрямую коррелирует с соотношением размеров крупных d_2 и мелких d_1 пузырьков (d_2/d_1). Авторы объясняют обнаруженный эффект изменением структуры потока жидкости внутри группы пузырьков. Мелкие пузырьки имеют тенденцию скапливаться в следах за крупными пузырьками, что приводит к снижению общего гидродинамического сопротивления всей системы.

Снижение коэффициента сопротивления группы бидисперсных пузырьков по сравнению с монодисперсными пузырьками также отмечено в работе [30, 31]. Показано, что в бидисперсных системах средняя скорость всплытия пузырьков больше, чем в монодисперсной системе при одинаковой концентрации пузырьков. Изменение сопротивления зависит от параметров пузырьковой системы.

Целью настоящей работы является экспериментальное выявление закономерностей процесса нестесненного всплытия кластера бидисперсных пузырьков воздуха в присутствии и в отсутствие ПАВ в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 0.1 \div 50$ и $Re = 200 \div 600$. Под нестесненным движением понимается движение частиц в неограниченной стенками среде. В работе использовалась оригинальная методика получения бидисперсного кластера пузырьков.

2. Описание экспериментальной установки и методики исследования

Исследование динамики бидисперсных пузырьковых кластеров проводилось на экспериментальной установке, основным элементом которой является заполненная жидкостью стеклянная ювета (300 × 300 × 900 мм) с плоскопараллельными стенками толщиной 15 мм. Формирование кластера обеспечивалось специализированным генератором пузырьков, а его эволюция фиксировалась с помощью системы высокоскоростной видеосъемки. Управление режимами работы установки осуществлялось автоматизированным модулем.

Выбор указанного размера юветы обусловлен выполнением условия отсутствия влияния стенок на динамику пузырькового кластера и основан на результатах расчетов, проведенных авторами работ [32, 33].

Бидисперсный пузырьковый кластер с начальной формой, близкой к сферической, формировался с использованием устройства [34], размещенного в нижней части экспериментальной юветы (рис. 2). Коллектор, соединенный с источником сжатого газа, оснащен перфорированной верхней крышкой с матрицей вертикальных трубок одинакового диаметра и высоты, расположенных на расстоянии 11 мм друг от друга. Для получения пузырьков двух фракций на трубки устанавливались сменные иглы двух калиброванных размеров. Управление режимом генерации для каждой трубки осуществлялось независимо через отдельный миниатюрный электропневмоклапан (ЭПК), подключенный к запрограммированному устройству управления. Данная схема обеспечила возможность вариации числа пузырьков в кластере, их пространственной координации и конфигурации.

Устройство управления ЭПК представляет собой систему взаимосвязанных блоков. В его состав входят: контроллер ESP-8266, адресные модули WS2812, релейные модули, коммутационные печатные платы для сопряжения релейных модулей с клапанами, 40-контактные шлейфы и блоки питания. Контроллер ESP-8266 выполняет функцию центрального узла по обработке управляющих сигналов и реализует беспроводной интерфейс управления установкой посредством соединения Wi-Fi, обеспечивая двустороннюю связь между пользователем и системой. Адресные модули WS2812 функционируют как преобразователи цифрового сигнала, получаемого от контроллера, в управляющие импульсы для релейных модулей, тем самым регулируя последовательность активации ЭПК. Для обеспечения надежной коммутации релейных модулей с ЭПК используются специализированные печатные платы, оснащенные 40-контактным ATA IDE разъемом и схемой подавления обратной электродвижущей силы. Соединение коммутационных плат с исполнительными механизмами ЭПК выполнено при помощи 40-контактных шлейфов, которые подключаются к ответной части ATA IDE разъема, расположенного на крышке коллектора для генерации кластера пузырьков. Электропитание устройства организовано от двух неза-

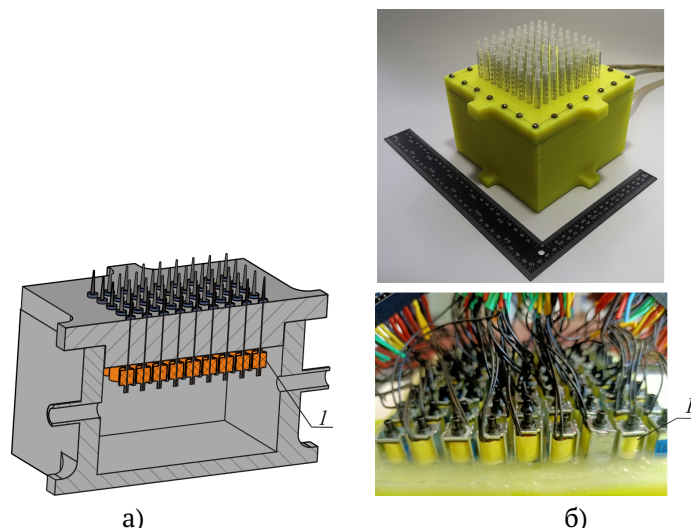


Рис. 2. Схема (а) и фотография (б) устройства для получения пузырькового кластера: 1 — электропневмоклапан

висимых источников постоянного тока напряжением 5 В. Первый источник обеспечивает питание контроллера ESP-8266, массива модулей WS2812 и релейных модулей, второй источник предназначен исключительно для питания ЭПК.

Для управления установкой генерации пузырькового кластера заданной конфигурации разработана программа для ЭВМ [35]. Программа формирования управляющих команд предназначена для создания файлов с управляющими командами по заданной трехмерной модели пузырькового кластера. Входные данные включают трехмерную модель кластера в формате stl и число слоев разбиения трехмерной модели. В программе реализована возможность перемещения, поворота и масштабирования исходных трехмерных моделей. Программа разработана с использованием технологий React, JSX, Next, tailwind css, Javascript и языков программирования C++, Python, HTML и JavaScript. Управление осуществляется через веб-интерфейс. Реализованы сервисные функции: диагностика и продувка ЭПК в ручном и полупавтоматическом режимах.

Система визуализации процесса всплытия включает два регулируемых светодиода GR1FLV460 со световым потоком 4000 лм и две скоростные камеры машинного зрения MER2-502-79U3C. Источники света расположены с противоположных сторон юветы: один находится спереди (со стороны видеокамеры), а второй — сзади (напротив видеокамеры). Первая камера отслеживает общую траекторию и скорость всплытия бидисперсного кластера, вторая — фиксирует форму и размер отдельных пузырьков в составе кластера.

В основе методики эксперимента лежит визуальное наблюдение за качественной картиной всплытия бидисперсного кластера пузырьков в зависимости от определяющих параметров с последующим измерением скорости всплытия: сначала бидисперсного кластера, а затем и образующихся при его расслоении монодисперсных кластеров.

Таблица 1. Физические характеристики используемых жидкостей

Жидкость	Плотность ρ , кг/м ³	Коэффициент динамической вязкости μ , Па·с
Дистиллированная вода	1000	$1.01 \cdot 10^{-3}$
Глицерин	1263	1.00

Таблица 2. Используемые поверхностно-активные вещества

Обозначение	Наименование ПАВ	Молярная масса ПАВ, г/моль	Тип ПАВ
ПАВ-1	Лаурилсульфат натрия	288.4	анионный
ПАВ-2	Диламид	287	неионогенный

Исследования проведены на системах «пузырьки воздуха–дистиллированная вода» и «пузырьки воздуха–глицерин» при температуре 20 °С. В настоящей работе при проведении экспериментов поддерживалась постоянная температура окружающей среды (воздуха). С учетом значительной температурной зависимости физических характеристик жидкости при проведении экспериментов осуществлялись измерения физических характеристик непосредственно до и после проведения каждого эксперимента. Характеристики жидкостей представлены в табл. 1.

Для получения сведений о влиянии ПАВ на закономерности всплытия пузырьков в дистиллированную воду вводился лаурилсульфат натрия, а в глицерин — диламид (табл. 2). Выбор лаурилсульфат натрия для воды обусловлен тем, что для анионного ПАВ скорость изменения коэффициента поверхностного натяжения в процессе всплытия пузырька больше чем для другого типа ПАВ [36]. Экспериментально выявлено, что тип ПАВ в глицерине не влияет на динамику пузырьков, поэтому главным требованием при выборе ПАВ являлось его хорошая растворимость в жидкости.

Плотность исследуемых жидкостей (чистых и их растворов с ПАВ) измерялась с помощью ареометра. Относительная погрешность измерений плотности составляла 0.1 %. Коэффициент динамической вязкости определялся на вискозиметре Гепплера. В данном случае относительная погрешность не превышала 2 %. В ходе эксперимента было выявлено, что присутствие ПАВ не оказывает влияния на величину динамической вязкости.

Скорость всплытия кластера пузырьков определялась времяпролетным методом (с относительной погрешностью 2 %) как скорость движения центра эквивалентной сферы, аппроксимирующей кластер. Положение центра сферы определялось на основе окружности минимального диаметра D , описывающей все пузырьки кластера.

Начальный диаметр кластера пузырьков D определялся как среднеарифметическое значений диаметров миделева сечения кластера в горизонтальном и вертикальном направлениях. Погрешность в нахождении диаметра кластера связана с разрешающей способностью видеокамеры и качеством видеосъемки и составляет 1.5 %.

Диаметр пузырьков d , образующих кластер, был измерен с погрешностью $\leq 2\%$ с использованием методов компьютерной обработки видеоданных о движении пузырьков.

Начальная объемная концентрация пузырькового кластера определялась в зоне, расположенной на расстоянии 5 см от концов игл коллектора, по формуле

$$C_V = \frac{\sum_{i=1}^2 N_i d_i^3}{D^3},$$

где N_1 — количество мелких пузырьков, содержащихся в кластере; N_2 — количество крупных пузырьков, содержащихся в кластере.

Коэффициент поверхностного натяжения σ используемых жидкостей и их растворов с ПАВ определялся в соответствии с ГОСТ на сталагмометре СТ2, принцип работы которого основывается на методе определения объема капель, выдавливаемых на границе жидкость–газ. Значения коэффициента поверхностного натяжения жидкостей на границе с воздухом при концентрациях ПАВ, для которых проведены эксперименты, представлены в табл. 3.

В экспериментах с дистиллированной водой скорость кластера бидисперсных пузырьков определялась до начала формирования двух монодисперсных кластеров и ее величина составляла $u = (16.3 \div 34.2)$ см/с; относительная погрешность определения скорости —

Таблица 3. Значения σ для растворов исследуемых жидкостей и их растворов с ПАВ

С, г/л	σ , мН/м
Дистиллированная вода–ПАВ-1	
0	72.5
0.0011	70.0
0.0032	69.0
0.095	67.3
0.55	57.0
1.91	35.2
Глицерин–ПАВ-2	
0	64.9
0.0287	56.4
0.287	44.3
2.87	36.2

Таблица 4. Диаметры пузырьков в бидисперсном кластере

Дистиллированная вода и растворы воды с ПАВ-1										
d_1 , мм	1.3	1.3	1.3	1.4	1.4	1.5	1.5	1.5	1.6	1.65
d_2 , мм	2.1	2.3	1.6	1.8	2.1	2.1	2.3	2.4	2.0	2.1
d_2/d_1	1.61	1.77	1.23	1.28	1.5	1.4	1.53	1.6	1.25	1.27
Глицерин и растворы глицерина с ПАВ-2										
d_1 , мм	1.5	1.5	1.7	2.4	2.4	2.7	2.8	3.1	3.6	3.7
d_2 , мм	2.4	3.3	3.6	4.3	5.5	4.8	5.9	4.3	5.5	4.9
d_2/d_1	1.6	2.2	2.12	1.79	2.29	1.78	2.1	1.39	1.53	1.32

$\delta u = 2\%$; начальная объемная концентрация пузырьков в бидисперсном кластере — $C_V = 0.0009 \div 0.04$; диаметр начального сферического бидисперсного кластера варьировался в диапазоне $D = (5.8 \div 7.3)$ см.

Величина средней скорости всплытия кластера бидисперсных пузырьков в экспериментах с глицерином измерялась только для пузырьков, соизмеримых по размеру, до момента распада кластера и изменялась в диапазоне $u = (5.1 \div 6.0)$ см/с. В экспериментах с глицерином начальный диаметр бидисперсного кластера варьировался в диапазоне $D = (5.0 \div 6.2)$ см, начальная объемная концентрация пузырьков в бидисперсном кластере составляла $C_V = 0.003 \div 0.02$.

Общее количество пузырьков в бидисперсном кластере для всех проведенных экспериментов составляло $(N_1 + N_2) = 80 \div 130$.

Диаметры d_1 и d_2 пузырьков ($d_1 < d_2$) в каждой из двух фракций бидисперсного кластера, для которых выполнялись эксперименты, приведены в табл. 4. В экспериментах также варьировалось соотношение количества мелких N_1 и крупных N_2 пузырьков в кластере.

В экспериментах число Рейнольдса рассчитывалось по среднеарифметическому значению диаметров пузырьков, входящих в бидисперсный кластер, и варьировалось в диапазонах $Re = \rho u(d_1 + d_2)/2\mu = 200 \div 600$ (дистиллированная вода) и $Re = 0.1 \div 50$ (глицерин).

3. Результаты экспериментального исследования и их анализ

3.1. Влияние ПАВ на качественную картину всплытия бидисперсного кластера

Качественная картина всплытия бидисперсного пузырькового кластера проанализирована для двух диапазонов чисел Рейнольдса: $Re = 200 \div 600$ (дистиллированная вода) и $Re = 0.1 \div 50$ (глицерин). В экспериментах реализованы контактный (наличие столкновений пузырьков друг с другом) и бесконтактный (отсутствие столкновений пузырьков друг с другом) типы всплытия в зависимости от исходной концентрации пузырьков в кластере.

Экспериментально выявлено, что в процессе всплытия в дистиллированной воде сферический бидисперсный кластер пузырьков воздуха расслаивается из-за разницы в скорости всплытия фракций. Данный процесс приводит к разделению исходно сферического кластера

на два монодисперсных кластера на некотором расстоянии $h = h_*$ от места формирования бидисперсного кластера (рис. 3). В экспериментах величина этого расстояния изменялась в диапазоне $h_* = 42 \div 48$ см. Далее скорость каждого из этих кластеров различна. Монодисперсный кластер, образованный из мелких пузырьков диаметром d_1 , всплывает быстрее, чем монодисперсный кластер, состоящий из крупных пузырьков диаметром d_2 : $u_1 > u_2$. Для проведенных экспериментов по всплытию бидисперсного пузырькового кластера в дистиллированной воде в отсутствие ПАВ разница скоростей двух образованных монодисперсных кластеров изменялась в диапазоне $|u_1 - u_2| = 3 \div 6$ см/с. Наблюдаемую картину всплытия кластера пузырьков можно объяснить по аналогии с динамикой одиночного пузырька. При числах Рейнольдса $Re > 400$ ($d > 1.4$ мм) скорость одиночного пузырька воздуха в дистиллированной воде уменьшается по мере роста его диаметра за счет увеличения степени деформации пузырька, связанной с изменением его формы (увеличением диаметра миделева сечения) и с увеличением интенсивности циркуляционной зоны, которая формируется за пузырьком [37].

В присутствии ПАВ в дистиллированной воде бидисперсный кластер также расслаивается при $h_* = 12 \div 27$ см на два отдельных монодисперсных кластера (рис. 4). При этом в отличие от всплытия кластера в отсутствие ПАВ монодисперсный кластер мелких пузырьков всплывает с меньшей скоростью, чем монодисперсный кластер крупных пузырьков: $u_1 < u_2$. Этот эффект можно объяснить тем, что при всплытии кластера пузырьков в присутствии ПАВ возникает касательное напряжение Марангони, приводящее к изменению формы пузырьков (приближение к сферической) и поля скоростей вблизи них; в результате этого пузырьки движутся как твердые сферы [37, 38]. Для проведенных экспериментов по всплытию бидисперсного пузырькового кластера в дистиллированной воде в присутствии ПАВ разница скоростей двух образованных монодисперсных кластеров изменялась в диапазоне $|u_1 - u_2| = 2 \div 3.6$ см/с.

Расстояние h_* , на котором наблюдается расслоение бидисперсного кластера на два монодисперсных, детерминируется концентрацией ПАВ в жидкой фазе и безразмерным параметром — соотношением диаметров крупных и мелких пузырьков d_2/d_1 (где $d_1 < d_2$). В качестве

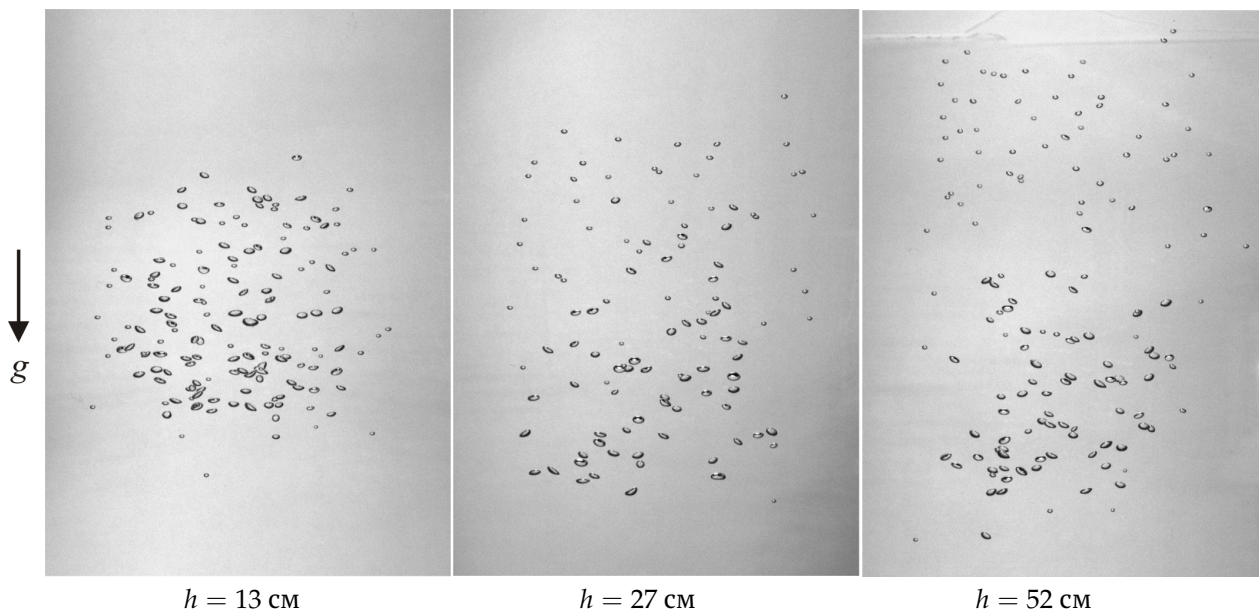


Рис. 3. Фотографии кластера бидисперсных пузырьков воздуха, всплывающих в дистиллированной воде ($d_1 = 1.3$ мм, $d_2 = 2.3$ мм, $D \approx 7$ см)

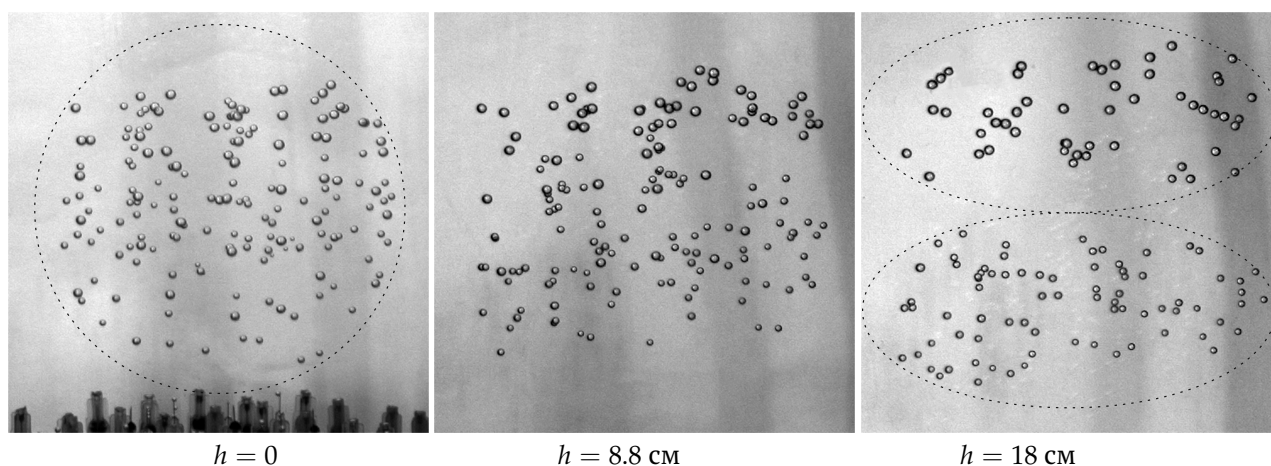


Рис. 4. Фотографии кластера бидисперсных пузырьков воздуха, всплывающих в растворе дистиллированная вода–ПАВ-1 ($d_1 = 1.5$ мм, $d_2 = 2.3$ мм, $D \approx 6$ см, $C = 0.095$ г/л)

примера значения h_* для бидисперсного пузырькового кластера диаметром $D = 6$ см, всплывающего в растворе дистиллированная вода–ПАВ-1, приведены на рис. 5. По мере увеличения концентрации ПАВ в воде расстояние h_* , на котором формируются два монодисперсных кластера, уменьшается. Однако, при концентрации ПАВ в воде $C \geq 0.55$ г/л величина h_* возрастает. Это связано с изменением градиента концентрации ПАВ на границе раздела фаз и формы пузырьков.

По мере увеличения разницы в значениях диаметров пузырьков, входящих в бидисперсный кластер (увеличения соотношения d_2/d_1), расстояние h_* уменьшается. На рис. 6 приведены экспериментальные данные, осредненные по 5 ÷ 10 дублирующим опытам, для расстояния h_* в зависимости от соотношения d_2/d_1 диаметров пузырьков воздуха в бидисперсном кластере, всплывающем в дистиллированной воде при разной концен-

трации ПАВ. Из рис. 6 следует, что по мере увеличения соотношения диаметров d_2/d_1 в кластере расстояние h_* уменьшается.

Ключевым фактором, определяющим характер всплывания бидисперсного кластера в глицерине при варьировании концентрации ПАВ, является тип взаимодействия между пузырьками (контактный или бесконтактный).

При бесконтактном всплывании после отделения от капилляров пузырьки диаметром d_1 и d_2 формируют два пространственно разделенных монодисперсных кластера. Данные кластеры демонстрируют независимую динамику всплывания, что свидетельствует об отсутствии существенного гидродинамического взаимодействия между ними [39]. Таким образом, при бесконтактном всплывании пузырьков бидисперсный кластер не формируется.

При контактном всплытии бидисперсного пузырькового кластера в глицерине в присутствии и в отсутствие ПАВ в зависимости от соотношения диаметров и количества пузырьков в кластере экспериментально выявлены следующие сценарии всплытия (достоверность результатов обеспечена проведением не менее 15 повторных опытов для каждой серии экспериментов):

- «Циркуляция крупных пузырьков с уносом мелких пузырьков» — этот сценарий реализуется при соотношении диаметров пузырьков в кластере $d_2/d_1 > 1.56$ и $N_1/N_2 \leq 0.4$ (количество крупных пузырьков составляет более 70 % от общего количества пузырьков в бидисперсном кластере). При этом после подачи воздуха формируется бидисперсный кластер, в котором происходит циркуляция периферийных пузырьков по аналогии с динамикой всплытия монодисперсного кластера [40]. В процессе циркуляции мелкие пузырьки постепенно отстают от бидисперсного кластера. Стоит отметить, что наличие циркуляционного движения периферийных пузырьков свидетельствует об отсутствии влияния стенок на динамику пузырькового кластера [32].
- «Циркуляция мелких пузырьков с уносом крупных пузырьков» — данный режим реализуется при $d_2/d_1 < 1.82$ и $N_1/N_2 \geq 15.7$ (количество крупных пузырьков составляет не более 6 % от общего количества пузырьков в бидисперсном кластере). Процесс всплытия бидисперсного кластера аналогичен характеру всплытия монодисперсного кластера, заключающегося в циркуляции периферийных пузырьков в направлении, противоположном движению пузырьков [40].
- «Отсутствие кластера» — режим реализуется при $d_2/d_1 > 2.13$ и $N_1/N_2 \geq 15.7$. После отрыва пузырьков от капилляров не наблюдается формирование бидисперсного кластера и по аналогии с бесконтактным всплытием реализуется всплытие двух отдельных монодисперсных кластеров.

3.2. Влияние ПАВ на скорость всплытия бидисперсного кластера

Как следует из вышеизложенного, после отрыва от капилляров бидисперсный кластер пузырьков в глицерине ($Re = 0.1 \div 50$) может либо разделиться на два монодисперсных кластера, либо продолжить всплытие как единое целое со скоростью преобладающей фракции. В связи с этим основной объем экспериментов был выполнен для случая всплытия кластеров в дистиллированной воде и ее растворов с ПАВ-1.

Экспериментально выявлено, что скорость бидисперсного кластера зависит от соотношения количества пузырьков N_1/N_2 в кластере (рис. 7). Скорость кластера определяется фракцией с наибольшим количеством пузырьков, при этом она падает по мере увеличения количества крупных пузырьков (диаметром $d_2 > 1.4$ мм),

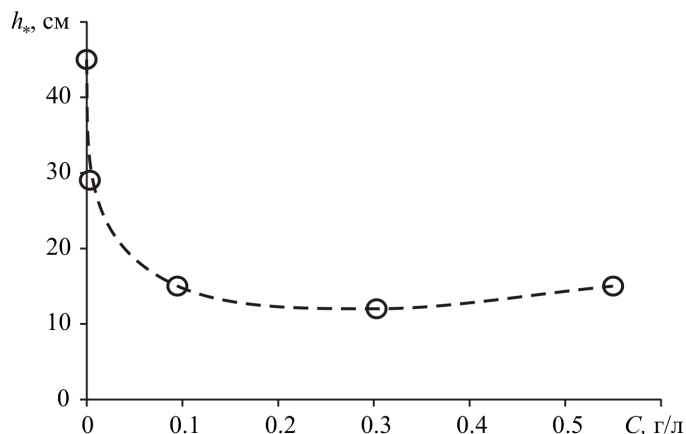


Рис. 5. Осредненные экспериментальные данные по зависимости $h_*(C)$ для бидисперсного пузырькового кластера ($d_1 = 1.5$ мм, $d_2 = 2.1$ мм)

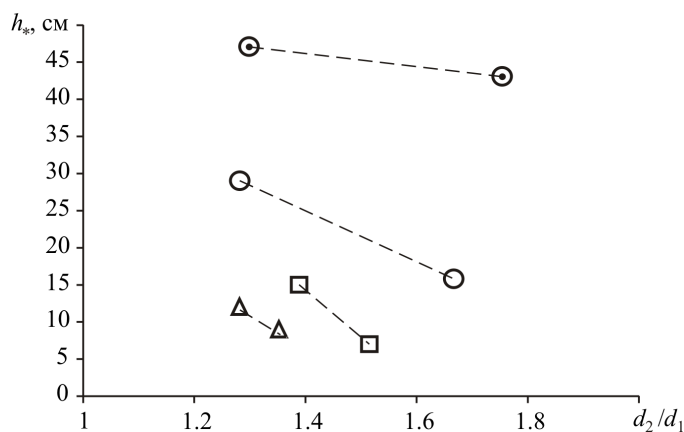


Рис. 6. Экспериментальные данные по зависимости h_* от d_2/d_1 : $\odot$ — $C = 0$; $\circ$ — $C = 0.0032$ г/л; $\square$ — $C = 0.095$ г/л; $\triangle$ — $C = 0.3$ г/л ($C_V = 0.002 \div 0.004$)

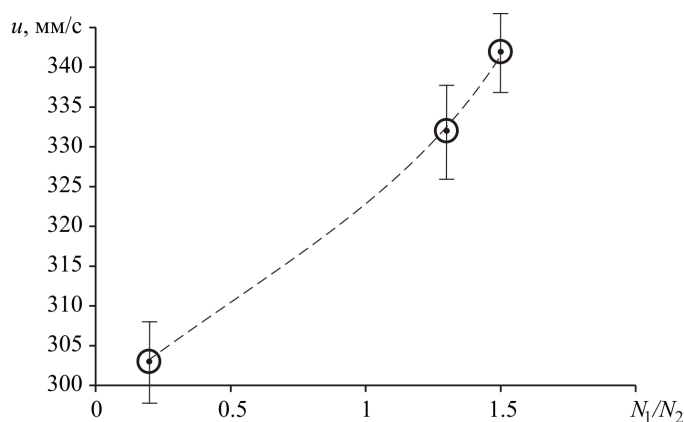


Рис. 7. Экспериментальные данные по зависимости скорости всплытия бидисперсного пузырькового кластера в дистиллированной воде от соотношения количества пузырьков ($D \approx 73$ мм, $d_1 = 1.3$ мм, $d_2 \approx 2$ мм)

Таблица 5. Результаты экспериментов по всплыванию бидисперсных кластеров в растворе дистиллированная вода–ПАВ-1 ($D \approx 60$ мм)

d_1 , мм	d_2 , мм	d_2/d_1	N_1	N_2	N_1/N_2	u , мм/с	u_1 , мм/с	u_2 , мм/с
1.65	2.1	1.3	81	53	1.5	206 ± 4	183 ± 4	211 ± 4
1.5	2.1	1.4	85	48	1.8	177 ± 4	165 ± 3	191 ± 3
1.6	2.0	1.5	41	56	0.7	180 ± 4	172 ± 4	198 ± 4
1.4	2.1	1.5	57	57	1.0	186 ± 4	167 ± 3	189 ± 4

что связано со снижением скорости отдельного пузырька, входящего в кластер, ввиду увеличения диаметра его миделева сечения, и возникновением циркуляционной зоны в тыловой части пузырька.

Анализ полученных результатов по всплыванию бидисперсного пузырькового кластера в дистиллированной воде показал, что по мере увеличения начальной объемной концентрации кластера при заданном значении N_1/N_2 его скорость возрастает незначительно. В частности, скорость бидисперсного кластера с начальным диаметром $D = 70$ мм и диаметром входящих в него пузырьков $d_1 = 1.3$ мм и $d_2 = 1.6$ мм для $N_1/N_2 = 0.7$ при $C_V = 0.0009$ составляет $u = 316 \pm 5.2$ мм/с, а при $C_V = 0.002$ — $u = 321 \pm 6.7$ мм/с.

Результаты экспериментов, осредненные по 10 дублирующим опытам, по всплыванию бидисперсных кластеров в дистиллированной воде с различным содержанием ПАВ-1 приведены в табл. 5. В данной таблице представлены экспериментальные скорости всплывания двух монодисперсных кластеров (из пузырьков диаметром d_1 и d_2), образовавшихся в результате расслоения исходного бидисперсного скопления. Скорости u_1 и u_2 измерялись на участке от точки начала расслоения до конца резервуара.

Зависимость скорости всплывания бидисперсного кластера от концентрации ПАВ-1 носит немонотонный характер. Первоначальное снижение скорости с ростом концентрации сменяется ее увеличением после достижения порогового значения $C \geq 0.55$ г/л (рис. 8). Данное явление объясняется изменением формы пузырьков:

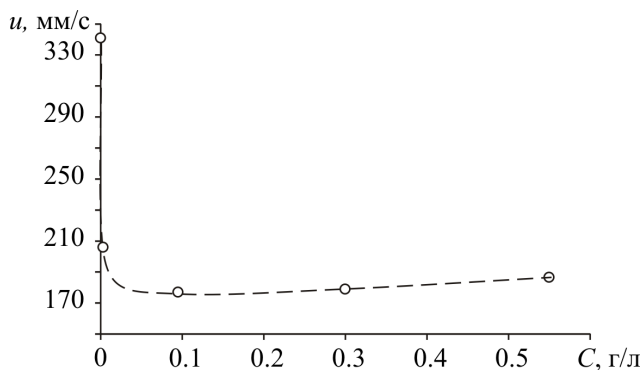


Рис. 8. Экспериментальная скорость всплывания бидисперсного пузырькового кластера в зависимости от концентрации ПАВ-1 в дистиллированной воде ($d_1 = 1.3$ мм, $d_2 = 2.1$ мм, $D = 60$ мм, $N_1/N_2 = 1.5$, $C_V = 0.0035$), осредненная по 10 дублирующим опытам

под действием изменяющегося градиента концентрации ПАВ-1 на межфазной границе они вновь приобретают форму сплюсненного эллипсоида вращения, что и приводит к ускорению всплывания.

4. Заключение

Анализ результатов экспериментального исследования процесса всплывания бидисперсного кластера пузырьков позволяет сделать следующие выводы.

В дистиллированной воде ($Re > 200$) бидисперсный пузырьковый кластер сферической формы в процессе всплывания расслаивается на два монодисперсных кластера на расстоянии h_* от места его формирования независимо от наличия ПАВ. Ключевое различие проявляется в скорости всплывания образующихся кластеров: в чистой жидкости выполняется условие $u_1 > u_2$, а в растворе ПАВ — $u_1 < u_2$. Экспериментально подтверждено, что расстояние расслоения h_* монотонно уменьшается при увеличении как концентрации ПАВ, так и безразмерного параметра d_2/d_1 .

Проведенные исследования выявили зависимость скорости всплывания бидисперсного кластера от состава среды и параметров кластера. В дистиллированной воде (в отсутствие ПАВ) скорость кластера монотонно возрастает с увеличением как соотношения количества пузырьков N_1/N_2 , так и начальной объемной концентрации пузырьков. Введение ПАВ приводит к снижению скорости всплывания при идентичных значениях N_1/N_2 и начальной объемной концентрации пузырьков.

Экспериментальное исследование контактного всплывания в глицерине ($Re < 50$) показало, что устойчивое существование бидисперсного пузырькового кластера возможно в двух диапазонах параметров: при соотношении диаметров $1.56 < d_2/d_1 < 1.82$ и преобладании мелких пузырьков ($N_1 \gg N_2$, где доля крупных пузырьков не превышает 6 %); при $d_2/d_1 > 1.56$ и преобладании крупных пузырьков ($N_1 < N_2$), где доля мелких пузырьков составляет менее 30 %).

Стабильность кластера в этих условиях обусловлена взаимодействием гидродинамических полей пузырьков. В противоположность этому при бесконтактном всплывании, а также при контактном всплывании с соотношением $d_2/d_1 > 2.13$ и долей крупных пузырьков не более 6 %, бидисперсный кластер не формируется, вместо этого наблюдается независимое всплывание двух монодисперсных образований.

Список литературы / References

- [1] Левич ВГ. *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Государственное издательство физико-математической литературы; 1959. 700 с. Levich VG. *Physical and chemical hydrodynamics*. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-khimicheskoy literaturi; 1959. 700 p. (in Russian)
- [2] Clift R, Grace JR, Weber M. *Bubble, drops and particles*. London: Academic Press; 1978. 380 p.
- [3] Филиппов ГА, Салтанов ГА, Кукушкин АН. *Гидродинамика и тепло-массообмен в присутствии ПАВ*. М.: Энергоатомиздат; 1988. 184 с. Filippov GA, Saltanov GA, Kukushkin AN. *Hydrodynamics and heat and mass transfer in the presence of surfactants*. M.: Energoatomizdat; 1988. 184 p. (in Russian)
- [4] Griffith R. The effect of surfactants on the terminal velocity of drops and bubbles. *Chemical Engineering Science*. 1962;**17**:1057–1070. DOI: [10.1016/0009-2509\(62\)80084-0](https://doi.org/10.1016/0009-2509(62)80084-0)
- [5] Davis R, Acrivos A. The influence of surfactants on the creeping motion of bubbles. *Chemical Engineering Science*. 1966;**21**:681–685. DOI: [10.1016/0009-2509\(66\)80017-9](https://doi.org/10.1016/0009-2509(66)80017-9)
- [6] Bel Fdhila R, Duineveld PC. The effect of surfactants on the rise of a spherical bubble at high Reynolds and Peclet numbers. *Physics of Fluids*. 1996;**8**:310–321. DOI: [10.1063/1.868787](https://doi.org/10.1063/1.868787)
- [7] Takemura F. Adsorption of surfactants onto the surface of a spherical rising bubble and its effect on the terminal velocity of the bubble. *Physics of Fluids*. 2005;**17**(4):048104. DOI: [10.1063/1.1879712](https://doi.org/10.1063/1.1879712)
- [8] Zhang Y, Finch A. A note on single bubble motion in surfactant solutions. *Journal of Fluid Mechanics*. 2001;**429**:63–66. DOI: [10.1017/S00222112000002755](https://doi.org/10.1017/S00222112000002755)
- [9] Духин СС, Буйков МВ. Теория динамического адсорбционного слоя движущихся сферических частиц. *Журнал физической химии*. 1964;**38**(12):3011–3013. Dukhin SS, Buikov MV. Theory of dynamic adsorption layer of moving spherical particles. *Russian Journal of Chemical Chemistry A*. 1964;**38**(12):3011–3013. (in Russian)
- [10] Bratukhin YuK, Kostarev KG, Viviani A, Zuev AL. Experimental study of Marangoni bubble migration in normal gravity. *Experiments in Fluids*. 2005;**38**(5):594–605. DOI: [10.1007/s00348-005-0930-7](https://doi.org/10.1007/s00348-005-0930-7)
- [11] Архипов ВА, Васенин ИМ, Усанина АС. Динамика всплывающего пузырька в присутствии поверхностно-активных веществ. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2016;**(2)**:142–151. EDN: VVNQCB Arkhipov VA, Vasenin IM, Usanina AS. Dynamics of bubble rising in the presence of surfactants. *Fluid Dynamics*. 2016;**51**(2):266–274. DOI: [10.1134/S0015462816020137](https://doi.org/10.1134/S0015462816020137)
- [12] Roghair I, Lau YM, Deen NG, et al. On the drag force of bubbles in bubble swarms at intermediate and high Reynolds numbers. *Chemical Engineering Science*. 2011;**66**:3204–3211. DOI: [10.1016/j.ces.2011.02.030](https://doi.org/10.1016/j.ces.2011.02.030)
- [13] Simonnet M, Gentric C, Olmos E, Midoux N. Experimental determination of the drag coefficient in a swarm of bubbles. *Chemical engineering Science*. 2007;**62**:858–866. DOI: [10.1016/j.ces.2006.10.012](https://doi.org/10.1016/j.ces.2006.10.012)
- [14] Marrucci G. Communication. Rising Velocity of Swarm of Spherical Bubbles. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*. 1965;**5**:224–225. DOI: [10.1021/i160014a022](https://doi.org/10.1021/i160014a022)
- [15] Olmos E, Gentric C, Vial Ch, Wild G, Midoux N. Numerical simulation of multiphase flow in bubble column reactors. Influence of bubble coalescence and break-up. *Chemical Engineering Science*. 2001;**56**:6359–6365. DOI: [10.1016/S0009-2509\(01\)00204-4](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(01)00204-4)
- [16] Zhang L, Zhang J, Deng J. Numerical investigation on the collapse of a bubble cluster near a solid wall. *Physical Review E*. 2019;**99**:043108. DOI: [10.1103/PhysRevE.99.043108](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.043108)
- [17] Krishna R, Urseanu MI, Ellenberger J. Rise velocity of a swarm of large gas bubbles in liquids. *Chemical Engineering Science*. 1999;**54**:171–183. DOI: [10.1016/S0009-2509\(98\)00245-0](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(98)00245-0)
- [18] Parisien V, Farrell A, Pjontek D, McKnight C, Wiens J. Bubble swarm characteristics in a bubble column under high gas holdup conditions. *Chemical Engineering Science*. 2017;**157**:88–98. DOI: [10.1016/j.ces.2016.04.051](https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.04.051)
- [19] Трушин АМ, Дмитриев ЕА, Носырев МА, Тарасова ТА, Кузнецова ИК. Определение скорости стесненного движения сферических газовых частиц в жидкости в поле силы тяжести. *Теоретические основы химической технологии*. 2013;**47**(4):434–440. DOI: [10.7868/S0040357113040167](https://doi.org/10.7868/S0040357113040167) Trushin AM, Dmitriev EA, Nosyrev MA, Tarasova TA, Kuznetsova IK. Determining the velocity of the hindered motion of spherical gas particles through liquid in a gravity field. *Theoretical foundations of chemical engineering*. 2013;**47**(4):368–374. DOI: [10.1134/S0040579513040337](https://doi.org/10.1134/S0040579513040337)
- [20] Takagi S, Toshiyuki O, Masato F, Yoichiro M. Surfactant effect on the bubble motions and bubbly flow structures in a vertical channel. *Fluid Dynamics Research*. 2009;**41**(6):065003. DOI: [10.1088/0169-5983/41/6/065003](https://doi.org/10.1088/0169-5983/41/6/065003)
- [21] Lu J, Corvalan CM, John Chew YM, Huang J-Y. Coalescence of small bubbles with surfactants. *Chemical engineering science*. 2019;**196**:493–500. DOI: [10.1016/j.ces.2018.11.002](https://doi.org/10.1016/j.ces.2018.11.002)
- [22] Sugiyama K, Takagi S, Matsumoto Y. Multi-scale analysis of bubbly flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2001;**191**:689–704. DOI: [10.1016/S0045-7825\(01\)00309-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00309-7)
- [23] Струминский ВВ, Гуськов ОБ, Кульбицкий ЮН. Гидродинамика дисперсных и газожидкостных потоков. *Доклады Академии Наук СССР*. 1984;**278**(1):65–68. EDN: RUELXT Struminskii VV, Gus'kov OB, Kul'bitskii YuN. Hydrodynamics of disperse and gas-liquid flows. *Soviet Physics. Doklady*. 1984;**29**(9):719–721. EDN: RUEMS
- [24] Gal-Or B, Waslo B. Hydrodynamics of an ensemble of drops (or bubbles) in the presence or absence of surfactants. *Chemical Engineering Science*. 1968;**23**:1431–1446. DOI: [10.1016/0009-2509\(68\)89053-0](https://doi.org/10.1016/0009-2509(68)89053-0)
- [25] Архипов ВА, Усанина АС, Басалаев СА, Каличкина ЛЕ, Мальков ВС. Динамика всплывающего кластера пузырьков в присутствии поверхностно-активного вещества. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2020;**(1)**:104–112. DOI: [10.31857/S0568528120010028](https://doi.org/10.31857/S0568528120010028) Arkhipov VA, Usanina AS, Basalaev SA, Kalichkina LE, Mal'kov VS. Dynamics of bubble cluster rising in the presence of a surfactant. *Fluid Dynamics*. 2020;**55**(1):103–110. DOI: [10.1134/S0015462820010024](https://doi.org/10.1134/S0015462820010024)
- [26] Lane CD, Parisien V, Macchi A, Donaldson AA. Investigation of bubble swarm drag at elevated pressure in a contaminated system. *Chemical Engineering Science*. 2016;**(152)**:381–391. DOI: [10.1016/j.ces.2016.06.017](https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.06.017)
- [27] Mach J, Wiens J, Adjaye J, Donaldson AA, Macchi A. Effect of pressure on the drag coefficient of individual bubbles in a contaminated polydisperse swarm. *Chemical Engineering Science*. 2020;**223**:115728. DOI: [10.1016/j.ces.2020.115728](https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115728)
- [28] Crowe CT, Sommerfeld M, Tsuji Y. *Multiphase flows with droplets and particles*. New York. Washington – London: CRC Press, Boca Raton – Boston. 1998. 327 p.
- [29] Roghair I, Baltussen MW, Van Sint Annaland M, Kuipers JAM. Direct numerical simulations of the drag force of bi-disperse bubble swarms. *Chemical engineering science*. 2013;**95**:48–53. DOI: [10.1016/j.ces.2013.03.027](https://doi.org/10.1016/j.ces.2013.03.027)
- [30] Goz M, Sommerfeld M. Analysis of bubble interactions in bidisperse bubble swarms by direct numerical simulations. *Bubbly flows, analysis, modeling and calculation*. Berlin: Springer. 2004:175–190. DOI: [10.1007/978-3-642-18540-3_14](https://doi.org/10.1007/978-3-642-18540-3_14)
- [31] Serrano-Garcia JC, Mendez-Diaz S, Zenit R. Average properties of bidisperse bubbly flows. *Physical Review Fluids*. 2018;**3**(3):034306. DOI: [10.1103/PhysRevFluids.3.034306](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.034306)
- [32] Гуськов ОБ, Струминский ВВ. Динамика дисперсных потоков в присутствии границ. *Доклады Академии наук СССР*. 1985;**285**(4):832–835. EDN: RUEKWB Gus'kov OB, Struminskii VV. Dynamics of disperse streams in the presence of boundaries. *Soviet Physics. Doklady*. 1985;**30**(12):995–997. EDN: RUENQT
- [33] Mylyk A, Meile W, Brenn G, Ekiel-Jezewska ML. Break-up of suspension drops settling under gravity in a viscous fluid close to a vertical wall. *Physics of Fluids*. 2011;**23**(6):063302. DOI: [10.1063/1.3600660](https://doi.org/10.1063/1.3600660)

- [34] Архипов ВА, Усанина АС, Перфильева КГ, Костюшин КВ, Басалаев СА, Поленчук СН. Способ получения пузырькового кластера заданной конфигурации. Пат. № 2796910 Российская Федерация. 2023. Arkhipov VA, Usanina AS, Perfil'yeva KG, Kostyushin KV, Basalaev SA, Polen'chuk SN. Method for obtaining a bubble cluster of a given configuration. Patent № 2796910 The Russian Federation. 2023. (in Russian)
- [35] Архипов ВА, Басалаев СА, Евсеев НС, Костюшин КВ, Усанина АС. Программа для управления установкой генерации пузырькового кластера заданной конфигурации. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024685776. Российская Федерация. 2024. Arkhipov VA, Basalaev SA, Evseev NS, Kostyushin KV, Usanina AS. Program for controlling the installation of generating a bubble cluster of a given configuration. Certificate of state registration of the computer program No. 2024685776 The Russian Federation. 2024. (in Russian)
- [36] Архипов ВА, Усанина АС. Экспериментальное исследование влияния природы поверхностно-активного вещества на динамику всплытия группы монодисперсных пузырьков в маловязкой жидкости. Инженерно-физический журнал. 2024;97(4):874–883. EDN: DAOOTP Arkhipov VA, Usanina AS. Experimental study of the influence of the nature of a surfactant on the dynamics of rise of a group of monodisperse bubbles in a low-viscosity liquid. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2024;97(4):859–868. DOI: 10.1007/s10891-024-02955-6
- [37] Борзенко ЕИ, Усанина АС, Шрагер ГР. Экспериментально-теоретическое исследование влияния растворенного поверхностно-активного вещества на динамику всплытия газового пузырька. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2024;(4):108–122. DOI: 10.31857/S1024708424040094 Borzenko EI, Usanina AS, Shrager G.R. Experimental and theoretical investigation of the effect of dissolved surfactant on the dynamics of gas bubble floating-up. Fluid Dynamics. 2024;59(4):741–755. DOI: 10.1134/S0015462824603073
- [38] Борзенко ЕИ, Усанина АС, Шрагер ГР. Влияние поверхностно-активного вещества на скорость всплытия пузырька в вязкой жидкости. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023;84:81–92. Borzenko EI, Usanina AS, Shrager GR. Effect of surfactant on bubble rising velocity in viscous liquid. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2023;84:81–92. (in Russian) DOI: 10.17223/19988621/84/7
- [39] Бошеняттов БВ, Гуськов ОБ. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости. Доклады Академии наук. 2011;438(5):626–28. EDN: NWDDIP Guskov OB, Boshenyatov BV. Hydrodynamic interaction of spherical particles in an inviscid-fluid flow. Doklady Physics. 2011;56(6):352–354. DOI: 10.1134/S1028355811060073
- [40] Архипов ВА, Усанина АС, Чуркин РА. Закономерности всплытия кластера монодисперсных пузырьков в вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активного вещества. Теплофизика и аэромеханика. 2023;30(6):1121–1134. EDN: HMSYDJ Arkhipov VA, Usanina AS, Churkin RA. Laws of the monodispersed bubble cluster ascent in a viscous liquid in the presence of surfactant. Thermophysics and Aeromechanics. 2023;30(6):1061–1072. DOI: 10.1134/s0869864323060094

Сведения об авторах / Information about the Authors

Владимир Афанасьевич Архипов

доктор физ.-мат. наук, профессор
Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета, НИИ ПММ ТГУ, Томск, Россия

Сергей Александрович Басалаев

кандидат физ.-мат. наук
Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета, НИИ ПММ ТГУ, Томск, Россия

Кирилл Владимирович Костюшин

кандидат физ.-мат. наук
Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики Томского государственного университета, НИИ ПММ ТГУ, Томск, Россия

Анна Сергеевна Усанина

кандидат физ.-мат. наук, доцент
Национальный исследовательский Томский государственный университет, ТГУ, Томск, Россия

Vladimir Afanasyevich Arkhipov

Sc.D. (Physics & Mathematics), Prof.
Tomsk State University Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk, Russia
leva@niipmm.tsu.ru
ORCID: 0000-0001-6777-2505

Sergey Aleksandrovich Basalaev

Ph.D. (Physics & Mathematics)
Tomsk State University Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk, Russia
tarm12376@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8964-179X

Kirill Vladimirovich Kostyushin

Ph.D. (Physics & Mathematics)
Tomsk State University Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk, Russia
kostushink@niipmm.tsu.ru
ORCID: 0000-0002-9913-8469

Anna Sergeevna Usanina

Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor
Tomsk State University, Tomsk, Russia
usaniaanna@mail.ru
ORCID: 0000-0002-8575-0083



Продольно-поперечный изгиб упругого стержня при кратковременном осевом воздействии

М.И. Макаров^{1,2} , И.Л. Кузьмин³

¹ Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

³ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: ufamax2@gmail.com

В работе рассматривается задача о динамическом продольно-поперечном изгибе упругого стержня с начальными искривлениями при кратковременном осевом воздействии. Мотивацией исследования являются актуальные проблемы, связанные с анализом устойчивости и прочности элементов конструкций при ударных нагрузках, применимых, в частности, к проблемам запуска летательных аппаратов, свайных фундаментов и транспортных средств. Основное внимание уделено двум частным случаям: воздействию кратковременного продольного удара постоянной силы и приложению осевой силы, линейно возрастающей во времени. В постановке задачи специально учтен тот факт, что временной диапазон приложения нагрузки вдвое меньше времени распространения волны по длине стержня, что позволяет корректно моделировать волновые эффекты. В отличие от классических приближенных моделей, в которых распространение продольной волны предполагается мгновенным и напряжение считается постоянным вдоль стержня, в настоящей работе использованы уравнения с учетом конечной скорости распространения продольных волн. Для численного исследования динамики малых поперечных отклонений применяется разложение по собственным функциям и решается система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд Фурье. Детально анализируется влияние различных форм начального изгиба, а также изменение максимальных амплитуд колебаний для различных параметров модели. Проведен сравнительный анализ поведения стержня для простых и сложных начальных форм искривления, показано возникновение неравномерностей, близких к тем, что наблюдаются в физических экспериментах. Полученные результаты подтверждают важность учета волновых эффектов в кратковременных динамических задачах и расширяют область применения разработанных моделей.

Ключевые слова: упругий стержень, динамический изгиб, кратковременный удар, начальное искривление, волновое уравнение, численное моделирование, динамическая устойчивость

Longitudinal-transverse bending of an elastic rod under short-term axial action

M.I. Makarov^{1,2} , I.L. Kuzmin³

¹ Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia

² National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

³ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: ufamax2@gmail.com

The paper considers the problem of dynamic longitudinal-transverse bending of an elastic rod with initial curvatures under short-term axial action. The motivation of the research is the current problems related to the analysis of the stability and strength of structural elements under shock loads, applicable, in particular, to the problems of launching aircraft, pile foundations and vehicles. The main attention is paid to two special cases: the effect of a short-term longitudinal impact of constant force and the application of an axial force that increases linearly over time. The problem statement specifically takes into account the fact that the time range of the load application is half the time of wave propagation along the length of the rod, which makes it possible to correctly simulate wave effects. Unlike classical approximate models, in which the propagation of a longitudinal wave is assumed to be instantaneous and the voltage is assumed to be constant along the rod, equations are used in this work taking into account the finite velocity of propagation of longitudinal waves. To numerically study the dynamics of small transverse deviations, eigenfunction decomposition is applied and a system of ordinary differential equations for Fourier amplitudes is solved. The influence of various shapes of the initial bend is analyzed in detail, as well as changes in the maximum oscillation amplitudes for various parameters of the model. A comparative analysis of the behavior of the rod for simple and complex initial forms of

curvature is carried out, and the occurrence of irregularities close to those observed in physical experiments is shown. The results obtained confirm the importance of taking into account wave effects in short-term dynamic tasks and expand the scope of the developed models.

Keywords: elastic rod, dynamic bending, short-term impact, initial curvature, wave equation, numerical modeling, dynamic stability

1. Введение

Динамические нагрузки, в частности, удар, являются наиболее опасным видом воздействия на стержневые системы. Следует отметить, что при ударе скорость движения выделенного элемента стержня приобретает конечную скорость за малый промежуток времени. То есть ударная нагрузка вызывает значительные ускорения и, соответственно, инерционные силы, направление действия которых устремлено в сторону, противоположную ускорению.

В работе исходят из следующих физических допущений:

1. При ударе выполняется закон сохранения энергии — переход начальной кинетической энергии в потенциальную энергию упругого изгиба стержня [1, 2].
2. Движущееся тело с момента соприкосновения движется совместно со стержнем — нагрузка неупругая; если масса тела мала относительно стержня, она может быть проигнорирована, но импульсом — нет.
3. Деформации соответствуют закону Гука, модуль упругости E постоянен для малых деформаций.

Допущение о выполнении закона сохранения энергии разрешает связывать начальную кинетическую энергию динамического воздействия с потенциальной энергией упругой деформации при инициализации задачи и выборе критерия перехода в колебательный режим. Это позволяет использовать классические методы расчета динамического изгиба без учета необратимых потерь энергии в процессе удара [1, 2].

При динамическом продольном воздействии задача моделирования усложняется тем фактом, что распространение по стержню продольных упругих волн может вызвать интенсивные поперечные колебания, связанные с начальным изгибом относительно прямолинейной формы стержня. Однако, так как время распространения продольной волны по длине стержня существенно меньше наименьшего периода поперечных колебаний, как правило, используется упрощенная приближенная модель, в которой принимается гипотеза о том, что продольная волна распространяется по стержню мгновенно, а осевая сжимающая сила постоянна по длине. В такой постановке были решены задачи [1–5] при внезапном приложении конечной нагрузки выше критической, с линейно возрастающей со временем нагрузкой, а также с периодически меняющейся со временем нагрузкой.

В динамических задачах продольного воздействия распространение по стержню упругих волн может иницировать интенсивные поперечные колебания при на-

личии начального искривления. Для случаев коротких ударов критична скорость волнового процесса. Наряду с классическими приближенными моделями [1, 5] в настоящей работе реализовано построение с учетом конечной скорости распространения волн. Постановка задачи, формулы и граничные условия приведены согласно работам [3, 6].

Целью исследования являются построение и сравнение моделей с различными начальными искривлениями стержня, анализ отличий динамики на основе численного решения соответствующих уравнений с помощью метода Рунге–Кутты.

2. Постановка задачи и модель

Постановка задачи, основные предположения и решения волновых уравнений отражены согласно [3], формулировка динамического уравнения изгиба — [3], постановка задачи линейно возрастающей нагрузки — [5, 6].

Рассматривается шарнирно-закрепленный трубопровод с заданным начальным искривлением и нулевыми начальными условиями. Конец упругого стержня постоянного сечения подвергается кратковременному продольному удару постоянной силы. Считается, что пробег продольной волны по удвоенной длине стержня больше времени удара. Отметим, что задача дает разумные результаты для сравнительно небольшого интервала времени.

Для первой подзадачи дополнительно будет использоваться волновое уравнение для нахождения внешней силы P , а для второй — сразу рассматриваться P специального вида.

Распространение продольных волн в стержне описывается уравнением

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{cases} -P_0 & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t \geq T; \end{cases}$$

$$u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное смещение сечения; x — продольная координата; t — время; T — время действия ударной силы; E и ρ — модуль Юнга и плотность материала. При сжатии $P_0 \geq 0$.

Необходимо найти $P(x, t) = ES(\partial u / \partial x)$. Общее решение волнового уравнения будет иметь следующий

вид:

$$P(x, t) = -P_0(f(x - ct) + g(x + ct)), \quad c^2 = \frac{E}{\rho},$$

где c — скорость звука; функции $f(z)$, $g(z)$ определяются из граничных и начальных условий.

Пусть $T_0 = L/c$ — время пробега волны по длине стержня. Рассмотрим случай $T < 2T_0$, то есть действие импульса заканчивается до прихода волны, отраженной от правого края, к левому. В этом случае:

$$\begin{cases} f(x) = 1, & -L_T \leq z \leq 0 \\ f(x) = 0, & -2L < z < -L_T, \quad -4L < z < -2L - L_T, \\ & g(z) = f(2L - z), \\ f(x) = -1, & -2L - L_T < z < -2L, \end{cases} \quad (2)$$

где $L_T = cT_0 < 2L$. Функции $f(z)$, $g(z)$ периодичны с периодом $4L$, то есть $P(x, t + 4T_0) = P(x, t)$ при $t > T$.

Малые поперечные движения стержня описываются динамическим уравнением изгиба следующего вида:

$$EJ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P(x, t) \frac{\partial(\omega_0 + \omega)}{\partial x} \right) + \rho S \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где $\omega_0 + \omega$ — полное отклонение стержня от прямолинейной формы; $\omega_0(x) = \varphi(x)$ — заданное начальное отклонение; $\omega(x, t)$ — дополнительное отклонение; J — геометрический момент инерции поперечного сечения.

Начальные условия имеют вид:

$$\omega(x, 0) = \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Граничные условия при шарнирном закреплении:

$$\omega = EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, L.$$

Запишем уравнение (3) в безразмерном виде. Будем считать, что длина стержня L^* и время пробега волны по его длине T_0^* равны 1:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varepsilon(x_1, t_1) \frac{\partial(\omega_0 + \omega)}{\partial x_1} \right) + \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial t_1^2} = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L^*, 0 \leq t_1 \leq T_0^*, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} x = Lx_1, \quad t = T_0 t_1, \quad \mu = \frac{J}{SL^2} = \left(\frac{r}{L} \right)^2 \ll 1, \\ \varepsilon(x_1, t_1) = \frac{P}{ES} = \varepsilon_0(f(x_1 - t_1) + g(x_1 + t_1)), \\ r = \sqrt{\frac{J}{S}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь r — радиус инерции сечения; $\varepsilon(x_1, t_1)$ — продольная деформация оси стержня. Относительная деформация $\varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES}$ в типичных задачах не превышает 0.01

(малые деформации); безразмерный параметр инерции $\mu = \frac{J}{SL^2}$ всегда мал для длинных тонких стержней, например, для труб $\mu \sim 10^{-4} \dots 10^{-2}$.

Решение ищется в виде ряда Фурье

$$\omega(x_1, t_1) = \sum_{n=1}^N X_n(x_1) T_n(t_1) \quad (6)$$

по собственным функциям $X^{IV} - \alpha^4 X = 0$ и граничным условиям $X(0) = X''(0) = X(1) = X''(1) = 0$. Получаем

$$\alpha_n = n\pi, \quad X_n = \sin n\pi x. \quad (7)$$

Функции T_n удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_n}{dt^2} + \mu \alpha_n^4 T_n(t) - \\ - \frac{\varepsilon_0}{K_n} \sum_{k=1}^N a_{nk}(t) (T_k(t) + \varphi_k) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^1 X_n^2 dx, \quad a_{nk}(t) = \\ &= \int_0^1 (f(x - t) + g(x + t)) X'_k X'_n dx, \\ \varphi_k &= \int_0^1 \varphi X_k dx, \end{aligned} \quad (9)$$

и нулевыми начальными условиями $T_n(0) = T'_n(0) = 0$. Система (8) решается численно.

Далее рассмотрим задачу при условии линейно возрастающей нагрузки. Она отличается тем, что продольные волны не рассматриваются, а сила представляется в виде $P(t) = P_0 c_p t S$ или как безразмерная величина $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_0(c_p t S)$, где c_p — скорость изменения сжимающего напряжения; S — поперечное сечение.

Все остальные формулы и выражения остаются прежними, кроме выражения для величины a_{nk} , которая вычисляется следующим образом

$$a_{nk}(t) = \int_0^1 (c_p t S) X'_k X'_n dx. \quad (10)$$

3. Результаты моделирования

Для моделирования использовалась библиотека SciPy для Python. Постановка задачи, основные предположения и решения волновых уравнений (1)–(9) взяты из работы Морозова и Товстика [3]. Линейно возрастающая нагрузка (10) представлена согласно подходу Вольмира [5].

Зададим $\varepsilon_0 = 0.01$ (относительная деформация 1 %), $\mu = 0.0002$ (соответствует отношению $(r/L)^2$ для тонкостенных конструкций), $\tau = 0.5$ (соответствует длительности импульса, при которой продольная волна проходит половину длины стержня. В формуле (6) положим $N = 10$).

Численное моделирование показало, что результат сильно зависит от начального искривления φ_k . Для численного интегрирования системы (8) использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом $h_t = 0.05$. Будем моделировать до момента времени $t = 2$ (два периода распространения волны по длине стержня).

3.1. Кратковременный удар при различных искривлениях

- 1) $\varphi_1 = 1, \varphi_k = 0, k \neq 1$: сначала сильно растет амплитуда первой полуволны, затем энергия перераспределяется по остальным модам (рис. 1);
- 2) $\varphi_4 = 1, \varphi_k = 0, k \neq 4$: изгиб концентрируется в середине стержня (рис. 2);
- 3) $\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.8, \varphi_3 = 1, \varphi_4 = 0.8, \varphi_5 = 0.5, \varphi_k = 0, k > 5$: формируется колебательный процесс (рис. 3).

3.2. Влияние количества учитываемых мод

Для сравнения с изгибом стержня в канале [7] рассмотрим влияние числа мод $N = 3, 5, 7, 9$ при $\varphi_k = 0.1$ для всех k (рис. 4).

3.3. Сравнительный анализ с приближенными моделями

Выполнено сопоставление результатов волновой модели с классической приближенной моделью Ишлинского–Лаврентьева, в которой продольная сила

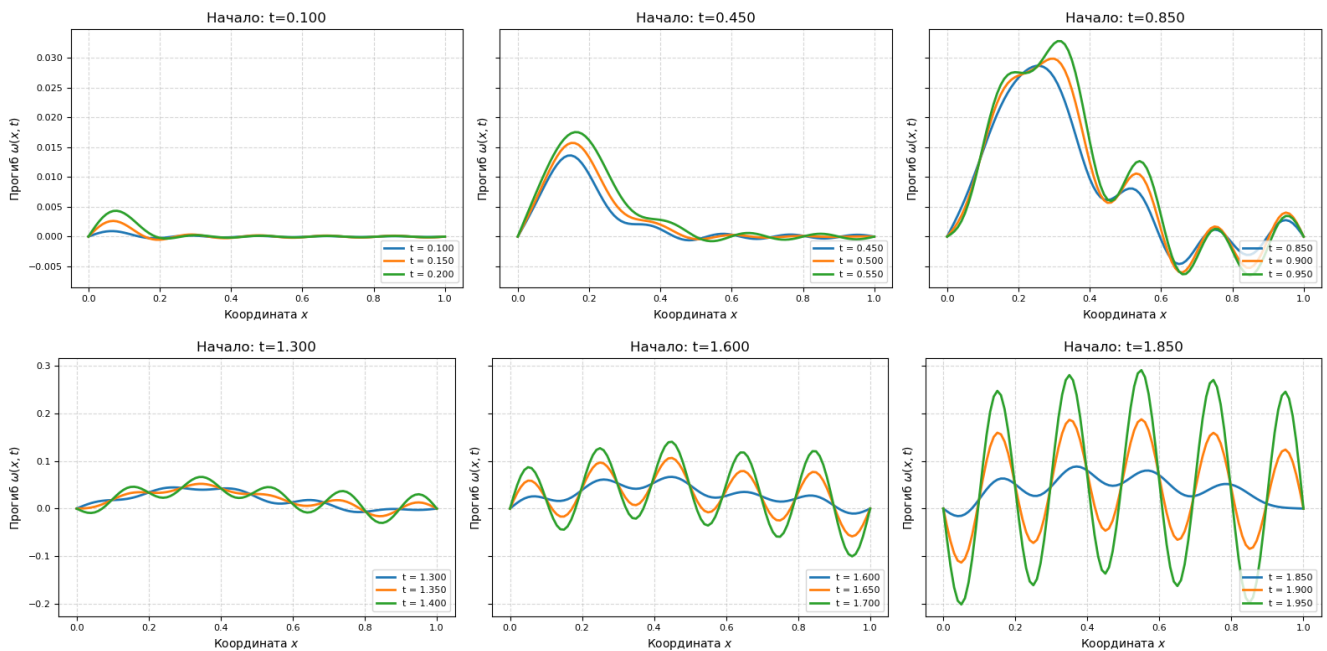


Рис. 1. Простое искривление φ_1 : пространственные профили в различные моменты времени

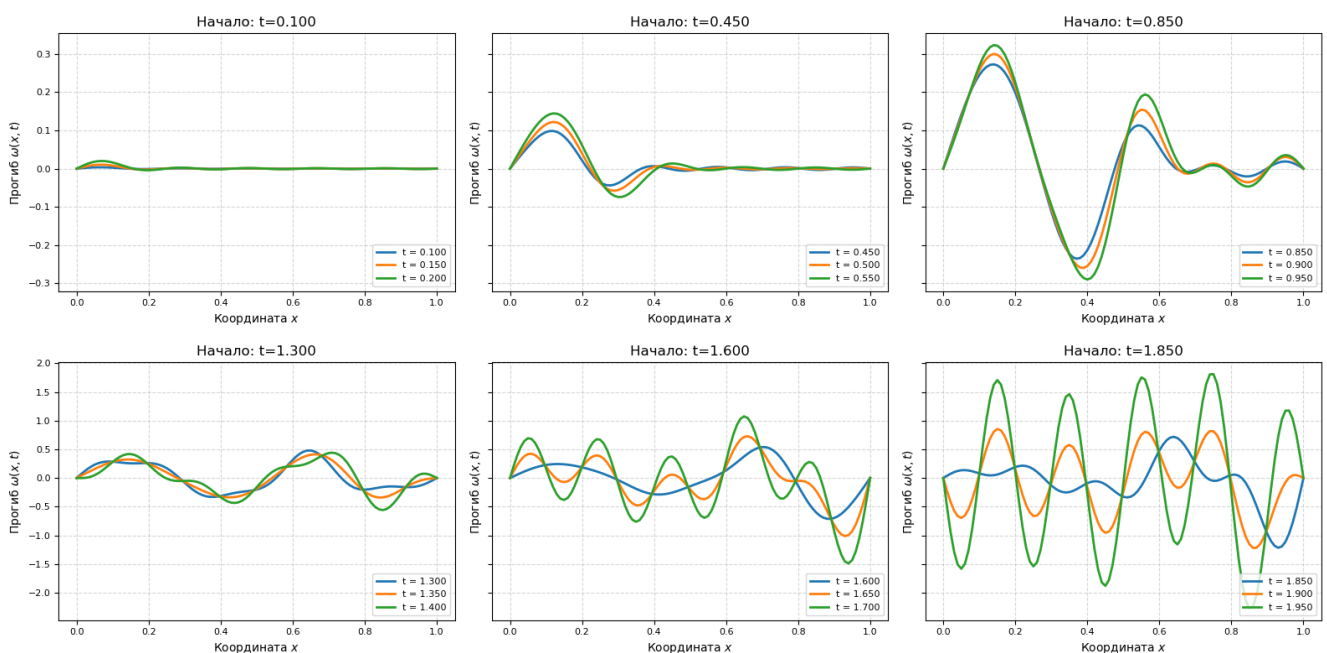


Рис. 2. Простое искривление φ_4 : концентрация деформации в центральной части стержня

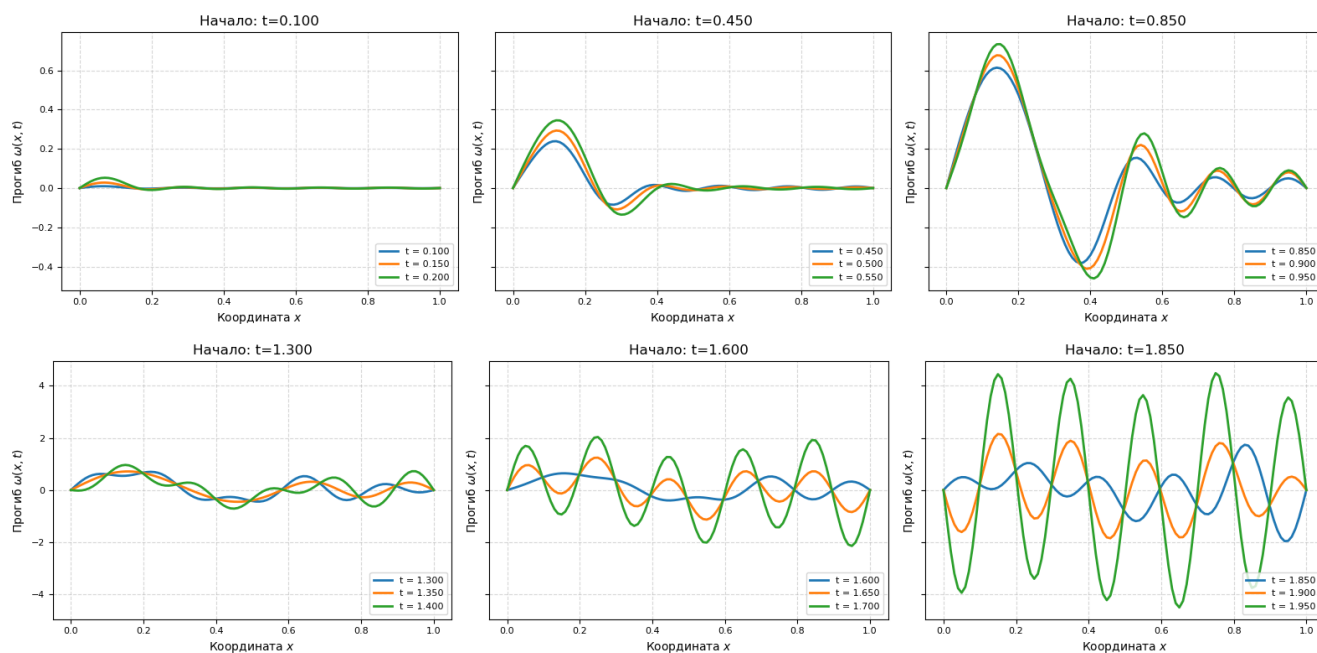


Рис. 3. Сложное искривление: формирование многомодовых колебаний

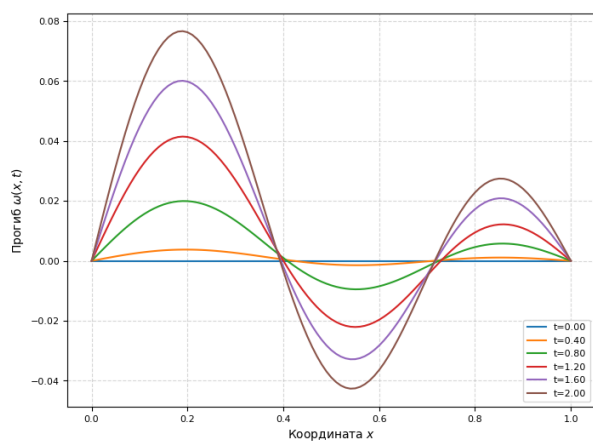
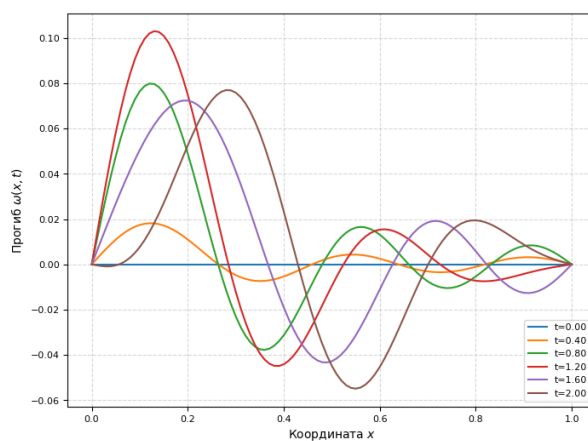
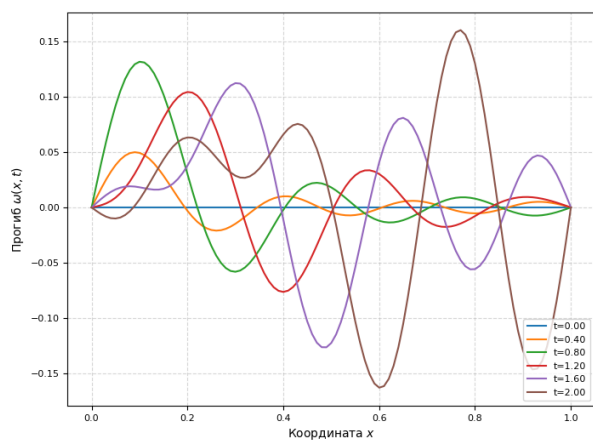
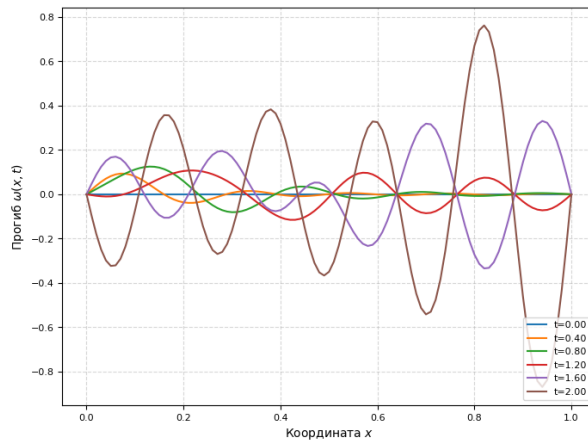

 (а) $N = 3$

 (б) $N = 5$

 (в) $N = 7$

 (г) $N = 9$

 Рис. 4. Влияние числа учитываемых мод при равномерном начальном искривлении $\varphi_k = 0.1$

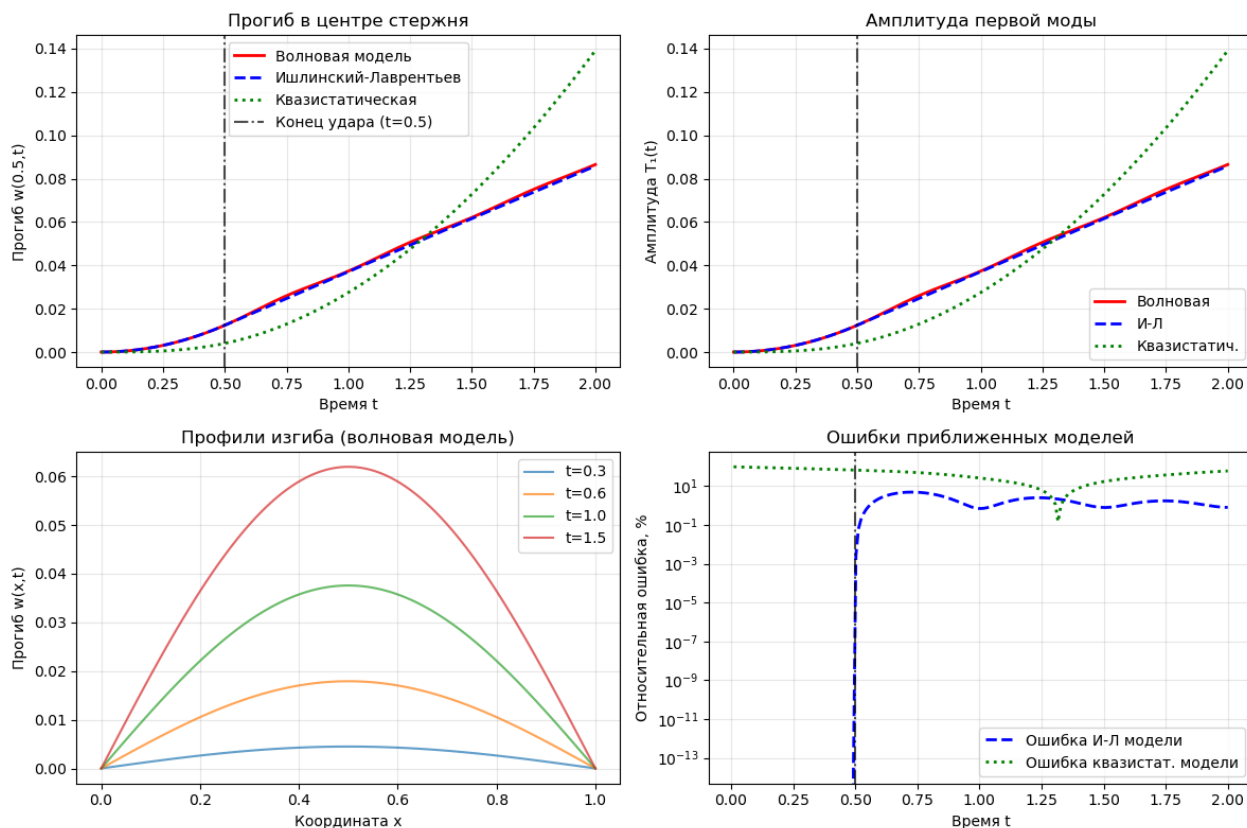


Рис. 5. Сравнительный анализ с приближенными моделями при простом искривлении $\varphi_1 = 1$

мгновенно распространяется вдоль стержня. Было показано, что максимальные амплитуды изгиба волновой модели превышают значения, полученные в приближенной теории, на 25–40 % при кратковременных ударах, а также сильнее выражена неравномерность распределения энергии между формами (рис. 5). В классических статических и квазистатических моделях (например, в работах Феодосьева [8]) структура изгиба определяется только геометрией начального искривления, тогда как динамическая модель выявляет критическую роль временной структуры нагружения.

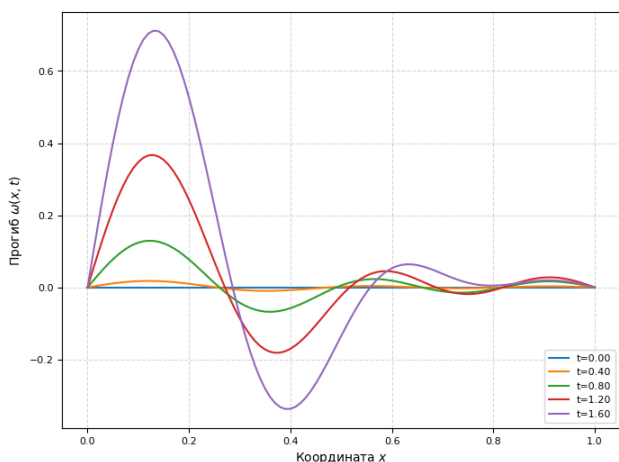


Рис. 6. Линейно возрастающее нагружение при сложном начальном искривлении: преимущественное возбуждение низших мод

Данное различие особенно существенно для применения в проектировании элементов конструкций, испытывающих быстрые или импульсные нагрузки, так как приближенные модели могут существенно недооценивать значения максимальных деформаций и неверно оценивать устойчивость системы.

3.4. Линейно возрастающая нагрузка

Согласно подходу Вольмира [6], рассмотрим случай линейно возрастающей нагрузки с параметрами $c_p = 1 \text{ кг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$, $S = 0.5 \text{ см}^2$.

В первом графике на рис. 6 рассматривается случай с сложным начальным искривлением $\varphi_1 = 0.5$, $\varphi_2 = 0.8$, $\varphi_3 = 1$, $\varphi_4 = 0.8$, $\varphi_5 = 0.5$, $\varphi_k = 0$, $k > 5$. На втором графике рассмотрим влияние числа мод $N = 3, 5, 7, 9$ при $\varphi_k = 0.1$ для всех k (рис. 7).

4. Заключение

В рамках настоящей работы рассмотрено влияние волновых эффектов на динамику продольно-поперечного изгиба упругого стержня при кратковременном осевом воздействии. Численное моделирование, выполненное на основе уравнений с конечной скоростью распространения продольной волны [3], показало, что учет волновой природы нагрузки принципиально влияет на характер развития изгиба и распределение энергии между формами колебаний, особенно для случаев кратковременного удара.

Проведен сопоставительный анализ с приближенными классическими моделями [1, 5], в которых мно-

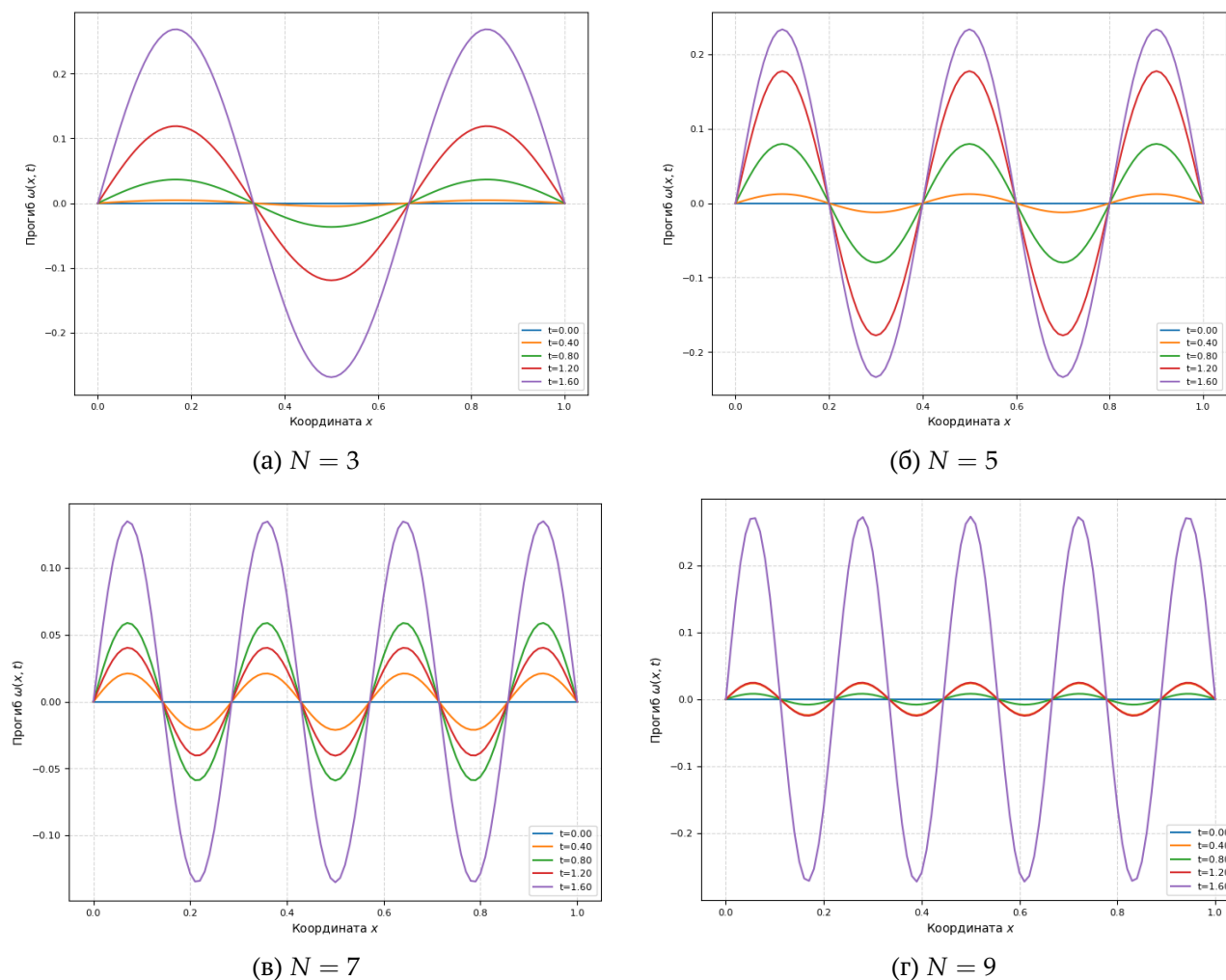


Рис. 7. Линейный рост амплитуд при возрастающей нагрузке для различного числа мод

венное распределение осевой силы по длине стержня приводит к существенному занижению максимальных амплитуд и иной структуре колебательного процесса. Результаты подтверждают, что для динамических задач с коротким временем удара моделирование, основанное на волновых уравнениях, необходимо для получения адекватных оценок отклика конструкций и объяснения наблюдаемых эффектов, аналогичных зарегистрированным в физических экспериментах [9].

Показано, что при применении линейно возрастающей нагрузки [6] для простых начальных искривлений достигнутые формы повторяют результаты классических задач (например, модели Феодосьева [8]), однако для более сложных начальных форм возникает неравномерность и существенно различающиеся амплитуды мод, что подчеркивает важность учета реальной формы начального отклонения.

Ограничением работы остается отсутствие демпфирования и неучет нелинейных эффектов при больших деформациях, кроме того, задача решалась в допущении идеального закрепления концов и постоянных физических свойств материала. Эффективность приме-

ненных численных методов ограничивается вычислительными затратами для больших N , что может быть преодолено в перспективе с помощью оптимизированных алгоритмов или асимптотических подходов.

В перспективе целесообразно развивать комбинированные методы для задач изгиба стержней в каналах с ограничением, а также уделить внимание вариационным или аналитико-численным схемам для учета более сложных граничных условий и реальных инженерных ситуаций. Полученные результаты могут быть полезны для анализа устойчивости и проектирования элементов машин и сооружений, испытывающих ударные или быстро меняющиеся нагрузки.

Список литературы / References

- [1] Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР. 1949;64(6):779–782. Lavrentyev M.A., Ishlinsky A.Yu. Dynamic Forms of Elastic Systems Stability Loss. Reports of the Academy of Sciences of USSR. 1949;64(6):779–782. (in Russian).
- [2] Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева. Известия РАН. Механика твердого тела. 2013;5:28–33. EDN: RFKVDX
Belyaev A.K., Il'in D.N., Morozov N.F. Dynamic Approach to the

- Ishlinsky-Lavrent'ev Problem. *Mechanics of Solids*. 2023;48(5):504–508. DOI: [10.3103/S002565441305004X](https://doi.org/10.3103/S002565441305004X)
- [3] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при продольном ударе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2009;2:105–111. Morozov N.F., Tovstik P.E. The Rod Dynamics under Longitudinal Impact. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2009;2:105–111. (in Russian). EDN: KKKJQL
- [4] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Статика и динамика стержня при продольном нагружении. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2014;7(1):76–89. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Static and Dynamics of a Rod at the Longitudinal Loading. *Bulletin of the South Ural State University. Series «Mathematical Modelling, Programming and Computer Software»*. 2014;7(1):76–89. (in Russian) DOI: [10.14529/mmp140107](https://doi.org/10.14529/mmp140107)
- [5] Вольмир А.С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1960;1:6–9. Volmir A.S. Stability of Compressed Rods under Dynamic Loading. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 1960;1:6–9. (in Russian).
- [6] Вольмир А.С. *Устойчивость упругих систем*. М.: Физматгиз; 1963. 880 с. Volmir A.S. *Stability of Elastic Systems*. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio: Foreign Technology, Division, Air Force Systems Command; 1965. 1047 p.
- [7] Макаров М.И., Кузьмин И.Л. Устойчивость трубопровода при продольно-поперечном изгибе в плоском канале. *Многофазные системы*. 2025;20(2):98–104. Makarov M.I., Kuzmin I.L. Pipeline stability under longitudinal and transverse bending in a plane channel. *Multiphase Systems*. 2025;20(2):98–104. (in Russian) DOI: [10.21662/mfs2025.2.014](https://doi.org/10.21662/mfs2025.2.014)
- [8] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. 5-е изд., испр. и доп. Москва: Наука, Физматлит; 1996. 368 с. Feodosyev V.I. *Selected Problems and Questions in Strength of Materials*. Beekman Books Inc.; 1977. 432 p.
- [9] Овчинников Н.Т., Сорокин Ф.Д. Численное и физическое моделирование деформирования стержня при осевом нагружении в канале. Часть 1. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2020;10(106):1–23. Ovchinnikov N.T., Sorokin F.D. Physical modeling and numerical simulation of bar deformation under axial loading in the channel. Part 1. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2020;10(106):1–23. (in Russian). DOI: [10.18698/2308-6033-2020-10-2021](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-10-2021)

Сведения об авторах / Information about the Authors

Макаров Максим Игоревич

Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Кузьмин Игорь Леонидович

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Makarov Maksim Igorevich

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia;
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
ufamax2@gmail.com
ORCID: [0009-0001-8159-1134](https://orcid.org/0009-0001-8159-1134)

Kuzmin Igor Leonidovich

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
igor_l_kuzmin@mail.ru
ORCID: [0009-0002-7197-1544](https://orcid.org/0009-0002-7197-1544)



Специфика конструкторской проработки прототипа смарт-привода для нетипичных манипуляторов

А.В. Ивачев¹, О.В. Даринцев¹✉, Д.Р. Богданов²

¹ Уфимский университет науки и технологий, Уфа

² Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

E-mail: darintsevov@uust.ru

В современной промышленной робототехнике ключевую роль в обеспечении непрерывности производства и автоматизации, требуемых характеристик при работе с перемещаемыми объектами играют манипуляторы. Они позволяют заменить человека на монотонных операциях, ускорить производственный процесс и избежать применения дополнительных грузоподъемных устройств. В отличие от традиционных манипуляторов у непрерывных манипуляторов, при их уникальных возможностях, существуют нерешенные проблемы управления. Одной из этих проблем является контроль формы звеньев непрерывного манипулятора, так как форма в итоге определяет его рабочую точку. В настоящей работе рассматривается непрерывный манипулятор, состоящий из звеньев на базе жестких элементов со сферической поверхностью, качение которых друг относительно друга и определяет конечную форму звеньев. Качение элементов осуществляется с помощью приводов посредством изменения длин тросов, проходящих сквозь них. Для корректного (управляемого) функционирования манипулятора необходимо осуществлять управление перемещением тросов с одновременным контролем их натяжений. Кроме того, для поддержки целостности звеньев управление должно быть синхронным для всех приводов тросов. Основной целью работы является разработка эскизного проекта смарт-привода для нетипичных манипуляторов. На первом этапе проведена конструкторская проработка привода, для чего решены следующие задачи: проектирование приводного модуля на базе шагового двигателя с датчиком натяжения и перемещения троса; разработка архитектуры информационной системы; проектирование внутренней структуры программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС). Разработанная на первом (конструкторском) этапе создания эскизного проекта смарт-привода схема была загружена во внутреннюю флеш-память ПЛИС.

Ключевые слова: смарт-привод, нетипичные манипуляторы, датчик напряжения и перемещения троса, программируемые логические интегральные схемы, шаговые двигатели, тросовое управление

Design development of a Smart Drive for Atypical Manipulators

A.V. Ivachev¹, O.V. Darintsev¹✉, D.R. Bogdanov²

¹ Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

² Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

E-mail: darintsevov@uust.ru

In modern industrial robotics, manipulators play a key role in ensuring uninterrupted production and automation, ensuring the required characteristics when working with movable objects. They make it possible to replace a person in monotonous operations, speed up the production process and avoid the use of additional lifting devices. Unlike traditional manipulators, continuous manipulators, with their unique capabilities, have unresolved control problems. One of them is to control the shape of the links of the continuous manipulator, as it ultimately determines its operating point. In this paper, we consider a continuous manipulator consisting of links based on rigid elements with a spherical surface, the rolling of which relative to each other determines the conical shape of the links. The rolling of the elements is carried out by means of drives by changing the lengths of the cables passing through them. For the correct (controlled) operation of the manipulator, it is necessary to control the movement of cables while simultaneously controlling their tension. In addition, to maintain the integrity of the links, the control must be synchronous for all cable drives. The main purpose of the presented work is to develop a draft design of a smart drive for atypical manipulators. At the first stage of the work, the results of which are presented in this article, a design study of the drive was carried out, for which the following three tasks were solved: designing a drive module based on a stepper motor with a cable tension and displacement sensor; developing an information system architecture; designing the internal structure of a programmable logic integrated circuit (FPGA). The circuit developed at the first (design) stage of creating the sketch design of the smart drive was loaded into the internal flash memory of the FPGA.

Keywords: smart drive, atypical manipulators, cable tension and displacement sensor, FPGAs, stepper motors, cable-driven control

1. Введение

В современной промышленной робототехнике манипуляторы играют ключевую роль в обеспечении непрерывности производства и автоматизации. Они позволяют заменить человека на монотонных операциях, ускорить производственный процесс и избежать применения дополнительных грузоподъемных устройств.

В мире набирают популярность нетипичные манипуляторы, которые отличаются от классических жестких манипуляторов с шарнирными соединениями своей конструкцией или принципами работы. Их конструкция зачастую основана на принципах биомиметики и предназначена для решения задач, где традиционные манипуляторы не эффективны.

Среди всего многообразия манипуляторов, известных на текущий момент, можно выделить три больших класса:

- 1) с жесткими звеньями;
- 2) с использованием звеньев с контролируемой деформацией;
- 3) с использованием звеньев с управляемым изгибом.

Если первые два типа манипуляторов достаточно хорошо известны, то появившийся практически одновременно с ними класс манипуляторов с управляемым изгибом в силу объективных на то время причин не нашел широкого применения. Но в настоящий момент проявляется острая потребность именно в таких манипуляционных механизмах как средстве контроля, диагностики и доставки инструмента в труднодоступные полости сложных механизмов. Интерес проявляется также со стороны теории катастроф как к средству доступа в разрушенные сооружения; медицины (малотравматичное средство доставки); специальной робототехники (обследование подозрительных полостей и работа в загроможденном пространстве) [1]. К классу манипуляторов с жесткими звеньями относятся практически все традиционные промышленные манипуляторы, разработка которых определялась выполняемыми ими технологическими задачами. Такие манипуляторы представляют собой механизмы, состоящие из жестких звеньев, соединенных посредством кинематических пар с угловым или поступательным относительным перемещением [2].

Манипуляторы на основе звеньев с контролируемой деформацией — это такие конструкции, в которых учитывается возможный изгиб звеньев в процессе перемещения. Идея таких манипуляторов состоит в облегчении звеньев за счет снижения их жесткости. В данных манипуляторах учет и контроль возникающих деформаций ведется сложной системой управления [3].

В манипуляторах с управляемым изгибом изгиб звена может быть реализован на основе разных физических принципов и с применением различных материалов, но общим свойством является то, что за счет управляемого изменения пространственной конфигурации отдельных звеньев осуществляется перемещение схвата или рабочего инструмента в пространстве. Существенным отличием также является то, что в отличие от манипуляторов первых двух классов для обеспечения эквивалентного количества степеней свободы таким конструкциям требуется меньшее количество звеньев. К недостаткам подобных технических решений часто относят их малую жесткость, что делает невозможным работу с формообразующим инструментом, значительно снижает вес полезной нагрузки и усложняет управление. Но если рассматривать гибкие манипуляторы как средство доставки различных инструментов обработки (например, покраски) и бесконтактного контроля в труднодоступные внутренние полости агрегатов со сложной пространственной формой каналов, то они идеально подходят для решения подобных задач [1].

Традиционные манипуляторы обычно обладают ограниченным числом степеней свободы, что идеально подходит для структурированных сред, но ведет к трудностям в менее организованных условиях, таких как работы в загроможденных средах функционирования или при обследовании сложных полостей машин и механизмов. С такими задачами хорошо справляются манипуляторы с избыточными степенями свободы, к которым можно отнести змееподобные манипуляторы, построенные на базе большого количества модулей, а также, так называемые в зарубежной литературе, непрерывные манипуляторы. Основное отличие непрерывных манипуляторов состоит в том, что их звенья могут менять кривизну непрерывно вдоль всей своей длины. Такая особенность позволяет манипулятору обходить препятствия не только за счет количества звеньев, но и за счет изгиба самого звена. Учитывая то, что непрерывные манипуляторы не определены в ГОСТ Р 60.0.0.4-2023 как отдельный класс, можно отнести их к нетипичным манипуляторам.

В отличие от традиционных манипуляторов у непрерывных присутствуют проблемы управления. Одной из главных проблем является контроль формы звеньев непрерывного манипулятора, так как именно форма определяет его рабочую точку.

В настоящей работе рассматривается непрерывный манипулятор, состоящий из звеньев на базе жестких элементов со сферической поверхностью, качение которых друг относительно друга и определяет форму звеньев. Качение элементов осуществляется с помощью тросов, проходящих сквозь них, перемещение которых осуществляется с использованием приводов.

Для правильного функционирования манипулятора

необходимо осуществлять управление перемещением тросов с одновременным контролем их натяжений. Кроме того, для поддержки целостности звеньев управление должно быть синхронным для всех приводов тросов.

В настоящее время существуют различные типы приводов роботов, имеющие ряд конструктивных особенностей:

- электродвигатели (простейшие типы — двигатели постоянного и переменного тока), которые предназначены для преобразования электрической энергии в механическую. Для управления такими приводами необходимы датчики обратной связи и контроллер;
- сервоприводы — механизмы, позволяющие устанавливать и фиксировать рабочий орган оборудования в заданных положениях, перемещать его в соответствии с заданной программой. Кроме того, они могут поддерживать необходимый момент на валу при нулевой скорости вращения вала, что используется для удержания исполнительного механизма в одном положении под нагрузкой [4]. Для управления сервоприводом необходимы отдельный контроллер и драйверы;
- шаговые двигатели, которые представляют собой бесщеточное электромеханическое устройство, преобразующее последовательность электрических импульсов, приложенных к его обмоткам возбуждения, в точно определенное пошаговое механическое вращение. Такие двигатели хорошо подходят для системы управления без обратной связи, в которой точное положение вала поддерживается точным количеством импульсов без использования датчика обратной связи [5]. Шаговый двигатель может управляться без драйвера напрямую от микроконтроллера или логической схемы или с драйвером, который управляет обмотками по сигналам от управляющего устройства;
- интеллектуальные приводы, расширяющие возможность управления приводом за счет интеграции сложных алгоритмов. Такие устройства получили функции программируемого логического контроллера, они обладают логикой принятия решения на основе собственных датчиков и прогноза состояния системы. Интеллектуальные приводы способны управлять не только своим исполнительным механизмом, но и оказывать влияние на работу всей системы;
- смарт-приводы — автономные исполнительные механизмы, где в одном корпусе размещены привод, контроллер, датчики и коммуникационные интерфейсы. Встроенные датчики и контроллер обеспечивают управление положением, скоростью и усилием привода, снимая нагрузку на систему управления верхнего уровня.

Проведенный анализ современных разработок в области непрерывных манипуляторов позволил выявить

ряд характерных конструктивных и функциональных особенностей, а также системные проблемы управления.

Гибкий манипулятор с пружинными сегментами [6] представляет собой конструкцию, основанную на пружинах сжатия, которые деформируются при натяжении тросов. Данное решение аналогично биологическому прототипу — хоботу слона. Однако, в данной системе отсутствует контроль натяжения тросов. Усилие определяется косвенно через жесткость пружин и перемещение тросов, что не позволяет произвести точный силомоментный контроль в реальном времени.

Манипулятор *Bendy Arm* [7], разработанный для помощи людям с ограниченными возможностями, демонстрирует другой подход. Конструкция состоит из гибкого основания и дисков, через которые пропущены тросы. Данным манипулятором управляет вручную при помощи джойстика без использования обратной связи, исключительно визуально.

Анализ данных решений выявил общую проблему — отсутствие интегрированной системы автоматического управления, обеспечивающей одновременный контроль кинематических и силовых параметров.

Целью работы является решение проблемы синтеза адаптивной и многосвязной системы управления для непрерывных манипуляторов путем разработки архитектуры смарт-привода с распределенной обработкой данных на уровне программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС) и экспериментальный анализ ее эффективности.

На первом этапе разработки эскизного проекта смарт-привода, результаты которого представлены в настоящей статье, проведена конструкторская часть работы.

2. Постановка задачи, определение компоновки привода, выбор оборудования и компонентов

Рассмотрим непрерывный манипулятор, состоящий из звеньев на базе жестких элементов со сферической поверхностью, качение которых друг относительно друга и определяет форму звеньев. Качение элементов осуществляется с помощью тросов, проходящих сквозь них, перемещение которых осуществляется с помощью приводов.

Непрерывный манипулятор может состоять из нескольких звеньев, каждым из которых управляет один смарт-привод. Смарт-приводы располагаются в виде модульной конструкции друг над другом и повернуты друг относительно друга на угол $360^\circ/2n$, где n — количество звеньев. На рис. 1 представлена конструкция непрерывного манипулятора.

Каждый смарт-привод состоит из 4-х датчиков натяжения и перемещения троса (ДНПТ) с приводными блоками, отладочной платы-контроллера и основания привода. На рис. 2 представлена компоновка привода.

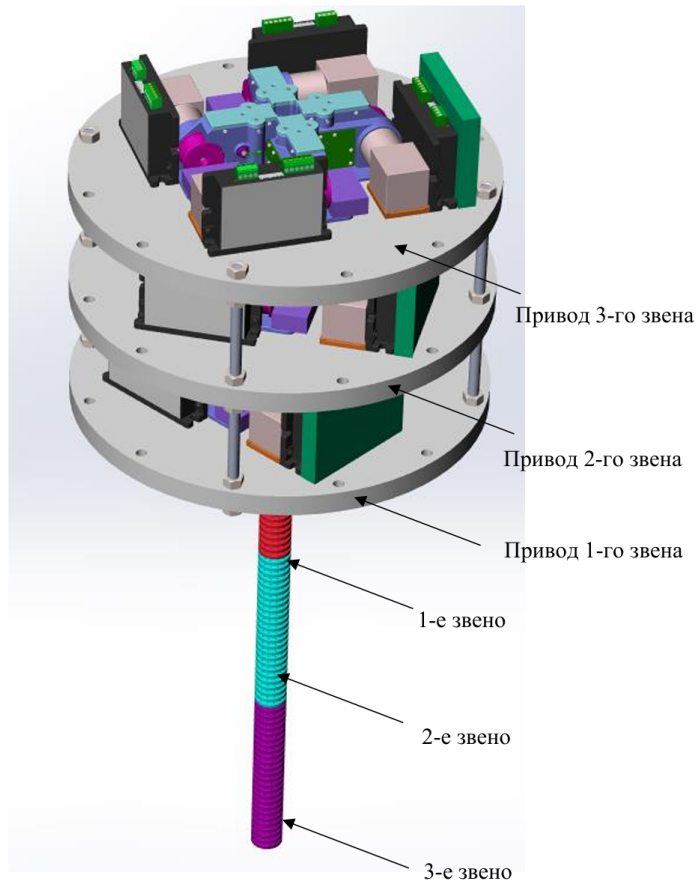


Рис. 1. Конструкция непрерывного манипулятора

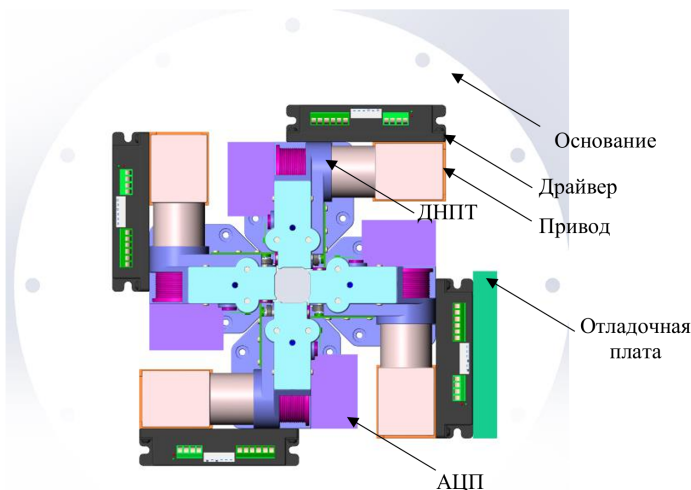


Рис. 2. Компоновка смарт-привода

В каждый ДНПТ с приводным блоком входят:

- комплексированный датчик натяжения и перемещения троса;
- шаговый двигатель;
- драйвер двигателя.

Комплексированный датчик натяжения и перемещения состоит из:

- корпуса;
- валов с магнитами;
- механизма контроля натяжения;
- рояльного колеса;
- крышки;
- тензодатчика;
- платы с двумя энкодерами;
- аналого-цифрового преобразователя (АЦП).

Были взяты шаговые двигатели *STEPPERONLINE 11HS20-0674S-PG27* с планетарным редуктором с соотношением 27:1 [8]. В качестве драйвера использован *STEPPERONLINE DM320T* [9]. Данный драйвер обладает настройкой микрошага, что позволяет увеличить точность и плавность движения двигателя. Возможно деление одного оборота на 400, 800, 1600, 3200, 6400, 12800, 4000 и 8000 микрошагов. Для контроля натяжения используется датчик *DYHW-108* [10]. Он рассчитан на вес до 3 кг. Энкодер представляет собой комплект из микросхемы *AS5048A* — 14-битного датчика углового положения и магнита, установленного на торцах входного и выходного валов ДНПТ. Микросхема считывает угол поворота магнита и состоит из датчика Холла, АЦП и цифрового обработчика сигналов [11]. Для обработки сигнала с тензодатчика использована специализированная плата *CHIPSEA* на базе 24-битного сигма-дельта АЦП *CS1238* [12]. Система управления смарт-приводом реализована на базе отладочной платы *MAX 10 FPGA (10M08S, 144EQFP)* [13]. Для обмена данными между контроллером и компьютером верхнего уровня используется преобразователь USB-UART на базе микросхемы *FT232R* [14].

3. Проектирование датчика натяжения и перемещения троса

Изначально использовался ДНПТ с несимметричным расположением штоков, однако использование двух штоков привело к перекосам и заклиниванию. Поэтому был разработан новый датчик, в котором использовались более жесткие подшипники на валах и цилиндрический тензодатчик вместо балочного из-за своей компактности. При такой модификации усилие от троса передается через центр масс системы, что исключает перекосы, а также полное складывание пружины, которое приводило к соскакиванию витков друг с друга и некорректным результатам. Спроектированный датчик представлен на рис. 3.

В данной версии усилие от троса 9 передается на ролик 16 демпфера 12, затем через пружину передается на толкатель 5, далее, через металлическую пластину 4, передается на датчик 3. Толкатель и демпфер двигаются по двум неподвижным штокам 1 и 2. Так как сила приложена к центру масс демпфера, у данной конструкции отсутствует проблема перекоса и заклинивания подвижных частей.

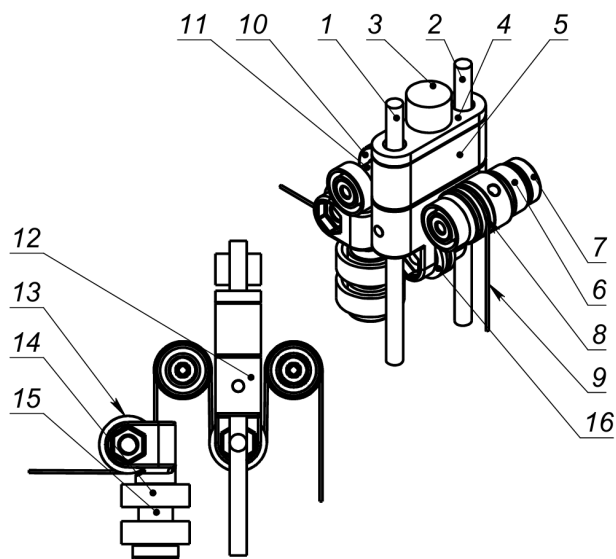


Рис. 3. Новый датчик

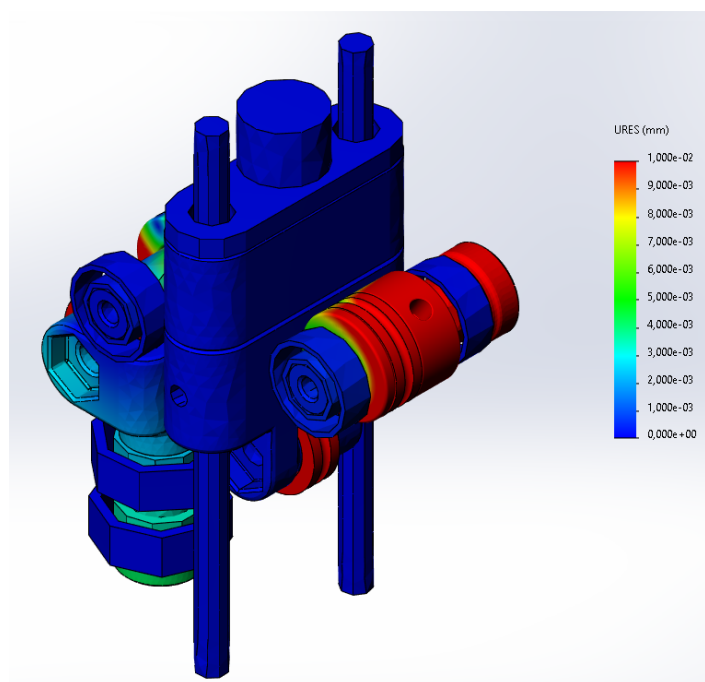


Рис. 4. Эпюра результирующих перемещений нового датчика

Эпюра результирующих перемещений нового датчика представлена на рис. 4. Как видно из данного рисунка, перемещения распределены равномерно по объему демпфера, толкателя и металлической пластины.

4. Разработка аппаратной части информационно-управляющей системы управления смарт-привода

Для реализации информационно-управляющего модуля для смарт-привода предлагается следующая структура (рис. 5).

В состав модуля входят:

- контроллер верхнего уровня — персональный компьютер (ПК);

- ПЛИС;
- приводные блоки.

На контроллере верхнего уровня используется специальное ПО, которое будет рассмотрено на следующем (технологическом) этапе разработки эскизного проекта смарт-привода.

На ПЛИС реализована микропроцессорная система, в которую входят генераторы ШИМ сигнала для управления приводами, компонент опроса энкодеров AS5048A, устройства приема данных и сигнала прерывания от АЦП. В самой структуре ПЛИС реализованы модули формирования управляющих сигналов для приводов и автоматы опроса тензодатчиков.

Каждый модуль смарт-привода перед использованием должен быть откалиброван. Для этого был создан стенд для калибровки и исследования приводного модуля.

Рассмотрим информационную часть системы, необходимую для тестирования и калибровки датчика натяжения и перемещения троса, представленную на рис. 6.

Как видно из рисунка, данная система имеет те же компоненты, что и информационно-управляющий модуль всего смарт-привода. В нее входят следующие элементы:

- микропроцессорная система;
- компонент опроса SPI_n ;
- автоматы опроса АЦП;
- счетчик импульсов ШИМ.

В состав микропроцессорной системы входят:

- источник тактовой частоты;
- память для хранения данных и программы;
- *soft*-процессор *Nios II*;
- *UART* порт для программатора;
- порт ввода-вывода *INT_HX* — необходим для приема сигнала прерывания от компонента опроса АЦП;
- порт ввода-вывода *HX_D_IN* — необходим для приема данных с компонента опроса АЦП;
- порт ввода-вывода *LED* — необходим для управления светодиодами;
- таймер — необходим для обеспечения задержек и измерения времени;
- компонент *as5048a_v2_0* — необходим для одновременного опроса нескольких энкодеров;
- порт *UART RS-232* — требуется для обмена данными с компьютером верхнего уровня;
- порт ввода-вывода *EV_GENERATOR* — требуется для программной генерации сигналов *event* в целях отладки;

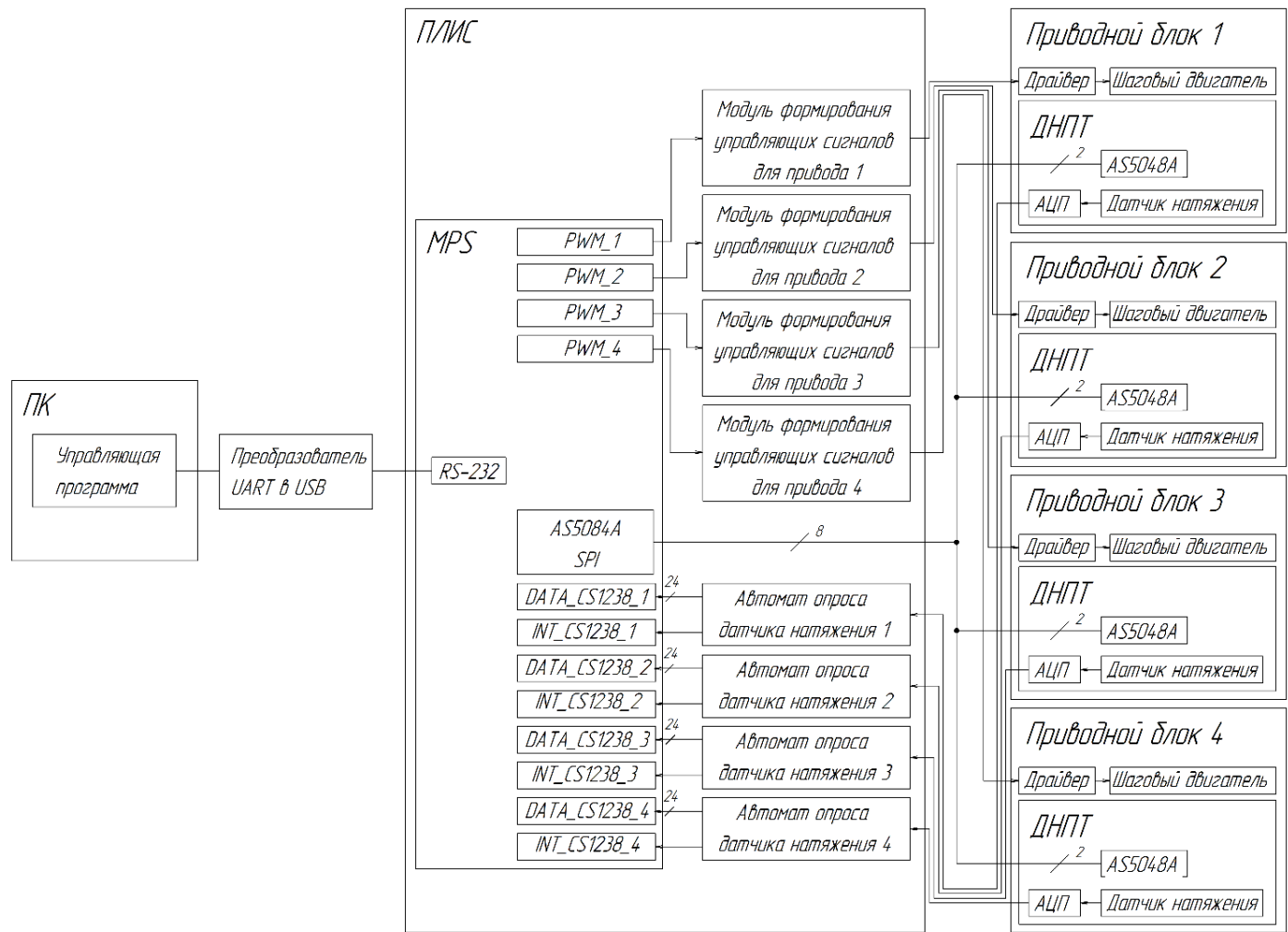


Рис. 5. Структура информационно-управляющего модуля смарт-привода

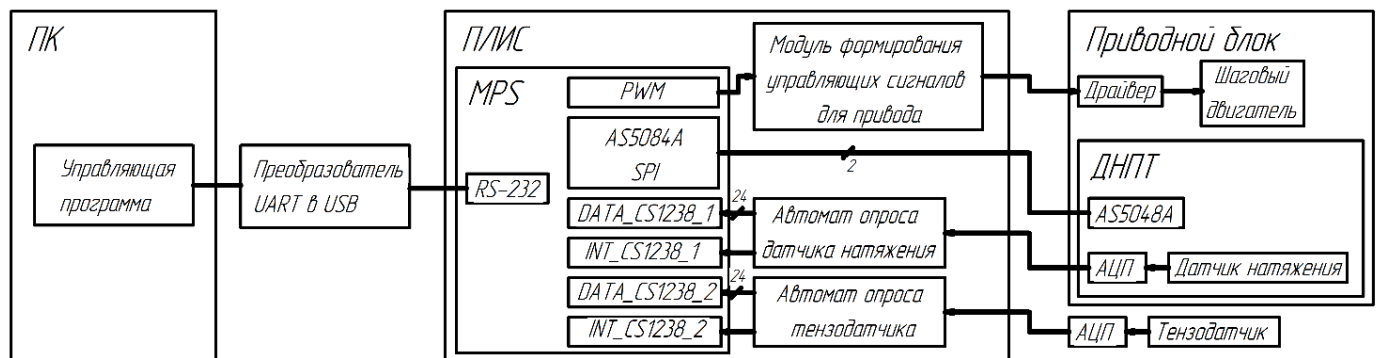


Рис. 6. Блок схема информационно-управляющего модуля для тестирования и калибровки датчиков

- компонент *avalon_pwm_0*, который генерирует ШИМ сигнал с управляемой частотой и периодом для управления шаговым двигателем;
- порт ввода-вывода *PWM_CNT* — необходим для задания количества импульсов счетчику импульсов ШИМа;
- порт ввода-вывода *DIR* — необходим для выбора направления вращения двигателя;
- порт ввода-вывода *DRIVER_EN* — необходим для разрешения работы драйвера;
- порт ввода-вывода *CNT_CLR* — необходим для сброса счетчика импульсов;
- порт ввода-вывода *PULSE* — необходим для программной генерации ШИМ сигнала;
- порт ввода-вывода *START_CNT* — необходим для отправки сигнала запуска счетчика импульсов;
- порт ввода-вывода *MODE_CNT* — сигнал смены режима счетчика (счетный/сквозной);
- порт ввода-вывода *CNT_END* — необходим для приема сигнала от счетчика об окончании счета.

Микропроцессорная система согласует работу всех компонентов, следует заданной программе и управляет работой всего модуля.

В качестве компонента опроса энкодеров было предложено использовать *SPI_n* [15] (рис. 7).

Особенностью компонента является общая управляющая схема для реализации алгоритма работы интерфейса *SPI*, многоканальная шина *SPI* для параллельного подключения датчиков и регистровый файл для синхронной записи полученных с датчиков данных. Размер

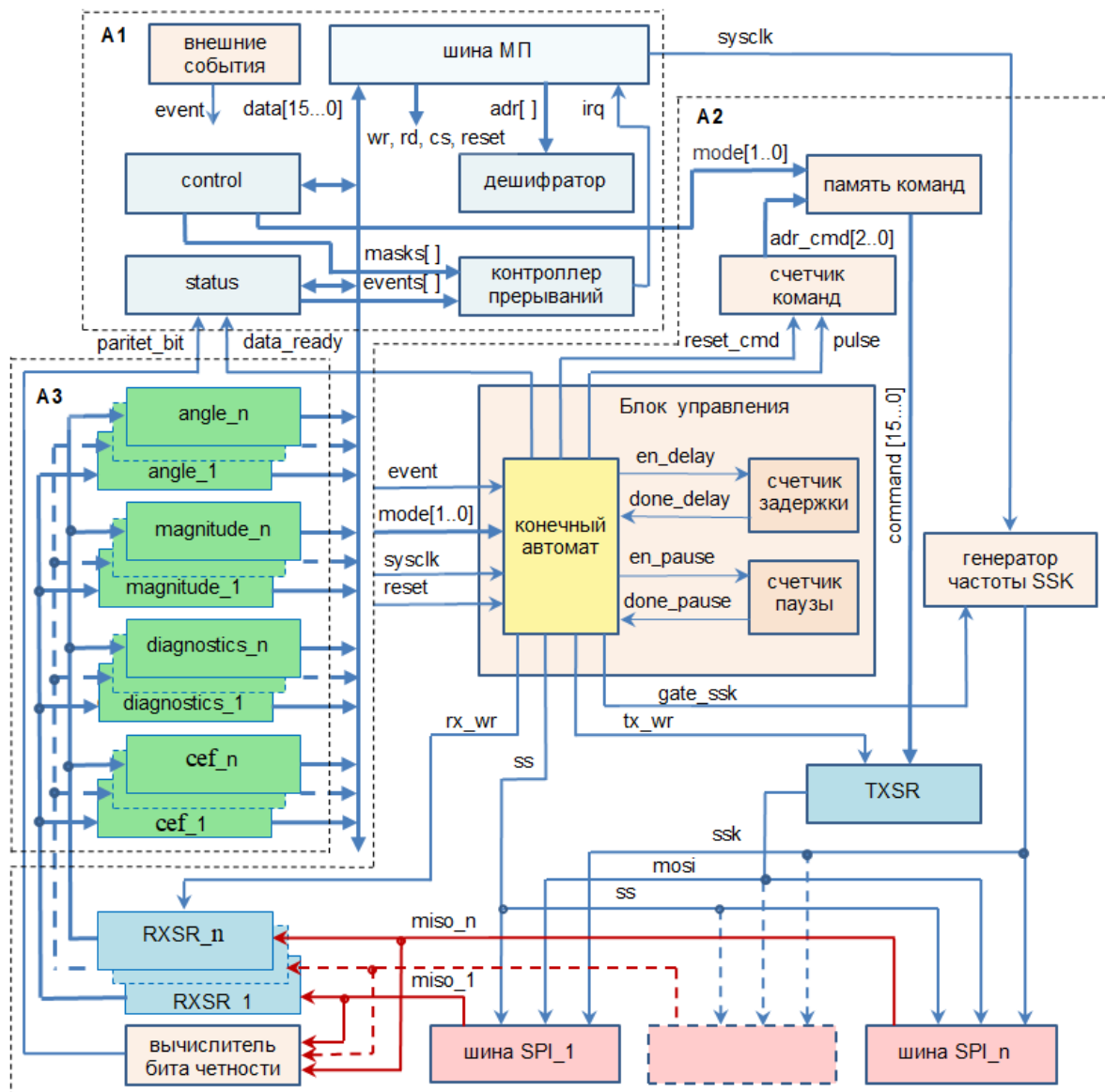


Рис. 7. Структура компонента *SPI_n*

Таблица 1. Адресное пространство компонента *SPI_n*

Адреса расположения данных	Наименование данных	Комментарий
<i>base+0</i>	<i>VERSION</i>	номер версии компонента <i>x"0201"</i>
<i>base+1</i>	<i>time_reg</i>	номер текущего опроса компонента
<i>base+2</i>	<i>status_reg</i>	регистр <i>"status"</i>
<i>base+3</i>	<i>control_reg</i>	регистр <i>"control"</i>
<i>base+4</i>	<i>agc_reg(1)</i>	регистр <i>"AGC"</i> датчика 1
<i>base+5</i>	<i>magnit_reg(1)</i>	регистр <i>"magnitude"</i> датчика 1
<i>base+6</i>	<i>angle_reg(1)</i>	регистр <i>"angle"</i> датчика 1
<i>base+7</i>	<i>cef_reg(1)</i>	регистр <i>"CEF"</i> датчика 1
-----	-----	-----
<i>base+4*N+0</i>	<i>agc_reg(N)</i>	регистр <i>"AGC"</i> датчика <i>N</i>
<i>base+4*N+1</i>	<i>magnit_reg(N)</i>	регистр <i>"magnitude"</i> датчика <i>N</i>
<i>base+4*N+2</i>	<i>angle_reg(N)</i>	регистр <i>"angle"</i> датчика <i>N</i>
<i>base+4*N+3</i>	<i>cef_reg(N)</i>	регистр <i>"CEF"</i> датчика <i>N</i>

регистрового файла определяется количеством опрашиваемых датчиков, которое задается в виде параметра, и автоматически вычисляется при его компиляции в пакете проектирования ПЛИС. В структуре компонента можно выделить 3-и функциональные части *A1–A3*. Модуль *A1* реализует интерфейс между компонентом и процессорной шиной и состоит из дешифратора адресов, регистра управления *control*, регистра состояния *status* и контроллера прерываний. С помощью дешифратора адресов реализуется доступ к внутренним регистрам компонента для записи и считывания данных. Разрядность шины адресов, которые на нее поступают, автоматически масштабируется в зависимости от количества датчиков, опрашиваемых с помощью компонента.

Регистр управления *control* задает режим работы компонента и маску для событий, по которым формируется сигнал прерывания. Режим работы компонента определяет набор данных с датчиков, который будет считываться в текущем опросе. В регистре состояния *status* фиксируются различные события во время работы схемы, одним из которых является конец текущего опроса датчиков. На эти события контроллер прерываний вырабатывает сигнал прерывания для процессора, если для них установлены разрешения в регистре управления *control*. Модуль *A2* осуществляет опрос датчиков по стандарту *SPI* и управление записью принятых данных в регистровый файл (модуль *A3*). Опрос датчиков инициируется по событию *event* (сигнал синхронизации опроса всех датчиков в системе управления), а последовательность команд опроса датчиков определяется режимом работы компонента, который задан в регистре контроля *control*, и хранится в памяти команд. В блоке «вычислитель бита четности» вычисляется бит четности при приеме данных для всего пакета и если он равен «1», то весь принятый пакет данных считается недостоверным. Адресное пространство компонента представлено в табл. 1.

Для работы с ПЛИС была использована программа Intel Quartus Prime Lite 18.1 [16].

На рис. 8 представлен компонент опроса АЦП. Ком-

понент состоит из:

- делителя входной частоты (*Counter_CLKT*);
- схем выделения переднего и заднего фронтов (формирование сигналов *CLK_HX_F*, *CNT_CC_24_F*, *EN_F*);
- конечного автомата (*SensorRead_SM*);
- счетчика импульсов (*CycleCounter*);
- сдвигового регистра приема (*RXSR*);
- сдвигового регистра отправки (*SROUT*);
- блока с константой (*Const*);
- блока сравнения (*CMP*).

Конечный автомат (КА) управляет работой всей схемы. Его внутренняя структура представлена на рис. 9. В табл. 2 приведены состояния данного конечного автомата.

АЦП *CHIPSEA CS1238* готов к передаче при логическом нуле на выводе для передачи данных (*DOUT*), поэтому в начальном состоянии (*Init*) ожидается ноль на этом выводе и сигнал запуска *EV*. Получив эти сигналы, конечный автомат переходит состояние *CLK*, откуда по сигналу *CLK_T* переходит в состояние *T1*. В *T1* происходит сброс счетчика импульсов *CycleCounter*, по следующему сигналу *CLK_T* происходит переход в *T2*,

Таблица 2. Конечные состояния конечного автомата *SensorRead_SM*

Сигнал	Состояние КА					
	<i>Init</i>	<i>CLK</i>	<i>T1</i>	<i>T2</i>	<i>T3</i>	<i>T4</i>
<i>CLK_HX</i>	0	0	0	1	0	0
<i>CNT_24_EN</i>	0	0	0	1	1	0
<i>RX_WR</i>	0	0	0	0	0	1
<i>IRQ</i>	0	0	0	0	0	1
<i>CNT_24_RESET</i>	0	0	1	0	0	0

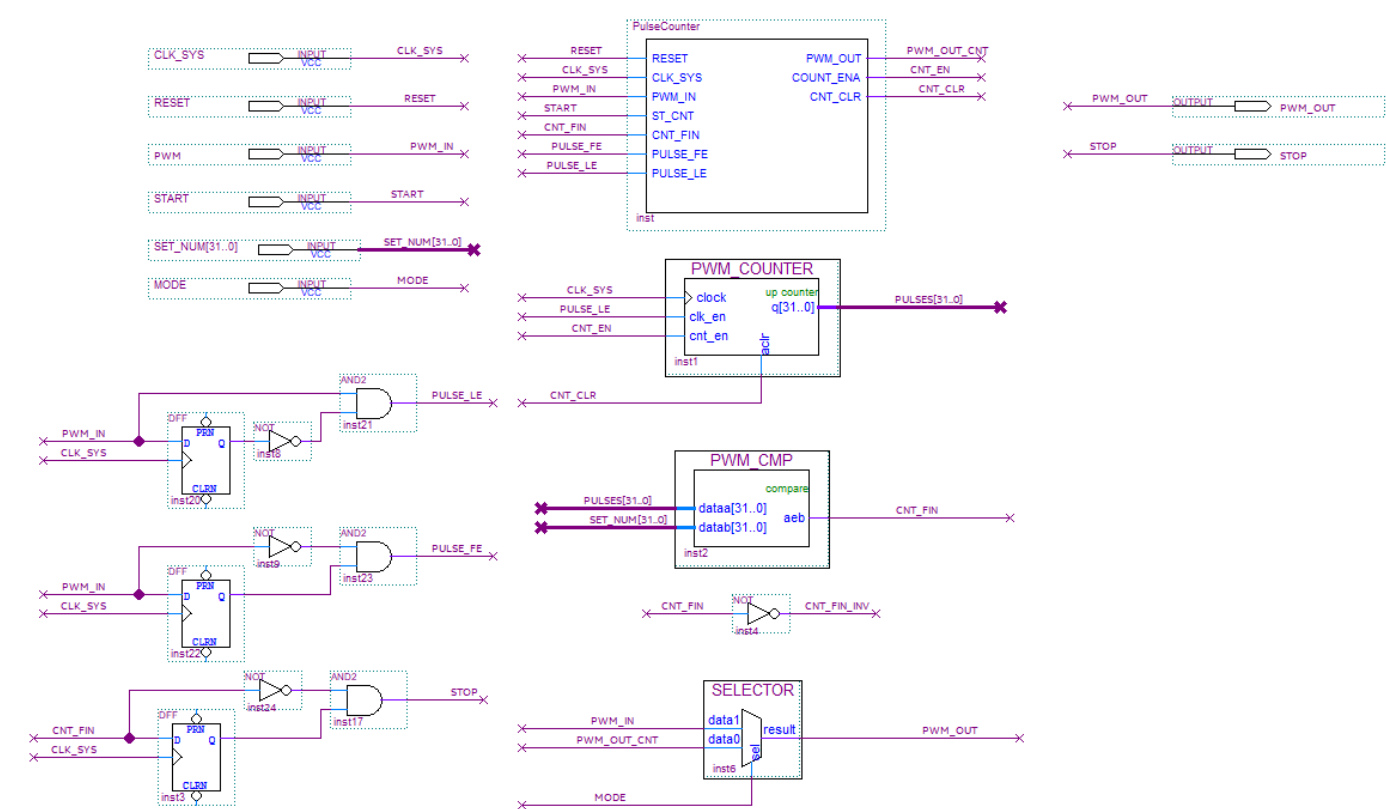


Рис. 10. Счетчик импульсов ШИМ

Когда приходит сигнал запуска ST_CNT , автомат переходит в состояние 5, отдает сигнал на очистку счетчика, ждет заднего фронта импульса ШИМ, если приходит задний фронт и не появляется сигнал об окончании счета, автомат переходит в состояние 2, где ожидает переднего фронта ШИМа, по переднему фронту происходит переход в состояние 3. В состоянии 3 сигнал об окончании отчета приводит к переходу автомата в состояние 4, а затем в начальное. При отсутствии сигнала об окончании счета автомат по низкому уровню сигнала ШИМ переходит в состояние 2. Цикл повторяется.

Счетчик $PWM_COUNTER$ отсчитывает число передних фронтов ШИМа, затем передает это число на компаратор. Компаратор считывает количество импульсов с 32-битной шины, идущей от микропроцессорной системы. Дойдя до некоторого числа импульсов, компаратор отдает сигнал CNT_FIN , по которому автомат прекращает ШИМ.

На рис. 12 представлен результат симуляции компонента.

Было задано 10 импульсов, компонент выдал 10 импульсов. При получении сигнала $RESET$ счет прекращается. При переключении сигнала $MODE$ происходит переключение режима на сквозной.

Команды задаются на персональном компьютере в специальной управляющей программе. Команды из программы через интерфейс USB попадают на преобразователь USB в $UART$ и далее на компонент $RS-232$ микропроцессорной системы ПЛИС, происходит обработка и выполнение программы. К микропроцессорной системе подключен компонент $AS5048A\ SPI$, который контролирует работу двух датчиков перемещения троса. Компонент PWM отвечает за генерацию ШИМ сигнала, который в модуле формирования преобразуется в управляющий сигнал для драйвера, драйвер отдает сигналы на шаговый двигатель. На компоненты INT_CS1238 приходит сигнал о готовности данных на автомате опроса. $DATA_CS1238$ — шины данных автоматов. Автоматы опрашиваются через АЦП тензодатчик и датчик натяжения троса.

Таблица 3. Конечные состояния автомата *PulseCounter*

Сигнал	Состояние КА				
	State1	State5	State2	State3	State4
PWM_OUT	0	0	PWM_IN	PWM_IN	0
$COUNT_ENA$	0	0	1	1	0
CNT_CLR	1	1	0	0	1

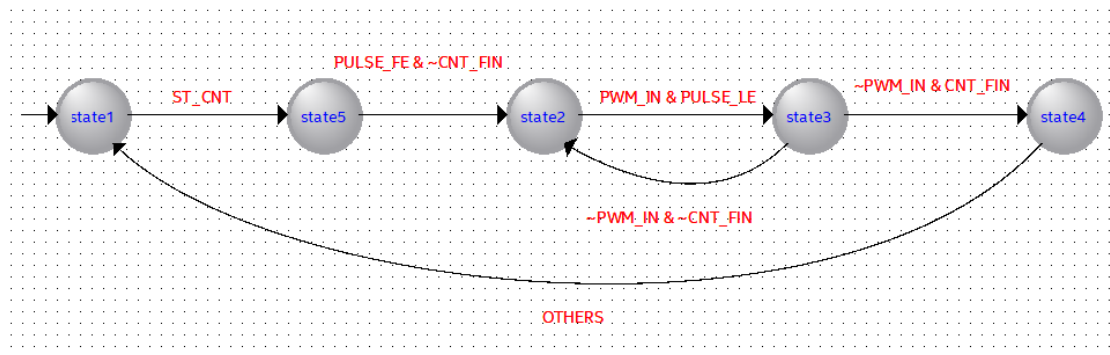
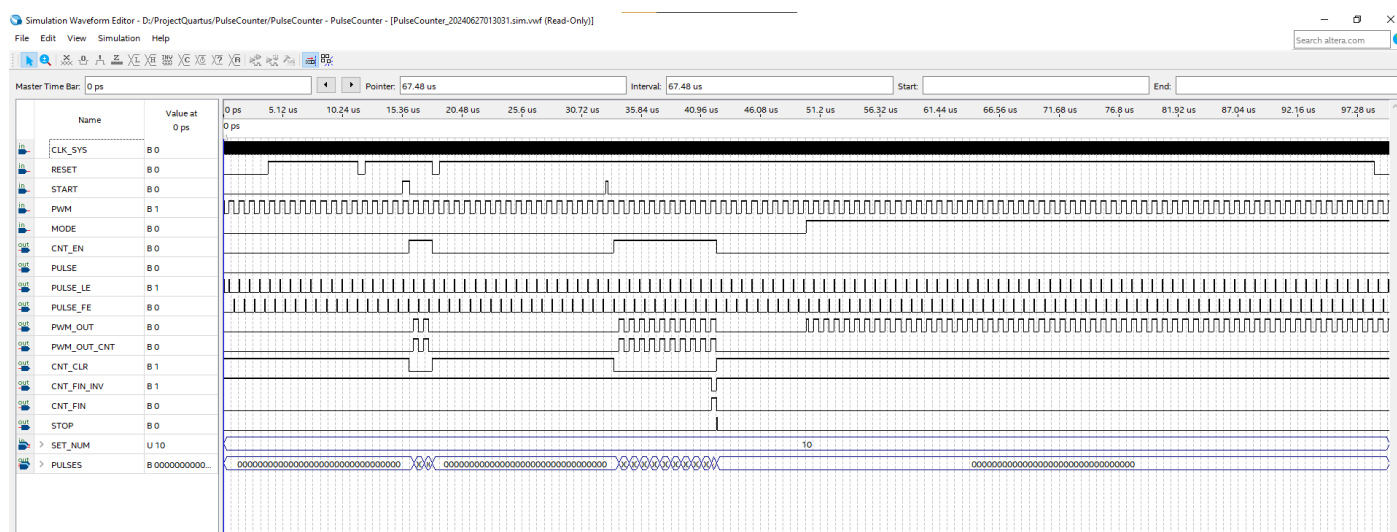
Рис. 11. Структура конечного автомата *PulseCounter*

Рис. 12. Функциональная симуляция счетчика ШИМ

5. Заключение

Разработанная на первом (конструкторском) этапе создания эскизного проекта смарт-привода схема была загружена во внутреннюю флеш-память ПЛИС. Для взаимодействия персонального компьютера верхнего уровня с синтезированной схемой системы управления смарт-привода необходимо на втором (технологическом) этапе разработать программное обеспечение, при помощи которого будет реализовываться не только управление приводом, но и корректно выполняться функция калибровки ДПНТ.

Список литературы / References

- [1] Богданов ДР, Даринцев ОВ. Конструктивные особенности манипуляторов с управляемым изгибом. *Современные проблемы науки и образования*. 2013;6:210. Bogdanov DR, Darintsev OV. Design features of manipulators with the controlled bend. *Modern problems of science and education*. 2013;6:210. (in Russian) EDN: RVCQVR
- [2] Юревич ЕИ. *Основы робототехники*. СПб.: БХВ-Петербург; 2010. 368 с. Yurevich EI. *Fundamentals of Robotics*. St.Petersburg: BHV-Petersburg; 2010. 368 p. (in Russian)
- [3] Solis JFP, Navarro GS, Linares RC. Modeling and Tip Position Control of a Flexible Link Robot: Experimental Results. *Computacion y Sistemas*. 2009;12(4):421–435. <https://www.cys.cic.ipn.mx/ojs/index.php/CyS/article/view/1213/1305>
- [4] VEDA MC. Серводвигатели. [online] <https://drives.ru/stati/servodvigateli-princip-raboty> (Дата обращения 22.09.2025). VEDA MC. Servomotors. [online] <https://drives.ru/stati/servodvigateli-princip-raboty> (Accessed 22.09.2025).
- [5] CNC-DESIGN. Шаговые двигатели – конструкция, принцип работы и применение. [online] <http://cnc-design.ru/shagovye-dvigateli-konstrukciya-princip-raboty-i-primeneniye.html> (Дата обращения 22.09.2025). CNC-DESIGN. Stepper motors – design, operating principle and application. [online] <http://cnc-design.ru/shagovye-dvigateli-konstrukciya-princip-raboty-i-primeneniye.html> (Accessed 22.09.2025).
- [6] Yang J, Peña-Pitarch E, Potratz J, Beck S. Synthesis and analysis of a flexible elephant trunk robot. *Advanced Robotics*. 2006;20(6):631–659. DOI: 10.1163/156855306777361631
- [7] Coulson R, Robinson M, Kirkpatrick M, Berg DR. Design and Preliminary Testing of a Continuum Assistive Robotic Manipulator. *Robotics*. 2019;8(4):84. DOI: 10.3390/robotics8040084
- [8] StepperOnline. Nema 11 Stepper Motor Bipolar L=51mm 0.67A w/ Gear Ratio 100:1 Planetary Gearbox. [online] <https://www.omc-stepperonline.com/nema-11-stepper-motor-bipolar-l-51mm-w-gear-ratio-100-1-planetary-gearbox-11hs20-0674spg100?srsltid=AfmBOoBIQTDYwVTJZp5GNVdvNwmBesf8y9V3MNcljKwYfSgEGL7JsA> (Accessed 01.03.2025).
- [9] Digital Stepper Driver DM320T. User Manual. [online] <https://www.omc-stepperonline.com/download/DM320T.pdf> (Accessed 22.09.2025).
- [10] Amazon. DYHW-108 Micro Button Load Cell Small Compression Force Sensor Tension Testing 8mm External Diameter 3kg 5kg 10kg 20kg 50kg 100kg (3kg Range). [online] <https://www.amazon.com/DYHW-108-Compression-Tension-External-Diameter/dp/B0C1NF3NVM?th=1> (Accessed 22.09.2025).

- [11] AMS. Ams AS5048A High-Resolution Position Sensor. [online] <https://look.ams-osram.com/m/287d7ad97d1ca22e/original/AS5048-DS000298.pdf> (Accessed 22.09.2025).
- [12] CHIPSEA. High-precision ADCs. CS1238. <https://en.chipsea.com/product/details/?id=1156&pid=77> (Accessed 22.09.2025).
- [13] Intel. Intel® MAX® 10 FPGA Device Datasheet. [online] https://cdrdv2-public.intel.com/666319/m10_datasheet-683794-666319.pdf (Accessed 22.09.2025).
- [14] FTDI Chip. FT232R USB UART IC Datasheet. [online] https://ftdichip.com/wp-content/uploads/2020/08/DS_FT232R.pdf (Accessed 22.09.25).
- [15] Богданов ДР, УФИЦ РАН. Программа для моделирования и синтеза специализированного цифрового компонента ПЛИС опроса датчика магнитного энкодера AS5048A, версия 2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024617721. 2024.
Bogdanov DR, UFRC RAS. Program for modeling and synthesizing a specialized digital FPGA component for polling the AS5048A magnetic encoder sensor, version 2. Certificate of state registration of the computer program No. 2024617721. 2024. (in Russian) EDN: BSJRWM
- [16] Intel. Intel® Quartus® Prime Lite Edition Design Software Version 18.1 for Windows. [online] <https://www.intel.com/content/www/us/en/software-kit/665990/intel-quartus-prime-lite-edition-design-software-version-18-1-for-windows.html> (Accessed 22.09.2025).

Сведения об авторах / Information about the Authors

Ивачев Артем Владимирович

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Artem V. Ivachev

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

artemkryakovski@yandex.ru

ORCID: 0009-0001-2130-2417

Даринцев Олег Владимирович

доктор тех. наук, профессор

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Oleg V. Darintsev

Sc.D. (Engineering), Prof.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

darintsevov@uust.ru

ORCID: 0000-0003-0246-1997

Богданов Динар Рафаэлевич

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Dinar R. Bogdanov

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

dr_bog@mail.ru

ORCID: 0000-0003-4481-7103



К юбилею Марата Масгутьяновича Шакирьянова



29 октября 2025 года 80-летний юбилей отмечает кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории «Механика твердого тела» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (ИМех УФИЦ РАН) Марат Масгутьянович Шакирьянов.

Марат Масгутьянович в 1969 году окончил факультет авиационных двигателей Уфимского ордена Ленина авиационного института им. Серго Орджоникидзе (УАИ) по специальности «Авиационные двигатели». Трудовую деятельность начал с августа 1969 года в качестве ассистента кафедры «Теоретическая механика» УАИ. С 1970 по 1973 годы был аспирантом Казанского физико-технического института АН СССР. В 1978 г. в Казанском государственном университете им. В.И. Ульянова-Ленина защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

После окончания аспирантуры Марат Масгутьянович работал ассистентом кафедры «Сопротивление материалов и строительная механика» УАИ с 1973 по 1978 годы, старшим преподавателем (с 1978 г.), а потом и

доцентом (с 1982 г.) кафедры «Теоретическая механика» Уфимского государственного авиационного технического университета (ранее — УАИ) по 2017 г. С 2010 г. по настоящее время является старшим научным сотрудником лаборатории «Механика твердого тела» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, а с 2021 по 2023 годы был заведующим данной лаборатории.

В период своей педагогической деятельности Марат Масгутьянович вел большую научно-педагогическую и методическую работу, являлся составителем методических разработок в области статики, кинематики и динамики твердого тела, а также занимался научно-исследовательской работой со студентами. С 2005 по 2019 годы студентами под его научным руководством в общей сложности сделаны 42 доклада на ежегодных научно-теоретических конференциях университета. При подведении итогов конференций их доклады ежегодно занимали призовые места. Марат Масгутьянович уделял большое внимание не только качеству обучения теоретической механике, но и формированию у студента личности, становлению его как гражданина. За успешную работу в деле подготовки инженерных кадров отмечался рядом благодарностей в приказах, подписанных ректором Университета.

С 2004 по 2007 годы Марат Масгутьянович Шакирьянов работал помощником депутата Государственной Думы РФ на общественных началах.

С 2010 года Марат Масгутьянович работает старшим научным сотрудником в лаборатории Механики твердого тела ИМех УНЦ РАН, где занимается научно-исследовательской работой по теме «Пространственные периодические и непериодические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления». В последующие годы Марат Масгутьянович также работает в составе группы ученых, возглавляемой член-корреспондентом РАН Ильгамовым М.А.

Марат Масгутьянович Шакирьянов является высококвалифицированным специалистом в области механики твердого тела. Он занимается изучением пространственных колебаний трубопровода. Эти задачи являются актуальными и представляют практический интерес. Круг его научных интересов связан с магистральными трубопроводами, надземные части которых проходят

через горные, водные, коммуникационные и другие препятствия, изгибаются под собственным весом и под действием переменного внутреннего давления могут совершать пространственные колебания. Такие же колебания трубопровода могут иметь место при заправке летательного аппарата на земле и в воздухе, при работе энергетических установок и технологических машин. При определенных соотношениях между параметрами колебания трубопровода могут быть как периодическими, так и непериодическими (хаотическими). Эти колебания могут усиливаться или ослабевать. Если амплитуды колебаний станут выше предельных значений, то это может вызвать разрушение трубопровода. Что, в свою очередь, приведет к разгерметизации трубопровода, следовательно, и утечке продукта, загрязнению окружающей среды, а при возгорании — уничтожению прилегающих сельскохозяйственных угодий, лесных массивов и верхнего плодородного слоя почвы. Полученные на основе разработанной математической модели нелинейные уравнения и результаты вычислений позволяют провести оценку напряженно-деформированного состояния трубопровода и при неблагоприятных режимах его работы разработать мероприятия по защите трубопровода от повреждений и разрушения. Маратом Масгутьяновичем исследованы пространственные колебания участка трубопровода с заключенной в нем жидкостью при поступательных вибрационных движениях опор. Колебания обеих опор происходят с равными амплитудами, частотами и фазами. Деформации трубы, связанные с выходом ее оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Учитываются взаимодействия внутреннего постоянного давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы, ее изгибно-вращательные колебания описываются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений. Применением метода Бубнова–Галеркина эта система сводится к задаче Коши, которая далее решается численно методом Рунге–Кутты. В случае малых изгибных и угловых движений трубы дается сравнение аналитического и численного решений. Дан анализ периодических и непериодических колебаний стальной, титановой и композитной труб, для чего построены, в частности, спектры частот и отображения Пуанкаре.

Приведем важнейшие результаты научной деятельности Марата Масгутьяновича:

- при рассмотрении пространственных колебаний трубопровода, содержащего транспортируемую жидкость, относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры, изучены и проанализированы режимы колебаний при различных значениях параметров системы в зависимости от входных параметров и времени [1–5];
- при исследовании устойчивости изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами установлено преобладающее влияние на изгиб внутреннего давления среды в трубопроводе над его весом и превышение момента сил вибрации опор над мо-

ментом сил гравитации, что обусловлено наличием верхнего и нижнего равновесных положений и соответствующих областей притяжения, а также определены значения входных параметров, при которых верхнее и нижнее изогнутые положения трубопровода являются устойчивыми [6, 7]. Дан анализ периодических и непериодических колебаний стальной, титановой и композитной труб, для чего построены, в частности, спектры частот и отображения Пуанкаре [8].

По результатам научных исследований Марат Масгутьянович опубликовал свыше 70 работ, из них 4 авторских свидетельства и 2 патента РФ. За время работы в Институте под его руководством успешно выполнены работы по гранту РФФИ № 11-01-97016-р_Поволжье_а «Пространственные колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления».

В 2005 году за многолетнюю и плодотворную научно-педагогическую деятельность Марат Масгутьянович Шакирьянов награжден Почетной грамотой Минвуза, а 2013 году ему присвоено звание «Почетный работник высшего профессионального образования РФ». Награжден Почетной грамотой ИМех УФИЦ РАН, Почетной грамотой УФИЦ РАН, Почетной грамотой РАН, Почетной грамотой Администрации городского округа город Уфа, Почетной грамотой городского округа города Уфа, Почетной грамотой Академии наук Республики Башкортостан, Почетной грамотой Профсоюза работников РАН.

Коллектив Института механики им. Р.Р. Мавлютова и редакция журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляют своего коллегу Марата Масгутьяновича Шакирьянова с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов на благо нашей науки!

Список литературы / References

- [1] Ганиев РФ, Ильгамов МА, Хакимов АГ, Шакирьянов ММ. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2016;6:3–13.
EDN: YNDALN
Ganiev RF, Il'gamov MA, Khakimov AG, Shakir'yanov MM. Spatial vibrations of a pipeline in a continuous medium under the action of variable internal pressure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016;45:485–494.
DOI: 10.3103/S105261881606008X
- [2] Ганиев РФ, Ильгамов МА, Хакимов АГ, Шакирьянов ММ. Пространственные непериодические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2017;2:3–12.
EDN: YKVAQX
Ganiev RF, Il'gamov MA, Khakimov AG, Shakir'yanov MM. Spatial aperiodic vibrations of the pipelines under transient internal pressure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017;46:87–95.
DOI: 10.3103/S1052618817020066
- [3] Ганиев РФ, Ильгамов МА, Хакимов АГ, Шакирьянов ММ. Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2018;6:3–12.
DOI: 10.31857/S023571190002555-1
Ganiev RF, Il'gamov MA, Khakimov AG, Shakir'yanov MM. Spatial vibrations of a pipeline with elastically deflecting support under the action of internal shock pressure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018;47:479–487.
DOI: 10.3103/S1052618818060031

- [4] Хакимов АГ, Шакирьянов ММ. Пространственные колебания трубопровода со скользящей опорой под действием переменного внутреннего давления. *Нефтегазовое дело*. 2018;**16**(2):78–98. Khakimov AG, Shakiryanov MM. Spatial vibrations of a pipeline having a sliding support under the action of variable internal pressure. *Petroleum Engineering*. 2018;**16**(2):78–98. (in Russian)
DOI: [10.17122/ngdelo-2018-2-78-98](https://doi.org/10.17122/ngdelo-2018-2-78-98)
- [5] Шакирьянов ММ. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2019;**6**:76–84. DOI: [10.1134/S0572329919060114](https://doi.org/10.1134/S0572329919060114)
Shakiryanov MM. Spatial nonlinear oscillations of a pipeline under the action of internal shock pressure. *Mechanics of Solids*. 2019;**54**(8):1189–1196.
DOI: [10.3103/S0025654419080090](https://doi.org/10.3103/S0025654419080090)
- [6] Ильгамов МА, Шакирьянов ММ. Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2021;**496**(1):55–59. DOI: [10.31857/S2686740021010053](https://doi.org/10.31857/S2686740021010053)
Ilgamov MA, Shakiryanov MM. Dynamic equilibrium positions of bent pipeline with vibrating supports. *Doklady Physics*. 2021;**66**(2):51–54. DOI: [10.1134/S1028335821020026](https://doi.org/10.1134/S1028335821020026)
- [7] Ильгамов МА, Шакирьянов ММ. Положения упругого равновесия трубопровода с вибрирующими опорами. *Прикладная механика и техническая физика*. 2022;**63**(3(373)):183–192. DOI: [10.15372/PMTF20220318](https://doi.org/10.15372/PMTF20220318)
Ilgamov MA, Shakiryanov MM. Positions of elastic equilibrium of a pipeline with vibrating supports. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022;**63**(3):533–541. DOI: [10.1134/s002189442203018x](https://doi.org/10.1134/s002189442203018x)
- [8] Утяшев ИМ, Шакирьянов ММ. Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2023;**4**:38–52. Utyashev IM, Shakiryanov MM. Spatial Oscillations of a Pipeline with Vibrating Supports. *Izvestiia Akademii nauk. Rossijskaia akademiia nauk. Mehanika tverdogo tela*. 2023;**4**:38–52. (in Russian) DOI: [10.31857/S057232992260058X](https://doi.org/10.31857/S057232992260058X)

Содержание

Механика жидкости и газа

Э.Ш. Насибуллаева

Численный анализ рассеяния волны на паре звуконепроницаемых сфер
методом ортогонального центрального композиционного планирования 116–128

Д.Р. Галеева, В.Н. Киреев

Моделирование динамики капли, движущейся в плоском канале с вязким барьером 129–134

В.А. Архипов, С.А. Басалаев, К.В. Костюшин, А.С. Усанина

Экспериментальное исследование влияния поверхностно-активного вещества на динамику бидисперсного пузырькового кластера 135–144

Механика твердого тела

М.И. Макаров, И.Л. Кузьмин

Продольно-поперечный изгиб упругого стержня при кратковременном осевом воздействии 145–152

Робототехника и теория управления

А.В. Ивачев, О.В. Даринцев, Д.Р. Богданов

Специфика конструкторской проработки прототипа смарт-привода для нетипичных манипуляторов .. 153–164

Портрет ученого

К юбилею Марата Масгутьяновича Шакирьянова 165–167

Contents

Liquid & Gas Mechanics

E.Sh. Nasibullaeva

Numerical analysis of wave scattering by a pair of soundproof spheres
by orthogonal central compositional design method (*in Russian*) 116–128

D.R. Galeeva, V.N. Kireev

Modeling the dynamics of a drop moving in a plane channel with a viscous barrier 129–134

V.A. Arkhipov, S.A. Basalaev, K.V. Kostyushin, A.S. Usanina

Longitudinal-transverse bending of an elastic rod under short-term axial action 135–144

Solid Mechanics

M.I. Makarov, I.L. Kuzmin

Longitudinal-transverse bending of an elastic rod under short-term axial action 145–152

Robotics & Control Theory

A.V. Ivachev, O.V. Darintsev, D.R. Bogdanov

Design development of a Smart Drive for Atypical Manipulators 153–164

Profiles

For the anniversary of Marat Shakiryanov (*in Russian*) 165–167