

ISSN: 2658–5782

Номер 1

2025

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Экспериментальное исследование гидродинамической устойчивости течения жидкости в кольцевом канале

А.А. Мухутдинова<sup>1</sup>, А.Д. Низамова<sup>1</sup>✉, В.Н. Киреев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

<sup>2</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: [adeshka@yandex.ru](mailto:adeshka@yandex.ru)

Вопросы, связанные с переходными режимами течения жидкости в каналах различного сечения, являются одними из наиболее важных при решении прикладных задач гидродинамики. При проектировании теплообменных устройств, систем охлаждения и промышленных конденсаторов существенную роль играет учет неоднородного распределения температуры на характеристики потока. Особенно актуальной представляется проблема определения условий ламинарно-турбулентного перехода в условиях интенсивного теплообмена. В настоящей работе выполнено экспериментальное исследование влияния параметра термовязкости на гидродинамическую устойчивость течения в кольцевом канале. Динамическая вязкость жидкостей должна рассматриваться как функция температуры и для различных теплоносителей и зависеть от их физических свойств. Ранее теоретически было установлено, что учет неоднородности распределения вязкости по сечению канала может существенным образом влиять на критические значения числа Рейнольдса. С этой целью проведены эксперименты на установке, основу которой составили две горизонтально расположенные коаксиальные трубы, выполненные из прозрачного материала. Во внутренней трубе находился нагревательный элемент для создания температурного градиента в сечении кольцевого канала. Переход от ламинарного течения к турбулентному определялся визуально с применением раствора перманганата калия. Для минимизации влияния конвективных потоков полая игла, через которую подавалась подкрашенная жидкость, располагалась в нижней части кольцевого канала. Эксперименты проводились с использованием игл со скошенным и прямым срезами. В качестве рабочих жидкостей были выбраны вода и 45%-й водный раствор пропиленгликоля. Для определения параметра термовязкости проведены детальные измерения вязкости 45%-го водного раствора пропиленгликоля в диапазоне температур от  $-8$  до  $70$  °С. Все измерения осуществлялись с использованием ротационного модульного высокоточного реометра Thermo Scientific HAAKE MARS III с интегрированной электроникой и электромагнитными клапанами для термостатирования. Получено, что вязкость раствора пропиленгликоля нелинейно уменьшается с увеличением процентного содержания воды, а также уменьшается при повышении температуры по закону, близкому к экспоненциальному. Показано, что критическое число Рейнольдса зависит от распределения вязкости по сечению канала, связанной с разностью температур на стенках канала.

**Ключевые слова:** параметр термовязкости, гидродинамическая устойчивость, эксперимент, кольцевой канал, число Рейнольдса, 45%-й водный раствор пропиленгликоля

## Experimental study of hydrodynamic stability of liquid flow in an annular channel

A.A. Mukhutdinova<sup>1</sup>, A.D. Nizamova<sup>1</sup>✉, V.N. Kireev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

<sup>2</sup> Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: [adeshka@yandex.ru](mailto:adeshka@yandex.ru)

The issues related to transient modes of fluid flow in channels of various cross-sections are among the most important in solving applied problems of hydrodynamics. In the design of heat exchange devices, cooling systems and industrial condensers, it is essential to take into account the non-uniform temperature distribution on the flow characteristics. The problem of determining the conditions of the laminar–turbulent transition under conditions of intense heat exchange seems to be especially relevant. In this paper, an experimental study of the effect of the thermal viscosity parameter on the hydrodynamic stability of flow in an annular channel is performed. The dynamic viscosity of liquids should be considered as a function of temperature and for different heat carriers and depends on their physical properties. Earlier, it was theoretically established that taking into account the non-uniformity of the viscosity distribution over the channel cross-section can significantly affect the critical values of the Reynolds number. For this purpose, experiments were carried out on a setup

based on two horizontally located coaxial pipes made of transparent material. The inner pipe contained a heating element to create a temperature gradient in the cross-section of the annular channel. The transition from laminar to turbulent flow was determined visually using a potassium permanganate solution. To minimize the influence of convective flows, a hollow needle through which the colored liquid was supplied was located in the lower part of the annular channel. The experiments were carried out with beveled and straight-cut needles. Water and 45% aqueous propylene glycol solution were selected as working fluids for the experiment. To determine the thermal viscosity parameter, detailed viscosity measurements of a 45% aqueous propylene glycol solution were carried out in the temperature range from  $-8$  to  $70^\circ\text{C}$ . All measurements were carried out using a Thermo Scientific HAAKE MARS III rotary modular high-precision rheometer with integrated electronics and electromagnetic valves for thermostating. It was found that the viscosity of the propylene glycol solution nonlinearly decreases with an increase in the percentage of water, and also decreases with an increase in temperature according to a law close to exponential. It is shown that the critical Reynolds number depends on the viscosity distribution over the channel cross-section, associated with the temperature difference on the channel walls.

**Keywords:** thermoviscosity parameter, hydrodynamic stability, experiment, annular channel, Reynolds number, 45% aqueous propylene glycol solution

## 1. Введение

Вопросы, связанные с переходными режимами течения жидкостей, играют ключевую роль в решении задач гидродинамики, особенно в прикладных аспектах. В современных исследованиях особое внимание уделяется определению влияния неоднородного распределения температурного поля на устойчивость течения жидкостей с учетом зависимости их вязкости от температуры. Первыми в этой области стали Поттер и Грабер [1], которые установили влияние разности температур на стенках канала на критическое число Рейнольдса. Впоследствии множество авторов продолжили эти исследования, среди них выделяется работа Уолла и Уилсона [2]. Наиболее полное и систематическое изложение задач гидродинамической устойчивости и методов их решения можно найти в книге Дразина [3]. Стоит учитывать также, что, если вязкость жидкости зависит от температуры, то профиль скорости необходимо привести в соответствие с законом изменения вязкости, и это, по видимому, впервые было сделано в [4].

В статье [5] изучается поток несжимаемой жидкости в плоском канале, характеризующийся заданным температурным полем и перепадом давления. Полученные результаты показывают, что неоднородность температурного поля существенно влияет на устойчивость потока. Обнаружено, что при определенных значениях температурного поля поток становится неустойчивым, что может привести к турбулизации, а также, что нейтральные кривые для случая неизотермического течения отличаются от нейтральных кривых для случая изотермического течения. Исследованы влияния параметра зависимости вязкости жидкости от температурного поля на критические характеристики потока.

В статье [6] рассматриваются некоторые особенности потери устойчивости ламинарного течения жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале при заданном на его стенках температурном режиме. Выведено обобщенное уравнение Орра–Зоммерфельда, которое было записано относительно функции потока. Проведено численное исследование соответствующей краевой задачи с

использованием спектрального метода на основе полиномов Чебышева. Показано, что с учетом влияния температуры на вязкость жидкости, которое подразумевает ее неравномерное распределение по сечению канала, происходит уменьшение критического числа Рейнольдса, что согласуется с результатами предыдущих исследований [5]. В частности, как отмечалось ранее, для узкого канала и при малом параметре термовязкости спектр собственных значений идентичен спектру изотермического течения в плоском канале. Изменение относительной ширины канала и увеличение параметра термовязкости приводит к существенной перестройке структуры спектра собственных значений обобщенного уравнения Орра–Зоммерфельда. В результате проведенных исследований выявлены зависимости критического числа Рейнольдса от экспоненциального коэффициента (или другими словами, безразмерного параметра термовязкости  $(d\mu/dT)/(\mu/T)$ , характеризующего интенсивность изменения вязкости с повышением температуры), а также от параметра, определяющего соотношение зависимости ширины кольцевого канала от радиуса внутренней цилиндрической поверхности. Установлено, что с увеличением параметра относительной ширины канала значение критического числа Рейнольдса изменяется немонотонно, а его минимальное значение зависит от реологических свойств жидкости. Последнее обстоятельство может служить теоретическим обоснованием проведения оптимизационных расчетов при моделировании технологических процессов. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра термовязкости имеет вид, близкий к убывающей экспоненте функции для всех размеров кольцевых каналов. Последние полученные авторами настоящей работы результаты с использованием основных принципов слабо нелинейной теории гидродинамической устойчивости опубликованы в [7].

В настоящей работе выполнены экспериментальные исследования устойчивости течения жидкости в кольцевом канале на основе экспериментальной установки, описанной в статье авторов [8]. Установка на данный момент времени имеет форму кольцевого ка-

нала, но возможна ее модификация для различных форм канала. Параметр вязкости жидкости регулируется для произвольных теплоносителей и от заданных диапазонов температуры. Данный момент является важным аспектом при разработке систем теплообмена и промышленных конденсаторов.

## 2. Реологические свойства рабочей жидкости

Свойства воды хорошо изучены и известны. Для более глубокого анализа реологических характеристик пропиленгликоля были проведены измерения вязкости в различных концентрациях: 100 %, 60 %, 45 % и 30 % при температуре 25 °С. Для определения параметра термовязкости выполнены детальные измерения вязкости 45%-го водного раствора пропиленгликоля в диапазоне температур от –8 до 70 °С (табл. 1).

Все измерения осуществлялись с использованием ротационного модульного высокоточного реометра Thermo Scientific HAAKE MARS III с интегрированной электроникой и электромагнитными клапанами для термостатирования лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» ИМех УФИЦ РАН. Этот прибор предназначен для измерений динамической вязкости жидкостей и проведения реологических исследований. Чистый пропиленгликоль при температуре 25 °С имеет вязкость 0,045 Па·с, что превышает вязкость воды при той же температуре в 45 раз. Вязкость раствора пропиленгликоля нелинейно уменьшается с увеличением процентного содержания воды, а также уменьшается при повышении температуры по закону, близкому к экспоненциальному (рис. 1).

При температуре 20–25 °С вязкость указанного раствора пропиленгликоля оказывается в 4,5–5,5 раз выше, чем вязкость воды (рис. 2).

Таким образом было получено более полное представление о реологических свойствах пропиленгликоля при разных концентрациях и температурах.

## 3. Методика проведения эксперимента

Для контроля за струей жидкости в потоке использован красящий элемент — раствор перманганата калия  $KMnO_4$ .

Использование перманганата калия в качестве красителя обусловлено его химическими свойствами, которые обеспечивают хорошую растворимость, видимость и различимость в потоке жидкости.

Для осуществления эксперимента в качестве рабочих жидкостей были выбраны вода и 45%-й водный раствор пропиленгликоля. Процесс подготовки к эксперименту включал следующие шаги:

1. Подготовка 45%-го водного раствора пропиленгликоля — в специальной бочке были смешаны дистиллированная вода и чистый пропиленгликоль. Эти компоненты были тщательно перемешаны, чтобы достичь желаемой концентрации 45%-го водного раствора пропиленгликоля.

Таблица 1. Динамическая вязкость водного раствора пропиленгликоля, Па·с

T, °C	Концентрация, %			
	30 %	46 %	60 %	100 %
–8	–	0.025199	–	–
0	–	0.014385	–	–
10	–	0.008439	–	–
20	–	0.005383	–	–
25	0.002617	0.004465	0.007629	0.045044
30	–	0.00362	–	–
40	–	0.002594	–	–
50	–	0.001964	–	–
60	–	0.001627	–	–
70	–	0.001261	–	–

2. Заполнение системы — после успешного приготовления раствора включен насос для заполнения трубы выбранными рабочими жидкостями.
3. Включение греющего кабеля и термостатов — после заполнения системы жидкостью включены греющий кабель и термостаты. Греющий кабель использовался для нагрева и поддержания определенной температуры, а термостаты контролировали и регулировали процесс подогрева.

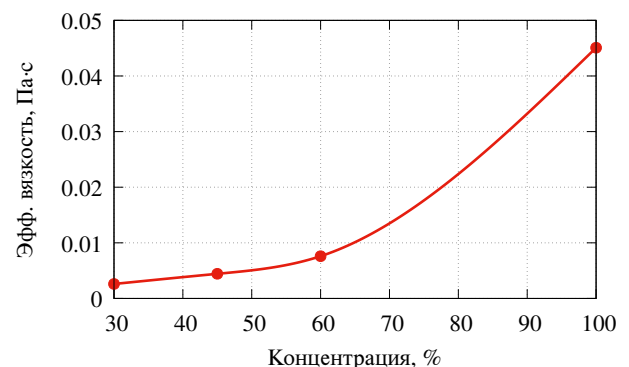


Рис. 1. Зависимость динамической вязкости от концентрации водного раствора пропиленгликоля

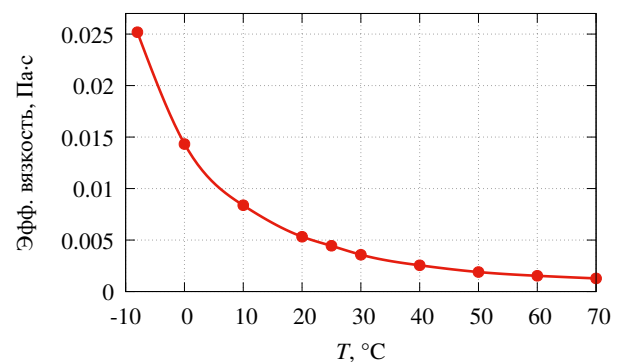


Рис. 2. Зависимость динамической вязкости 45%-го водного раствора пропиленгликоля от температуры

4. Подготовка подкрашенной жидкости — для создания визуально различимых условий эксперимента приготовлены три различных подкрашенных раствора, каждый из которых представляет собой уникальный состав. Первый раствор получен путем смешивания дистиллированной воды с перманганатом калия. Этот вариант подкрашенной жидкости предоставляет базовую основу для визуального контраста. Второй раствор содержит дистиллированную воду, пропиленгликоль и перманганат калия в концентрации, равной концентрации рабочей жидкости. Добавление пропиленгликоля выравнивает физические свойства и расширяет диапазон условий эксперимента, что является важным аспектом для более обширного анализа. Третий раствор создан с использованием чистого пропиленгликоля и перманганата калия. Таким образом, использование разнообразных подкрашенных растворов дополняет методику эксперимента для лучшей визуальной оценки и анализа.

Далее приступаем к проведению эксперимента. В емкость наливаем заранее приготовленный подкрашенный раствор, затем устанавливаем и настраиваем камеру для детальной записи результатов. После этого открываем вентиль, позволяя подкрашенной жидкости поступать в основной поток. Учитывая, что наш насос обладает несколькими режимами скоростей, мы проводим исследование при различных заранее выбранных скоростях потока.

#### 4. Результаты экспериментов

Созданная экспериментальная установка позволила провести экспериментальные исследования режимов течения раствора пропиленгликоля в кольцевом канале. Внутренняя цилиндрическая труба установки содержит нагревательный элемент. Для минимизации влияния конвективных потоков полая игла, через которую подавалась подкрашенная жидкость, располагалась в нижней части кольцевого канала. Вначале эксперименты проводились со стандартной медицинской иглой со скошенным срезом.

При достаточно малых расходах жидкости при значениях числа Рейнольдса равного  $Re = 1000$  поток имеет ярко выраженный ламинарный режим течения (рис. 3(a)). Однако, при этом течение, образующееся при обтекании нагретой цилиндрической поверхности, способствует искривлению формы струи, которая, в итоге, устремляется вверх.

Начиная со значений числа Рейнольдса  $Re = 1800$  на данной установке наблюдались развивающиеся возмущения (рис. 3(b), 3(c)).

Проведение экспериментов с прямым срезом продемонстрировали аналогичную картину течений (рис. 4). Небольшое отличие состояло лишь в том, что форма струи искривлялась значительно меньше. Для сравнения приведены фотографии экспериментов по визуализации потока воды с помощью подачи

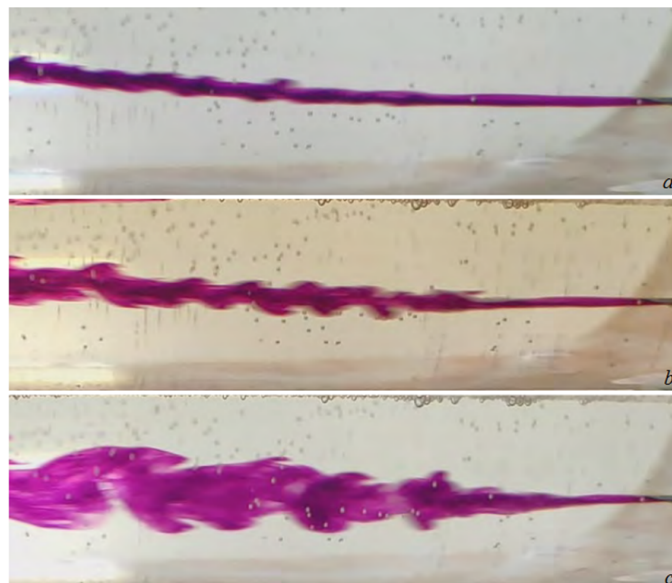


Рис. 3. Поведение струи подкрашенной воды в потоке 45%-го раствора пропиленгликоля (игла со скошенным срезом) при  $dT = 0$  °C: (a)  $Re = 1000$ , (b)  $Re = 1800$ , (c)  $Re = 2300$

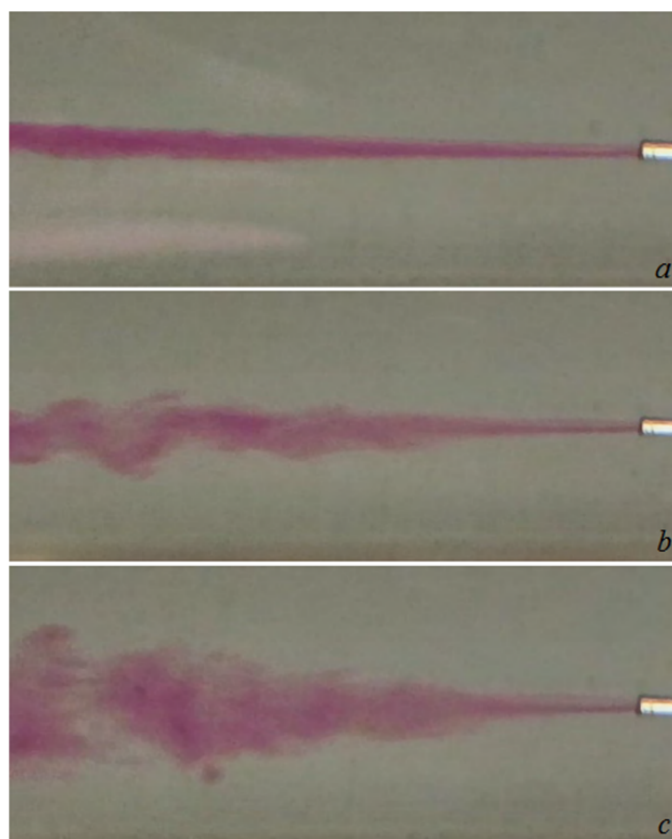


Рис. 4. Поведение струи подкрашенной воды в потоке 45%-го раствора пропиленгликоля (игла с прямым срезом) при  $dT = 0$  °C: (a)  $Re = 1000$ , (b)  $Re = 1800$ , (c)  $Re = 2400$

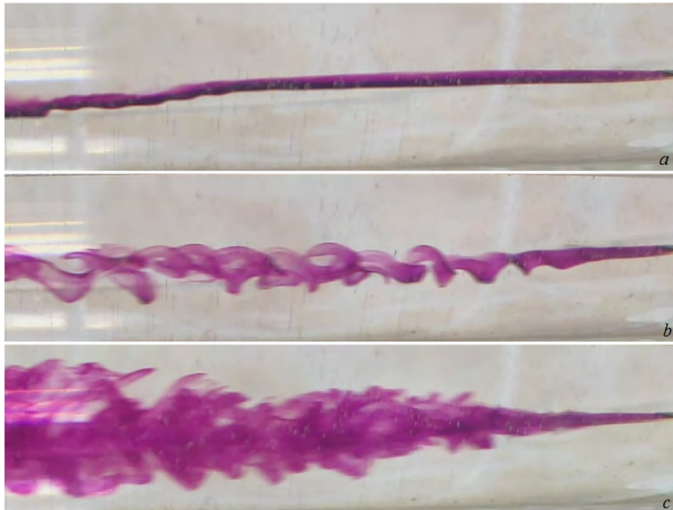


Рис. 5. Поведение струи подкрашенной воды в потоке воды (игла со скошенным срезом) при  $dT = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ : (a)  $Re = 1000$ , (b)  $Re = 1800$ , (c)  $Re = 2400$

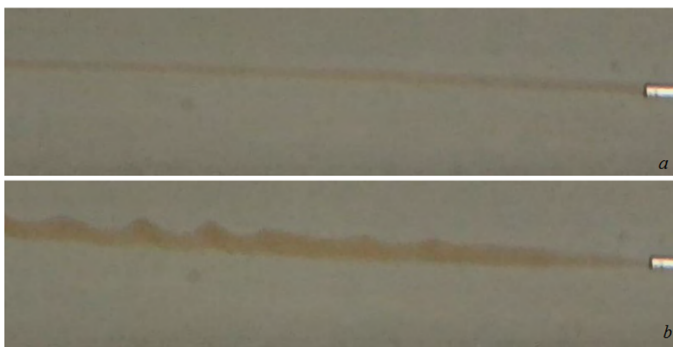


Рис. 6. Поведение струи подкрашенного пропиленгликоля в потоке 45%-го раствора пропиленгликоля (игла с прямым срезом) при  $Re = 1500$ : (a)  $dT = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , (b)  $dT = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$

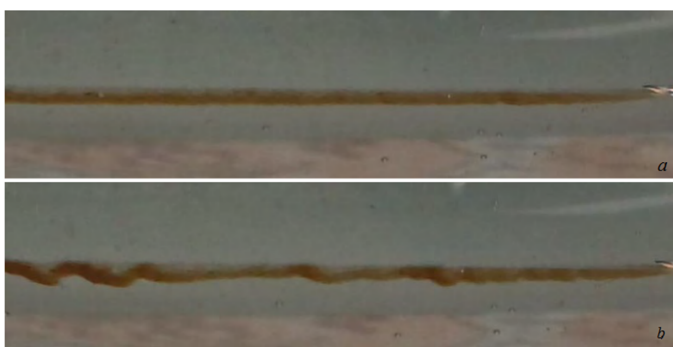


Рис. 7. Поведение струи подкрашенного пропиленгликоля в потоке 45%-го раствора пропиленгликоля (игла с прямым срезом) при  $Re = 1600$ : (a)  $dT = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , (b)  $dT = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$

подкрашенной воды (рис. 5). Интересно, что в этом случае струя подкрашенной жидкости при ламинарном течении отклонялась вниз.

Визуализации картины течения раствора пропиленгликоля с помощью подкрашенного раствора того же вещества проводилась при различных значениях числа Рейнольдса равных 1500 (рис. 6) и 1600 (рис. 7). В изотермическом случае при обоих значениях числа  $Re$  наблюдается картина ламинарного течения, а задание градиента температур приводит к турбулизации потока.

На рис. 8 приведены фотографические изображения эволюции вихревых структур подкрашенной струи раствора пропиленгликоля в потоке того же состава вдали от иглы при  $Re = 1800$  в отсутствие градиента температур.

### 5. Заключение

С помощью экспериментальных данных показано, что перепад температур между стенками канала влияет на критическое число Рейнольдса, поскольку вязкость жидкости зависит от температуры. При отсутствии градиента температур развивающиеся возмущения наблюдались начиная с  $Re = 1800$ . Визуализации картины течения раствора пропиленгликоля с помощью подкрашенного раствора того же вещества проводилась при значениях числа Рейнольдса  $Re = 1500$  и  $1600$ . В изотермическом случае при обоих значениях числа  $Re$  наблюдалась картина ламинарного течения, а задание градиента температур привела к турбулизации потока.

Полученное в настоящей работе полное представление о реологических свойствах пропиленгликоля при разных концентрациях и температурах позволит в дальнейшем провести более детальные исследования гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в зависимости от других физических и



Рис. 8. Эволюция вихревых структур струи подкрашенного 45%-го раствора пропиленгликоля в потоке раствора 45%-го пропиленгликоля вдали от иглы при  $Re = 1800$ ,  $dT = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$

геометрических параметров системы, в том числе от относительной ширины кольцевого канала (отношения ширины кольцевого канала к радиусу его внутренней цилиндрической поверхности). Такие исследования требуют применения дополнительного дорогостоящего оборудования, в частности, более мощных насоса и источника энергии.

## Список литературы / References

- [1] Potter M.C., Graber E. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // *Phys. Fluids*. 1972. Vol. 15. P. 387–391.  
DOI: [10.1063/1.1693921](https://doi.org/10.1063/1.1693921)
- [2] Wall D.P., Wilson K. The linear stability of channel flow of fluid with temperature-dependent viscosity // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 323. P. 107–132.  
DOI: [10.1017/S0022112096000869](https://doi.org/10.1017/S0022112096000869)
- [3] Drazin P.G. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press. 2002.  
DOI: [10.1017/CBO9780511809064](https://doi.org/10.1017/CBO9780511809064)
- [4] Yih C.S. Thermal instability of viscous fluids // *Quart. Appl. Math.* 1959. Vol. 17. P. 25–42.  
DOI: [10.1090/qam/107444](https://doi.org/10.1090/qam/107444)
- [5] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Uрманчеев S.F. Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel // *Lobachevskii J. Math.* 2021. Vol. 42. P. 2211–2215.  
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)
- [6] Nizamova A.D., Kireev V.N., Uрманчеев S.F. The influence of the annular gap thickness on the critical Reynolds number during the flow of thermoviscous liquids // *Lobachevskii J. Math.* 2024. Vol. 45, no. 5. P. 2119–2127.  
DOI: [10/1134/S1995080224602315](https://doi.org/10/1134/S1995080224602315)
- [7] Киреев В.Н., Мухутдинова А.А., Низамова А.Д., Урманчеев С.Ф. Численное и экспериментальное моделирование устойчивости течения термовязкой жидкости в кольцевом канале // *Вестник Башкирского университета*. 2024. Т. 29, № 4. С. 182–189.  
Kireev V.N., Muxhutdinova A.A., Nizamova A.D., Uрманчеев S.F. Numerical and experimental modeling of the stability of the flow of thermoviscous fluid in an annular channel // *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2024. Vol. 29. N 4. Pp. 182–189. (in Russian)  
DOI: [10.33184/bulletin-bsu-2024.4.2](https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2024.4.2)
- [8] Мухутдинова А.А., Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф. Экспериментальная установка для исследования устойчивости течения жидкости // *Многофазные системы*. 2024. Т. 19, № 1. С. 35–39.  
Muxhutdinova A.A., Nizamova A.D., Kireev V.N., Uрманчеев S.F. (2024) Experimental setup for researching the stability of fluid flow. *Multiphase Systems*. 19 (1). pp. 35–39. (In Russian)  
DOI: [10.21662/mfs2024.1.005](https://doi.org/10.21662/mfs2024.1.005)

## Сведения об авторах / Information about the Authors

### Айгуль Айратовна Мухутдинова

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

### Aigul A. Mukhutdinova

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russia

[mukhutdinova23@yandex.ru](mailto:mukhutdinova23@yandex.ru)

ORCID: [0000-0002-5009-002X](https://orcid.org/0000-0002-5009-002X)

### Аделина Димовна Низамова

к.ф.-м.н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

### Adelina D. Nizamova

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russia

[adeshka@yandex.ru](mailto:adeshka@yandex.ru)

ORCID: [0000-0002-7772-2672](https://orcid.org/0000-0002-7772-2672)

### Виктор Николаевич Киреев

к.ф.-м.н.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

### Viktor N. Kireev

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

[kireev@anrb.ru](mailto:kireev@anrb.ru)

ORCID: [0000-0002-3550-6541](https://orcid.org/0000-0002-3550-6541)



## Сопоставление численных реализаций метода квадратур решения интегрального уравнения

Д.А. Тукмаков 

ИММ КазНЦ РАН, Казань

E-mail: [tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)

Интегральные уравнения встречаются в различных разделах физики – в акустике, теории фильтраций, электрофизике, механике твердого деформируемого тела. Интегральные уравнения Фредгольма могут быть применены для математического описания процессов излучения и рассеяния звуковых волн. Часто отыскание точного аналитического решения интегральных уравнений представляется затруднительным, в связи с чем для решения таких уравнений применяются численные методы. Настоящая работа посвящена анализу алгоритмов численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В работе представлены результаты реализации некоторых алгоритмов численного метода квадратур решения интегральных уравнений. Метод квадратур сводит решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений, которое можно реализовать различными способами. Выбор квадратурной формулы предполагается произвольным, в рассматриваемом исследовании в качестве квадратурной формулы применялась формула трапеций. При сведении интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений также существует свобода в выборе метода решения линейных уравнений. Для решения системы линейных уравнений применялись метод Гаусса, метод «простых итераций» и итерационный метод Якоби. Исследование свойств интегрального уравнения показывает, что ядро интегрального оператора удовлетворяет свойствам, при которых интегральный оператор является сжимающим оператором и, следовательно, интегральное уравнение имеет единственное решение. Сопоставление численных расчетов для различных методик решения системы линейных уравнений демонстрирует, что метод Якоби решения системы линейных алгебраических уравнений сходится к точному решению существенно быстрее метода «простых итераций». Полученные результаты возможно применить при разработке алгоритмов решения интегральных уравнений.

**Ключевые слова:** интегральные уравнения, метод квадратур, система линейных уравнений

Работа выполнена в рамках государственного задания Федерального исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

---

## Comparison of numerical implementations of the quadrature method for solving an integral equation

D.A. Tukmakov 

IME KazSC RAS, Kazan, Russia

E-mail: [tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)

Integral equations are encountered in various sections of physics – in acoustics, filtration theory, in electrophysics, in mechanics of solid deformable bodies. Fredholm integral equations can be used for mathematical description of processes of radiation and scattering of sound waves. Often finding an exact analytical solution to integral equations seems difficult, in connection with which numerical methods are used to solve such equations. This work is devoted to the analysis of algorithms for the numerical solution of the Fredholm integral equation of the second kind. The paper presents the results of the implementation of some algorithms for the numerical quadrature method for solving integral equations. The quadrature method reduces the solution of the integral equation to the solution of a system of linear algebraic equations, which can be implemented in various ways. The choice of the quadrature formula is assumed to be arbitrary; in the study under consideration, the trapezoid formula was used as a quadrature formula. When reducing an integral equation to a system of linear algebraic equations, there is also arbitrariness in the choice of the method for solving linear equations. To solve the system of linear equations, the Gauss method, the method of simple iterations and the iterative Jacobi method were used. The study of the properties of the integral equation shows that the kernel of the integral operator satisfies the properties under which the integral operator is a contracting operator and, therefore, the integral equation has a unique solution. Comparison of numerical calculations for various methods of solving a system of linear



equations demonstrates that the Jacobi method for solving a system of linear algebraic equations converges to an exact solution significantly faster than the method of simple iterations. The results obtained can be used in developing algorithms for solving integral equations.

**Keywords:** integral equations, quadrature method, system of linear equations

## 1. Введение

Для математического моделирования процессов механики жидкости и газа применяются как дифференциальные [1–6] так и интегральные уравнения [7–12]. В работе [7] представлена математическая модель двухфазной фильтрации в пористой среде, основанная на решении интегро-дифференциального уравнения. В статье [8] представлен обзор работ по теоретическим методам решения задач рассеяния акустических волн на сферах и по определению основных характеристик данного явления. В [9] разработаны методы численного решения пространственных задач дифракции стационарных акустических волн в средах с включениями в трехмерной постановке. В исследовании [10] рассматривается развитие теории аналитических методов решения интегральных уравнений применительно к различным задачам физики. В работе [11] предлагается развитие методов решения интегральных уравнений применяющихся в различных инженерных областях. В монографии [12] изложено применение интегральных уравнений при решении различных задач акустики.

Из анализа работ по тематике интегральных уравнений следует, что развиваются как приложения теории интегральных уравнений для моделирования различных физических процессов, так и совершенствование методов решения интегральных уравнений.

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода имеют важное значение для описания излучения и рассеяния акустических волн [12]. В настоящей работе анализируется применение различных алгоритмов

для реализации метода квадратур численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, исследуется влияние выбора метода решения системы линейных уравнений, получаемой методом квадратур, на скорость сходимости численного решения интегрального уравнения.

## 2. Методы исследования

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид [13, 14]:

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)y(s) ds = f(x) \quad (1)$$

с значениями функции и величин:

$$a = 0, b = \pi, \lambda = 0.1, \quad K(x,s) = \left(1 + \sin^2(x+s)\right)^{-1}, \quad f(x) = \cos(x). \quad (2)$$

Если для коэффициента  $\lambda$  выполняется условие  $\lambda < ((b-a) \cdot M)^{-1}$  [14], то в таком случае существует решение интегрального уравнения, к которому возможно организовать сходящийся итерационный процесс. Здесь  $M = \max |K(x,s)|; x, s \in [a, b]$ , для уравнения (1) с параметрами (2) эти значения составляют соответственно  $-M = 1, \lambda < 1/\pi$ . Двухмерное распределение величины функции ядра интегрального оператора (рис. 1) достигает максимального значения  $-M = 1$ , для сечения  $K(\pi/2, x)$  максимум достигается в точке  $x = \pi/2$ .

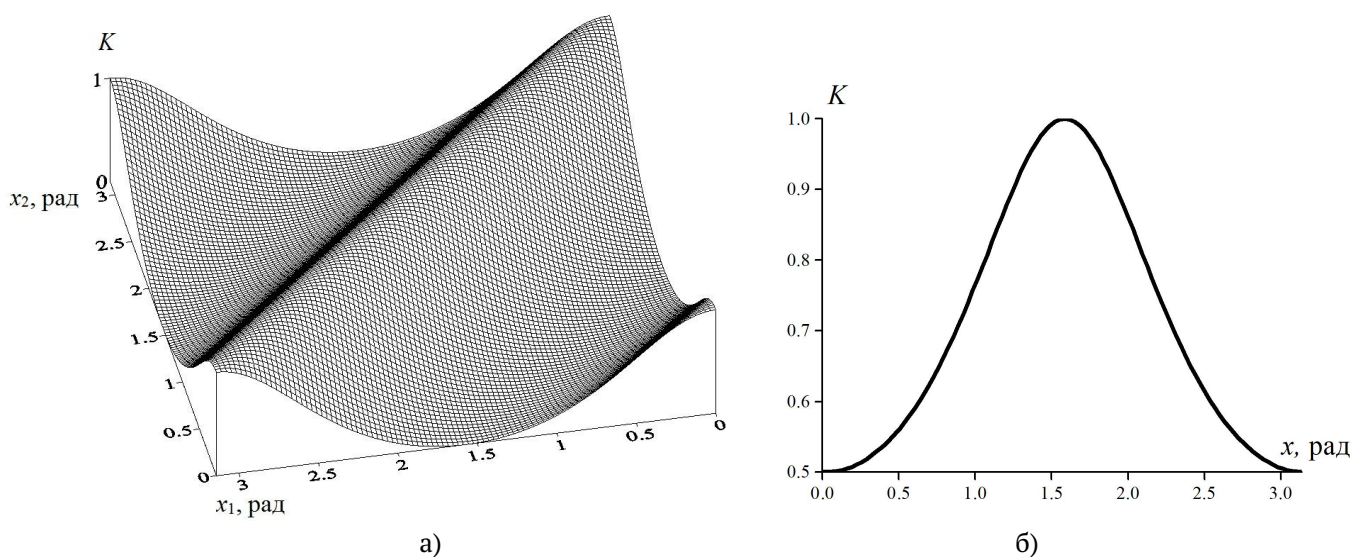


Рис. 1. Пространственные распределения: значений ядра интегрального оператора (а); вдоль сечения  $x = \pi/2$  (б)

Для численного решения уравнения (1) с параметрами (2) применяется метод квадратур [13], сводящий решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений:

$$y(x_i) + \lambda \sum_1^n p_j \cdot K_{i,j} y_j = f(x_i). \tag{3}$$

Здесь  $K_{i,j} = K(x_i, x_j)$ ,  $x_i = (i - 1) \cdot h$ ,  $h = (b - a)/n$ ; сеточное разбиение предполагалось равномерным;  $p_j$  — веса квадратурной формулы. В качестве квадратурной формулы выбрана формула трапеций [15], при равномерном разбиении отрезка веса квадратурной формулы трапеции определяются следующим образом:  $p_1 = p_n = h/2$ ,  $p_i = 1/h$ . Для решения 3 применялись метод Гаусса, метод «простых итераций» и метод Якоби [16]. Численные алгоритмы реализовывались в виде программного кода на языке программирования Fortran.

### 3. Результаты расчетов

При увеличении числа узлов квадратурной формулы наблюдается сходимость численного решения интегрального уравнения (рис. 2).

Результаты применения метода «простых итераций» демонстрируют, что, начиная с количества шагов  $m = 20$ , расчеты искомой функции близки (рис. 3).

В случае, если система линейных уравнений интегрируется методом Якоби, то, уже начиная с величины  $m = 3$ , результаты расчетов близки (рис. 4).

Сопоставление результатов расчетов, полученных методом «простых итераций» и методом Якоби, демонстрирует большую скорость сходимости при применении метода Якоби (рис. 5(a),(б)).

### 4. Заключение

Представлены результаты расчетов различных реализаций численного метода квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Сопоставление алгоритмов решения системы линейных уравнений, получаемой в результате реализации численного метода квадратур, демонстрирует, что численное решение методом Якоби сходится быстрее к точному решению системы линейных уравнений, определяемому методом Гаусса, чем численное решение методом «простых итераций». Выявленные закономерности возможно применять при реализации метода квадратур решения интегральных уравнений в различных прикладных задачах, в том числе в задачах излучения и распространения звуковых волн.

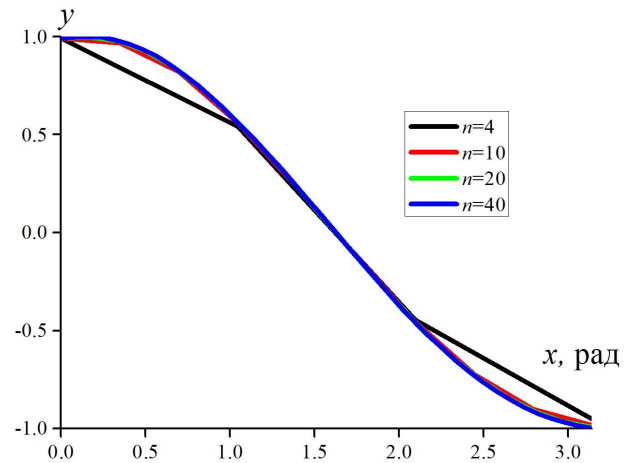


Рис. 2. Результаты расчетов сходимости решения полученного методом Гаусса для различных значений количества узлов квадратурной формулы трапеций

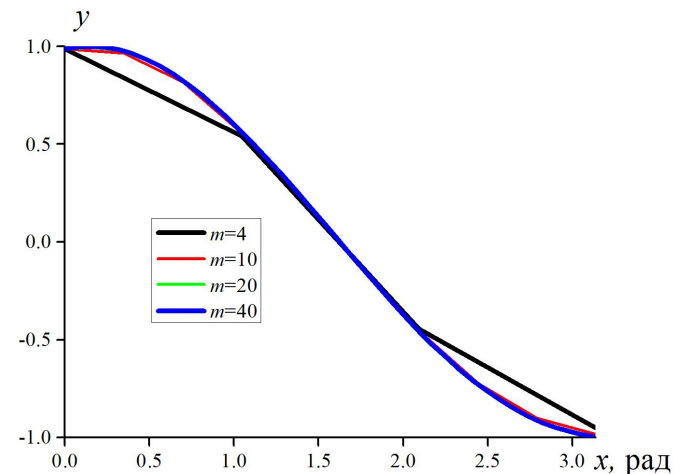


Рис. 3. Результаты расчетов сходимости решения, полученного методом «простых итераций», для значения количества узлов квадратурной формулы трапеций  $n = 40$

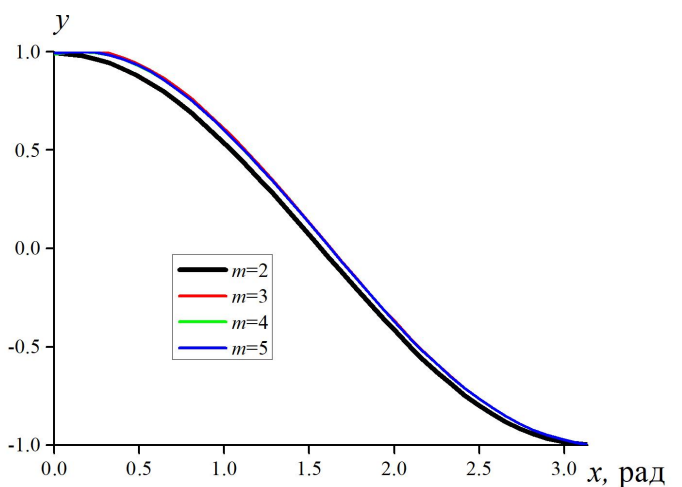


Рис. 4. Результаты расчетов сходимости решения полученного методом Якоби для значения количества узлов квадратурной формулы трапеций  $n = 40$

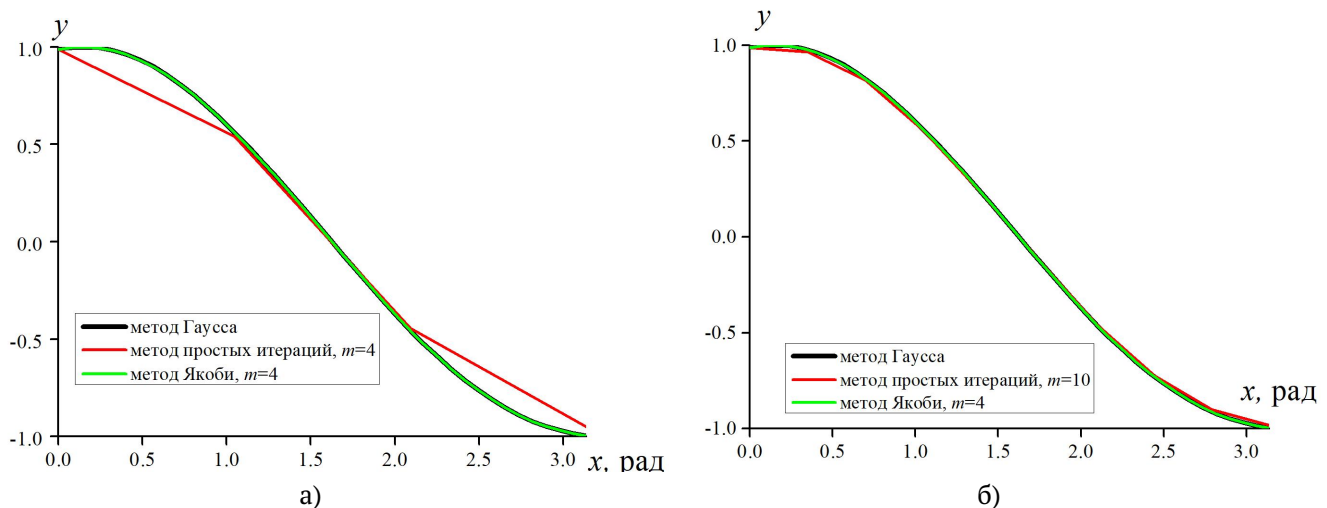


Рис. 5. Сравнение метода «простых итераций» с методом Якоби: метод «простых итераций»  $m = 4$  (а); метод «простых итераций»  $m = 10$  (б)

## Список литературы / References

- [1] Тукмаков А.Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.  
Tukmakov A.L. Numerical modeling of acoustic flows with resonant oscillations of gas in a closed pipe // Bulletin of higher educational institutions. Aviation engineering. 2006. No. 4. Pp. 33–36. EDN: kntxyf
- [2] Тукмаков Д.А. Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запыленную среду // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 125–131.  
Tukmakov D.A. Numerical study of high-speed phase sliding during the passage of a low-intensity shock wave from a pure gas into a dusty environment // Multiphase systems. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 125–131.  
DOI: 10.21662/mfs2019.2.017
- [3] Тукмаков Д.А. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с электрически заряженной запыленной средой // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 101.  
Tukmakov D.A. Mathematical modeling of the interaction of a shock wave with an electrically charged dusty environment // Multiphase systems. 2020. V. 15, No. 1–2. Pp. 101 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.1-2
- [4] Тукмаков Д. А. Аналитическая модель нестационарного течения несжимаемой монодисперсной газозвеси с одномерной геометрией потока // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 3. С. 57–70.  
Tukmakov D. A. Analytical model of unsteady flow of an incompressible monodisperse gas suspension with one-dimensional flow geometry // Bulletin of higher educational institutions. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2021. No. 3. Pp. 57–70 (in Russian).  
DOI: 10.21685/2072-3040-2021-3-5
- [5] Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики скоплений твердых частиц // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 3. С. 244–246.  
Tukmakov D.A. Numerical modeling of the dynamics of solid particle clusters // Multiphase systems. 2023. V. 18, No. 3. Pp. 244–246 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2023.3.071
- [6] Тукмаков Д.А. Аналитическая модель гравитационного осаждения дисперсной примеси в движущемся потоке // Многофазные системы. 2024. Т. 19, № 1с. С. 110–112.  
Tukmakov D.A. Analytical model of gravitational sedimentation of a dispersed impurity in a moving flow // Multiphase systems. 2024. V. 19, No. 1s. Pp. 110–112 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2024.1s
- [7] Лукашук С.Ю. Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 2. С. 58–67.  
Lukashchuk S.Y. Fractional integral generalization of the Rapoport–Lisa equation // Multiphase systems. 2023. V. 18, No. 2. Pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2023.2.009
- [8] Насибуллаева Э.Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 88–104.  
Nasibullaeva E.Sh. Scattering of sound waves on spheres: solution methods and main characteristics (review) // Multiphase systems. 2021. V. 16, No. 3–4. Pp. 88–104 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2021.3.013
- [9] Ершов Н.Е., Илларионова Л.В., Смагин С.И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 1. С. 60–76.  
Ershov N.E., Illarionova L.V., Smagin S.I. Numerical solution of a three-dimensional stationary problem of acoustic wave diffraction // Computational technologies. 2010. V. 15, No. 1. Pp. 60–76 (in Russian).  
EDN: muyInt
- [10] Cuha F.A., Peker H.A. Solution of Abel's integral equation by Kashuri Fundo transform // Thermal Science. 2022. V. 26, No. 4, Part A. Pp. 3003–3010.  
DOI: 10.2298/TSCI2204003C
- [11] Antoine X., Darbas M. An introduction to operator preconditioning for the fast iterative integral equation solution of time-harmonic scattering problems // Multiscale Science and Engineering. 2021. V. 3. Pp. 1–35.  
DOI: 10.1007/s42493-021-00057-6
- [12] Осетров А. В. Интегральные уравнения в теории дифракции акустических волн. Санкт-Петербург: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002. 56 с.  
Osetrov A. V. Integral equations in the theory of diffraction of acoustic waves. St. Petersburg: SPbGETU "LETI", 2002. 56 p. (in Russian).
- [13] Карчевский Е.М. Интегральные уравнения: применение в математическом моделировании, численные методы решения и комплекс программ на языке MatLab. Казань: Вестфалика, 2022. 89 с.  
Karchevsky E.M. Integral equations: application in mathematical modeling, numerical solution methods and a program package in the MatLab language. Kazan: Vestfalika, 2022. 89 p. (in Russian).
- [14] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Москва: «Наука», 1975. 304 с.  
Krasnov M.L. Integral equations. Moscow: «Nauka», 1975. 304 p. (in Russian).
- [15] Авхадиев Ф.Г. Основы численных методов. Казань: Издательство Казанского университета, 2022. 444 с.  
Avkhadiyev F.G. Fundamentals of numerical methods. Kazan: Kazan University Publishing House, 2022. 444 p. (in Russian).

[16] Вержбийкий В.М. Вычислительная линейная алгебра. Москва: Высшая школа, 2009. 351 с.

Verzhbiysky V.M. Computational linear algebra. Moscow: Higher School, 2009. 351 p. (in Russian).

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Дмитрий Алексеевич Тукмаков**  
кандидат физ.-мат. наук  
ИММ КазНЦ РАН

**Dmitry A. Tukmakov**  
Ph.D. (Phys. & Math.)  
IME KazSC RAS  
[tukmakovda@imm.knc.ru](mailto:tukmakovda@imm.knc.ru)  
ORCID: [0000-0002-0335-8548](https://orcid.org/0000-0002-0335-8548)



## Обзор исследований различных режимов формирования экстремально расширяющихся струй криогенных жидкостей

Р.Х. Болотнова✉, Э.А. Файзуллина

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: [bolotnova@anrb.ru](mailto:bolotnova@anrb.ru)

В настоящей обзорной работе рассматриваются исследования, связанные с экспериментальным и теоретическим изучением процессов формирования экстремально расширяющихся струй криогенных жидкостей при распылении из тонкого цилиндрического канала в вакуумную камеру, обусловленных взрывным вскипанием и повышением давления за счет лавинного роста микропузырьков пара с формированием мелкодисперсных капель с большим углом раскрытия формирующейся струи. Актуальность таких исследований следует из важности проблемы защиты окружающей среды для обеспечения безопасности освоения космического пространства и направлены на достижение надежности функционирования, эффективности и снижения стоимости двигателей космических аппаратов, использующих безопасные топливные элементы, такие как комбинация жидкого кислорода и водорода или метана. Важность анализа распределения в вакуумной камере фаз флюида, диаметра, концентрации и температуры микрокапель состоит в определении оптимальных режимов, приводящих в дальнейшем к успешному воспламенению с целью интенсификации реактивной тяги ракетного двигателя. Научная новизна заключается в оригинальности предлагаемых подходов при теоретическом и численном исследовании обозначенной проблемы на основе разработки пространственных моделей многофазной газо- парожидкостной среды, основанных на законах сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы в соответствии с одно- или двухскоростным, двухтемпературным приближениями в трехмерной постановке с учетом межфазного сопротивления, контактного теплообмена и энерго- и массообменных процессов испарения и конденсации. Для описания термодинамических свойств изучаемой криогенной жидкости важно построение широкодиапазонных уравнений состояния жидкости и пара в аналитической форме. Проведение численных исследований эволюции формы и структуры формирующейся парожидкостной вскипающей криогенной струи направлено на получение детальной информации по изучаемой проблеме и может быть использовано в виде рекомендаций при разработке малых ракетных двигателей и устройств, работающих на реактивной тяге в условиях вакуумной атмосферы и криогенных температур.

**Ключевые слова:** формирование расширяющихся струй криогенных жидкостей, экспериментальное, теоретическое и численное исследование

Работа выполнена в рамках государственного задания № 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

## Review of investigations for various modes formation of extremely expanding cryogenic liquids jets

R.Kh. Bolotnova✉, E.A. Faizullina

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS

E-mail: [bolotnova@anrb.ru](mailto:bolotnova@anrb.ru)

The review considers of investigations related to the experimental and theoretical study of formation an extremely expanding jets of cryogenic liquids when sprayed from a thin cylindrical channel into a vacuum chamber, caused by explosive boiling and pressure increase due to the avalanche growth of vapor microbubbles with the formation of fine droplets with a large opening jet angle. The relevance of such research follows from the importance of environmental protection for the safety of space exploration and is aimed at achieving reliable operation, efficiency and cost reduction of spacecraft engines using safe fuel cells such as a combination of liquid oxygen and hydrogen or methane. The importance of analyzing the distribution of fluid phases in a vacuum chamber, the diameter, concentration, and temperature of microdroplets is to determine the optimal modes that lead to successful ignition in order to intensify the rocket engine's thrust. The scientific newness lies in the originality of the proposed approaches in the theoretical and numerical study of the designated problem based on the development of spatial models of a multiphase gas-vapor-liquid medium based on the laws of conservation of mass, momentum and energy of each phase in accordance with one- or two speeds and with two-temperature approach in a three-dimensional formulation, taking into

account interfacial resistance, contact heat exchange and energy and mass exchange processes of evaporation and condensation. To describe the thermodynamic properties of the cryogenic liquid under study, it is important to construct wide-range equations of state of liquid and vapor in an analytical form. Numerical studies of the evolution of the shape and structure of an emerging vapor-liquid boiling cryogenic jet are aimed at obtaining detailed information on the problem under study and can be used as recommendations for the development of small rocket engines and devices powered by reactive thrust in a vacuum atmosphere and cryogenic temperatures.

**Keywords:** formation of expanding jets of cryogenic liquids, experimental, theoretical and numerical studies

## 1. Технологии формирования струйных течений

Разработка технологий криогенных двигателей для ракетно-космических орбитальных маневровых систем и малоразмерных (микро-, нано-, пико-) спутников связана с возрастающим спросом на услуги космической связи, вещания, передачи данных, навигации, мониторинга Земли и атмосферы в режиме реального времени. Вопросы безопасности в области космического движения имеют место при выборе топливных элементов для двигателей спутниковых ракет, в связи с этим возникает необходимость замены типичных токсичных топливных элементов на безопасные аналоги, такие как комбинация жидкого кислорода и водорода или метана.

Принцип работы криогенных двигателей, работающих в космическом вакууме, состоит из нескольких стадий. Изначально криогенное жидкое топливо впрыскивается через тонкий канал в реакционную камеру, и запускается процесс распыления как результат внезапного вскипания, инициируемый резким падением давления, что вызывает зарождение микроскопических пузырьков пара, которые растут в перегретой жидкости с дальнейшим формированием газодисперсной смеси, что приводит к повышению давления внутри камеры сгорания до достижения равновесного давления незадолго до воспламенения, а затем через сопло происходит выброс продуктов сгорания и формирование экстремально расширяющейся струи и ее распыление, приводящее к реактивной тяге.

Малоразмерные ракетные двигатели ориентации на спутниках, не создающие большой тяги, иногда не требуют топлива: здесь достаточно газообразного азота, подаваемого под давлением из резервуара через сопло. Для исследования обозначенных проблем в работах [1,2] (Rees et al., 2019) на испытательном стенде проводились экспериментальные исследования перегретых криогенных жидкостей на примере азота, в которых с помощью высокоскоростной теневой графики были определены картины и углы распыления и получена зависимость скоростей и диаметров капель от условий впрыска. Дальнейшее экспериментальное изучение внезапного вскипания жидкого азота было продолжено в исследованиях [3] (Rees et al., 2020). Экспериментальные данные [1–3] (Rees et al., 2019), (Rees et al., 2020) обеспечивают всеобъемлющую базу данных для проверки численных моделей и дальнейших численных исследований.

Численное моделирование и исследование процесса формирования экстремально расширяющейся струи

жидкого азота в вакуумном пространстве при ее распылении из тонкого цилиндрического канала, сопровождающегося взрывным повышением давления в реакционной камере за счет лавинного роста микропузырьков пара в перегретом жидком состоянии, проводится на основе многофазных моделей газо-парожидкостных смесей, учитывающих неравновесные процессы испарения и конденсации [4–8] с привлечением современных методов численной реализации создаваемой модели, а именно, разработки новых решателей в среде программного комплекса OpenFOAM с возможностью моделирования многомасштабных временных процессов внезапного вскипания и распыления криогенной жидкости и формирования экстремально расширяющегося струйного течения в вакуумной камере, что представляет собой важную научную проблему, связанную с вопросами разработки технологий эксплуатации и безопасности криогенных двигателей для ракетно-космических орбитальных маневровых систем и малоразмерных спутников.

## 2. Актуальность обозначенной проблемы

В связи с настоящими и будущими проблемами защиты окружающей среды и безопасности освоения космического пространства весьма актуальны теоретические исследования, направленные на обеспечение безопасности функционирования, надежности, эффективности и снижения стоимости двигателей космических аппаратов с использованием топливных элементов, состоящих из смеси безопасных криогенных жидких топлив.

Впрыск такого рода криогенных жидкостей в вакуумную атмосферу космоса приводит к перегретому состоянию, которое сопровождается спонтанным распылением из-за взрывного вскипания и достижением больших скоростей истечения струи перегретой жидкости с высокой степенью перегрева, которая распыляется в камере сгорания из-за испарения и производит мелкодисперсное распыление с большим углом раскрытия и небольшими каплями. Исследование распределения в камере сгорания фаз флюида, диаметра, концентрации и температуры микрокапель направлено на определение параметров для последующего успешного воспламенения и минимизации разрушительных скачков давления с целью интенсификации реактивной тяги ракетного двигателя.

Сложность и высокая стоимость проведения экспериментальных исследований в диапазоне криогенных температур и вакуумной атмосферы ограничивает

получение экспериментальных данных о криогенном внезапном вскипании, что стимулирует развитие альтернативы численных подходов в этом направлении.

При компьютерной реализации исследуемой проблемы применяются методы численного моделирования высокой точности и скорости сходимости, основанные на современных средствах, таких как программные продукты ANSYS, пакет вычислительной гидродинамики OpenFOAM, среда разработки программного обеспечения Lazarus и графические редакторы GIMP и ParaView.

Тестирование полученных результатов проводится путем сравнения с аналитическими решениями и экспериментальными литературными данными [1–3] (Rees et al., 2019), (Rees et al., 2020) по взрывному вскипанию перегретой криогенной жидкости на примере азота с формированием струи в камере, поддерживающей давление близкое к вакууму.

Предлагаемые для решения рассматриваемой научной проблемы подходы особенно важны и актуальны, так как позволяют получить рекомендации при разработке малых ракетных двигателей и устройств, работающих на реактивной тяге в условиях вакуумной атмосферы и криогенных температур.

### 3. Современное состояние исследований

Исследование процесса внезапного вскипания и истечения газо-паронасыщенных жидкостей из труб и сопел находит широкое применение в различных технологических процессах современной энергетики, нефтегазовой промышленности, а также в ракетной технике. Анализ динамики струй вскипающих жидкостей необходим при разработке и создании различных устройств, инициирующих процессы для разных режимов распыления жидкости. В процессе внезапного вскипания жидкость, находящаяся под высоким давлением, впрыскивается в среду через тонкое короткое сопло, где давление ниже давления насыщения жидкости. В таких условиях жидкость испытывает внезапное изменение фазы, вызванное спонтанным зарождением большого количества микроскопических пузырьков пара, которые быстро растут и сливаются, что приводит к широкому разбрызгиванию очень мелких капель.

Использование жидкого азота в качестве рабочей жидкости широко применяется во многих областях, требующих охлаждения методом распыления при криогенной температуре (криогенные аэродинамические трубы, охлаждение сверхпроводящих магнитов: [9] (Xiufang Liu et al., 2017). Методики распыления жидкого азота применяются в медицине при криоабляции с высокоточным контролем скорости и температуры в системе [10] (Prashant Srivastava et al., 2020).

Экспериментальные исследования по динамике истечения вскипающей жидкости рассмотрены в работе [11] (Edwards A.R., O'Brien T.P., 1970).

В экспериментах по взрывному вскипанию струй перегретой воды авторов Решетникова А.В., Мажейко Н.А. и др. (2007) [12], Алексеева М.В.,

Лежнина С.И. и др. (2014) [13] определены различные стадии формирования струи в зависимости от начального значения перегрева струи. В последнее время внимание исследователей привлекает использование пузырьковой структуры двухфазного потока для распыливания жидкостей с использованием высокого давления [14, 15] (Weaver D.S. et al., 2015; Решетников А.В. и др., 2016).

В работе [16] (Решетников А.В., Бусов К.А., Мажейко Н.А. и др., 2012) проведены экспериментальные исследования струй вскипающей перегретой воды для тонких цилиндрических каналов  $d = 0.5$  мм в зависимости от начальных состояний жидкости близких к термодинамической критической точке, с формированием режимов истечения с углом распыла струи от конической формы до ее полного «развала». Установлена связь между формами струй перегретой воды с механизмами зародышеобразования и показано, что с увеличением исходной температуры струя приобретает форму полого конуса с растущим углом раствора при вершине.

В работе Ширшова Я.Н., Нересесян Д.А. и др. (2016) [17] теневым методом были получены видеокдры процесса развития водяной струи при истечении из сопла при исходном давлении 400 МПа.

В монографии [18] (Костюк В.В., Фирсов В.П., 2015) рассматривались фундаментальные проблемы использования криогенных технологий в сложных технических системах, в том числе экспериментальные исследования процессов теплообмена при запуске криогенных двигательных установок с использованием струйных систем.

В работах [19, 20] (Reitz, 1990; Simões-Moreira et al., 2002) экспериментально исследовались процессы внезапного вскипания с использованием жидких углеводородов, этанола и хладагентов. Было обнаружено, что не только степень перегрева определяет интенсивность взрывного вскипания, но и условия впрыска. С помощью теневой графики было визуализировано оставшееся жидкое ядро в брызгах внезапного вскипания и распад струи [19, 20] (Reitz, 1990; Simões-Moreira et al., 2002).

В отличие от обычных жидкостей взрывное вскипание криогенных жидкостей гораздо менее исследовано из-за значительно более жестких условий эксперимента. В рамках экспериментального исследования о лазерном зажигании в модельной камере сгорания ракеты в условиях большой высоты наблюдалось внезапное вскипание струи жидкого кислорода [21] (De Rosa et al., 2006). На том же испытательном стенде было исследовано внезапное вскипание струй жидкого кислорода, которое было сопоставлено со вскипающими спреями обычных жидкостей [22] (Lamanna et al., 2015). Показано, что спреи жидкого кислорода и обычных жидкостей имеют сходную морфологию.

В [9] (Xiufang Liu et al., 2017) при распылении жидкого азота исследовалось влияние разницы давлений впрыска на распределение капель по размерам. Измерения показали, что увеличение разницы давлений впрыска улучшает распыление, о чем свидетельствуют гомо-

генизация и уменьшение размера капель.

В работах [1, 2] (Rees et al., 2019) был расширен диапазон допустимости переходных корреляций, полученный в [23] (Cleary et al., 2007) для криогенного жидкого азота и показана асимптотическая эволюция угла распыления с увеличением перегрева. В этом же исследовании серия экспериментов показала уменьшение диаметра капель с увеличением температуры впрыска в полностью вскипающих спреях жидкого азота и глобальный минимум в профиле вертикальной скорости в зависимости от температуры впрыска. В дальнейших исследованиях [1–3] (Rees et al., 2019, 2020) были измерены распределения скорости и диаметра капель сильно перегретых вскипающих брызг жидкого азота с постоянными условиями впрыска.

Теоретические исследования, посвященные вопросам критического истечения жидкости в пузырьковом режиме, проводились в работах Нигматулина Р.И. (1987) [4], Нигматулина Б.И., Сопленкова К.И. (1980) [5], Губайдуллина А.А. (2006) [6], Ивашнева О.Е. (2009) [7], Шагапова В.Ш. (2012) [8] и др.

Для описания свойств жидкости и пара разработаны термодинамически согласованные реалистические широкодиапазонные в аналитической форме уравнения состояния воды, ацетона, бензола и тетрадекана, описывающие состояния в областях насыщения, критической точки, достоверность которых подтверждена согласованием с экспериментальными данными по ударной и изотермической сжимаемостям, критическим параметрам и теоретическим приближениям в областях высоких и низких давлений. Методика, используемая при построении таких уравнений состояния, в том числе позволяет учитывать межфазный энерго- и массообмен в исследуемом процессе [24, 25] (Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х., 2011, 2017).

Численная реализация одномерных и пространственных моделей проводилась с использованием методов подвижных лагранжевых сеток и сквозного счета. Апробация разработанных моделей осуществлена с помощью компьютерного моделирования задач по взрывному истечению паро-газожидкостной смеси из камеры высокого давления в одно- и двумерном приближениях и проведено сравнение расчетов с экспериментальными данными.

В работе [26] (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., 2017) на основе модели вскипания, предложенной в [27] (Болотнова Р.Х., Бузина В.А. (Коробчинская В.А.), Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш., 2012), проведен анализ влияния исходного состояния воды в камере высокого давления и интенсивности зародышеобразования вскипающей воды на эволюцию формы пароводяной струи на начальной стадии истечения с диаметром сопла  $d = 0.5$  мм для условий экспериментов [16] (Решетников А.В., Бусов К.А., Мажейко Н.А. и др., 2012). Для исследования процесса формирования поллой струи при истечении из тонкого сопла водяного пара, изначально находящегося при высоком давлении в сверхкритическом состоянии, численное моделирование прове-

дено с применением решателя sonicFoam библиотеки открытого пакета OpenFOAM в двумерной осесимметричной постановке [28] (Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., 2018). В этой работе исследовался процесс формирования поллой струи при истечении из тонкого сопла из сверхкритического состояния, чему способствовало образование внутренней границы струи (диска Маха) и развитие внешнего и внутреннего тороидальных вихрей. Достоверность результатов оценена сравнением расчетов, полученных по динамике волны разгрузки, распространяющейся в области высокого давления, с применением пакета OpenFOAM, с уравнением состояния Пенга–Робинсона и численным решением аналогичной задачи методом сквозного счета в случае одномерного плоского приближения с уравнением состояния совершенного газа. Проведено численное исследование сверхкритических режимов струйного истечения вскипающей воды через тонкое сопло с использованием модифицированного решателя программного комплекса OpenFOAM. Изучен процесс образования вихревых зон, их влияние на структуру струи и на формирование перед струей акустических волновых импульсов периодической структуры [29] (Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А., Файзуллина Э.А., 2020), [30] (Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Faizullina E.A., 2021), [31] (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., 2022).

Исследование нестационарного процесса истечения вскипающего теплоносителя, вызванного торцевым разрывом трубопровода, проведено в [32, 33] (Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. и др., 2014, 2017) на основе неравновесной гомогенной (2014) и релаксационной (2017) моделей, где обнаружено формирование периодических вихреобразных структур.

В исследовании Lamanna et al. (2015) [22] для режимов вскипания была разработана модель для прогнозирования угла распыления в области вблизи сопла по степени перегрева и поверхностному натяжению. На микроскопическом уровне динамика роста пузырьков хорошо документирована в литературе с использованием теоретических и численных методов и проверки этих методов экспериментами (Lee and Merte, 1996 [34]; Robinson and Judd, 2004 [35]; Sher et al., 2008 [36]; Prosperetti, 2017 [37]). На макроуровне многочисленные исследования показывают крупномасштабные характеристики, такие как плотность распыления, угол распыления и проникновение (Lee J., 2009 [38], Navarro-Martinez S., 2014 [39], Karathanassis I.K., 2017 [40], Gärtner J.W., 2019 [41], 2020 [42], Calay R., Holdo A., 2008 [43]). В работе [44] (Loureiro D.D. et al., 2020) предпринята попытка преодолеть разрыв между малым и большим масштабами. В этой работе метод прямого численного моделирования используется для исследования первичных процессов распада, происходящих в микроскопических масштабах, связанных с распылением при внезапном кипении для условий, характерных при впрыске жидкого кислорода в камеру сгорания низкого давления ракетного двигателя в космосе.



Из-за очень сложных экспериментальных условий, касающихся криогеники, а также вакуумной атмосферы на больших высотах, до сих пор существует мало экспериментальных данных о криогенном внезапном вскипании. Ограничения и затраты, связанные с экспериментальными исследованиями криогенных топлив, делают привлекательными альтернативы численных подходов при реализации рассматриваемых проблем.

В результате дальнейших исследований на основе ранее разработанного метода построения уравнения состояния для жидкости и пара получено термодинамически согласованное аналитическое уравнение состояния для жидкого и газообразного азота молекулярной фазы. При построении уравнения состояния использована форма Ми–Грюнайзена в виде суммы упругой и тепловой составляющих для давления и внутренней энергии. Упругие составляющие описаны потенциалом типа Борна–Майера. Для тепловых составляющих принято упрощающее приближение, следующее из условия постоянства средней теплоемкости и зависимости функции Грюнайзена от объема. При определении уравнения состояния паровой и жидкой фаз азота использовались таблицы [45] (Сычев В.В. и др., 1977), рассчитанные на основе уравнений, аппроксимирующих экспериментальные данные по изотермической сжимаемости, адиабатической скорости звука, включая критическую область и линию равновесия фаз. Полученное уравнение состояния азота позволяет исследовать явления, связанные с процессами испарения и конденсации азота, при моделировании многофазных течений с учетом межфазного тепло-массообмена в условиях низких давлений и криогенных температур (Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Korobchinskaya V.A., 2023 [46]; Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Файзуллина Э.А., 2024 [47]).

Рассмотрены неравновесные массообменные процессы испарения и конденсации с учетом контактного теплообмена, возникающие при вскипании струи жидкого азота при ее истечении из тонкого сопла в вакуумную атмосферу. Для описания рассматриваемых процессов используется трехмерная осесимметричная двухфазная модель парожидкостной смеси в односкоростном, однодавленческом, двухтемпературном приближении с учетом межфазного теплообмена и неравновесных массообменных процессов. Приведены оценки точности разработанного численного метода, реализующего предложенную модель на основе программного обеспечения OpenFOAM, и достоверности полученных результатов в сравнении с экспериментальными данными. Проведенные численные исследования показали формирование области пузырькового течения в ближней зоне на выходе из сопла. Показано, что по мере удаления от сопла струя переходит в парокапельный режим течения, доминирующий над пузырьковым в процессе развития струи. Проанализировано влияние степени перегрева на угол распыления струи, образование и развитие вихревых зон в процессе перехода из пузырькового режима истечения в парокапельный с оценкой уровня монодисперсности парокапельного по-

тока. При изучении динамики полей температур выявлено, что более высокая температура жидкой фазы азота в сравнении с паровой фазой определяет условия для продолжения процесса испарения [48] (Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Gainullina E.F., 2023).

Проведено численное моделирование нестационарного процесса истечения жидкого азота через коническое сопло при разгерметизации камеры высокого давления. Для описания процесса принята двухфазная пространственная осесимметричная модель парожидкостной смеси в двухтемпературном, однодавленческом, двухскоростном приближении, учитывающая неравновесные процессы испарения и конденсации. Интенсивность фазового перехода определяется в зависимости от числа и радиуса пузырьков, степени перегрева по температуре, теплоты парообразования, коэффициента теплопроводности и чисел Нуссельта и Якоба. Исследована эволюция вскипания струи жидкого азота в области криогенных температур в зависимости от различных начальных условий. Проанализировано влияние степени перегрева на угол распыления струи. Численная реализация предложенной модели осуществлена с помощью созданного авторами решателя в среде OpenFOAM. Получены расчетные распределения скоростей для двух степеней перегрева, аналогичных экспериментам [1–3] (Rees et al., 2019, 2020). В расчетах установлено, что увеличение степени перегрева приводит к увеличению угла распыления струи и возрастанию скоростей в основном струйном потоке. Проведен сравнительный анализ численных расчетов с представленными в [1–3] экспериментальными точками по значениям массовых скоростей, углов раскрытия струи и фотографиями моделируемых экспериментов. Полученные численные расчеты имеют удовлетворительное согласование с экспериментальными данными (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф., 2023 [49]; Коробчинская В.А., 2024 [50]).

Дальнейшие исследования процесса истечения жидкого азота из сосуда высокого давления в вакуумную камеру проводились для условий формирования поля скоростей струйного потока при высоких степенях перегрева по давлению. Полученные в [51] (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф., 2024) результаты удовлетворительно согласуются с экспериментами [1–3] (Rees et al., 2019, 2020).

#### 4. Заключение

В обзоре проведен анализ экспериментальных и теоретических работ, связанных с изучением динамики формирования струйных потоков при истечении через сопло криогенных жидкостей из камеры высокого давления в вакуумную атмосферу, вследствие лавинного роста числа микропузырьков пара и формирования струй с различными диапазонами углов раскрытия, в зависимости от конструкции экспериментальной установки, начальных условий, степени перегрева рабочей жидкости и ее теплофизических свойств. Важность результатов рассмотренных исследований обусловлена возмож-

ностью их применения при усовершенствовании технологических процессов, сопровождающихся внезапным вскипанием и истечением газо-паронасыщенных жидкостей из каналов и труб, используемых во многих областях современной энергетики, нефтегазовой промышленности, медицине, а также в ракетной технике, в которых применяются методы распыления в условиях криогенных температур. В частности, использование жидкого азота в качестве рабочей жидкости необходимо при исследовании газодинамических процессов в криогенных аэродинамических трубах, для охлаждения сверхпроводящих магнитов, при распылении жидкого азота в медицинской практике для криоабляции с высокоточным контролем скорости и температуры.

## Список литературы / References

- [1] Rees A., Araneo L., Salzmann H., Kurudzija E., Suslov D., Lamanna G., Sender J., Oswald M. Investigation of velocity and droplet size distributions of flash boiling LN<sub>2</sub>-Jets with phase doppler anemometry // In: 29th ILASS-Europe Conference, 2019. Paris, France. 8 p.  
[https://elib.dlr.de/132832/1/Rees\\_ILASS2019.pdf](https://elib.dlr.de/132832/1/Rees_ILASS2019.pdf)
- [2] Rees A., Salzmann H., Sender J., Oswald M. Investigation of flashing LN<sub>2</sub>-Jets in terms of spray morphology, droplet size and velocity distributions // In: 8th EUCASS Conference, 2019. Madrid, Spain. Pp. 1–13.  
[DOI: 10.13009/EUCASS2019-418](https://doi.org/10.13009/EUCASS2019-418)
- [3] Rees A., Araneo L., Salzmann H., Lamanna G., Sender J., Oswald M. Droplet velocity and diameter distributions in flash boiling liquid nitrogen jets by means of phase doppler diagnostics // Experiments in Fluids Volume. 2020. V. 61, No. 182. 18 p.  
[DOI: 10.1007/s00348-020-03020-7](https://doi.org/10.1007/s00348-020-03020-7)
- [4] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред // М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с., Ч. 2. 360 с.  
Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. Vol.1, 2. Hemisphere, N.Y. 1990.
- [5] Нигматулин Б.И., Сопленков К.И. Исследование нестационарного истечения вскипающей жидкости из каналов в термодинамически неравновесном приближении // Теплофизика высоких температур. 1980. Т. 18, № 1. С. 118–131.  
Nigmatulin B.I., Soplenikov K.I. Unsteady-state outflow of a boiling liquid from channels in a thermodynamically nonequilibrium approximation // High Temperature. 1980. V. 18, No. 1. Pp. 118–131 (in Russian).  
[MathNet: tv10023](https://mathnet.ru/tvt10023)
- [6] Губайдуллин А.А. Введение в волновую динамику газожидкостных сред // ТюмГНГУ, 2006. 86 с.  
Gubaidullin A.A. Introduction to the wave dynamics of gas-liquid media // TSU, 2006. 86 p. (in Russian).
- [7] Ивашнев О.Е. Самоподдерживающиеся ударные волны в неравновесно кипящей жидкости: Автореф. дис. доктора физ.-мат. наук: 01.02.05. М., 2009. 40 с.  
Ivashnev O.E. Self-sustaining shock waves in nonequilibrium boiling liquid: abstract of thesis. dis. Doctor of Physics and Mathematics Sciences: 01.02.05. M., 2009. 40 p. (in Russian)  
<http://mech.math.msu.su/~snark/files/vak/arkO.pdf>
- [8] Шагапов В.Ш., Ялаев А.В. Объемное вскипание жидкости, содержащей газовые зародыши // Теоретические основы химической технологии. 2012. Т. 46, № 4. С. 420–431.  
Shagapov V.Sh., Yalaev A.V. Volumetric boiling of a liquid containing gas nuclei // Theoretical Foundations of Chemical Technology. 2012. V. 46, No. 4. Pp. 420–431 (in Russian).  
[EDN: ozlcyx](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2017.01.011)
- [9] Xiufang Liu, Rong Xue, Yixiao Ruan, Liang Chen, Xingqun Zhang, Yu Hou. Effects of injection pressure difference on droplet size distribution and spray cone angle in spray cooling of liquid nitrogen // Cryogenics. 2017. No. 83. Pp. 57–63.  
[DOI: 10.1016/j.cryogenics.2017.01.011](https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2017.01.011)
- [10] Prashant Srivastava, Amitesh Kumar. Characterization of performance of multihole nozzle in cryospray // Cryobiology. 2020. No. 96. Pp. 197–206.  
[DOI: 10.1016/j.cryobiol.2020.06.008](https://doi.org/10.1016/j.cryobiol.2020.06.008)
- [11] Edwards A.R., O'Brien T.P. Studies of phenomena connected with the depressurization of water reactors // Journal of the British Nuclear Energy Society. 1970. V. 9, No. 2. Pp. 125–135.  
<https://senior.app.box.com/BNES-VOL9-2>
- [12] Решетников А.В., Мажейко Н.А., Беглецов В.Н., и др. Динамика пульсаций при взрывном вскипании струй перегретой жидкости // Письма в журнал технической физики. 2007. Т. 33, № 17. С. 31–37.  
[EDN: rcuvfj](https://doi.org/10.1134/S1063785007090052)  
Reshetnikov A.V., Mazheyko N.A., Begletsov V.N., et al. Pulsation dynamics during explosive boil-up of overheated water jets // Technical Physics Letters. 2007. V. 33, No. 9. Pp. 732–734.  
[DOI: 10.1134/S1063785007090052](https://doi.org/10.1134/S1063785007090052)
- [13] Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А., Сорокин А.Л. Генерация ударно-волновых и вихревых структур при истечении струи вскипающей воды // Теплофизика и аэромеханика. 2014. № 6. С. 795–798.  
[EDN: taojtx](https://doi.org/10.1134/S0869864314060122)  
Alekseev M.V., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A., Sorokin A.L. Generation of shockwave and vortex structures at the outflow of a boiling water jet // Thermophysics and Aeromechanics. 2014. V. 21, No. 6. Pp. 763–766.  
[DOI: 10.1134/S0869864314060122](https://doi.org/10.1134/S0869864314060122)
- [14] Weaver D.S. et al. Loading of steam fenerator tubes during main steam line breaks // Ottawa, Canada. 2015. 171 p.
- [15] Лепешинский И.А., Решетников В.А., Антоновский И.В. и др. Смесь с двухфазным рабочим телом // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. Москва: МАИ, 2016. С. 93–95.  
Lepeshinsky I.A., Reshetnikov V.A., Antonovsky I.V., et al. A mixer with a two-phase working fluid // Proceedings of the XI International Conference on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets. Moscow: MAI, 2016. Pp. 93–95 (in Russian).  
[EDN: uuvcaj](https://doi.org/10.1134/S0869864312020151)
- [16] Решетников А.В., Бусов К.А., Мажейко Н.А., Скоков В.Н., Коверда В.П. Переходные режимы вскипания струй перегретой воды // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 3. С. 359–367.  
[EDN: piggdv](https://doi.org/10.1134/S0869864312020151)  
Reshetnikov A.V., Busov K.A., Mazheyko N.A., Skokov V.N., Koverda V.P. Transient behavior of superheated water jets boiling // Thermophysics and Aeromechanics. 2012. V. 19, No. 2. Pp. 329–336.  
[DOI: 10.1134/S0869864312020151](https://doi.org/10.1134/S0869864312020151)
- [17] Ширшов Я.Н., Нерсесян Д.А., Сысоев Н.Н., Иванов И.Э., Знаменская И.А. Оптические исследования динамики развития водяной струи высокого давления // Матер. XI Международ. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях. М.: МАИ, 2016. С. 196–198.  
Shirshov Ya.N., Nersesyan D.A., Sysoev N.N., Ivanov I.E., Znamenskaya I.A., Optical study for dynamics of high-pressure water jet // Proc. XI Int. Conf. for Inequilibrium Processes in Nozzles and Jets, MAI, Moscow. 2016. Pp. 196–198 (in Russian).  
[EDN: xcxlwn](https://doi.org/10.1134/S0869864312020151)
- [18] Костюк В.В., Фирсов В.П. Теплообмен и гидродинамика в криогенных двигательных установках // Москва: Наука, 2015. 319 с.  
Kostyuk V.V., Firsov V.P. Heat transfer and hydrodynamics in cryogenic propulsion systems. Moscow : Nauka Publ., 2015. 319 p. (in Russian).
- [19] Reitz R.D. A photographic study of flash-boiling atomization // Aerosol Science and Technology. 1990. V. 12, No. 3. Pp. 561–569.  
[DOI: 10.1080/02786829008959370](https://doi.org/10.1080/02786829008959370)
- [20] Simões-Moreira J.R., Vieira M.M., Angelo E. Highly expanded flashing liquid jets // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2002. V. 16, No. 3. Pp. 415–424.  
[DOI: 10.2514/2.6695](https://doi.org/10.2514/2.6695)
- [21] De Rosa M., Sender J., Zimmermann H., Oswald M. Cryogenic spray ignition at high altitude conditions // In 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE JPC. Sacramento, California. July. 2006.  
[DOI: 10.2514/6.2006-4539](https://doi.org/10.2514/6.2006-4539)
- [22] Lamanna G., Kamoun H., Weigand B., Manfletti C., Rees A., Sender J., Oswald M. and Steelant J. Flashing behavior of rocket engine propellants // Atomization and Sprays. 2015. V. 25, No. 10. Pp. 837–856.  
[DOI: 10.1615/AtomizSpr.2015010398](https://doi.org/10.1615/AtomizSpr.2015010398)

- [23] Cleary V., Bowen P. and Witlox H. Flashing liquid jets and two-phase droplet dispersion: I. Experiments for derivation of droplet atomisation correlations // *Journal of Hazardous Materials*. 2007. V. 142, No. 3. Pp. 786–796.  
DOI: [10.1016/j.jhazmat.2006.06.125](https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2006.06.125)
- [24] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // *Теплофизика высоких температур*. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.  
EDN: nefzrf  
Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-range equation of state for water and steam: Simplified form // *High Temperature*. 2011. V. 49, No. 2. P. 303–306.  
DOI: [10.1134/S0018151X11020106](https://doi.org/10.1134/S0018151X11020106)
- [25] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонные уравнения состояния бензола и тетрадекана в упрощенной форме // *Теплофизика высоких температур*. 2017. Т. 55, № 2. С. 206–215.  
DOI: [10.7868/S004036441701015X](https://doi.org/10.7868/S004036441701015X)  
Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Simplified wide-range equations of state for benzene and tetradecane // *High Temperature*. 2017. V. 55, No. 2, Pp. 199–208.  
DOI: [10.1134/S0018151X17010151](https://doi.org/10.1134/S0018151X17010151)
- [26] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Пространственное моделирование процесса формирования струи вскипающей воды при истечении из тонкого сопла // *Теплофизика и аэромеханика*. 2017. Т. 24, № 5. С. 783–794.  
EDN: zmwkff  
Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. Boiling water jet outflow from a thin nozzle: spatial modeling // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2017. V. 24, No. 5. Pp. 761–772.  
DOI: [10.1134/S0869864317050110](https://doi.org/10.1134/S0869864317050110)
- [27] Болотнова Р.Х., Бузина В.А. (Коробчинская В.А.), Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // *Теплофизика и аэромеханика*. 2012. № 6. С. 719–730.  
Bolotnova R.H., Buzina V.A. (Korobchinskaya V.A.), Galimzyanov M.N., Shagapov V.Sh. Hydrodynamic features of boiling liquid outflow processes // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2012. No. 6. Pp. 719–730 (in Russian).  
EDN: pigavj
- [28] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Особенности формирования полой струи водяного пара сверхкритических параметров состояния, истекающего через тонкое сопло // *Теплофизика и Аэромеханика*. 2018. Т. 25, № 5. С. 783–789.  
EDN: yursot  
Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Supercritical steam out-flow through a thin nozzle: forming a hollow jet // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2018. V. 25. No. 5. Pp. 751–757.  
DOI: [10.1134/S0869864318050116](https://doi.org/10.1134/S0869864318050116)
- [29] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А., Файзуллина Э.А. Моделирование пространственных динамических процессов в водных пенах и вскипающих струях // Уфимская осенняя математическая школа. 2020. Т. 2. С. 180–182.  
Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Korobchinskaya V.A., Fayzullina E.A. Modeling of spatial dynamic processes in water foams and boiling jets // *Ufa Autumn Mathematical School*. 2020. V. 2. Pp. 180–182 (in Russian).  
EDN: xuffya
- [30] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Faizullina E.A. Analysis the dynamic formation of a vapor supersonic jet under outflow from thin nozzle // *Journal of Physics: Conference Series* 2021. V. 2103. 012219.  
DOI: [10.1088/1742-6596/2103/1/012219](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2103/1/012219)
- [31] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Моделирование динамики струи при истечении через тонкое сопло водного флюида, находящегося в сверхкритическом состоянии // *Теплофизика и Аэромеханика*. 2022. Т. 29, № 3. С. 361–370.  
EDN: ppyouf  
Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. Modeling the dynamics of supercritical water jet from a thin nozzle // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2022. V. 29, No. 3. Pp. 347–355.  
DOI: [10.1134/S0869864322030039](https://doi.org/10.1134/S0869864322030039)
- [32] Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А., Сорокин А.Л. Генерация ударноволновых и вихревых структур при истечении струи вскипающей воды // *Теплофизика и аэромеханика*. 2014. Т. 21, № 6. С. 795–798.  
EDN: taojtx  
Alekseev M.V., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A., Sorokin A.L. Generation of shock wave and vortex structures at the outflow of a boiling water jet // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2014. V. 21, No. 6. Pp. 763–766.  
DOI: [10.1134/S0869864314060122](https://doi.org/10.1134/S0869864314060122)
- [33] Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. Волновые процессы при истечении водяного теплоносителя со сверхкритическими начальными параметрами // *Теплофизика и аэромеханика*. 2017. Т. 24, № 5. С. 821–824.  
EDN: zmwkgt  
Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A. Wave processes at outflow of water coolant with initial supercritical parameters // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2017. V. 24, No. 5. Pp. 799–802.  
DOI: [10.1134/S0869864317050158](https://doi.org/10.1134/S0869864317050158)
- [34] Lee H.S., Merte H. Spherical vapor bubble growth in uniformly superheated liquids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1996. V. 39, No. 12. Pp. 2427–2447.  
DOI: [10.1016/0017-9310\(95\)00342-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00342-8)
- [35] Robinson A., Judd R. The dynamics of spherical bubble growth // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2004. V. 47, No. 23. Pp. 5101–5113.  
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.05.023](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.05.023)
- [36] Sher E., Bar-Kohany T., Rashkovan A. Flash-boiling atomization // *Progress in Energy and Combustion Science*. 2008. V. 34, No. 4. Pp. 417–439.  
DOI: [10.1016/j.peccs.2007.05.001](https://doi.org/10.1016/j.peccs.2007.05.001)
- [37] Prosperetti A. Vapor bubbles // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2017. V. 49, Pp. 221–248.  
DOI: [10.1146/annurev-fluid-010816-060221](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010816-060221)
- [38] Lee J., Madabhushi R., Fotache C., Gopalakrishnan S., Schmidt D. Flashing flow of superheated jet fuel // *Proceedings of the Combustion Institute*. 2009. V. 32, No. 2. Pp. 3215–3222.  
DOI: [10.1016/j.proci.2008.06.153](https://doi.org/10.1016/j.proci.2008.06.153)
- [39] Navarro-Martinez S. Large eddy simulation of spray atomization with a probability density function method // *International Journal of Multiphase Flow*. 2014. V. 63. Pp. 11–22.  
DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2014.02.013](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2014.02.013)
- [40] Karathanassis I.K., Koukouvinis P., Gavaises M. Comparative evaluation of phase-change mechanisms for the prediction of flashing flows // *International Journal of Multiphase Flow*. 2017. V. 95. Pp. 257–270.  
DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.06.006](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2017.06.006)
- [41] Gärtner J.W., Rees A., Kronenburg A., Sender J., Oswald M., Loureiro D. Large eddy simulation of flashing cryogenic liquid with a compressible volume of fluid solver // *ILASS-Europe 2019, 29th Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, 2–4 September 2019, Paris, France*. 8 p.  
<https://elib.dlr.de/132833/1/ILASS%202019%20Large%20Eddy%20Rees.pdf>
- [42] Gärtner J.W., Kronenburg A., Rees A., Sender J., Oswald M., Lamanna G. Numerical and experimental analysis of flashing cryogenic nitrogen // *International Journal of Multiphase Flow*. 2020. V. 130. 103360.  
DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103360](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103360)
- [43] Calay R., Holdo A. Modelling the dispersion of flashing jets using CFD // *Journal of Hazardous Materials*. 2008. V. 154, Issues 1–3. Pp. 1198–1209.  
DOI: [10.1016/j.jhazmat.2007.11.053](https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2007.11.053)
- [44] Loureiro D.D., Reutzsch J., Kronenburg A., Weigand B., Vogiatzaki K. Primary breakup regimes for cryogenic flash atomization // *International Journal of Multiphase Flow*. 2020. V. 132. 103405.  
DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103405](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103405)
- [45] Сычев В.В., Вассерман А.А., Козлов А.Д., Спиридонов Г.А., Цымарный В.А. Термодинамические свойства азота. Москва: Издательство стандартов, 1977. 352 с.  
Sychev V.V., Wasserman A.A., Kozlov A.D., Spiridonov G.A., Tsymarny V.A. Thermodynamic properties of nitrogen. Moscow: Publishing House of Standards, 1977. 352 p. (in Russian).  
<https://nauca.ru/ref/Термодинамические-свойства-азота-ГСССД.pdf>
- [46] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Korobchinskaya V.A. Equation of state for liquid and gaseous nitrogen in cryogenic temperature range // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1587–1592.  
DOI: [10.1134/S1995080223050116](https://doi.org/10.1134/S1995080223050116)
- [47] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Файзуллина Э.А. Аналитическое уравнение состояния азота для жидкой и газовой фаз // *Теплофизика и аэромеханика*. 2024. № 6. С. 1187–1194.  
Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Fayzullina E.A. Analytical equation of state for liquid and gaseous nitrogen // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2024. No. 6. Pp. 1187–1194.  
EDN: xqfdap

- [48] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование процесса истечения жидкого азота через коническое сопло в вакуумную камеру // Письма в журнал технической физики. 2023. Т. 49, № 24. С. 46–49.  
DOI: [10.61011/PJTF.2023.24.56872.107A](https://doi.org/10.61011/PJTF.2023.24.56872.107A)  
Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Gainullina E.F. Modeling the process of liquid nitrogen outflow through a conical nozzle into vacuum chamber // Technical Physics Letters. 2023. V. 49, No. 12. Pp. 108–111.  
<https://journals.ioffe.ru/articles/57601>
- [49] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Gainullina E.F. Modeling the dynamics of a boiling liquid nitrogen jet under cryogenic temperatures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1579–1586.  
DOI: [10.1134/S1995080223050104](https://doi.org/10.1134/S1995080223050104)
- [50] Коробчинская В.А. Влияние начальной степени перегрева на эволюцию струи жидкого азота при истечении в вакуумную камеру // Вестник Башкирского университета. 2024. Т. 29, № 1. С. 19–24.  
Korobchinskaya V.A. The influence of the initial degree of overheating on the evolution of a jet of liquid nitrogen when flowing into a vacuum chamber // Bulletin of the Bashkir University. 2024. T. 29, No. 1. Pp. 19–24 (in Russian).  
DOI: [10.33184/bulletin-bsu-2024.1.4](https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2024.1.4)
- [51] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф. Влияние начальных условий в камере низкого давления на степень расширения вскипающей струи жидкого азота // Письма в журнал технической физики. 2024. Т. 50, № 23. С. 23–26.  
Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Gainullina E.F. Influence of initial conditions in a low-pressure chamber on the degree of expansion of a boiling jet of liquid nitrogen // Technical Physics Letters. 2024. V. 50, No. 23. Pp. 23–26 (in Russian).  
DOI: [10.61011/PJTF.2024.23.59393.6455k](https://doi.org/10.61011/PJTF.2024.23.59393.6455k)

## Сведения об авторах / Information about the Authors

### Раиса Хакимовна Болотнова

доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник  
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН

### Raisa Khakimovna Bolotnova

Sc.D. (Phys. & Math.), Senior researcher  
Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS  
[bolotnova@anrb.ru](mailto:bolotnova@anrb.ru)  
ORCID: [0000-0001-5847-7328](https://orcid.org/0000-0001-5847-7328)

### Эльнара Айдаровна Файзуллина

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН

### Elnara Aidarovna Faizullina

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS  
[elnara\\_faizullina@mail.ru](mailto:elnara_faizullina@mail.ru)  
ORCID: [0009-0004-1569-8517](https://orcid.org/0009-0004-1569-8517)



## Автомодельное движение газа с линейным полем скоростей

С.В. Хабиров✉

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: [habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)

Уравнения движения идеального газа допускают равномерное растяжение всех независимых переменных. Этой группе соответствует инвариантная стационарная подмодель ранга 3. Получены все автомодельные решения подмодели с линейным полем скоростей. Возможны движения частиц по квазилучам, плоским степенным и спиральным траекториям, пространственным спиральным траекториям на поверхности вращения степенной кривой.

**Ключевые слова:** уравнения газовой динамики, равномерное растяжение, инвариантная автомодельная подмодель, линейное поле скоростей, квазилуч

Работа выполнена в рамках государственного задания №Е124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

## Automodeling gas motions with the linear field of velocities

S.V. Khabirov✉

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: [habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)

The equations of a motion of the ideal gas admit the proportional dilatation by all independent variables. The invariant stationary submodel of the rank 3 corresponds to this group. All automodeling solutions of the submodel with the linear field of velocities are obtained. It is possible motions of particles along quasirays, on the plane exponential and spiral trajectories, by twisted curves on the rotation surface of the exponential curve.

**Keywords:** equations of gas dynamics, proportional dilatation, invariant automodeling submodel, linear field of velocities, quasiray

### 1. Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений газовой динамики дает большое число подмоделей: инвариантные, частично инвариантные, дифференциально инвариантные [1–4] для неподобных подгрупп 11-параметрической группы Галилея, расширенной растяжением. Некоторые инвариантные подмодели хорошо изучены [5–7], другие ждут своей очереди для исследования по аналогии с первыми. К типу дифференциально инвариантных подмоделей относятся решения с линейным полем скоростей, так как множество первых производных по координатам инвариантно относительно группы Галилея. Для модели газовой динамики эта дифференциально инвариантная подмодель задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка. Она наследует допускаемую группу и поэтому имеет интегралы [8], но общее решение полу-

чить не представляется возможным. Решение с линейным полем скоростей имеет смысл искать для подмоделей. Так получены периодические движения газа [9, 10]. Краткий обзор работ о движении сплошной среды с линейным полем скоростей приведен в работе [11]. В качестве примера получения общего решения с линейным полем скоростей рассмотрена автомодельная инвариантная подмодель ранга 3 для группы растяжений. Эти точные решения дополняют классы инвариантных и частично инвариантных решений этой подмодели, рассмотренных в работах [12–14].

В настоящей работе найдены все автомодельные решения с линейным полем скоростей с постоянной матрицей, которая эквивалентна двум жордановым формам. В зависимости от собственных чисел этих матриц получены движения частиц газа для специальных уравнений состояния.

## 2. Подмодель автомодельных движений газа

Уравнения газовой динамики записываются в виде [5–7]:

$$\begin{aligned} DS &= S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0, \\ D\vec{u} &= V(\epsilon_{VS}\nabla S + \epsilon_{VV}\nabla V) = -V\nabla p, \\ p &= -\epsilon_V = P(V, S), \\ DV &= V\nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $S$  – энтропия;  $V$  – удельный объем ( $\rho = V^{-1}$  – плотность);  $p$  – давление;  $\vec{u}$  – скорость частицы;  $\epsilon$  – удельная внутренняя энергия;  $\epsilon = \epsilon(V, S)$  – уравнение состояния;  $\nabla = \partial_{\vec{x}}$  – градиент;  $t$  – время.

Система дифференциальных уравнений (1) допускает 11-и параметрическую группу Галилея расширенную равномерным растяжением [8]. Ей соответствует 11-и мерная алгебра Ли. Все подгруппы (подалгебры) перечислены в [1]. Число неподобных однопараметрических подгрупп равно 13, среди которых есть подгруппа равномерных растяжений. Оператор этой подгруппы  $X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}}$  имеет инварианты  $\vec{x}_1 = t^{-1}\vec{x}$ ,  $\vec{u}_1 = \vec{u} - t^{-1}\vec{x}$ ,  $V, S$ . Представление инвариантного решения ранга 3 имеет вид:  $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{u}_1$ ,  $V = V_1, S = S_1$ , где  $\vec{u}_1, V_1, S_1$  – функции инвариантов  $\vec{x}_1$ . Подстановка представления в систему (1) дает автомодельную подмодель стационарного типа [1]:

$$\begin{aligned} D_1 S_1 &= \vec{u}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} S_1 = 0, \\ D_1 \vec{u}_1 + V_1 \partial_{\vec{x}_1} p &= -\vec{u}_1, \\ D_1 V_1 - V_1 \partial_{\vec{x}_1} \cdot \vec{u}_1 &= 3V_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Линия уровня инвариантов  $\vec{x}_1$  – прямая, выходящая из начала координат. Это частица инвариантной подмодели, на которой постоянны инвариантные функции. Нормализатор подалгебры  $X_{11}$  – семи-мерен. Это наибольшая подалгебра из  $L_{11}$ , для которой  $X_{11}$  – идеал. Он состоит из операторов галилеевых преобразований, вращений и растяжения. Фактор нормализатора по  $X_{11}$  – подалгебра группы Евклида (переносы и вращения)  $\{\partial_{\vec{x}_1}, \vec{x}_1 \times \partial_{\vec{x}_1} + \vec{u}_1 \times \partial_{\vec{u}_1}\}$ . Эта группа допускается подмоделью (2) [1, 5]. Подмодель допускает преобразования эквивалентности с операторами  $\vec{x}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} + \vec{u}_1 \cdot \partial_{\vec{u}_1} + V_1 \partial_{V_1} + S_1 \partial_{S_1}, V_1 \partial_{V_1}, \gamma(S_1) \partial_{S_1}, \partial_p - V_1 \partial_\epsilon, \nu(S_1) \partial_\epsilon$ , где  $\gamma(S_1), \nu(S_1)$  – произвольные функции. Уравнения состояния следует рассматривать с точностью до этих преобразований.

## 3. Линейное поле скоростей

Рассмотрим решение автомодельной подмодели (2) с линейным полем скоростей  $\vec{u}_1 = A\vec{x}_1 + \vec{a}$ , где  $A$  – невырожденная матрица ( $|A| \neq 0$ ). Вырожденный случай рассматривается далее. Евклидова группа преобразований переводит представление решения в более простое с  $\vec{a} = 0, A = \text{diag}(d_1, d_2, d_3) + E < \vec{\omega} >$ ,

$E < \vec{\omega} > \vec{x}_1 = \vec{\omega} \times \vec{x}_1$ . Подмодель принимает вид:

$$\begin{aligned} p &= -\epsilon_{V_1} = P(V_1, S_1), \\ D_1 S_1 &= \vec{u}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} S_1 = 0, \\ \partial_{\vec{x}_1} p &= -V_1^{-1}(A^2 + A)\vec{x}_1, \\ D_1 V_1 &= V_1(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1} + 3). \end{aligned} \tag{3}$$

Собственные числа матрицы  $A$  удовлетворяют кубическому уравнению

$$\lambda^3 = \lambda^2 \text{tr} A - \lambda \text{tr} A_D + |A|,$$

$$\begin{aligned} \text{tr} A &= d_1 + d_2 + d_3, \\ \text{tr} A_D &= \begin{vmatrix} d_1 & -\omega_3 \\ \omega_3 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & \omega_2 \\ -\omega_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_2 & -\omega_1 \\ \omega_1 & d_3 \end{vmatrix}, \\ |A| &= d_1 d_2 d_3 - \omega_1^2 d_1 - \omega_2^2 d_2 - \omega_3^2 d_3. \end{aligned}$$

Существует действительный корень  $\lambda$ , которому отвечает собственный вектор  $\vec{e}_1 : A\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1$ . В ортонормированном базисе  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  матрица  $A$  имеет вид  $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \omega \\ 0 & -\omega & d_3 \end{vmatrix}$ , при этом вид уравнений (3) не изменится. Поворот в плоскости векторов  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$  не меняет вид уравнений (3), но изменит матрицу  $A$ :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_2 & \omega \\ -\omega & d_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{d}_2 & \vec{\omega} \\ -\vec{\omega} & \vec{d}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства:

$$\begin{aligned} \vec{d}_2 + \vec{d}_3 &= d_2 + d_3, \\ \vec{d}_2 &= d_2 \cos^2 \varphi + d_3 \sin^2 \varphi, \\ \vec{\omega} &= \omega + (d_3 - d_2) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Если  $d_2 = d_3$ , то матрица  $A$  не меняется. Если  $d_2 \neq d_3$ , то выбором  $\varphi$  можно сделать  $\vec{\omega} = 0 : 2\omega(d_2 - d_3)^{-1} = \sin(2\varphi)$ . Итак, достаточно рассмотреть два случая матриц  $A$ :

$$\begin{aligned} 1) &\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_i \neq 0; \\ 2) &\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{vmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \quad b \neq 0. \end{aligned}$$

Первый случай матрицы  $A$  с действительными собственными числами, второй – с комплексно сопряженными. Решения рассматриваются с точностью до ортогональных преобразований, допускаемых системой (2). Получаются все жордановы формы в ортогональном базисе.

#### 4. Действительные собственные числа

Система уравнений (3) в первом случае матрицы  $A$  принимает вид:

$$\begin{aligned} p_{x_i} &= -V_1^{-1} \lambda_i (\lambda_i + 1) x_i, \quad u_i = \lambda_i x_i, \\ D_1 S_1 &= \lambda_i x_i S_{1x_i} = 0, \\ D_1 V_1 &= V_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 3). \end{aligned} \quad (4)$$

Условия совместности таковы

$$V_{1x_i} \lambda_i (\lambda_i + 1) x_i = V_{1x_j} \lambda_j (\lambda_j + 1) x_j, \quad i \neq j. \quad (5)$$

Отсюда следует

$$V_1 = V_1(J), \quad J = \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\lambda_i + 1) x_i^2,$$

если  $\lambda_i \neq -1$ ,  $V_1 \neq \text{const}$ . Уравнение для  $V_1$  из (4)

$$\begin{aligned} V_1 (\sum_{i=1}^3 \lambda_i + 3) &= 2V_1' \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 (\lambda_i + 1) x_i^2 = \\ &= 2V_1' (\lambda_3 J + (\lambda_1 - \lambda_3) \lambda_1 (\lambda_1 + 1) x_1^2 + \\ &\quad + (\lambda_2 - \lambda_3) \lambda_2 (\lambda_2 + 1) x_2^2) \end{aligned}$$

расщепляем по свободным переменным  $x_1, x_2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \neq -1, \\ V_1 = V_0 I^{\frac{3}{2}(1+\lambda^{-1})}, \quad I = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{V_0(\lambda+3)} I^{-\frac{\lambda+3}{2\lambda}} + p_0 = P(V_1, S_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow S_1 = S(I) = S_0, \quad \vec{u}_1 = \lambda \vec{x}_1. \end{aligned}$$

Здесь  $V_0, p_0, S_0$  — постоянные. Получили изоэнтропическое пространственное радиальное движение частиц  $\vec{x} = \vec{x}_0 |t|^{\lambda+1}$ . Уравнение состояния для такого решения политропно

$$p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{\lambda+3} V_0^{-\frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}} V_1^{-\frac{\lambda+3}{3(\lambda+1)}} + p_0.$$

Для постоянного  $V_1$  уравнения (4) противоречивы.

Если  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 \neq -1, \lambda_3 \neq -1$ , то условия совместности (5) дают:

$$\begin{aligned} V_1^{-1} &= V'(J), \quad J = \lambda_2 (\lambda_2 + 1) x_2^2 + \lambda_3 (\lambda_3 + 1) x_3^2, \\ p &= -\frac{1}{2} V(J) + p_0 = P(V_1, S_1) \Rightarrow S_1 = S(J). \end{aligned}$$

Из уравнений (4) следует

$$\begin{aligned} S'(\lambda_2^2 (\lambda_2 + 1) x_2^2 + \lambda_3^2 (\lambda_3 + 1) x_3^2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow S_1 = S_0 = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2V''(\lambda_2^2 (\lambda_2 + 1) x_2^2 + \lambda_3^2 (\lambda_3 + 1) x_3^2) + \\ + V'(2 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \end{aligned}$$

$$V_1 = V_0 I^{1+\lambda^{-1}}, \quad I = x_2^2 + x_3^2,$$

$$p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{2V_0} I^{-\lambda^{-1}} + p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \lambda^2 (\lambda+1) V_0^{-\frac{\lambda}{\lambda+1}} V_1^{-\frac{1}{\lambda+1}},$$

$$\vec{u}_1 = (-x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

изоэнтропическое двумерное радиальное движение частиц  $x = x_0, (y, z) = (y_0, z_0) |t|^{\lambda+1}$ .

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda = \lambda_3 \neq -1$ , то условия совместности (5) дают  $V_1 = V_1(x_3)$ . Из уравнений (4) следует

$$V_1 = V_0 |x_3|^{1+\lambda^{-1}}, \quad S = S_0, \quad \vec{u}_1 = (-x_1, -x_2, \lambda x_3),$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{1-\lambda} V_0^{-1} |x_3|^{1-\lambda^{-1}} + p_0 = \\ &= \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{1-\lambda} V_0^{-\frac{2\lambda}{\lambda+1}} V_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} + p_0. \end{aligned}$$

Получено одномерное автомодельное движение.

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , то  $p = p_0 = P(V_1, S_1)$ ,  $D_1 V_1 = 0 = D_1 S_1 \Rightarrow V_1 = V_1 \left( \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right)$ ,  $\vec{u}_1 = -\vec{x}_1$ . Имеем изобарический покой, в котором плотность и энтропия распределены по коническому закону.

#### 5. Комплексно сопряженные собственные числа

Система уравнений (3) во втором случае матрицы  $A$  принимает вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda x_1, \quad v_1 = ay_1 + bz_1, \quad w_1 = -by_1 + az_1, \\ D_1 S_1 &= 0, \quad D_1 V_1 = V_1 (\lambda + 2a + 3), \\ p_{x_1} &= -V_1^{-1} \lambda (\lambda + 1) x_1, \\ p_{y_1} &= -V_1^{-1} ((a^2 - b^2 + a)y_1 + b(2a + 1)z_1), \\ p_{z_1} &= -V_1^{-1} (-b(2a + 1)y_1 + (a^2 - b^2 + a)z_1). \end{aligned} \quad (6)$$

Условия совместности

$$\begin{aligned} V_{1y_1} \lambda (\lambda + 1) x_1 &= V_{1x_1} ((a^2 - b^2 + a)y_1 + \\ &\quad + b(2a + 1)z_1), \\ V_{1z_1} \lambda (\lambda + 1) x_1 &= V_{1x_1} (-b(2a + 1)y_1 + \\ &\quad + (a^2 - b^2 + a)z_1), \\ V_{1y_1} (b(2a + 1)y_1 - (a^2 - b^2 + a)z_1) + \\ + V_{1z_1} ((a^2 - b^2 + a)y_1 + b(2a + 1)z_1) &= \\ = 2V_1 b(2a + 1) \end{aligned} \quad (7)$$

после подстановки первых двух соотношений в третье определяют:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad V_1 = V(I),$$

$$I = -\lambda (\lambda + 1) x_1^2 + (b^2 + \frac{1}{4})(y_1^2 + z_1^2)$$

при  $\lambda \neq -1$ . Уравнение для  $V_1$

$$V'((2\lambda + 1)\lambda (\lambda + 1) x_1^2 + I) + V(\lambda + 2) = 0$$

расщепляем по свободной переменной  $x_1$ :

$$V'(I) \lambda (\lambda + 1) (2\lambda + 1) = 0.$$

Если  $V_1$  — постоянно, то система (6) несовместна. Если  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , то

$$V_1 = V_0 I^{-\frac{3}{2}}, \quad I = \frac{1}{4} x_1^2 + \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) (y_1^2 + z_1^2),$$

$$p = \frac{1}{5} V_0^{-1} I^{\frac{5}{2}} + p_0 = \frac{1}{5} V_0^{\frac{2}{3}} V_1^{-\frac{5}{3}} + p_0.$$

Уравнение состояния  $p = P(V_1, S_1)$  определяет  $S_1 = S_1(I)$ . Из (6) следует  $S_1 = S_0 = \text{const}$ . Получаем изоэнтروпическое движение одноатомного газа:

$$u_1 = -\frac{1}{2} x_1, \quad v_1 = -\frac{1}{2} y_1 + b z_1, \quad w_1 = -b y_1 - \frac{1}{2} z_1 \Rightarrow$$

$$u = \frac{x}{2t}, \quad v = t^{-1} \left(\frac{1}{2} y + b z\right), \quad w = t^{-1} \left(\frac{1}{2} z - b y\right).$$

В цилиндрической системе координат  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$  частицы двигаются по закону

$$x = x_0 |t|^{1/2}, \quad r = r_0 |t|^{1/2}, \quad \varphi = \varphi_0 - b \ln |t|.$$

Траектория движения частицы есть спираль  $r = r_0 \exp \frac{\varphi_0 - \varphi}{2b}$  на конусе  $x r^{-1} = x_0 r_0^{-1}$ .

Если  $\lambda = -1$ , то из (7) следует  $V_{1x_1} = 0$ . Уравнение для  $V_1$  в (6) принимает вид:

$$V_{1y_1} (a y_1 + b z_1) + V_{1z_1} (-b y_1 + a z_1) = 2 V_1 (a + 1). \tag{8}$$

Последнее уравнение в (7) в силу (8) таково:

$$(a + 1) (V_{1y_1} (b y_1 - a z_1) + V_{1z_1} (a y_1 + b z_1)) = 2 a b V_1 \Rightarrow a \neq -1. \tag{9}$$

Уравнения (7), (8) совместны. В полярных координатах  $y_1 = r_1 \cos \varphi_1$ ,  $z_1 = r_1 \sin \varphi_1$  получаем решение:

$$V_1 = V_0 r_1^n e^{-k \varphi_1}, \quad k = \frac{2b(2a + 1)}{(a + 1)(a^2 + b^2)},$$

$$n = \frac{2a((a + 1)^2 + b^2)}{(a + 1)(a^2 + b^2)},$$

$$p = \frac{1}{2} V_0^{-1} (a + 1) (a^2 + b^2) r_1^{2-n} e^{k \varphi_1} + p_0 = P(V_1, S_1) \Rightarrow S_{1x_1} = 0.$$

Уравнение для  $S_1$  в (6) интегрируем:  $S_1 = S(I)$ ,  $I = r_1 e^{a b^{-1} \varphi_1}$ . Решение возможно для уравнения состояния вида

$$P(V_1, S_1) = p_0 + \frac{1}{2} (a + 1) (a^2 + b^2) V_0^{-\frac{a}{a+1}} V_1^{\frac{-1}{a+1}} I^{\frac{bk}{a+1}}.$$

Получаем движение политропного газа с переменной энтропией:

$$u = 0, \quad v = (a + 1) y t^{-1} + b z t^{-1},$$

$$w = -b y t^{-1} + (a + 1) z t^{-1}.$$

В цилиндрической системе координат частицы двигаются по закону

$$x = x_0, \quad r = r_0 |t|^{a+1}, \quad \varphi = \varphi_0 - b \ln |t|.$$

Это плоское движение по логарифмической спирали

$$r = r_0 \exp(b^{-1}(a + 1)(\varphi_0 - \varphi)).$$

### 6. Линейное поле скоростей с вырожденной матрицей

Рассмотрим подмодель (2) с линейным полем скоростей  $\vec{u}_1 = A \vec{x}_1 + \vec{a}$  с вырожденной матрицей  $|A| = 0$ . Постоянная матрица  $A$  имеет нулевое собственное значение. Если нулевое собственное значение кратности 3, то матрица  $A$  нулевая. Поворотом декартовых осей сделаем  $\vec{u}_1 = (a, 0, 0)$ . Уравнения (2) интегрируем:

$$S_{1x_1} = 0, \quad V_1 p_{x_1} = -a, \quad p_{y_1} = p_{z_1} = 0,$$

$$a V_{1x_1} = 3 V_1 \Rightarrow a \neq 0, \quad V_1 = V_0 \exp(3 a^{-1} x_1),$$

$$p = p_0 + \frac{1}{3} a^2 V_0^{-1} \exp(-3 a^{-1} x_1) = p_0 + \frac{1}{3} a^2 V_1^{-1} \Rightarrow$$

$$S_1 = S_0 = \text{const}.$$

Получаем изоэнтропическое движение газа с уравнением состояния линейным по плотности:

$$u = a + x t^{-1}, \quad v = y t^{-1}, \quad w = z t^{-1} \Rightarrow$$

$$y = y_0 t, \quad z = z_0 t, \quad x = x_0 t + a t \ln |t|.$$

Траектория частицы — квазилуч на полуплоскости

$$\varphi = \varphi_0, \quad r = r_0 t, \quad x = \frac{r}{r_0} \left(x_0 + a \ln \frac{r}{r_0}\right)$$

в цилиндрической системе координат  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ .

Если нулевое собственное значение кратности 2, то представление решения поворотом и переносом приводится к виду:

$$u_1 = a, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = \lambda z_1, \quad \lambda \neq 0.$$

Система уравнений (2)

$$V_1 p_{x_1} = -a, \quad p_{y_1} = 0, \quad V_1 p_{z_1} = -\lambda(\lambda + 1) z_1 \Rightarrow$$

$$V_{1y_1} = 0 \quad \text{при } a \neq 0 \text{ или } \lambda \neq -1,$$

$$a V_{1z_1} = \lambda(\lambda + 1) z_1 V_{1x_1},$$

$$a V_{1x_1} + \lambda z_1 V_{1z_1} = V_1 (\lambda + 3),$$

$$a S_{1x_1} + \lambda z_1 S_{1z_1} = 0$$

при  $a \neq 0, \lambda \neq -1$  противоречива. Если  $a = 0, \lambda \neq -1$ , то

$$V_1 = V_0 |z_1|^{1+3\lambda^{-1}}, \quad S_1 = S_0 = \text{const},$$

$$p = p_0 - V_0^{-1} \begin{cases} \frac{\lambda^2(\lambda + 1)}{\lambda - 3} |z_1|^{1-3\lambda^{-1}}, & \lambda \neq 3 \\ 12 \ln |z_1|, & \lambda = 3 \end{cases}.$$

Мировая линии частицы  $x = x_0 t$ ,  $y = y_0 t$ ,  $z = z_0 |t|^{\lambda+1}$  или  $\varphi = \varphi_0$ ,  $r = r_0 t$  в цилиндрических координатах. Частица двигается в полуплоскости  $\varphi = \varphi_0$  по графику степенной функции  $z = C r^{1+\lambda}$ .



Если  $a \neq 0$ ,  $\lambda = -1$ , то  $V_1 = V_0 e^{2a^{-1}x_1}$ ,  $p = p_0 + \frac{1}{2}a^2 V_0^{-1} e^{-2a^{-1}x_1} = P(V_1, S_1) \Rightarrow S_1 = S_0 = \text{const}$ . Мирровая линия частицы  $z = z_0$ ,  $y = y_0 t$ ,  $x = t(x_0 + a \ln |t|)$  задает плоскую траекторию по квазилучу  $x = \frac{y}{y_0} \left( x_0 + a \ln \left| \frac{y}{y_0} \right| \right)$ .

Если  $a = 0$ ,  $\lambda = -1$ , то  $V_1 = |z_1|^{-2} F(x_1, y_1)$ ,  $p = p_0$ ,  $S_1 = S_0$  для уравнения состояния  $p = P(S)$ . Мирровая линия частицы  $z = z_0$ ,  $r = r_0 t$ ,  $\varphi = \varphi_0$  задает движение по лучу  $z = z_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  с постоянной скоростью.

Пусть нулевое собственное значение матрицы  $A$  простое. Достаточно рассмотреть два случая матрицы  $A$  из пункта 3 при этом  $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$ .

В первом случае  $u_1 = a_1$ ,  $v_1 = \lambda_1 y_1$ ,  $w_1 = \lambda_2 z_1$  уравнения (2) принимают вид:

$$\begin{aligned} D_1 S_1 &= a_1 S_{1x_1} + \lambda_1 y_1 S_{1y_1} + \lambda_2 z_1 S_{1z_1} = 0, \\ D_1 V_1 &= V_1 (3 + \lambda_1 + \lambda_2), \\ V_1 p_{x_1} &= -a_1, \quad V_1 p_{y_1} = -\lambda_1 (\lambda_1 + 1) y_1, \\ V_1 p_{z_1} &= -\lambda_2 (\lambda_2 + 1) z_1 \Rightarrow \\ a_1 V_{1y_1} &= \lambda_1 (\lambda_1 + 1) y_1 V_{1x_1}, \\ a_1 V_{1z_1} &= \lambda_2 (\lambda_2 + 1) z_1 V_{1x_1}, \\ \lambda_2 (\lambda_2 + 1) z_1 V_{1y_1} &= \lambda_1 (\lambda_1 + 1) y_1 V_{1z_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если  $a_1 \neq 0$ ,  $\lambda_i \neq -1$ , то уравнения (10) противоречивы.

Если  $a_1 = 0$ ,  $\lambda_i \neq -1$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то уравнения (10) противоречивы.

Если  $a_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq -1$ , то

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 J^{1+\frac{3}{2\lambda}}, \quad J = y_1^2 + z_1^2, \\ p &= p_0 + \frac{1}{3} V_0^{-1} \lambda^2 (\lambda + 1) J^{\frac{3}{2\lambda}} = P(V_0 J^{1+\frac{3}{2\lambda}}, S_1) \Rightarrow \\ S_1(J) &= S_0 = \text{const}, \quad \lambda \neq -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Получаем движение частиц  $x = x_0 t$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $r = r_0 |t|^{\lambda+1}$  в полуплоскости  $\varphi = \varphi_0$  по степенной траектории  $r = r_0 |x x_0^{-1}|^{\lambda+1}$ .

Если  $a_1 = 0$ ,  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda = \lambda_2 \neq -1$ , то

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 |z_1|^{1+2\lambda^{-1}}, \quad S = S_0, \\ p &= p_0 - V_0^{-1} \begin{cases} \frac{\lambda^2 (\lambda + 1)}{\lambda - 2} |z_1|^{1-2\lambda^{-1}}, & \lambda \neq 2 \\ 6 \ln |z_1|, & \lambda = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Частица двигается с мирровой линией  $x = x_0 t$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0 |t|^{\lambda+1}$  по плоской степенной траектории  $z = z_0 |x x_0^{-1}|^{\lambda+1}$ .

Если  $a_1 \neq 0$ ,  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 \neq -1$ , то уравнения (10) противоречивы.

Если  $a_1 \neq 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , то

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 e^{a_1^{-1} x_1}, \quad S_1 = S_0, \\ p &= p_0 + V_0^{-1} a_1^2 e^{-a_1^{-1} x_1} = p_0 + a_1^2 V_1^{-1}. \end{aligned}$$

Частицы двигаются вдоль оси  $x$ :  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ ,  $x = t(x_0 + a_1 \ln |t|)$ .

Во втором случае матрицы  $A$  из пункта 3:  $u_1 = a_1$ ,  $v_1 = a y_1 + b z_1$ ,  $w_1 = -b y_1 + a z_1$ ,  $b \neq 0$ , система (2) в цилиндрических координатах  $y_1 = r_1 \cos \varphi_1$ ,  $z_1 = r_1 \sin \varphi_1$  принимает вид:

$$\begin{aligned} D_1 S_1 &= a_1 S_{1x_1} + a r_1 S_{1r_1} - b S_{1\varphi_1} = 0, \\ D_1 V_1 &= V_1 (2a + 3), \\ V_1 p_{x_1} &= -a_1, \quad V_1 p_{r_1} = -r_1 (a^2 + a - b^2), \\ V_1 p_{\varphi_1} &= r_1^2 b (2a + 1) \end{aligned} \quad (11)$$

с условиями совместности

$$\begin{aligned} a_1 V_{1r_1} &= r_1 (a^2 + a - b^2) V_{1x_1}, \\ a_1 V_{1\varphi_1} &= -b (2a + 1) r_1^2 V_{1x_1}, \\ (a^2 + a - b^2) V_{1\varphi_1} + b (2a + 1) r_1 V_{1r_1} &= 2b (2a - 1) V_1. \end{aligned}$$

Если  $a_1 \neq 0$ , то исключая производные  $V_{1r_1}$ ,  $V_{1\varphi_1}$  из последнего равенства, получим

$$V_1 a_1 b (2a + 1) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \quad V_{1\varphi_1} = 0.$$

Уравнение для  $V_1$  в (11) интегрируем  $V_1 = r_1^{-4} F(J)$ ,  $J = r_1 e^{\frac{x_1}{2a_1}}$ . Оставшееся уравнение для  $V_1$

$$2a_1^2 (-4F + JF') = -r_1^2 JF' \left( b^2 + \frac{1}{4} \right)$$

расщепляем по свободной переменной  $r_1$ :  $F' = 0 \Rightarrow a_1 = 0$  противоречие.

Пусть  $a_1 = 0$ . Тогда  $V_{1x_1} = 0 = p_{x_1}$ ,  $a \neq -1$  и уравнения для  $V_1$  совместны:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 r_1^n e^{-k\varphi_1}, \quad k = \frac{3b(2a+1)}{(a+1)(a^2+b^2)}, \\ n &= \frac{b^2(2a-1) + a(a+1)(2a+3)}{(a+1)(a^2+b^2)}. \end{aligned}$$

Интегрируем уравнения (11)

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{1}{3} V_0^{-1} (a+1)(a^2+b^2) r_1^{2-n} e^{k\varphi_1} = \\ &= p_0 + \frac{1}{3} (a+1)(a^2+b^2) r_1^2 V_1^{-1} = P(V_1, S_1), \\ S_1 &= G(r_1 e^{ab^{-1}\varphi_1}) \Rightarrow r_1^{1+\frac{an}{bk}} = \\ &= G^{(-1)}(S_1) V_0^{\frac{-a}{bk}} V_1^{\frac{a}{bk}}. \end{aligned}$$

Отсюда определяем уравнение состояния  $p = P(V_1, S_1)$ , для которого найдено решение

$$\begin{aligned} u &= x t^{-1}, \quad v = t^{-1}((a+1)y + bz), \\ w &= t^{-1}(-by + (a+1)z). \end{aligned}$$

В цилиндрических координатах  $y = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$  частицы двигаются по закону:

$$r = r_0 |t|^{a+1}, \quad \varphi = \varphi_0 - b \ln |t|, \quad x = x_0 t.$$

Траектория — логарифмическая спираль  $r = r_0 \exp(b^{-1}(a+1)(\varphi_0 - \varphi))$  на степенной поверхности вращения  $r = r_0 |x x_0^{-1}|^{a+1}$ .

## 7. Заключение

Рассмотрены все случаи уравнений состояния, для которых существуют решения с линейным полем скоростей для автомоделной подмодели уравнений газовой динамики. Возможны движения частиц по лучам и квазилучам, плоским степенным и спиральным траекториям, пространственным спиральным траекториям на поверхности вращения степенной кривой. Такие решения относятся к классу дифференциально инвариантных для уравнений газовой динамики как идеальной, так и с постоянной вязкостью.

## Список литературы / References

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.  
Ovsyannikov L.V. The "podmodeli" program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V. 58, Iss. 4. Pp. 601–627.  
DOI: [10.1016/0021-8928\(94\)90137-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90137-6)
- [2] Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «ПОДМОДЕЛИ» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.  
EDN: [yhiucc](https://www.edn.ru/yhiucc)  
Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the "Podmodeli" program for the gas dynamics equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63, Iss. 3. Pp. 349–358.  
DOI: [10.1016/S0021-8928\(99\)00046-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00046-5)
- [3] Ovsyannikov L.V. Partially invariant solutions to gas dynamics equations. Modern Group Analysis VII // Developments in Theory, Computation and Application: Proceedings of the International Conference, Nordfjordeid, Norway, 30 June–5 July 1997. Trondheim: MARS Publishers. 1999. Pp. 263–274.
- [4] Хабиров С.В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.  
MathNet: [smj1100](https://mathnet.ru/smj1100)  
Khabirov S.V. Classification of Differential Invariant Submodels // Siberian Mathematical Journal. 2004. V. 45. Pp. 562–579.  
DOI: [10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf](https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf)
- [5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.  
Ovsyannikov L.V. Lectures on the fundamentals of gas dynamics. Moscow–Izhevsk. 2003. 336 p. (in Russian).
- [6] Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука. 1988. 424 с.  
Cherniy G.G. Gas dynamics. Moscow: Nauka. 1988. 424 p. (in Russian).
- [7] Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика. М.: Торус пресс. 2010. 440 с.  
Kraiko A.N. Teoretical gas dynamics. Moscow. Torus press. 2010. 440 p. (in Russian).
- [8] Овсянников Л.В. Новые решения гидродинамики // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.  
Ovsyannikov L.V. New solutions of hydrodynamics equations // Doklads of Russian Academy of Sciences. 1956. V. 111, Iss. 1. Pp. 47–49.
- [9] Овсянников Л.В. О периодических движениях газа // ПММ. 2001. Т. 65, № 4. С. 567–577.  
Ovsyannikov L.V. The periodic motions of a gas // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. V. 65, Issue 4. Pp. 553–563.  
DOI: [10.1016/S0021-8928\(01\)00061-2](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(01)00061-2)
- [10] Овсянников Л.В. Газовый маятник // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 115–119.  
EDN: [ontidr](https://www.edn.ru/ontidr)  
Ovsyannikov L.V. A gas pendulum // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2000. V. 41. Pp. 865–869.  
DOI: [10.1007/BF02468732](https://doi.org/10.1007/BF02468732)
- [11] Тарасова Ю.В. Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике // СибЖИМ. 2009. Т. 12, № 4(40). С. 128–136.  
Tarasova Ju.V. Classification of submodels with the linear field of velocities // Siberian Journal Industrial Mathematics. 2009. V. 12, Iss. 4(40). Pp. 128–136. (in Russian)  
EDN: [kyrbnt](https://www.edn.ru/kyrbnt)
- [12] Хабиров С.В. Конические закрученные течения // Труды Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Уфа: Гилем. 2011. С. 116–118.  
Khabirov S.V. Conic twisted flow // Proc. of the Russian science conference "Difference equations and its applications". Ufa: Gilem. 2011. Pp. 116–118 (in Russian).
- [13] Мукминов Т.Ф., Хабиров С.В. Простые волны конических движений // Уфимский математический журнал. 2022. Т. 14, № 2, С. 82–93.  
DOI: [10.13108/2022-14-2-78](https://doi.org/10.13108/2022-14-2-78)  
Mukminov T.F., Khabirov S.V. Simple waves of conic motions // Ufa Mathematical Journal. 2022. V. 14, Iss. 2, Pp. 78–89.  
MathNet: [ufa610](https://mathnet.ru/ufa610)
- [14] Хабиров С.В. Инвариантные движения частиц общей трехмерной подгруппы группы всех пространственных переносов // Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, № 4, ч. 1. С. 400–414.  
Khabirov S.V. Partics invariant motions general 3-dimensional subgroup of all space translations group // Chelybinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. V. 5, Iss. 4, part 1. Pp. 408–414. (in Russian)  
DOI: [10.47475/2500-0101-2020-15402](https://doi.org/10.47475/2500-0101-2020-15402)

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Салават Валеевич Хабиров**  
доктор физ.-мат. наук, профессор  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,  
Россия

**Salavat Valeevich Khabirov**  
Sc.D. (Phys. & Math.), Prof.  
Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia  
[habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)  
ORCID: [0000-0002-6126-9033](https://orcid.org/0000-0002-6126-9033)



## The analysis of the development indicators of the Tournaisian deposit

A.E. Fetisov✉, S.Z. Anokhina

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

E-mail: [andreyfetisov200026@mail.ru](mailto:andreyfetisov200026@mail.ru)

The purpose of the present investigation is to analyze the development indicators of the Tournaisian reservoir of the Ural-Volga oil field. To complete this task, a large array of data is required, which has been obtained from the Technological Development Project. Numerical calculation is performed using software code implemented in the Python programming language with the material balance method. To minimize the material balance error in the software code, the `optimize.minimize` function of the SciPy library has been applied with the help of the L-BFGS-B method. The analysis of current development indicators has shown uneven development of the reserves of the Tournaisian oil deposit, as well as a positive effect of injection on the process of fluid displacement from the formation. In this paper, a material balance model has been constructed and adapted to the forecast date. As a result, the average error in the adapted parameters is 3,7%. To make a forecast for the development of the Tournaisian oil deposit, a dependence of the water cut of well production on the oil recovery factor based on core material has been constructed. The graphs of the arithmetic mean and maximum values of the absolute deviation module of the calculated water cut from the actual one, obtained due to a retrospective forecast of the synthesized from the Technological Development Project data of hydrocarbon fields at different stages of development are shown. It has been found that water cut of 98% achieved at a oil recovery factor equals to 0,335. The dependence of the reservoir flooding dynamics on the oil recovery factor has made it possible to forecast the technological development indicators, including the calculation of the dynamics of annual and cumulative oil production, as well as reservoir pressure. As a result of the calculation, the accumulated oil production has amounted to 649 thousand cubic meters with a water cut of 98%.

**Keywords:** the Tournaisian reservoir, development indicators, the material balance method, water cut forecast, oil recovery factor, relative phase permeability, numerical study

### 1. Introduction

Flooding of an oil deposit is one of the main problems faced by a subsoil user during field development. As a result of well flooding, the level of oil production decreases, which may lead to the unprofitable nature of the development of this well. In this regard, it is worth paying attention to the factors affecting water breakthrough to production wells and contributing to the growth of water cut [1].

The main factors affecting well flooding are:

- violation of the tightness of the production casing;
- water ingress through a leaky annular space from overlying or underlying aquifers;
- pulling up the bottom water cone;
- ingress of contour or injected water;
- behind-the-column circulation in the interval of the productive formation.

Currently, many hydrocarbon deposits are at the stage of declining oil and gas production, which is a consequence of intensive development at the initial stages. In this context, forecasting future production volumes is of particular

importance. The volume of data accumulated over the years of operation allows us to adjust mathematical models to real conditions, as well as to develop forecasts for further operation, including the use of modern technologies for maintaining reservoir pressure.

To solve urgent problems, such as control and regulation of development processes, analysis of current indicators and forecasting of field development, various methods are applied such as: statistical, analytical, geological and hydrodynamic modeling.

Statistical forecasting methods with displacement characteristics are widely implemented to forecast technological indicators of hydrocarbon deposit development in the conditions of imperfect geological and field information. For deposits in the early stages of development, displacement characteristics obtained on the basis of analysis of actual field data may have low predictive ability [2].

The main advantage of these methods is the high adequacy of the description of actual values from the Technological Development Project (TDP) [1] by the mathematical model due to its low requirements for the volume of input data [3].

In the work [4] the displacement characteristics, which

are functional dependencies of technological indicators of development and description of fluid filtration in the reservoir for a given development system, can be determined basing on the analysis of the actual values of TDP and actual values of hydrocarbon deposits; results of the laboratory studies of core and formation fluids of hydrocarbon deposits; data from analog deposits. But the efficiency of determining displacement characteristics is significantly affected by the quality of geological and production data and the current state of field development.

In practice, the determination of displacement characteristics using actual values of technological indicators of hydrocarbon deposit development has become widespread [3]. However, the received functional dependencies may have low predictive ability in the case of deposits at early stages of development.

The analytical methods of predicting water cut are among the main methods because they help an engineer to make calculations in the field with a satisfactory degree of convergence of results. There are various analytical methods for forecasting the development of deposits, a classic example of which is the material balance. This is a universal method that allows to take into account the fluid that is in the formation, as well as extracted from the reservoir during development. The examined Schilthius material balance method [5] provides conducting the necessary calculations.

Geological and hydrodynamic modeling is an integral part of the analysis and design of oil field development; the use of modeling and its role are determined by the features of the geological structure and the state of development of production facilities [6]. The main objective of the modeling is to justify geological and technical measures in the medium and long-term development prospects, and to optimize development systems for depleted fields using modern technologies for optimizing flooding and tertiary methods for enhancing oil recovery.

There are many approaches to forecasting the performance of oil fields [7–10]. This research considers the material balance method [5], which allows for a detailed description of the process of fluid displacement from the reservoir. This method is one of the most promising for analyzing and predicting development indicators. It is based on the law of conservation of mass. Calculations let the fluid contained in the system, as well as entering and exiting it. For a better understanding, the reservoir can be imagined as a large elastic reservoir, the contents of which change during the development of the field. The fluid in the reservoir can compress and expand along with its storage [11].

Thus, the purpose of the present paper is to analyze the development indicators of the Tournaisian reservoir of the Ural-Volga oil field.

## 2. Problem statement

This research work deals with the material balance method based on the Schilthius equation [5], which can

be written as follows:

$$\begin{aligned}
 & N(B_t - B_{ti}) + NmB_{ti} \left( \frac{B_{gc} - B_{gi}}{B_{gi}} \right) + \\
 & + N \frac{B_{ti}S_{wio}}{1 - S_{wio}} \left( \frac{B_{tw} - B_{twi}}{B_{twi}} \right) + N \frac{mB_{ti}S_{wig}}{1 - S_{wig}} \left( \frac{B_{tw} - B_{twi}}{B_{twi}} \right) + \\
 & + N \left( \frac{1}{1 - S_{wio}} + \frac{m}{1 - S_{wig}} \right) B_{ti}c_f \Delta P = \\
 & = N_p B_o - N_p R_{so} B_g + [G_{ps} B_g + G_{pc} B_{gc} - G_i B'_g] - \\
 & - (W_e + W_i - W_p) B_w,
 \end{aligned}$$

where  $B_g$  is the gas volume factor,  $B_{gc}$  is the gas volume factor in the gas cap,  $B'_g$  is the injected gas volume factor,  $B_o$  is the oil volume factor,  $B_t = B_o + (R_{si} R_{so}) B_g$  is the composite oil volume factor,  $B_{ti}$  is the initial value of  $B_t$ ,  $B_{tw} = B_w + (R_{swi} R_{sw}) B_g$  is the composite water volume factor,  $B_w$  is the water volume factor,  $c_f$  is the compressibility of the reservoir (rock),  $G$  is the initial gas reserves in the reservoir,  $G_i$  is the cumulative gas injection,  $G_{pc}$  is the cumulative gas production from the gas cap,  $G_{ps}$  is the cumulative production of gas dissolved in oil (evolved gas),  $m$  is the ratio of the gas volume to the volume of oil in the reservoir,  $N$  is the initial oil reserves in the reservoir,  $N_p$  is the cumulative oil production,  $R_{so}$  is the gas content of oil,  $R_{si}$  is the initial gas content of oil,  $R_{sw}$  is the gas content water,  $R_{swi}$  is the initial gas content of water,  $S_g$  is the gas saturation,  $S_o$  is the oil saturation,  $S_w$  is the water saturation,  $S_{wi}$  is the initial water saturation,  $S_{wig}$  is the initial water saturation of the gas cap,  $S_{wio}$  is the initial water saturation of the oil zone,  $W_e$  is the accumulated volume of aquifer water injected into the formation,  $W_i$  is the accumulated water injection,  $W_p$  is the accumulated water production,  $\Delta P$  is the pressure change,  $P_1$  is the initial reservoir pressure,  $P$  is the reservoir pressure.

## 3. Methods and approaches

To analyze the development indicators of the Tournaisian reservoir of the Ural-Volga oil field, a large array of data is required, which have been obtained from TDP [1]. The calculation of the above equation is performed using a program implemented by the author of this work in the Python programming language [12, 13]. The variables for the material balance equation are given in Tab. 1.

Table 1. Energy state indicators of the Tournaisian stage

Indicator	The object as a whole
Initial reservoir pressure, MPa	19,0
Average weighted reservoir pressure, MPa	18,2
Change, MPa / %	0,8 / 4,2
Accumulated compensation, %	167,0
Current compensation, %	283,4
Number of operating wells	
mining	15
injection	5

Table 2. Adaptable parameter boundaries

Adaptable parameter	Border (multiplier)	
	Lower limit (units)	Upper limit (units)
Reservoir pressure	0,01	100
Initial Recoverable Reserves	0,99	1,01
Compressibility coefficient of the formation	0,1	10

Having calculated all the necessary coefficients for each of the years of field operation (1984–2011), the final material balance equation is compiled and solved relative to the volume of initial reserves  $N$ .

Thus, when comparing the obtained values of the equation and the actual values of  $N$  given in the development project, the correctness of the obtained reservoir model can be verified.

Having received a table for the initial reserves  $N$ , a deviation is observed from the indicators presented in the TDP. These deviations can be explained by the inaccuracy of determining the coefficients, as well as inaccurate measurements of reservoir pressures. To solve this problem and correctly adapt the model, the following method is proposed.

By solving the material balance equation relative to zero, the obtained values of the above parameters allow us to minimize the error, thereby adapting the model under consideration to real conditions. The following boundaries of the adapted parameters are used in the work (Tab. 2).

To minimize the material balance error, the optimize.minimize function of the SciPy library has been applied in the program code, using the L-BFGS-B method. The BFGS-B method is an iterative method of numerical optimization, named after its researchers: Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno [14]. This method belongs to the class of so-called quasi-Newton methods. Unlike Newtonian methods, quasi-Newton methods do not directly calculate the Hessian of the function, i.e. there is no need to find partial derivatives of the second order. Instead, the Hessian is calculated approximately, based on the steps taken so far, since this method allows us to optimize the function in the presence of boundary conditions for the adapted parameters.

As a result of optimization, the following values of the parameters under consideration have been obtained (Tab. 3).

#### 4. Numerical results

The recoverable oil reserves of the Tournaisian stage were practically independent of the year of operation and their value was approximately equal to 1,84 million  $m^3$ . The graph of the drop in estimated and actual reservoir pressures is shown in Fig. 1.

The average values of the parameters from 1987 to 2017 years of development have been selected as optimized parameters, since small values of cumulative production in the first years of development can lead to a significant error in solving the material balance equation.

Based on the above, the material balance model can be considered adjusted, since it describes the development

history and the mechanism of displacement of reservoir fluid with satisfactory accuracy. The next stage of the work is forecasting the development of the field.

For a more correct and accurate development forecast, it is necessary to set parameters that would fully reflect the process of fluid displacement from the formation. So it is significant to calculate the oil recovery factor (ORF) from the formation. By comparing calculated and actual coefficients, the mathematical model of the reservoir can be adjusted to historical development data [15].

To calculate the numerical ORF, it is necessary to know the characteristics of oil displacement by water. An extremely important parameter in constructing displacement

Table 3. Adaptable parameters

Reservoir pressure, (atm)	Initial recoverable reserves, (million $m^3$ )	Compressibility coefficient, ( $10^{-5} \cdot 1/\text{atm}$ )
192,0	0,00	20000000
169,8	1,94	451,4
166,2	1,94	385,0
160,0	1,94	307,9
154,1	1,94	259,0
149,9	1,94	234,7
148,8	1,94	234,6
148,5	1,94	234,6
149,1	1,94	234,7
150,7	1,94	236,4
152,6	1,94	245,8
153,6	1,94	258,7
154,0	1,94	265,3
154,1	1,94	259,8
153,2	1,94	251,6
151,8	1,94	236,0
152,1	1,94	234,6
152,3	1,94	234,4
151,7	1,94	234,4
152,8	1,94	234,3
152,9	1,94	234,3
152,9	1,94	234,3
151,9	1,94	234,3
151,6	1,94	234,4
153,5	1,94	234,4
154,9	1,94	234,5
157,6	1,94	234,6
160,9	1,94	259,0
167,0	1,94	306,0
171,9	1,94	352,7

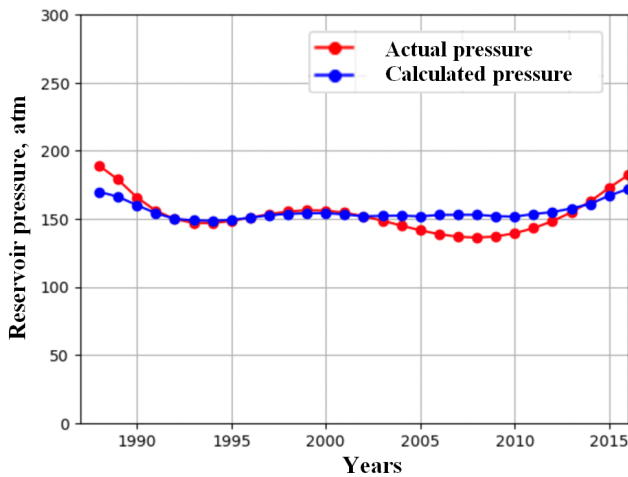


Figure 1. Dynamics of reservoir pressures (blue color is calculation; red color is actual)

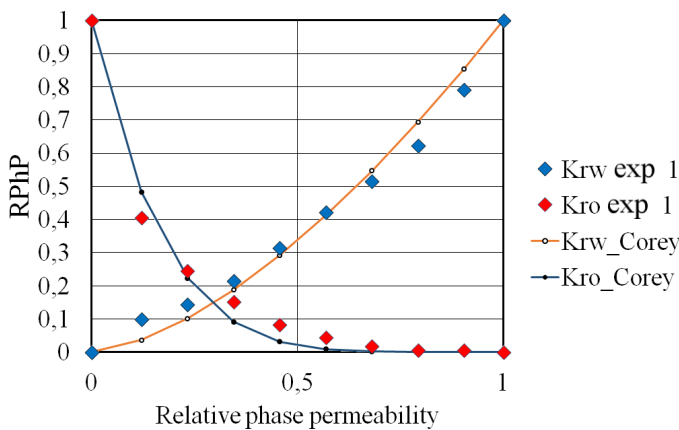


Figure 2. Relative phase permeability curves

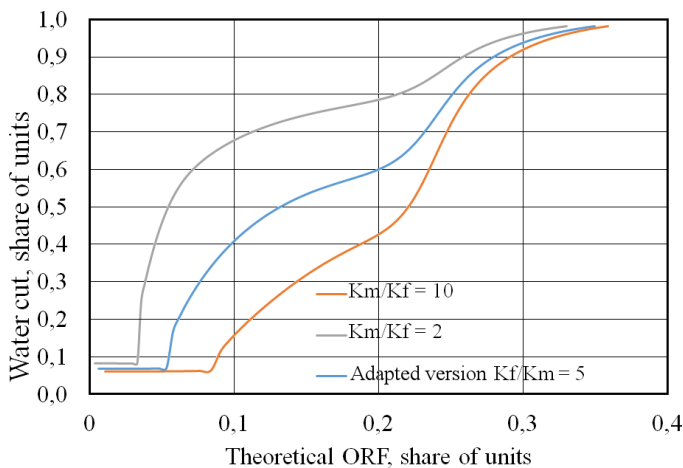


Figure 3. Comparison of permeability ratios

Table 4. Relative phase permeabilities for oil and water

Water saturation of pore space	RPhP for water	RPhP for oil
0,08	0	1
0,23321	0,02401	0,40534
0,28642	0,03534	0,24488
0,33963	0,05233	0,15049
0,39284	0,07687	0,08253
0,44604	0,1033	0,04289
0,49925	0,12595	0,01646
0,55246	0,15238	0,00513
0,60567	0,19391	0,00513
0,651	0,24488	0
0,8595	0,64321	0
1	1	0

characteristics is the relative phase permeability (RPhP), which is found with a calculation based on the data presented in the development project (Tab. 4).

Obtaining generalized RPhPs occurs through the use of the Corey power model [16]:

$$K_{rw} = KRWR \cdot (S_i^{norm})^{nw},$$

$$K_{ro} = KRORW \cdot (1 - S_i^{norm})^{no},$$

$$S_i^{norm} = \frac{S_i - SWL}{1 - SOWCR - SWL}.$$

Based on the least squares method, the parameter values of  $nw$  and  $no$ , corresponding to the best approximation of the model curves to the experimental data, are obtained (Fig. 2):

$$K_{rw}(S_i) = 0,277 \cdot \left( \frac{S_i - 0,178}{1 - 0,376 - 0,178} \right)^{4,44},$$

$$K_{ro} = 1 \cdot \left( 1 - \frac{S_i - 0,178}{1 - 0,376 - 0,178} \right)^{2,84}.$$

Using the dual permeability model [17], and also having the RPhP values for the pore space, a graph of the dependence of water cut on ORF can be obtained. As a result of the calculations, a water flow curve for the  $N$  field, considering filtration both in the matrix and in the fracture space, can be constructed. The water cut curve is constructed basing on core study data; at the initial moment of time, the water saturation of the reservoir exceeds the associated water saturation, thus the theoretical water cut curve does not start from zero. The nature of this curve is affected by the permeability of fracture and pore space. Studies are carried out for several permeability ratios as shown in Fig. 3.

With an increase in the ratio of matrix permeability to the fracture, a characteristic decrease in the convex part of the water cut curve and an increase in the ORF (upon reaching a water cut of 98%) occurs, which is obviously associated with the greater role of the oil-saturated matrix in the total inflow. In the case of a lower permeability ratio, the convex part rises and the ORF decreases (upon reaching

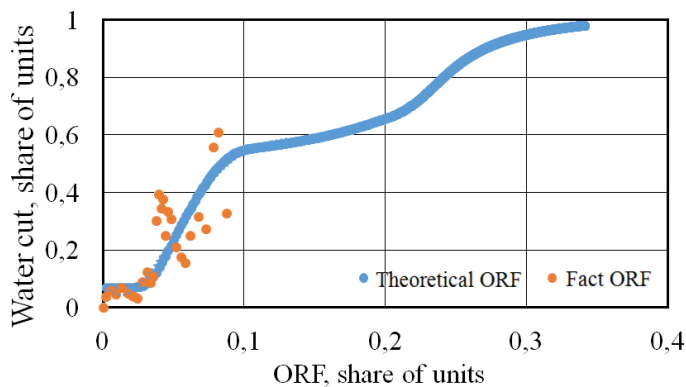


Figure 4. Comparison of permeability ratios

a water cut of 98%). Since a decrease in the ratio between the permeabilities of the matrix and the fracture results in an earlier breakthrough of water, which causes an increase in the water content of the product, affecting the decrease in the ORF.

In order to optimize the actual and theoretical ORF, the model parameters have been adapted. As a result, the following graph of the dependence of water cut on the ORF has been obtained (Fig. 4), corresponding to a permeability ratio of 5, which clearly describes the historical dynamics of water cut.

The calculation of the field development forecast will be performed basing on the recommended forecast option presented in the TDP. This option involves drilling three sidetracks and one horizontal sidetrack, as well as transferring two wells from other sites into production and putting one production well into production. Drilling of an injection sidetrack and commissioning of three injection wells. Maximum oil production is 600 thousand tons. The forecast is made until the water cut of the production reaches 98%. The block diagram of the calculation step of the algorithm for forecasting the development indicators of a field based on the material balance equation is presented in the work [18]. The calculation of the RPhP for oil and water has been carried out basing on the parameters  $n_0$  and  $n_w$  adapted to the development history. The number of production and injection wells corresponds to the recommended development option. The productivity and injectivity coefficients are taken to correspond to the dynamics of annual fluid withdrawals and injection. For predictive calculations, boundary conditions at production wells are used in the form of constant fluid flow rate, and at injection wells they are used in the form of constant bottomhole pressure.

The values of reservoir pressures, cumulative oil production, and annual oil production are presented at Figs. 5, 6 and 7, respectively.

Next, a comparison has been made between the calculated forecast for the development of the Tournaisian deposit and the forecast according to the state plan presented in the field development project. The comparison is based on the main parameters: cumulative oil production, annual oil production, ORF, and water cut. For a visual

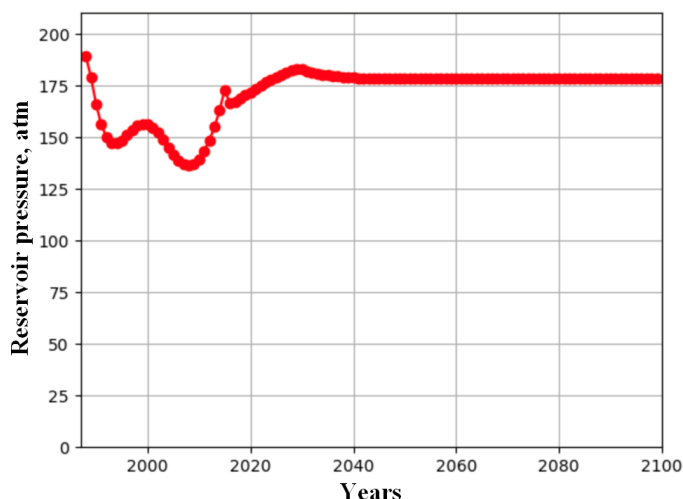


Figure 5. Dynamics of reservoir pressures

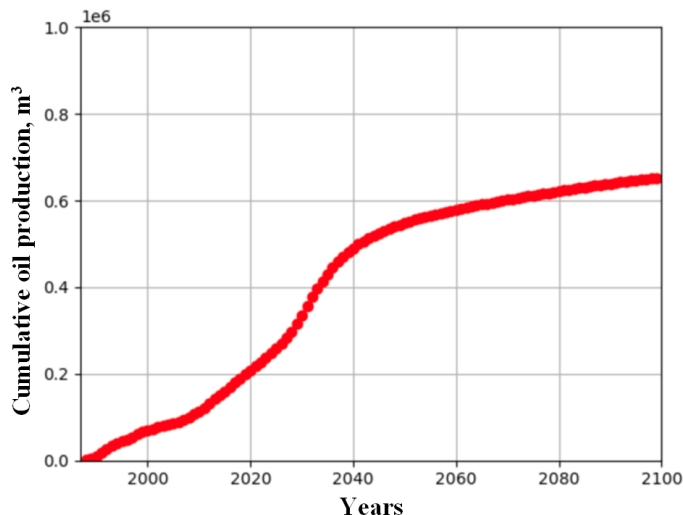


Figure 6. Dynamics of cumulative oil production

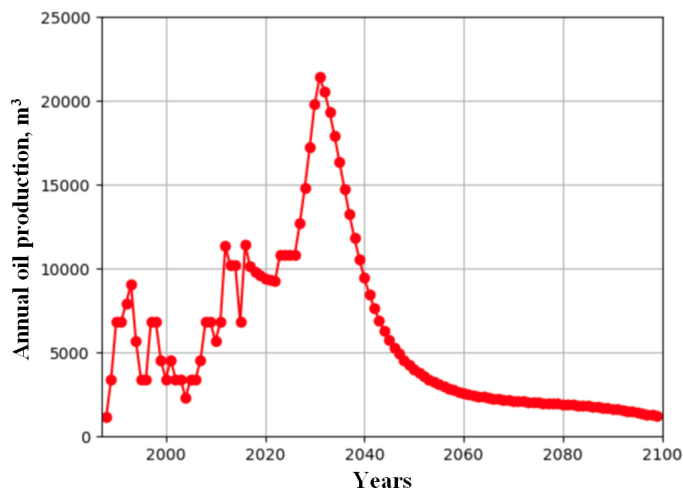


Figure 7. Dynamics of annual oil production

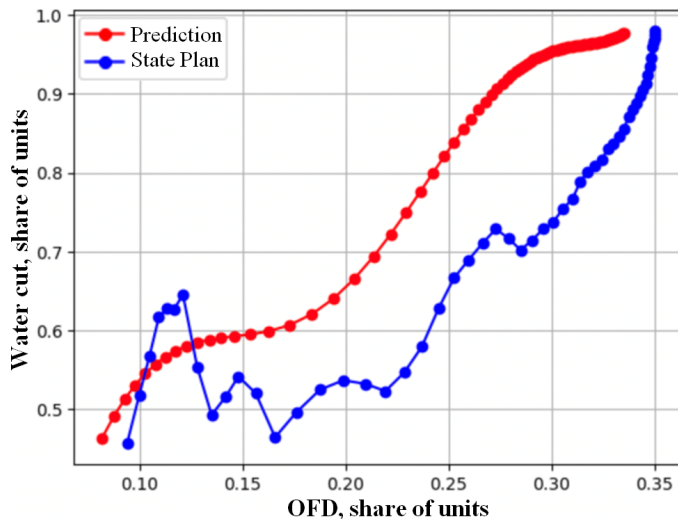


Figure 8. Dependence of water cut on ORF

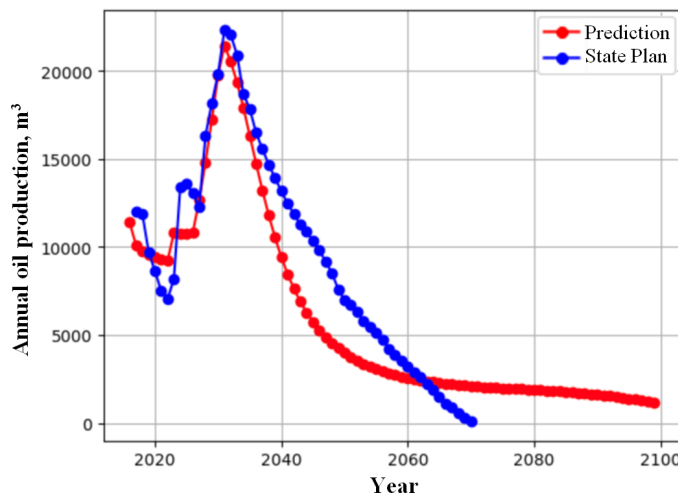


Figure 9. Dynamics of annual oil production

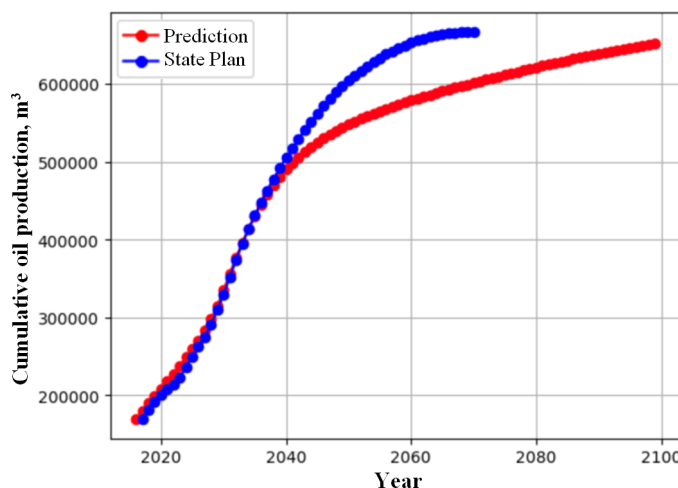


Figure 10. Dynamics of cumulative oil production

comparison of the calculated parameters, graphs of the dependence, reflecting the forecast made using the material balance method, as well as the forecast based on data from the state plan, are presented in Figs. 8, 9 and 10.

The difference in the behavior of the curves shown in the graphs can be explained by the inaccuracy of the parameters describing the reservoir, such as  $c_f$ ,  $m$ , and by the inaccurate determination of the initial recoverable reserves. This is also influenced by the difference in depression on the reservoir for injection and production wells proposed in the state plan and in the forecast.

Of course, the inaccuracy of the injectivity and productivity coefficients of wells, selected on the basis of the calculated volumes of water injection and oil production, respectively, also has an impact. It is also worth noting that in the TDP the various geological and technical measures, including repair and insulation work, which also affect the achievement of the final ORF and the dynamics of annual and cumulative oil production, are provided. According to the author's calculation, performed with the help of the material balance method, when adapting the model from 1987 to 2017, these events have not been taken into account. Therefore the ORF achieved in the calculation (0,335 with a water cut of 98%) is representative for the development of the deposit using the existing development system with the introduction of design wells.

### 5. Conclusion

The analysis of current development indicators has shown uneven development of reserves of the Tournaisian oil deposit, as well as a positive effect of injection on the process of fluid displacement from the formation.

In this research a material balance model has been constructed and adapted to the forecast date. As a result, the average error in the adapted parameters is 3,7

To make a forecast for the development of the Tournaisian oil deposit, a dependence of the water cut of well production on the ORF has been constructed basing on the core material. Having investigated the obtained dependence, one can conclude that water cut of 98% is achieved at ORF equals to 0,335.

Based on the obtained dependence of the reservoir flooding dynamics on the ORF, a forecast of the technological development indicators has been made. This forecast includes the calculation of the dynamics of annual and cumulative oil production, and reservoir pressure. As a result of the calculation, the accumulated oil production has amounted to 649 thousand cubic meters with a water cut of 98%. The forecast data do not take into account various geological and technical measures aimed at eliminating water breakthroughs, as well as leveling the inflow profile, in connection with which the recovery factor obtained in the author's calculation is somewhat less than the recovery factor presented in the state plan. Nevertheless, this calculation is representative for the development of a deposit using an established system with the introduction of design wells.



## References

- [1] Géron Au. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and Tensor-Flow. O'Reilly Media, Inc., 2017. 572 p.
- [2] Fetisov A.E., Khatmullina R.S. Research of numerical indicators for the development of the Asselskaya area of Orenburg oil and gas condensate field using the material balance method. *Multiphase Systems*. 19 (2024) 1. 1–6.  
DOI: [10.21662/mfs2024.1.001](https://doi.org/10.21662/mfs2024.1.001)
- [3] Kharisov M.N., Karpov A.A., Petrov S.V., Darii S.D. [Algorithm for the Determination of Displacement Characteristics] *Algoritm opredeleniya optimal'nykh kharakteristik vytesneniya*. Neftyanoe khozyaistvo – Oil Industry. 2018. No. 5. Pp. 56–59 (in Russian).  
EDN: XNSWVV
- [4] Garifullin A.Sh., Kurmakaeva S.A., Rodin V.I. The Use of Empirical Dependences in the Design of the Krasnokholm Group Field Development. *Collection of Scientific Papers: Problems of Geology and Development of Oil Fields in Areas with Dwindling Resources*. Ufa, BashNIP-Ineft' Publ. 1989. Pp. 81–86 (in Russian).
- [5] Schilthuis R.J. Active Oil and Reservoir Energy. *Transactions of the AIME*. 118 (1936) 01. 33–52.  
DOI: [10.2118/936033-G](https://doi.org/10.2118/936033-G)
- [6] Zakirov R.Kh. Role of geological-hydrodynamic modelling at designing of oil field development // *Georesources*. 32 (2009) 4. Pp. 34–36 (in Russian).  
EDN: kxykgl
- [7] Muskat M. *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*. McGraw-Hill Book Company, 1937. 763 p.
- [8] Peaceman D.W. *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977. 176 p.
- [9] Mohaghegh S. *Data-Driven Reservoir Modeling: A New Paradigm in Reservoir Management*. Society of Petroleum Engineers, 1945. 166 p.
- [10] Arps J.J. Analysis of Decline Curves. *Transactions of the AIME*. 160 (1945) 01. Pp. 228–247.  
DOI: [10.2118/945228-G](https://doi.org/10.2118/945228-G)
- [11] Technological project for the development of ONGCM. LLC VolgoUral-NIPigaz, 2012 (in Russian).
- [12] Lutz M. *Learning Python*, 4th edition. O'Reilly Media, Inc., 2009. 1213 p.
- [13] Nocedal J., Wright St.J. *Numerical Optimization*, 2nd edition. USA: Springer, 2006. 684 p.
- [14] Fanci J.R., Christiansen R.L. *Introduction to oil production technology*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009. 290 p.
- [15] Mishchenko I.T. *Calculations in oil and gas production*. Moscow: Neft' i gaz. 2008. 296 p. (in Russian).
- [16] Corey A.T. The Interrelation between Gas and Oil Relative Permeability. *Producers Monthly*. 19 (1954) 1. 38–41.
- [17] Gu Sh., Liu Yu., Chen Zh., Ma C. A method for evaluation of water flooding performance in fractured reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 120 (2014). 130–140.  
DOI: [10.1016/j.petrol.2014.06.002](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2014.06.002)
- [18] Dake L.P. *Fundamentals of reservoir engineering*. Amsterdam: Elsevier, 2003. 496 p.

## Information about the Authors

### Andrey E. Fetisov

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

[andreyfetisov200026@mail.ru](mailto:andreyfetisov200026@mail.ru)

ORCID: [0009-0004-4659-3902](https://orcid.org/0009-0004-4659-3902)

### Svetlana Zagirovna Anokhina

Ph.D. (Philological)

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

[Globusextern@yandex.ru](mailto:Globusextern@yandex.ru)

ORCID: [0000-0002-7436-120X](https://orcid.org/0000-0002-7436-120X)



## Синтез конструкции инспекционного модульного робота

Н.О. Круглов<sup>1,2</sup>, Д.Р. Богданов<sup>1</sup>✉, И.Ш. Насибуллаев<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

<sup>2</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

<sup>3</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: [dr\\_bog@mail.ru](mailto:dr_bog@mail.ru)

В работе представлена методика проектирования компьютерных моделей мобильных роботов предлагаемой конструкции, а также показаны результаты компьютерных симуляций с использованием алгоритмов по определению траектории движения. Методика включает в себя создание конструкции модульного робота с использованием системы проектирования Solidworks, его компьютерной модели в пакете программирования ROS и проведение симуляции поведения полученной модели в среде Gazebo. Разработан алгоритм перемещения модульного колесного робота, состоящего из модулей с подвижной колесной парой. Преимуществом предлагаемой реализации конструкции модулей по сравнению с модулями с фиксированной колесной парой является то, что ведомые модули приобретают возможность точного повторения траектории ведущего модуля. Следствием чего являются повышение проходимости при движении робота на плоскости с обходом препятствий и увеличение точности выполнения работы («сканирование» поверхности, ремонт, очистка и т.д.) при его использовании в качестве трубного инспекционного робота. Результаты компьютерной симуляции показали, что поведение полученной модели робота соответствует вычислительным экспериментам, проведенным на базе ранее разработанных математических моделей. В статье раскрыты все этапы методики в применении к разработке компьютерной модели колесного модульного мобильного робота. В ходе проведенных симуляций было подтверждено, что наличие поворотных колесных пар в модулях робота действительно позволяет исключить отклонения траекторий ведомых модулей от траектории ведущего модуля. С учетом полученных результатов построен макет трехзвенного колесного робота на базе модулей с подвижной колесной парой. Для проверки работоспособности собранного макета и корректности установки приводов собрана управляющая схема на базе отладочной платы STM32F407 Discovery и драйверов шагового двигателя. Показаны возможности применения методики для проведения компьютерных экспериментов по исследованию кинематики и динамики перспективных конструкций модульных роботов в рабочих пространствах со сложной топологией, например, в трубопроводах.

**Ключевые слова:** мобильный модульный колесный робот, математическая и компьютерная модель, прототип робота, ROS, Gazebo

Работа выполнена в рамках государственного задания № 123020700078-8 (FMRS-2023-0016).

## Synthesis of an inspection modular robot's design

N.O. Kruglov<sup>1,2</sup>, D.R. Bogdanov<sup>1</sup>✉, I.Sh. Nasibullayev<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

<sup>2</sup> Ufa State Oil Technical University, Ufa

<sup>3</sup> Ufa University of Science and Technology, Ufa

E-mail: [dr\\_bog@mail.ru](mailto:dr_bog@mail.ru)

The paper presents a methodology for designing computer models of mobile robots, and also shows the results of computer simulations using mathematical algorithms to determine the trajectory of the robot. The methodology includes creating a modular robot design using the Solidworks design system, creating its computer model in the ROS programming software, and simulating the behavior of the model in the Gazebo simulation environment. An algorithm for moving a modular wheeled robot consisting of modules with a movable wheel pair has been developed. The advantage of this algorithm compared to the previous one (with modules with a fixed wheel pair) is that the slave modules follow strictly along the trajectory of the leading module. This increases the cross-country ability when the robot moves on a plane bypassing obstacles and increases the accuracy of work (scanning, repair, cleaning, etc.) in the configuration of a pipe inspection robot. The simulation results showed that the behavior of the robot model corresponds to computational experiments conducted on the basis of previously developed mathematical models. The technique was applied to the development of a computer model of a

wheeled modular mobile robot. During the simulations, it was found that the presence of movable wheel pairs in the robot modules allows eliminating deviations in the trajectories of slave modules from the trajectory of the leading module. Taking this into account, a model of a three-link wheeled robot was built based on modules with a movable wheel pair. To check the operability of the assembled model and the correctness of the drive installation, a control circuit was assembled based on the STM32F407 Discovery debug board and stepper motor drivers. The resulting technique can be used to conduct computer experiments to study the kinematics and dynamics of the developed designs of modular robots in workspaces with a complex topology, for example, in pipelines.

**Keywords:** mobile modular wheeled robot, mathematical and computer model, robot prototype, ROS, Gazebo

## 1. Введение

Большая часть материальных ресурсов и энергоносителей для современного производства доставляется или распределяется внутри предприятий посредством развитой системой трубопроводов, конструкция которых и используемые материалы зависят от типа транспортируемых продуктов: воздух, вода, газ, нефтепродукты, отходы производства и т.д. Многие технологии имеют критическую зависимость от поставок энергоносителей, поэтому поддержание работоспособности трубопроводов (а именно, постоянный оперативный контроль, периодическая диагностика, предупреждение аварийных ситуаций) является актуальной задачей, реализация которой большинством эксплуатантов (м.б. субъектов, осуществляющих эксплуатацию) видится в использовании специализированных роботов и робототехнических комплексов (РТК). От магистральных нефтегазопроводов системы жилищных и производственных трубопроводов отличаются более сложной топологией, большим разнообразием материалов и типоразмеров используемых труб, что ведет к необходимости разработки специфических РТК, эксплуатационные характеристики которых должны удовлетворять следующим требованиям:

- сохранение возможности эффективной работы в широком диапазоне размеров труб;
- высокая толерантность к материалу трубопроводов;
- высокая адаптивность к форме внутреннего пространства трубопровода и наличию препятствий;
- достаточно высокая скорость перемещения (учитывая протяженность трубопроводов) и т.д.

Существующие в настоящее время инспекционные роботы [1] имеют ряд особенностей и ограничений:

1. Магистральные роботы используются в нефтепроводах и ориентированы на трубы фиксированного диаметра с малой кривизной [2].
2. Инспекционные роботы используются на заводах с трубопроводами со сложной топологией. Также роботы состоят из последовательно связанных активных (обеспечивающих движение модуля с помощью прижимающихся к стенке трубы радиально расположенных колес) и пассивных (для проведения сканирования, ремонта, очистки и т.п. стенки

трубы) модулей [3], могут переходить в ответвления трубы и двигаться в трубах с небольшим изменением диаметра. Если ответвление имеет значительно меньший диаметр, чем основная труба, то робот не сможет в нее перейти.

3. За счет специальной распорной конструкции модульные роботы для муниципальных трубопроводов могут работать в более широком диапазоне диаметров труб. Например, в [4] дано описание робота, состоящего из активных и пассивных модулей, который может перемещаться в трубах с  $\varnothing 130 \div 200$  мм, а в работе [5] представлен робот, состоящий из двух модулей, перемещающийся в трубах с  $\varnothing 300 \div 500$  мм со скоростью до 18 см/с, что меньше, чем у колесных роботов классической компоновки;
4. Змееподобные роботы состоят из нескольких модулей и двигаются с помощью последовательности изменений конфигурации, что ограничивает их скорость перемещения. В работе [6] представлен робот, способный перемещаться по внутренней или внешней поверхности трубы с  $\varnothing 7.5 \div 30$  см со скоростью до 2 см/с.
5. Магнитные роботы удерживаются на поверхности трубы с помощью магнитов и, по сравнению с модульными роботами, могут перемещаться по системе труб с более широким диапазоном диаметров. В работе [7] представлен робот для перемещения в металлических трубопроводах с  $\varnothing 5 \div 125$  см. Применение таких роботов в коммунальных трубопроводах, изготовленных в большей степени из немагнитных материалов, сильно ограничено.
6. Колесные роботы могут развивать скорость, достаточную для перемещения по протяженным трубопроводам, но имеют ограниченную проходимость, связанную с дефектами поверхности и препятствиями.
7. По сравнению с колесными роботами гусеничные роботы имеют более высокую проходимость, но меньшую скорость перемещения при значительном расходе энергии. Кроме того, высокая сила трения гусениц при контакте с поверхностью трубы может ее повредить.

Для преодоления этих ограничений авторами работы была предложена новая конструкция модульного колесного робота (МКР), который перемещается по внутренней поверхности трубы по траектории винтовой линии [8]. Для создания этого робота необходимо разработать динамические модели, учитывающие возможность реконфигурации (изменения взаимного положения) модулей.

В.Е. Павловским [9] была предложена двумерная динамическая модель модульного колесного робота в виде системы дифференциальных уравнений связей, допускающих два частных решения: движение по прямой и по окружности. В следующей работе [10] получены аналитические решения с использованием специальных функций (интегралы Френеля) для движения робота по траекториям (прямая, окружность, спираль) и определены моменты, которые необходимо приложить к колесам модулей для реализации движения по заданным траекториям.

В работе [11] построена математическая модель динамики модульного робота (один или два жестко связанных активных или пассивных модуля) в трубе круглого сечения на базе уравнений Эйлера–Лагранжа, а также проведена ее экспериментальная проверка. Были определены параметры, влияющие на движение (силы трения качения и скольжения; момент инерции робота), и параметры самого движения (время остановки робота, ширина зоны застоя, скорость движения, ускорение, период и количество колебаний, амплитуда колебаний). Аналитические и численные результаты находятся в хорошем согласии с результатами экспериментов.

Трехмерная компьютерная модель конфигурации модулей робота вне и внутри трубы представлена в работе [8] в виде базовых шаблонов траекторий перемещения (по плоскости, окружности, винтовой линии, вдоль трубы) и их комбинаций (переход робота с одной конфигурации, соответствующей некоторому шаблону, на другую). В рассмотренных работах было показано, что ведомые модули отклоняются от траектории движения ведущего модуля в зависимости от выбранного шаблона движения (аналогичная особенность присутствует и в макросистемах, например, при движении автопоезда [12]).

Использование специальных функций в аналитических решениях при движении по шаблонам траекторий и численное решение системы дифференциальных уравнений при движении по произвольной траектории требуют больших вычислительных ресурсов, что затрудняет использование моделей в системе управления роботом. В работе [13] представлены быстросчетные алгоритмы расчета траекторий перемещения модулей мобильного модульного колесного робота на плоскости.

Для визуализации результатов моделирования и для исследования динамического поведения робота с учетом окружающей среды используются различные специализированные программные продукты, называемые робототехническими симуляторами. Среди существующих программ симуляции можно выделить как проприетарное ПО (RoboDK [14], CoppeliaSim [15],

RoboLogix [16] — для моделирования промышленных роботов), так и свободное ПО (SimSpark [17] — моделирование взаимодействия многоагентных систем, Webots [18] и Gazebo [19]).

Главной задачей большинства робототехнических симуляторов являются непосредственно расчет и симуляция взаимодействия компонентов робота между собой и с окружающей средой, что ограничивает их возможности по проектированию функциональных компонентов роботов и их управляющих систем некоторым набором готовых решений. По этой причине в настоящее время разработка новых модельных решений в области робототехники проводится на базе специализированной операционной системы по разработке роботов — Robotics Operation System, ROS [20]. Данный программный продукт предоставляет пользователю набор базовых функций и алгоритмов для создания новых моделей роботов в виде взаимосвязи отдельных узлов графа и поддерживается наиболее популярными на данный момент робототехническими симуляторами (CoppeliaSim, Webots, Gazebo). Разработанную цифровую модель робота можно привязать к его физическому прототипу (с использованием его контроллеров, приводов, датчиков и т.д.), реализуя тем самым концепцию проектирования с использованием цифровых двойников. Создание модели робота в симуляторе с использованием ROS заключается в разработке проекта, включающего в себя файлы геометрии составных частей робота (форматы STL, Collada, OBJ) и файлы с информацией об элементах робота в формате URDF (Unified Robot Description Format). Формат URDF — это унифицированный формат описания робота, содержащий информацию по связям между элементами (жесткое соединение, контакт, шарнир и т.д.) и свойства самих элементов (координаты элемента, ориентация, масса, тензор момента инерции). Стандартные средства ROS позволяют создавать простую геометрию, основанную на примитивах (параллелепипед, цилиндр, сфера), которая прописывается вручную в виде URDF файла.

Однако для создания более сложной геометрии робота используют сторонние программы, такие как программа трехмерной графики Blender или различные САПР (Salome Meca [21], FreeCAD [22], Solidworks [23]). При помощи Blender [24] можно создать модель конструкции робота путем соединения ее компонентов при помощи шарниров, а встроенный язык программирования Blender Python API позволяет программировать цифровой двойник робота, считывать его кинематику и управлять через USB реальным роботом (пример моделирования и управления рукой–манипулятором показан в [25]). Преимуществом использования САПР при разработке модели робота, помимо создания сложной геометрии, является возможность автоматического расчета массы и тензора момента инерции его компонентов, которые необходимы при симуляции модели.

В настоящей работе показаны результаты выполнения первых этапов проекта по разработке инспекционного РТК, удовлетворяющего большинству предъявляе-

мых к ним требований. По результатам проведенного анализа известных конструкторских и технологических решений в качестве базового варианта разработки был выбран класс змееподобных роботов (мобильных модульных роботов) как обладающий высоким потенциалом обслуживания трубопроводов в широком диапазоне диаметров. На практике реализуются два варианта перемещения таких роботов внутри трубы: во-первых, за счет изменения взаимного положения звеньев робота с опорой на стенки (бесколесные роботы) [26, 27] во-вторых, за счет качения (колесные роботы) [28]. Немаловажным фактором в пользу сделанного выбора является то, что модульные РТК обладают свойством реконфигурироваться, что позволяет им легко адаптироваться в соответствии с изменениями внешней среды, окружающей обстановки или специфическими конструктивными требованиями для выполнения заданной функции. Реконфигурируемость роботов реализуется за счет следующих конструктивных решений:

- использование универсальных соединительных механизмов, силовых и информационных интерфейсов [28] (конфигурация модулей меняется за счет изменения соединений модулей друг относительно друга);
- применение многостепенных сочленений между модулями [29, 30] (конфигурация меняется за счет изменения взаимного положения модулей в сочленениях).

В статье показаны базовые подходы проектирования инспекционного мобильного робота, основные конструктивные решения, позволяющие реализовать принципы модульности и реконфигурируемости, в комплексе с моделями и алгоритмами управления.

## 2. Постановка задачи

Для удовлетворения требований, предъявляемых к инспекционным РТК, необходимо выполнить комплекс работ, который включает в себя разработку конструкции модуля робота, синтез универсальных механических и информационных интерфейсов между модулями, а также разработку алгоритмов формирования взаимного расположения модулей (конфигураций робота). Выбор конфигурации робота зависит от ряда факторов: типа участка трубы, выбранного способа перемещения (змеевидное, качение, шагание), выполняемой операции и пр. Так, для одного и того же участка трубы может потребоваться как движение робота с наиболее высокой скоростью, которая достигается при качении модулей (например, в виде спирали с опорой на стенки трубы), так и медленное перемещение за счет использования змееподобного движения с одновременным изменением конфигурации части робота (например, при сужениях трубы по ходу движения, наличии ответвлений или препятствий в трубе), т.е. реконфигурация робота должна быть динамической.

С учетом вышеизложенного был сформирован набор основных требований к конструкции и системе управления разрабатываемого РТК, часть из которых была ранее рассмотрена в работах [8, 11, 13], и определены задачи, которые необходимо решить, чтобы эти требования удовлетворить:

- разработка конструкции с возможностью наращивания количества модулей и обеспечивающей достаточную подвижность их друг относительно друга для перемещения по заданной траектории в трубопроводе и формирования необходимых конфигураций;
- обеспечение возможности жесткой фиксации модулей друг относительно друга при формировании статичной конфигурации части робота (например, для преодоления препятствий, перемещения в ответвлениях и т.д.);
- определение и разработка шаблонов движения робота для различных участков трубопровода и типов движения;
- формирование для каждого шаблона (по необходимости) своей конфигурации робота и алгоритма движения;
- обеспечение высокой скорости динамической реконфигурации во время движения в случае, когда робот одновременно реализует несколько разных шаблонов движения.

При проведении исследования необходимо использовать технологии цифровых двойников, что позволит сократить время разработки опытного образца, а разработка достоверной и адекватной модели трубопровода как рабочей среды предоставит возможность отладки алгоритмов управления уже на этапе компьютерного моделирования конструкции.

## 3. Математическая модель

На рис. 1 показаны геометрия робота и траектория движения первого модуля. Используется декартова система координат: начало системы координат  $O$  соответствует положению геометрического центра (ГЦ) первого модуля при переходе с прямолинейной траектории  $L_1$  на круговую  $L_c$ ; ось  $Ox$  направлена вдоль движения на первом участке траектории  $L_1$ , а ось  $Oy$  — перпендикулярно, образуя правую систему координат.

В модели рассматривается движение робота, состоящего из  $n$  последовательно соединенных шаровыми шарнирами модулей, с координатами ГЦ модулей  $(x_{j,i}, y_{j,i})$ , где  $j = 1, \dots, n$ , а  $i$  — номер шага по времени. Первый (ведущий) модуль движется по заданной траектории, состоящей из трех частей: прямолинейной с длиной  $L_1$ ; дуги окружности с длиной  $L_c = R\alpha$ , где  $R$  — радиус окружности и  $\alpha$  — центральный угол; прямолинейной с длиной  $L_2$ . Номер шага по времени, соответствующего началу движения по этим частям траектории,

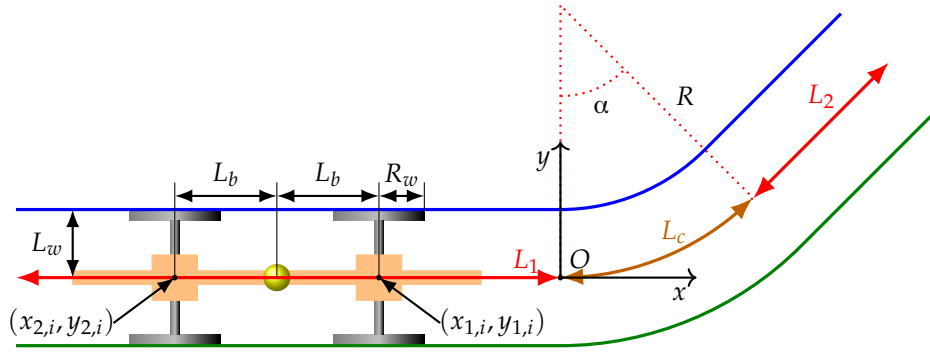


Рис. 1. Геометрия робота и траектория движения ведущего модуля

обозначим  $i_1, i_2$  и  $i_3$ . Геометрические размеры модулей определяются расстоянием от ГЦ до центра шарнира  $L_b$  (вынос шарнира относительно ГЦ), расстоянием от ГЦ до крайней точки колеса  $L_w$  ( $2L_w$  — расстояние между колесами) и радиусом колес  $R_w$ .

Сначала перемещаем  $j$ -й модуль на величину  $\lambda L_{j,i}$ , где  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Новое положение ГЦ  $j$ -го модуля определяется координатами:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j,i} &= x_{j,i-1} + \lambda L_{j,i} \cos \beta_{j,i-1}, \\ \tilde{y}_{j,i} &= y_{j,i-1} + \lambda L_{j,i} \sin \beta_{j,i-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= \Delta x_{j,i} \cos \beta_{j,i} + \Delta y_{j,i} \sin \beta_{j,i} - \\ &- \left\{ L_b^2 + \Delta x_{j,i} \Delta y_{j,i} \sin(2\beta_{j,i}) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta x_{j,i}^2 - \Delta y_{j,i}^2) \cos(2\beta_{j,i}) - \\ &\left. - \frac{1}{2} (\Delta x_{j,i}^2 + \Delta y_{j,i}^2) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Затем поворачиваем модуль по формуле

$$\beta_{j,i} = \arctan \left( \frac{y_{j,i-1} - \tilde{y}_{j,i} - L_b \sin \beta_{j,i-1}}{x_{j,i-1} - \tilde{x}_{j,i} - L_b \cos \beta_{j,i-1}} \right).$$

Для восстановления сцепления в шарнире с предыдущим модулем перемещаем  $j$ -й модуль на расстояние

$\tilde{L}_{j,i}$ , определяемое из теоремы Пифагора (рис. 2):

$$\tilde{L}_{j,i} = \sqrt{\Delta \tilde{x}_{j,i}^2 + \Delta \tilde{y}_{j,i}^2} - L_b,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}_{j,i} &= x_{j-1,i} - L_b \cos \beta_{j-1,i} - \tilde{x}_{j,i}, \\ \Delta \tilde{y}_{j,i} &= y_{j-1,i} - L_b \sin \beta_{j-1,i} - \tilde{y}_{j,i}. \end{aligned}$$

При движении по криволинейной траектории траектории ведомых модулей и ведущего будут отличаться друг от друга (рис. 3). Для того чтобы траектории совпали, необходимо внести конструктивные изменения — колесная пара должна иметь дополнительную степень свободы (поворот в плоскости движения робота относительно вертикальной оси).

Приведем описание алгоритма нахождения положения модулей с подвижной колесной парой, где ведомые модули точно повторяют траекторию движения ведущего модуля (рис. 4).

Пусть траектория движения ГЦ ведущего модуля задана в параметрическом виде:

$$x_0 = x(t), \quad y_0 = y(t),$$

где  $t$  — время.

Дополнительно введем угол между продольной осью модуля и горизонтальной осью  $\alpha_0$ . Тогда положение шарового шарнира с выносом  $L_b$  будет

$$x_b = x_0 - L_b \cos \alpha_0, \quad y_b = y_0 - L_b \sin \alpha_0. \quad (1)$$

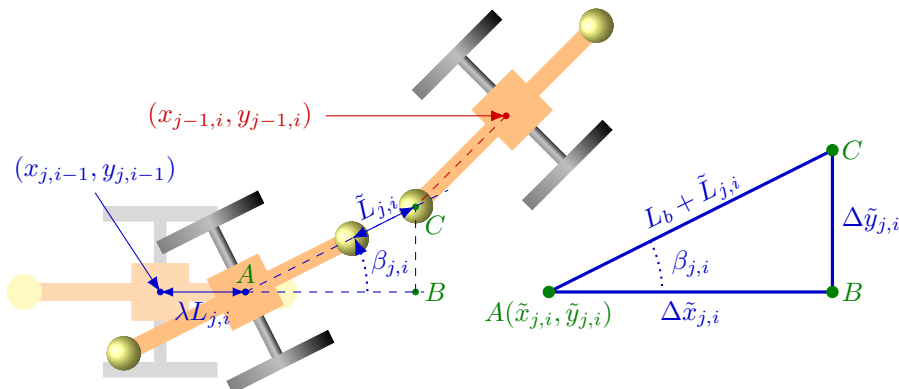


Рис. 2. Схема алгоритма перемещения ведомого модуля с фиксированной колесной парой

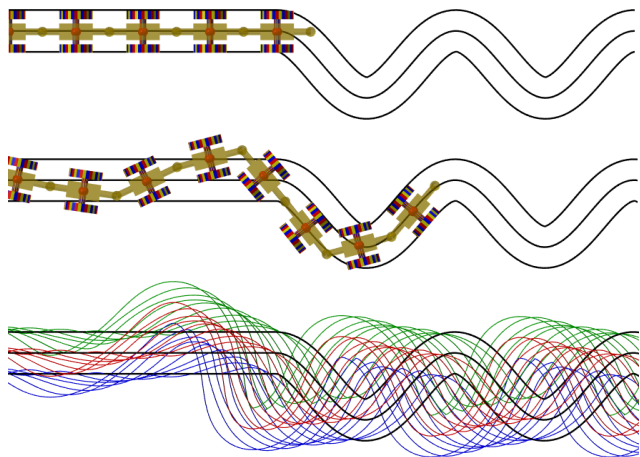


Рис. 3. Начальное (сверху) и промежуточное (в середине) положение модулей. Траектории движения ведущего модуля (черные линии) и ведомых модулей (цветные линии) для робота, состоящего их 10 модулей (внизу)

Положение ведомого модуля определяется как пересечение окружности радиуса  $L$  с центром, заданным согласно (1), и параметрически заданной кривой

$$x_i = x(t_i), \quad y_i = y(t_i),$$

где параметр  $t_i$  неизвестен и определяется из уравнения окружности:

$$(x_0 - L_b \cos \alpha_0 - x_i(t_i))^2 + (y_0 - L_b \sin \alpha_0 - y_i(t_i))^2 = L_b^2.$$

Угол поворота продольной оси ведомого модуля определяется как

$$\alpha_i = \arctan \left( \frac{y_0 - L_b \sin \alpha_0 - y_i(t)}{x_0 - L_b \cos \alpha_0 - x_i(t)} \right)_{t=t_i}.$$

Угол поворота колесной пары ведомого модуля определяется кривизной поверхности:

$$\beta_i = \arctan \left( \frac{dy(t)}{dx(t)} \right)_{t=t_i}.$$

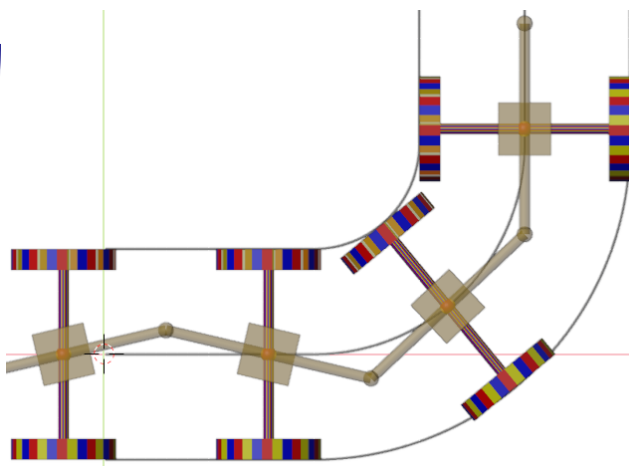
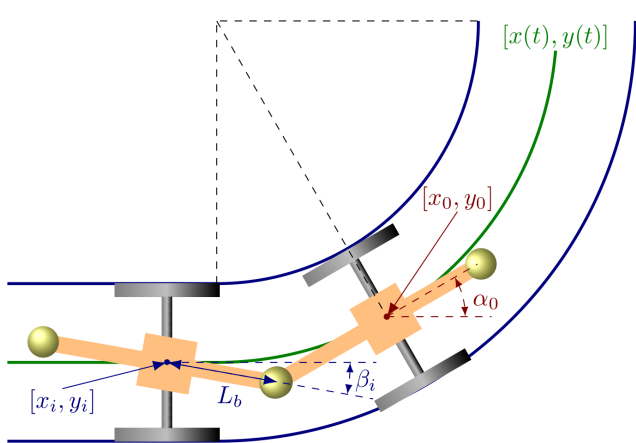


Рис. 4. Схема алгоритма перемещения ведомого модуля с подвижной колесной парой (слева) и результат компьютерного моделирования (справа)

Положения всех последующих модулей определяются по положению предыдущего модуля аналогичным образом. Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 4.

#### 4. Реализация конструкции

Исходя из результатов математического моделирования эскизного проекта модульного колесного робота (МКР) и с учетом необходимости обеспечить пространственную реконфигурацию робота во время его движения, была выбрана следующая компоновка робота: соединение между модулями выполняется с помощью трехосевого шарнира, а для устранения отклонений траекторий ведомых и ведущего модулей на криволинейных участках траектории используется поворот колесной пары. Верификация конструкторских решений и отладка элементов проводилась на рабочем макете робота, состоящего из 3-х модулей (рис. 5), компоненты которого были разработаны с помощью САПР Solidworks. Шарнир реализован как комбинация сферического подшипника скольжения и вращательного шарнира, при этом изменение положения модулей по двум координатам осуществляется четырьмя линейными сервоприводами (рис. 6(в)), а вращение выполняется шаговым двигателем с редуктором, находящимся внутри одного из сопряженных модулей (рис. 6(а)).

Перемещение робота осуществляется с помощью мотор-колес (МК) с интегрированными шаговыми двигателями (ШД) (рис. 6г), при изменении соотношения скоростей вращения или направления которых возможно получение любых траекторий. Поворот колесной пары (КП) осуществляется с помощью системы тяг, управляемых сервоприводом (рис. 6(б)). При этом оси поворота колес проходят через их геометрический центр, что позволяет повысить маневренность модуля и минимизировать его размеры.

Из разработанных компонентов конструкции робота, изготовленных на 3D принтере Form3 фирмы

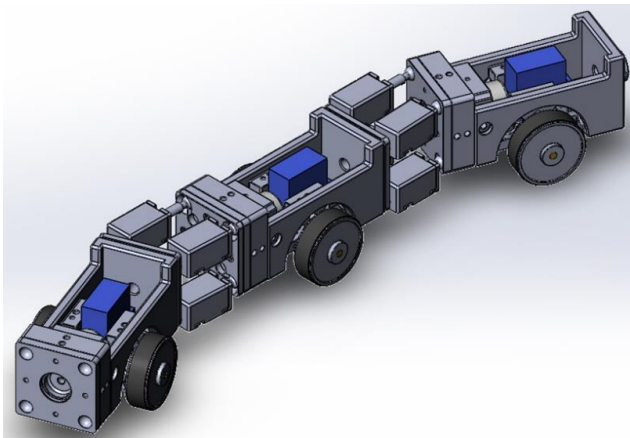


Рис. 5. САПР модель МКР

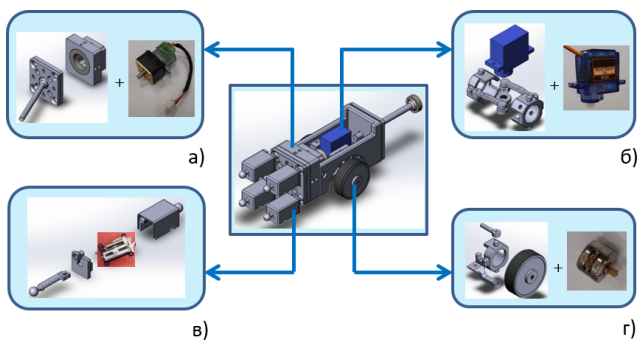


Рис. 6. Конструкция модуля робота и его составных частей: а) привод поворота вокруг оси  $Oy$ ; б) привод поворота осей колес; в) линейный привод; г) мотор-колесо



Рис. 7. Макетный образец трехсекционного МКР

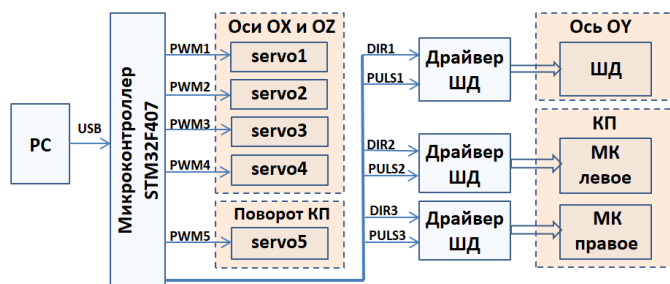


Рис. 8. Электрическая схема приводов одного модуля МКР

FormLabs, был собран макетный образец МКР, состоящий из 3-х модулей с установленными в них двигателями (рис. 7).

Для проверки работоспособности собранного макета и корректности установки приводов была собрана управляющая схема на базе отладочной платы STM32F407 Discovery и драйверов шагового двигателя (рис. 8). Расчет скоростей колес модулей и углов, задающих положение модулей друг относительно друга, осуществляется на уровне управляющего компьютера (PC). Результаты расчета в последующем используются для формирования необходимых управляющих воздействий для шаговых двигателей (сигналы DIR1-DIR3, PULS1-PULS3) и сервоприводов (сигналы PWM1-PWM5) с помощью микроконтроллера STM32F407.

Результаты экспериментов в виде перемещения модулей робота друг относительно друга в результате вращения в шарнире (соединяющем модули) относительно его осей  $Ox$ ,  $Oz$  с помощью линейных приводов и относительно оси  $Oy$  с помощью шагового двигателя показаны на рис. 9(а) и 9(б).

Дальнейшая модификация конструкции и получение требуемых динамических параметров требуют проведения верификации полученных моделей, создания модели окружающей среды и инкапсуляции цифровых двойников в систему управления.

### 5. Компьютерное моделирование

Изготовление реального робота, синтез архитектуры, алгоритмов системы управления и ее реализация, изготовление модели трубопровода для проведения полномасштабных натурных экспериментов являются многопараметрической и трудоемкой задачей. Поэтому параллельно с изготовлением прототипа робота и его математических моделей была поставлена задача по созданию его компьютерной модели, а также компьютерной модели окружающей среды, в которой можно провести полноценную симуляцию всех режимов его работы.

На первом этапе была создана упрощенная модель конструкции модульного колесного робота с использованием САПР Solidworks, отдельные компоненты которого показаны на рис. 10. Для упрощения модели конструкция поворота колес за счет системы тяг (как в конструкции макета МКР) была заменена поворотной платформой, на которой расположена ось колес. Пример сборки

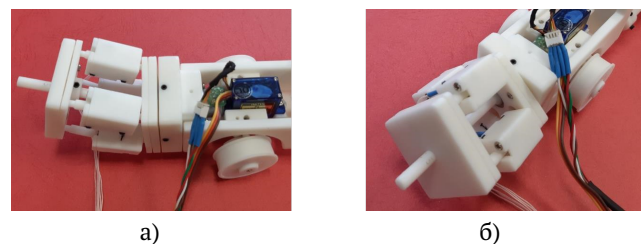


Рис. 9. Демонстрация работы макетного образца модуля МКР: а) работа линейных приводов для поворота модуля вокруг осей  $Ox$  и  $Oz$ ; б) работа привода для поворота модуля вокруг оси  $Oy$



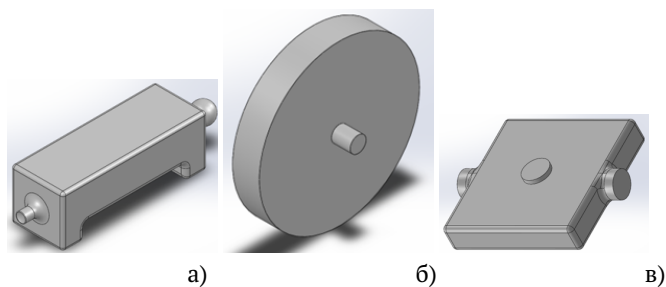


Рис. 10. Компоненты МКР: а) корпус; б) колесо; в) платформа подвижной колесной пары

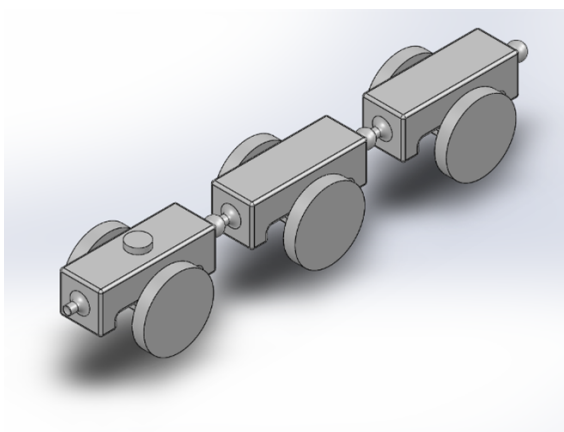


Рис. 11. Пример модели трехсекционного МКР

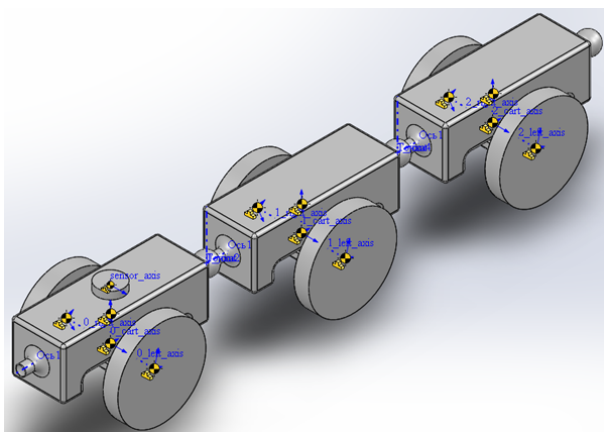


Рис. 12. Подготовленная к экспорту модель конструкции МКР

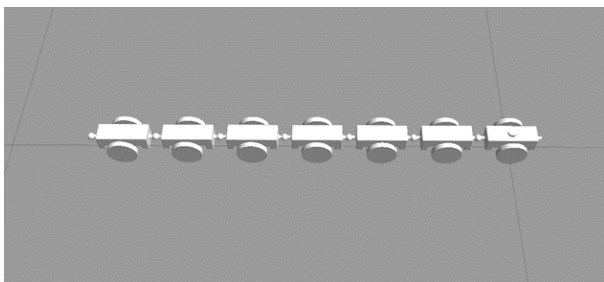


Рис. 13. Пример модели МКР в среде симулятора Gazebo

модульного мобильного робота, состоящего из трех секций, представлен на рис. 11.

Количество секций мобильного робота может варьироваться в зависимости от поставленной задачи. Для моделирования робота в виртуальной среде с использованием робототехнического симулятора требуется модель, основанная на поверхностных геометрических моделях, поскольку вычислительные алгоритмы симуляторов не позволяют работать с твердотельными моделями напрямую. Данная цель достигается с помощью специального инструмента, встроенного в функционал пакета Solidworks [31], который на базе информации о конструкции робота (масса, инерция, свойства кинематических связей) генерирует URDF-файл описания компьютерной модели робота для программной среды ROS. Перед применением экспортера необходимо провести предварительную подготовку экспортируемой модели в САПР. Для всех компонентов сборки указываются связанные с ними системы координат. За начало координат рекомендуется принять центр симметрии детали, точку на оси симметрии или центр масс. Для моделирования и расчета инерционных параметров сегментов (масса, координаты центра масс, а также тензор инерции) экспортер будет использовать данные о материалах деталей в САПР, заданные для деталей сборки [32]. На рис. 12 представлен пример модели, подготовленной к процедуре экспорта.

После выполнения процедуры экспорта получено URDF-описание робота, в котором отражаются кинематические связи между компонентами конструкции, а также параметры массы и инерции используемой модели для визуализации в среде симуляции и расчета физических взаимодействий для звеньев модели между собой. Для учета взаимодействия полученной модели с другими объектами в среде симуляции к описанию (при необходимости) вручную добавляются необходимые параметры, например, коэффициент трения.

Полученный в результате экспорта проект робота в ROS уже может быть загружен в среду симуляции (рис. 13). Модель семисекционного модульного мобильного робота, загруженная в среду симуляции Gazebo имеет следующую структуру:

```
<?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
<robot name="..."
  xmlns:xacro="http://www.ros.org/wiki/xacro">
  <link name="...">
    <inertial>
      ...
    </inertial>
    <visual>
      ...
    </visual>
    <collision>
      ...
    </collision>
  </link>
  <joint name="..." type="...">
    ...
    <parent link="..." />
    <child link="..." />
    ...
  </joint>
  ...
</robot>
```

```

</joint>
<gazebo reference="..._link">
  <sensor type="..." name="...">
    ...
  <ray>
    ...
  </ray>
  <plugin name="..." filename="...">
    <topicName>...</topicName>
    <frameName>..._link</frameName>
  </plugin>
</sensor>
</gazebo>
<gazebo>
  <plugin name="..." filename="...">
    ...
  </plugin>
</gazebo>
</robot>

```

Однако компьютерная модель робота на данном этапе является неполной, поскольку в ее описании отсутствуют данные о системе управления, приводах и сенсорах, а также описание условий (свойств) виртуальной среды симуляции.

Для обеспечения движения модели робота в его URDF-описание необходимо добавить контроллеры приводов, которые обеспечивают управление движением модулей робота в среде симуляции. На официальном сайте робототехнического симулятора Gazebo приведен список готовых контроллеров, подходящих для использования совместно с ROS, например, контроллеры дифференциального привода и гусеничного привода [33]. В этом случае в URDF-описание модели необходимо добавить элемент <gazebo> с описанием параметров подключаемого контроллера. В параметрах указываются имена шарниров, которыми управляет контроллер, динамические характеристики создаваемого привода и входной топик, через который осуществляется управление шарнирами робота. Характеристики робота для контроллера приводов могут быть заданы как непосредственно в URDF-описании (внутри элемента <gazebo>), так и переданы отдельно в виде файла конфигурации формата \*.yaml.

Существующий готовый драйвер ROS для Gazebo позволяет управлять только двумя шарнирами модели, образующими дифференциальный или гусеничный привод. Для разрабатываемой модели модульного мобильного робота данного функционала недостаточно, поскольку в проектируемой модели, помимо дифференциального привода колес, предполагается управление шарнирными соединениями между модулями для обеспечения реконфигурации робота при движении в пространстве со сложной топологией. Также предполагается управление подвижной платформой, на которой размещаются колеса модуля для исключения отклонений траекторий ведомых модулей робота от траектории ведущего модуля. Для реализации данных функций необходимо разработать собственный контроллер приводов на языках программирования Python или C++, который поддерживает ROS для создания пользовательских плагинов. В качестве объектов используются файлы с опи-

санием их поверхности в форматах STL, Collada и OBJ.

Для формирования команд управления приводами модели робота и обеспечения ее перемещения в среде симуляции в компьютерную модель необходимо добавить систему управления. Система управления может обеспечивать как прямое управления моделью робота, например, с клавиатуры, так и автономную навигацию в виртуальной среде на основе обработки информации с датчиков.

Для автоматического управления и навигации компьютерной модели ROS в среде симуляции Gazebo применяется готовый набор библиотек «move base» [34], включающий набор алгоритмов построения карты стоимостей и поиска путей в графе между целевой точкой и текущим положением робота. Принцип работы системы навигации ROS основывается на создании двух карт стоимостей (глобальной и локальной), в которых строятся оптимальные траектории перемещения к целевой точке при помощи алгоритмов поиска пути.

Для обеспечения системы управления необходимой информацией об окружающей среде для построения траектории в URDF-описание модели робота необходимо добавить датчики. В случае использования робототехнического симулятора Gazebo датчики можно выбрать на официальном сайте симулятора из списка готовых датчиков ROS [33], например, лазерный дальномер, гироскоп, бамперный датчик и др.

Для описания окружающей среды, в которой действует модель робота, в Gazebo используется файл формата \*.world. Данный файл представляет собой описание свойств симуляции (скорость симуляции, шаг симуляции, параметры окружающей среды, положение камеры для визуализации, положение источников света) и иерархическое описание объектов и поверхностей, выступающих в роли окружения робота в формате XML. В качестве объектов используются либо поверхности, либо модели в формате: \*.stl, \*.obj, \*.dae.

Мир Gazebo может быть создан следующими способами:

1. С использованием готовых моделей миров и объектов из официальной библиотеки Gazebo [35].
2. Вручную при помощи создания файла \*.SDF с использованием готовых моделей формата \*.STL. В этом случае необходимо самостоятельно разработать конфигурацию объектов в пространстве и указать их координаты в коде.

Поскольку формат описания мира Gazebo идентичен описанию модели робота URDF, то имеется возможность автоматизации процесса генерации мира путем экспорта конфигурации объектов в пространстве из САПР. В частности, для создания рабочего пространства рассматриваемой модели робота предполагается создание трубопроводов сложной топологии в среде Solidworks с использованием готовых моделей и их комбинаций. На рис. 14 представлен пример структуры трубопровода, созданного в САПР Solidworks и добавленного в среду симуляции Gazebo в формате \*.STL.

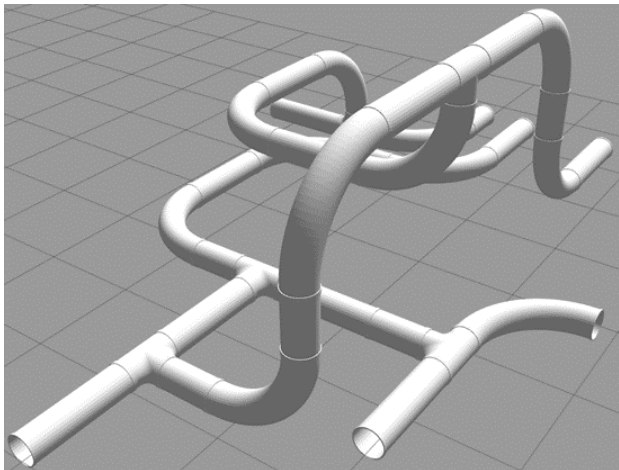


Рис. 14. Модель трубопровода сложной топологии в Gazebo

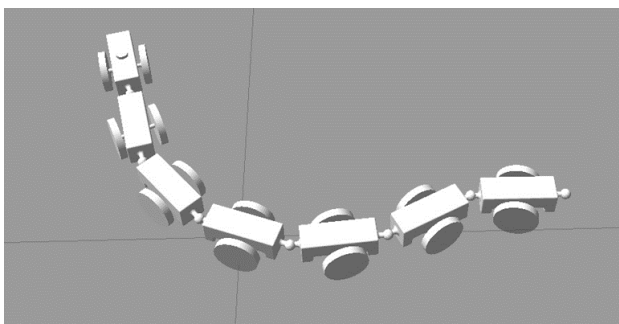


Рис. 15. Симуляция движения компьютерной модели семисекционного мобильного робота в Gazebo

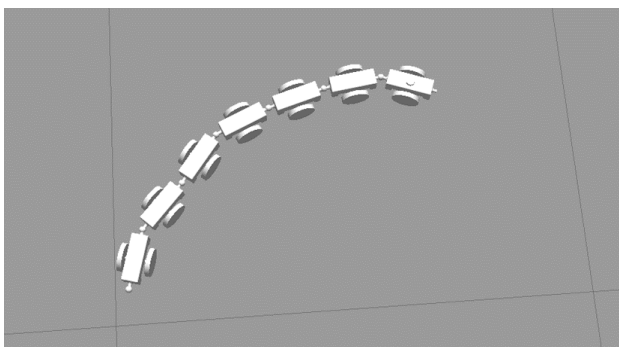


Рис. 16. Прохождение МКР с зафиксированными колесами по круговой траектории

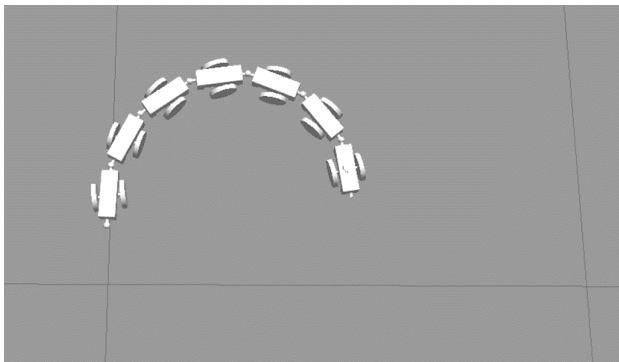


Рис. 17. Прохождение МКР с управляемыми колесами по круговой траектории

В рамках проведенной работы была создана компьютерная модель семисекционного модульного робота с прямым управлением дифференциальным приводом первого сегмента, реализующая движение на плоскости. На рис. 15 представлена симуляция движения полученной модели в среде симулятора Gazebo.

В разработанной модели шарнирные соединения сегментов имеют только одну вращательную степень свободы относительно вертикальной оси для обеспечения свободного поворота в горизонтальной плоскости. Для возможности параметризации числа секций робота код URDF-описания модели был дополнен XML-макросами.

Симуляция разработанной модели проводилась с двумя состояниями подвижной платформы с колесами: с зафиксированными колесами и управляемыми. В качестве цели симуляции было поставлено успешное прохождение робота по круговой траектории без отклонения сегментов от траектории.

На рис. 16 представлено прохождение робота по круговой траектории подвижной платформы с зафиксированными колесами, на рис. 17 — с подвижной платформой, положением колес которой можно управлять.

В ходе проведенных симуляций было установлено, что наличие подвижной платформы с колесами в модулях робота позволяет уменьшить колебания траектории модулей, начиная со второго, относительно траектории первого модуля. Аналогичные результаты были получены ранее при симуляции математической модели.

## 6. Заключение

В ходе выполненных работ были получены следующие результаты: разработан новый алгоритм перемещения модульного колесного робота, состоящего из модулей с подвижной колесной парой; разработана методика проектирования компьютерных моделей мобильных роботов; проведены компьютерные симуляции с использованием математических алгоритмов по определению траектории движения робота.

Предлагаемый подход к конструированию модульного робота позволил оценить работоспособность и адекватность технологических приемов, скорректировать базовые параметры, уточнить требования к приводам и управляющей бортовой системе. Решаемые задачи являются взаимосвязанными: полученные параметры конструкции служат исходными данными для разработки динамических моделей робота, которые, в свою очередь, необходимы в качестве базы для синтеза системы управления.

Использование технологий цифровых двойников и комплексного моделирования (когда объект и окружающая среда рассматриваются во всем комплексе взаимодействия) позволяют значительно сократить время разработки и удовлетворить противоречивые требования к конечному продукту разработки.

По окончании этапа моделирования и верификации моделей планируется продолжить работы в следующих направлениях: коррекция математических моделей с

учетом выбранной конструкции модуля робота; разработка полной динамической модели робота; синтез архитектуры системы управления с учетом ее физической реализации и новых подходов к реализации интерфейсов [36]; разработка информационной системы робота; экспериментальная проверка модернизированных математических моделей робота и создание натурального испытательного стенда с макетами трубопроводов произвольной топологии.

## Список литературы / References

- [1] Ogai H., Bhattacharya B. Pipe Inspection Robots for Structural Health and Condition Monitoring // *Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering*. 2018. V. 89. P. 213. DOI: 10.1007/978-81-322-3751-8
- [2] Li H., Li R. Zhang J., Zhang P. Development of a Pipeline Inspection Robot for the Standard Oil Pipeline of China National Petroleum Corporation // *Appl. Sci*. 2020. V. 10. P. 2853. DOI: 10.3390/app10082853
- [3] Tubot LLC, part of TechnoSpark and Sigma Group of Companies. Novosibirsk, Russia. <http://tubot.pro/>
- [4] Tatar O., Cirebea C., Alutei A. The Modular Robotic System for In-pipe Inspection / In: Pislă D., Ceccarelli M., Husty M., Corves B. (eds.) // *New Trends in Mechanism Science. Mechanisms and Machine Science*. 2010. V. 5. Pp. 583–591. DOI: 10.1007/978-90-481-9689-0\_67
- [5] Min J., Setiawan Y.D., Pratama P.S., Kim S.B., Kim H.K. Development and Controller Design of Wheeled Type Pipe Inspection Robot // *Proceedings of the 2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics*. 2014. Pp. 789–795. DOI: 10.1109/ICACCI.2014.6968543
- [6] Enner F., Rollinson D., Choset H. Motion estimation of snake robots in straight pipes // *Proceedings – IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2013. Pp. 5168–5173. DOI: 10.1109/ICRA.2013.6631316
- [7] Mills G.H., Liu J.H.W., Kaddouh B.Y. et al. Miniature Magnetic Robots For In-Pipe Locomotion / In: Montes H., Tokhi M.O., Virk G.S., Armada M., Rodriguez H., Fernandez R., Gonzalez de Santos P., Sanchez V. and Silva M. (eds.) // *Robotics Transforming the Future: Proceedings of CLAWAR 2018*. 2018. Pp. 289–300.
- [8] Nasibullayev I., Darintsev O., Bogdanov D. (2022) In-Pipe Modular Robot: Configuration, Displacement Principles, Standard Patterns and Modeling / In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds.) // *Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2022. V. 232. Pp. 85–96. DOI: 10.1007/978-981-16-2814-6\_8
- [9] Павловский В.Е., Петровская Н.В. Исследование динамики движения цепочки «Робопоезд». Уравнение движения, частные решения. М.: ИПМ, 2005. 31 с. Pavlovsky V.E., Petrovskaya N.V. Study of the dynamics of the "Robotrain" chain motion. Equations of motion, particular solutions. Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. 2005. 31 p. (in Russian).
- [10] Евграфов В.В., Павловский В.Е., Петровская Н.В. Исследование динамики движения цепочки «Робопоезд». Управляемое движение. М.: ИПМ, 2005. 31 с. Evgrafov V.V., Pavlovsky V.E., Petrovskaya N.V. Study of the dynamics of the movement of the chain "Robotrain". Controlled motion. Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics. 2005. 31 p. (in Russian).
- [11] Darintsev O.V., Nasibullayev I.S., Bogdanov D.R. Inspection of Pipelines of Complex Topology Using an Adaptive, Scalable Multi-segment Mobile Robot / In: Yuschenko A. (eds.) // *Modern Problems of Robotics. MPoR 2020. Communications in Computer and Information Science*. 2021. V. 1426. Pp. 137–150. DOI: 10.1007/978-3-030-88458-1\_11
- [12] Аюпов В.В. Исследование маневренных свойств автопоездов на основе системного подхода: монография. Пермь: Изд-во ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2012. 96 с. Ayupov V.V. Study of maneuvering properties of road trains based on a systems approach: monograph. Perm: Publishing house FGBOU VPO Perm State Agricultural Academy, 2012. 96 p. (in Russian).
- [13] Nasibullayev I., Darintsev O. Algorithms for Planning Trajectory of a Modular Wheeled In-Pipe Robot / In: Ronzhin A., Savage J., Meshcheryakov R. (eds.) // *Interactive Collaborative Robotics. ICR 2024. Lecture Notes in Computer Science*. 2024. V. 14898. Pp. 251–264. DOI: 10.1007/978-3-031-71360-6\_19
- [14] RoboDK homepage. <https://robotk.com/pricing> (дата обращения: 30.01.2025).
- [15] Rohmer E., Singh S, Freese M. V-REP: A versatile and scalable robot simulation framework // *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2013. Pp. 1321–1326. DOI: 10.1109/IROS.2013.6696520
- [16] RoboLogix homepage. <https://www.robologix.com/> (дата обращения: 30.01.2025).
- [17] SimSpark homepage. <robocup-sim.gitlab.io/SimSpark/index.html> (дата обращения: 30.01.2025).
- [18] Michel O. Webots: Professional Mobile Robot Simulation // *Journal of Advanced Robotics Systems*. 2004. V. 1, No. 1. Pp. 39–42. DOI: 10.5772/5618
- [19] Gazebo Sim homepage. <http://gazebosim.org/home> (дата обращения: 30.01.2025).
- [20] ROS – Robot Operating System homepage. <http://www.ros.org> (дата обращения: 30.01.2025).
- [21] Salome-Меса homepage. <https://code-aster.org/> (дата обращения: 30.01.2025).
- [22] FreeCAD homepage. <https://www.freecad.org/> (дата обращения: 30.01.2025).
- [23] Solidworks homepage. <https://www.solidworks.com/> (дата обращения: 30.01.2025).
- [24] Blender homepage. <https://www.blender.org/> (дата обращения: 30.01.2025).
- [25] Andrade A., Alvarez Cedillo J., Lozada J.H., Zarate I.R. Robotic Arm Control With Blender 1 // *Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences*. 2013. V. 4, No. 4. Pp. 382–386. .
- [26] Matsuno F. et al. Development of Tough Snake Robot Systems / In: Tadokoro S. (eds.) // *Disaster Robotics. Springer Tracts in Advanced Robotics*. 2019. V. 128. Pp. 267–326. DOI: 10.1007/978-3-030-05321-5\_6
- [27] Sawabe H., Nakajima M., Tanaka M., Tanaka K., Matsuno F. Control of an articulated wheeled mobile robot in pipes // *Advanced Robotics*. 2019. V. 33(20). Pp. 1072–1086. DOI: 10.1080/01691864.2019.1666737
- [28] Liu Ch., Whitzer M., Yim M. A Distributed Reconfiguration Planning Algorithm for Modular Robots // *IEEE Robotics and Automation Letters*. 2019. V. 4. Pp. 4231–4238. DOI: 10.1109/LRA.2019.2930432
- [29] Hauser S., Mutlu M., Léziart P.-A., Khodr H., Bernardino A., Ijspeert A.J. Roombots extended: Challenges in the next generation of self-reconfigurable modular robots and their application in adaptive and assistive furniture // *Robotics and Autonomous Systems*. 2020. V. 127. P. 103467. DOI: 10.1016/j.robot.2020.103467

- [30] Pftzter L., Ruehl S., Heppner G., Roennau A., Dillmann R. KAIRO 3: A modular reconfigurable robot for search and rescue field missions // IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO 2014), Bali, Indonesia. 2014. Pp. 205–210.  
DOI: 10.1109/ROBIO.2014.7090331
- [31] SolidWorks to URDF Exporter.  
[https://wiki.ros.org/sw\\_urdf\\_exporter](https://wiki.ros.org/sw_urdf_exporter)  
(дата обращения 30.01.2025).
- [32] Export a SolidWorks Assembly to URDF.  
[https://wiki.ros.org/sw\\_urdf\\_exporter/Tutorials/Export%20an%20Assembly](https://wiki.ros.org/sw_urdf_exporter/Tutorials/Export%20an%20Assembly)  
(дата обращения 30.01.2025).
- [33] Gazebo plugins in ROS.  
[https://classic.gazebosim.org/tutorials?tut=ros\\_gzplugins](https://classic.gazebosim.org/tutorials?tut=ros_gzplugins)  
(дата обращения 30.01.2025).
- [34] Библиотека move\_base.  
Library move\_base.  
[https://wiki.ros.org/move\\_base](https://wiki.ros.org/move_base)  
(дата обращения 30.01.2025).
- [35] Библиотека Gazebo Dashboard.  
Library Gazebo Dashboard.  
<https://app.gazebosim.org/dashboard>  
(дата обращения 30.01.2025).
- [36] Туровский Я.А., Харченко С.С., Мещеряков Р.В. и др. Алгоритмическое обеспечение интерфейса управления робот-человек при выделении зрительных вызванных потенциалов на основе многомерного индекса синхронизации // Известия ЮФУ. Технические науки. 2020. № 1(211). С. 66–78.  
Turovsky Y.A., Kharchenko S.S., Meshcheryakov R.V. et al. Algorithmic support of the interface of management of robot-human with the steady state visual evoked potentials based on the multivariate synchronization index // Izvestiya SFedU. Engineering Sciences. 2020. No. 1(211). Pp. 66–78 (in Russian)  
DOI: 10.18522/2311-3103-2020-1-66-78.

## Сведения об авторах / Information about the Authors

### Никита Олегович Круглов

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа  
Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

### Nikita Olegovich Kruglov

Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia//Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia  
[nikitakruglov0477@gmail.com](mailto:nikitakruglov0477@gmail.com)  
ORCID: 0009-0009-0438-0059

### Динар Рафаэльевич Богданов

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

### Dinar Rafaeljevich Bogdanov

Ufa Federal Research Centre of the RAS, Ufa, Russia  
[dr\\_bog@mail.ru](mailto:dr_bog@mail.ru)  
ORCID: 0000-0003-4481-7103

### Ильдар Шамилевич Насибуллаев

кандидат физ.-мат. наук  
Уфимский университет науки и технологий, Уфа

### Ildar Shamilevich Nasibullayev

Ph.D. (Phys. & Math.)  
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia  
[sp.ishn@gmail.com](mailto:sp.ishn@gmail.com)  
ORCID: 0000-0003-0084-5313



## Исследование вольтамперного временного ряда в случае испарения электролитов алюминиевой проволоки

Р.Д. Муртазина<sup>1</sup>✉, М.Д. Биткулов<sup>2</sup>, Э.Р. Шайхиев<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

<sup>3</sup> Нанкинский университет финансов и экономики, Нанкин, Китай

E-mail: [reginaufa@yandex.ru](mailto:reginaufa@yandex.ru)

Под динамической системой в общем смысле понимается математическая модель эволюции реальной системы, состояние которой в любой момент времени однозначно определяется ее начальным состоянием. Часто при исследовании динамических систем основным источником информации о поведении исследуемого объекта является набор значений наблюдаемой величины, сделанных в некоторые (последовательные) моменты времени, так называемый временной ряд. Одной из основных задач при анализе временных рядов является реконструкция динамической системы, породившей данный ряд. Так, например, для локально параметризованной поверхности с помощью евклидовых координат (многообразия) целой размерности Такенс реконструировал поведение исходной динамической системы. Целями настоящего исследования являются оценка размерности аттрактора классических динамических систем, описываемых уравнениями Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели, а также выявление значимых параметров системы перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия путем определения гладкости детерминированной модели вольтамперных временных рядов. Для оценки размерности аттрактора динамической системы применяется метод главных компонент, идея которого состоит в повороте осей координат в многомерном пространстве и выборе направлений, вдоль которых, в основном, развивается движение. Определены размерности аттрактора для уравнений Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели, которые равны двум, трем и двум соответственно. Определен индекс Херста вольтамперного временного ряда перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия, приблизительно равный 0.7. Следовательно, значения данного временного ряда сильно коррелируемы. Методом главных компонент также показано, что рассмотренный временной ряд описывается двумя компонентами.

**Ключевые слова:** модель Хенона, логистическая модель, модель Ван-дер-Поля, вольтамперный временной ряд, фазовый портрет, метод главных компонент

## Study of the volt-ampere time series in the case of evaporation of aluminum wire electrolytes

R.D. Murtazina<sup>1</sup>✉, M.D. Bitkulov<sup>2</sup>, E.R. Shaihiiev<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

<sup>3</sup> Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, China

E-mail: [reginaufa@yandex.ru](mailto:reginaufa@yandex.ru)

In the general sense, a dynamic system is a mathematical model of the evolution of a real system whose state at any given time is uniquely determined by its initial state. Often, when studying dynamic systems, the main source of information on the behavior of the object under study is a set of values of the observed quantity taken at certain (successive) points in time, the so-called time series. One of the main tasks in analyzing time series is to reconstruct the dynamic system that generated the series. For example, for a locally parameterized surface, Takens reconstructed the behavior of the original dynamic system using Euclidean coordinates (manifold) of integer dimension. The objectives of this study are to estimate the dimension of the attractor of classical dynamic systems described by the Van der Pol, Henon, and logistic model equations, as well as to identify significant parameters of the percolation sensor system during evaporation of aluminum electrolytes by determining the smoothness of the deterministic model of volt-ampere time series. To estimate the attractor dimension of the dynamic system, the principal component method is used, the idea of which is to rotate the coordinate axes in a multidimensional space and select the directions along which the motion mainly develops. The dimensions of the attractor for the Van der Pol, Henon and logistic model equations are determined, which are equal to two, three and two, respectively. The Hurst index of the volt-ampere time series of the percolation

sensor during evaporation of aluminum electrolytes is determined, approximately equal to 0.7. Consequently, the values of this time series are strongly correlated. The principal component method also shows that the considered time series is described by two components.

**Keywords:** Henon model, logistic model, Van der Pol model, current-voltage time series, phase portrait, principal component analysis

## 1. Введение

Под динамической системой в общем смысле понимается математическая модель эволюции реальной системы, состояние которой в любой момент времени однозначно определяется ее начальным состоянием. Математически понятие динамической системы формулируется как тройка  $(P, I, \varphi)$ , состоящая из многообразия  $P$  и однопараметрической непрерывной группы преобразований — отображения  $\varphi(t, x)$ , записываемого в виде  $\varphi^t(x) : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где параметр  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  является временем. Очень часто при исследовании динамических систем основным источником информации о поведении исследуемого объекта является набор значений наблюдаемой величины, сделанных в некоторые (последовательные) моменты времени, так называемый временной ряд.

Одной из основных задач при анализе временных рядов является реконструкция динамической системы, породившей данный ряд. Так, например, для локально параметризованной поверхности с помощью евклидовых координат (многообразия) целой размерности Такенс в работе [1] реконструировал поведение исходной динамической системы.

Голландский инженер Ван-дер-Поль предложил использовать дифференциальное уравнение второго порядка (см., например, [2]) для описания колебаний, возникающих в электрических цепях:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad (1)$$

где  $\mu$  — неотрицательный параметр. Траектория движения, заданного уравнением Ван-дер-Поля, в фазовом пространстве определяется параметром  $\mu$  и начальными данными  $x(0), x'(0)$ . Данное уравнение является «эталонной» моделью нелинейной динамики и теории колебаний, которая описывает автоколебания.

Часто динамику популяции описывают уравнением Хенона [3]

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $a, b$  — некоторые числовые параметры, такие что  $a > 0$  и  $|b| \leq 1$ , или логистической моделью, впервые предложенной Ферхюльстом [4]:

$$x_{n+1} = \mu \cdot x_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $\mu > 0$  — некоторый параметр. Уравнение Хенона применяется также в астрофизике, а логистическая модель — в биологии. Модель Хенона демонстрирует большое разнообразие хаотического поведения из-за чего является одним из основных примеров систем с хаотическим поведением.

Для описания поведения нелинейных динамических систем широко используются так называемые аттракторы. Аттрактором системы

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

называется компактное инвариантное множество  $\Omega$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность  $\Omega(\varepsilon)$  множества  $\Omega$  такая, что траектория  $x_n$  системы (4), для которой  $x_0 \in \Omega(\varepsilon)$ , стремится к множеству  $\Omega$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть  $\rho(x_n, \Omega) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Целями настоящего исследования являются оценка размерности аттрактора (количество компонент, определяющих систему) классических динамических систем, описываемых уравнениями Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели, а также выявление значимых параметров системы перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия путем определения гладкости детерминированной модели вольтамперных временных рядов.

Идентификация систем (реконструкция уравнений) по дискретным последовательностям экспериментальных данных (временных рядов) позволяет понять динамику процессов, изменяющихся со временем и предсказывать тенденции (см. [5]). Выявляя значимые параметры (размерность аттрактора) временного ряда, определяем какими значениями можно пренебречь, а какие значения необходимо учесть. Наблюдаемые существенные параметры при проведении исследования испарения алюминиевой проволоки при погружении в химический раствор подтвердились расчетами, представленными в работе.

В случае немногочисленной выборки, не теряя точности решения, используются не очень большие вычислительные мощности. Метод главных компонент на небольшой выборке (не более 10 тысяч) быстро выявляет компоненты, не теряя точности решения.

В работе для оценки размерности аттрактора динамической системы применяем метод главных компонент, быстро выявляющий компоненты на выборке не более 10 тысяч данных, сохраняя точность решения (см. [6]). Идея данного метода состоит в повороте осей координат в фазовом пространстве и выборе направлений, вдоль которых, в основном, развивается движение. Для облегчения обозначений предположим, что среднее значение наблюдаемого значения  $\eta$  равно нулю. Векторы  $W(t_i) = (\eta_i, \eta_{i+1}, \dots, \eta_{i+w-1})$  строятся в пространстве размерности  $k$ , причем предполагается, что время задержки равно интервалу выборки  $l = 1$ . В данном пространстве производится преобразование поворота, причем новые оси координат выбираются в соответствии с теми направлениями, вдоль которых наибо-

лее интенсивно развивается движение. Количественно эти направления и протяженность вдоль них определяются при помощи квадратичной матрицы ковариаций  $\Theta$  порядка  $k$  компонент вектора  $w$

$$\Theta_{i,j} = \sum_{n=0}^{N-k} \eta_{i+n} \eta_{j+n}, i, j = 1, \dots, k. \tag{5}$$

Матрица  $\Theta$  – симметрична, вещественна и положительно определена. Следовательно, ее собственные векторы образуют полный ортонормированный базис в  $R^k$ . Отсортируем собственные значения в порядке возрастания –  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$  и соответствующие собственные векторы –  $s_1, s_2, \dots, s_k$ . Если присутствует измерительный шум, то все  $\sigma_i^2$  не равны нулю, потому что в направлениях, которые являются незначительными, представлена шумовая компонента. В этом случае размерность можно оценить как число  $D$ . Проекция вектора  $w(t_i)$  на соответствующие направления, то есть на первые  $D$  компонент вектора  $x'$ . Остальные компоненты отбрасываются, так как соответствующие им собственные значения образуют «шумовой пьедестал». Таким образом, получим  $D$ -мерные векторы  $x(t_i)$  с компонентами  $x_k(t_i) = s_k \cdot w(t_i)$ . Метод главных компонент – это частный случай фильтрованного вложения. Данный метод полезен, если имеются измерительные шумы, так как  $x_1(t)$  более плавнее, чем  $\eta(t)$ .

## 2. Модель Хенона

Для анализа уравнения (2) введем дополнительную переменную  $y_n = bx_{n-1}$ , которая сводит исходное отображение к двумерному отображению вида

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \tag{6}$$

Для определения точек равновесия необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - ax^2 + y, \\ y = bx, \end{cases}$$

которая приводит к квадратному уравнению

$$ax^2 + (1 - b)x - 1 = 0.$$

Так как  $a > 0$ , то система имеет две неподвижные точки  $u_1(x_1, y_1)$ ,  $u_2(x_2, y_2)$ , где

$$x_{1,2} = \frac{(b - 1) \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad y_{1,2} = bx_{1,2},$$

и  $D = (1 - b)^2 + 4a > 0$ .

В окрестности точек  $u_1, u_2$  проведем анализ локальных бифуркаций. Сначала выясним, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  данные точки являются негиперболическими. Для этого необходимо определить, при

каких условиях матрица Якоби будет иметь собственные значения равные 1 по модулю. Определим матрицу Якоби для точки  $u_1$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 - b - \sqrt{D} & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы  $A_1$  – это решения квадратного уравнения

$$\sigma^2 + (b - 1 + \sqrt{D}\sigma) - b = 0. \tag{7}$$

Квадратное уравнение (7) имеет хотя бы один корень по модулю равный 1, когда параметры  $a$  и  $b$  удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < a \leq 3, \quad b = 1.$$

В этом случае собственные значения матрицы  $A_1$  будут такие

$$\sigma_{1,2} = e^{\pm i\varphi},$$

где угол  $\varphi$  определяется с помощью выражения

$$(1 - \cos \varphi)^2 = 1 + a.$$

Теперь определим размерность аттрактора, образованного уравнением (6) при  $a = 1.8, b = -0.05$ . Собственные значения  $\sigma$  матрицы ковариации  $\Theta$  (5) будут иметь следующие значения, округленные с точностью до 0.000001 (см. рис. 1): 956.380151, 683.130899, 246.209364, 78.935168, 76.134774.

По качественным изменениям графика на рис. 1 видно, что размерность аттрактора равна трем.

## 3. Логистическая модель

Рассмотрим поведение системы (3) на отрезке  $[0, 1]$  при выполнении условий:

$$0 < \mu \leq 4, \quad 0 \leq x_0 \leq 1.$$

Найдем точки равновесия системы. Для этого необходимо решить уравнение  $x = f(x, \mu)$ , где

$$f(x, \mu) = \mu x(1 - x),$$

то есть решается уравнение

$$x = \mu x(1 - x). \tag{8}$$

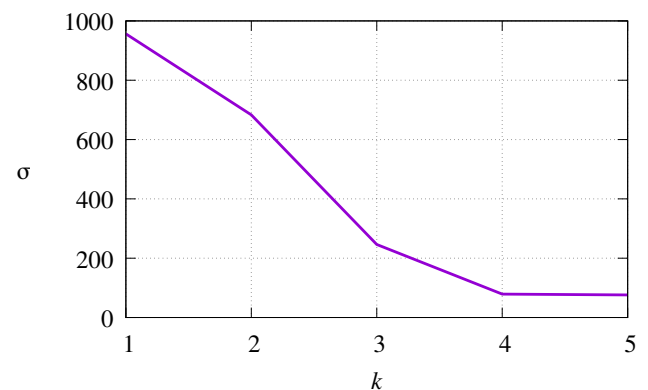


Рис. 1. Значения собственных чисел матрицы уравнения Хенона (2) при  $a = 1.8, b = -0.05$



Уравнение (8) имеет два решения:

$$x_0^* = 0, \quad x_1^* = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Первое решение находится на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  при любых  $\mu$ , а второе — только при  $x \geq 1$ .

Определим свойства устойчивости найденных точек равновесия. Для этого найдем производную функции

$$f'_x(x, \mu) = \mu - 2\mu x.$$

Исследуем сначала точку равновесия  $x_0^* = 0$ . Так как  $f'_x(0, \mu) = \mu$ , значит точка равновесия  $x_0^* = 0$  будет асимптотически устойчива при  $0 < \mu < 1$  и неустойчива при  $\mu > 1$ .

Рассмотрим точку равновесия  $x_1^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$ . Для нее производная имеет вид:

$$f'_x(x_1^*(\mu), \mu) = 2 - \mu.$$

Значит при  $\mu \in (1, 3)$  точка  $x^*(\mu)$  — асимптотически устойчива, а при  $\mu > 3$  — неустойчива.

Определим размерность аттрактора, порожденного логистической моделью. При  $\mu = 3.9$  собственные значения  $\sigma$  матрицы ковариации  $\Theta$ , округленные с точностью 0.000001, следующие (см. рис. 2): 1266.317915, 1150.614079, 542.278221, 225.531951, 142.284321.

По качественным изменениям графика на рис. 2 видно, что размерность аттрактора равна двум.

### 4. Модель Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля (1). Пусть  $x = x_1, x' = x_2$ , тогда

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1. \end{cases}$$

Обозначим

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(X, \mu) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix}.$$

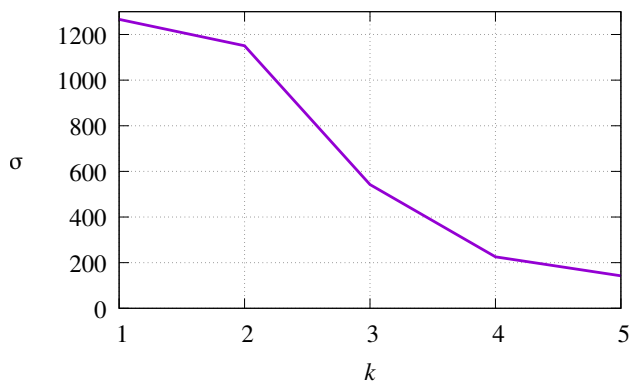


Рис. 2. Значения собственных чисел матрицы логистической модели (3) при  $\mu = 3.9$

Тогда  $\frac{dX}{dt} = f(X, \mu), X \in \mathbb{R}^2$ .

Решая уравнение  $f(X, \mu) = 0$ , получаем, что единственная точка равновесия — это точка начала координат  $\Theta = (0, 0)$ .

Далее проанализируем матрицу Якоби следующего вида:

$$f'_X(X, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu x_1 x_2 - 1 & \mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix}.$$

Если подставить в матрицу Якоби точку  $\Theta$ , то получается

$$f'_X(\Theta, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Проанализировав собственные значения матрицы  $f'_X(\Theta, \mu)$  получаем, что при  $\mu = 0$  точка равновесия  $\Theta(0, 0)$  имеет тип «центр», при  $0 < \mu < 2$  — неустойчивый фокус, при  $\mu > 2$  — устойчивый фокус.

В результате получаем, что аттрактор имеет размерность 2.

Далее рассмотрим фазовый портрет при  $0 < \mu < 2$  (см. рис. 3).

В системе при  $0 < \mu < 2$  возникает автоколебательное решение, а при условии  $\mu \rightarrow 0$  цикл приближается к окружности радиуса 2.

Определим размерность аттрактора, образованного уравнением (1). Рассмотрим случай, когда  $\mu = 0.5$ . Собственные значения  $\sigma$ , округленные с точностью до 0.000001, матрицы ковариации  $\Theta$  имеют следующий вид (см. рис. 4): 382.344409, 0.031335, 0.008106, 0.003813, 0.002478.

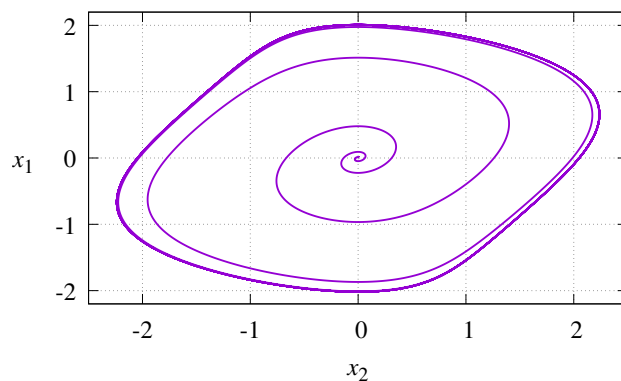


Рис. 3. Фазовый портрет при  $\mu = 0.5$

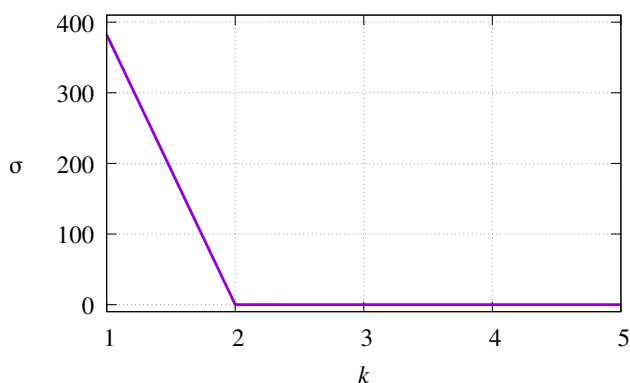


Рис. 4. Значения собственных чисел матрицы уравнения Ван-дер-Поля (1) при  $\mu = 0.5$

### 5. Перколяционный сенсор при испарении алюминия

Рассмотрим вольтамперный временной ряд, полученный на основе исследования испарения алюминиевой проволоки при погружении в химический раствор (см. рис. 5).

Ряд из  $n = 9800$  значений (см. [7]) разделим на 3 части, соответствующие различным этапам. Исследуем второй этап, отвечающий за переход из макро или микроразмерных в наноразмерные формы, поскольку именно эта часть наиболее сильно подвержена различным параметрам среды.

Покажем возможность описания данного временного ряда гладкой детермированной моделью.

В работе [11] получено, что результаты эксперимента, определенные ограниченной последовательностью действительных чисел  $A$ , могут быть описаны гладкой детермированной моделью, если величина

$$\frac{C_{n,\epsilon}(A)}{n - \ln \epsilon} \tag{9}$$

равномерно ограничена при  $n - \ln \epsilon \rightarrow \infty$ . В данном случае  $A = \{a_i, 0 \leq i < \infty\}$ , а значение  $C_{n,\epsilon}(A)$  — число элементов множества  $G_{n,\epsilon}$ . Множество  $G_{n,\epsilon}$  определяется следующим образом:  $i > 0$ , то  $i \in G_{n,\epsilon}$  тогда и

только тогда, когда  $0 \leq j < i$  и  $j \in G_{n,\epsilon}$  ( $i, j$  — индексы последовательности  $A$ ). Величина  $\epsilon$  определяется из следующего неравенства:

$$\max\{|a_i - a_j|, |a_{i+1} - a_{j+1}|, \dots, |a_{i+n} - a_{j+n}|\} \geq \epsilon.$$

В противном случае, если (9) неравномерно ограничена, то последовательность  $A$  не может быть объяснена с помощью детермированной модели. Для рассмотренной задачи получается, что при любом  $\epsilon$  существует предел, а значит процесс не является случайным.

Применяя метод главных компонент собственные значения матрицы ковариации, округленные с точностью до 0.000001, определяются так: 254.607831, 0.032616, 0.008797, 0.004131, 0.002689.

Здесь аттрактор имеет размерность равную двум.

Далее для анализа временного ряда найдем коэффициент Херста (см. [8]). Если временной ряд задается последовательностью  $\xi_i$ , состоящей из  $T$  элементов, то для него необходимо определить среднее значение  $\bar{\xi}_i$ . Далее определяется среднеквадратичное отклонение:

$$S(T) = \left( \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\xi_i - \bar{\xi}_i)^2 \right)^{1/2},$$

максимальное отклонение

$$M_T = \max_{1 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^t (\xi_i - \bar{\xi}_i)$$

и минимальное отклонение

$$m_T = \min_{1 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^t (\xi_i - \bar{\xi}_i).$$

Введем размах накопленных сумм:

$$R(T) = M_T - m_T.$$

Из соотношения

$$\frac{R(T)}{S(T)} \approx (aT)^H, \quad a - const, \quad a > 0, \quad a \neq \frac{1}{T},$$

определим показатель Херста ( $0 \leq H \leq 1$ ).

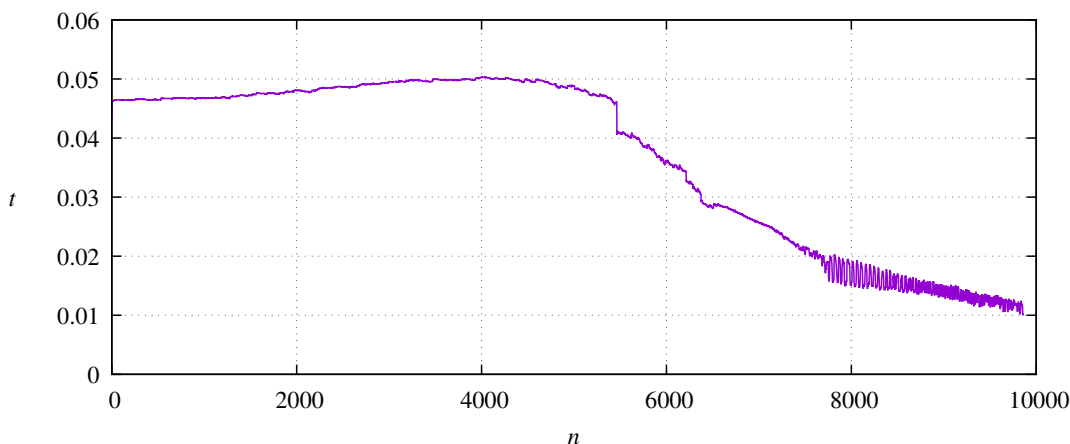


Рис. 5. Графический вид временного ряда

Для случайного процесса с независимыми приращениями и конечной дисперсией в работе [9] было строго доказано, что показатель Херста равен 0.5 (временной ряд соответствует гауссовскому шуму, то есть случайному процессу).

Херст предположил, что сдвиг значений от 0.5 происходит в связи с существованием для природных процессов «памяти». Отличие показателя Херста от 0.5 также объясняют отражением фрактальных свойств процессов, порождающих временные ряды. В работе [10] по аналогии с обобщенным броуновским движением предполагается, что

- при коэффициенте Херста  $0 \leq H \leq 0.5$  временной ряд называется антиперсистентным или «розовым шумом»;
- при  $0.5 \leq H \leq 1$  временной ряд называется персистентным или «черным шумом».

Для вольтамперного временного ряда перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия (см. рис. 5) индекс Херста  $H$  с точностью до 0.0001 равен 0.6658. Следовательно, рассматриваемый временной ряд является персистентным.

## 6. Заключение

Методом главных компонент для уравнений Ван-дер-Поля, Хенона и логистической модели определены размерности аттрактора. Получено, что уравнение Ван-дер-Поля и логистическая модель образуют аттракторы размерности 2, а уравнение Хенона образует аттрактор размерности 3.

Определен индекс Херста вольтамперного временного ряда перколяционного сенсора при испарении электролитов алюминия, приблизительно равный 0.6658. Следовательно, значения данного временного ряда сильно коррелируемы. Методом главных компонент также показано, что рассмотренный временной ряд описывается двумя компонентами.

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Регина Димовна Муртазина**

кандидат физ.-мат. наук, доцент

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

**Марат Дамирович Биткулов**

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

**Эрик Радикович Шайхиев**

Нанкинский университет финансов и экономики, Нанкин, Китай

## Список литературы / References

- [1] Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Springer Lecture Notes in Mathematics. 1981. V. 898. P. 366–381. DOI: [10.1007/BFb0091924](https://doi.org/10.1007/BFb0091924)
- [2] Van der Pol B. On «Relaxation-Oscillations» // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1926. V. 2, iss. 11. P. 978–992. DOI: [10.1080/14786442608564127](https://doi.org/10.1080/14786442608564127)
- [3] Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Под. ред. Я.Г. Синая и О.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152–163. Henon M. A two-dimensional mappings with a strange attractor // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50, no. 1. P. 69–77. DOI: [10.1007/BF01608556](https://doi.org/10.1007/BF01608556)
- [4] Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondence Mathematique et Physique (Bruxelles). 1838. V. 10. P. 113–121.
- [5] Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005. 320 с. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Mathematical modeling and chaotic time series. Saratov, 2005, 320 p.
- [6] Broomhead D.S., King G.P. Extracting qualitative dynamics from experimental data // Physica D. 1986. V. 20. P. 217–236. DOI: [10.1016/0167-2789\(86\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90031-X)
- [7] Биткулов М.Д. Фрактальный анализ вольтамперных временных рядов перколяционного сенсора при испарении фоновых электролитов различного состава: выпускная квалификационная работа / Биткулов Марат Дамирович. Уфа, 2024. 27 с. Bitkulov M.D. Fractal analysis of current-voltage time series of a percolation sensor during evaporation of background electrolytes of various compositions. Ufa, 2024. P. 27 (in Russian)
- [8] Hurst H.E. Long-term storage capacity of reservoirs // Transactions of American Society of Civil Engineers. 1951. V. 116. P. 770–808.
- [9] Feller W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. P. 427–432. DOI: [10.1214/aoms/1177729589](https://doi.org/10.1214/aoms/1177729589)
- [10] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 262 с. Feder J. Fractals (Physics of Solids and Liquids). Springer. 1988. 310 p.
- [11] Takens F. Distinguishing deterministic and random series. In Nonlinear Dynamics and Turbulence. Boston: Pitman, 1985. P. 314–333.
- [12] Калаш Ю.А., Логинов В.М. Показатель Херста и его скрытые свойства // Сиб. журн. индустр. матем. 2002. Т. 5. № 4. С. 29–37. Kalush Yu.A., Loginov V.M. Hurst exponent and its hidden properties // Sib. j. industr. mat. 2002. V. 5, No. 4. P. 29–37 (in Russian). EDN: HZOKUN

**Regina D. Murtazina**

Ph.D. (Physics & Mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

[reginaufa@yandex.ru](mailto:reginaufa@yandex.ru)

ORCID: [0009-0004-3615-9643](https://orcid.org/0009-0004-3615-9643)

**Marat D. Bitkulov**

Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia

[bitkulovmarat@gmail.com](mailto:bitkulovmarat@gmail.com)

ORCID: [0009-0008-2082-605](https://orcid.org/0009-0008-2082-605)

**Erik R. Shaihiev**

Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing, China

[erik08082002@mail.ru](mailto:erik08082002@mail.ru)

ORCID: [0009-0006-1414-7398](https://orcid.org/0009-0006-1414-7398)

# Содержание

## Механика жидкости и газа

**А.А. Мухутдинова, А.Д. Низамова, В.Н. Киреев**

Экспериментальное исследование гидродинамической устойчивости течения жидкости  
в кольцевом канале ..... 1–6

**Д.А. Тукмаков**

Сопоставление численных реализаций метода квадратур решения интегрального уравнения ..... 7–11

**Р.Х. Болотнова, Э.А. Файзуллина**

Обзор исследований различных режимов формирования  
экстремально расширяющихся струй криогенных жидкостей ..... 12–19

**С.В. Хабиров**

Автомодельное движение газа с линейным полем скоростей ..... 20–25

**А.Е. Fetisov, S.Z. Anokhina**

The analysis of the development indicators of the Tournaisian deposit ..... 26–32

## Робототехника и теория управления

**Н.О. Круглов, Д.Р. Богданов, И.Ш. Насибуллаев**

Синтез конструкции инспекционного модульного робота ..... 33–44

**Р.Д. Муртазина, М.Д. Биткулов, Э.Р. Шайхиев**

Исследование вольтамперного временного ряда  
в случае испарения электролитов алюминиевой проволоки ..... 45–50

# Contents

## Liquid & Gas Mechanics

**A.A. Mukhutdinova, A.D. Nizamova, V.N. Kireev**

Experimental study of hydrodynamic stability of liquid flow in an annular channel (in Russian) ..... 1–6

**D.A. Tukmakov**

Comparison of numerical implementations of the quadrature method for solving an integral equation (in Russian)

.....7–11

**R.Kh. Bolotnova, E.A. Faizullina**

Review of investigations for various modes formation

of extremely expanding cryogenic liquids jets (in Russian) ..... 12–19

**S.V. Khabirov**

Automodeling gas motions with the linear field of velocities (in Russian) .....20–25

**A.E. Fetisov, S.Z. Anokhina**

The analysis of the development indicators of the Tournaisian deposit ..... 26–32

## Robotics & Control Theory

**N.O. Kruglov, D.R. Bogdanov, I.Sh. Nasibullayev**

Synthesis of an inspection modular robot's design (in Russian) .....33–44

**R.D. Murtazina, M.D. Bitkulov, E.R. Shaihiyev**

Study of the volt-ampere time series in the case of evaporation of aluminum wire electrolytes (in Russian) .....45–50