



ISSN: 2658–5782

Номер 4

2024

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





<http://mfs.uimech.org/mfs2024.4.025>

DOI: 10.21662/mfs2024.4.025

УДК / UDC: 539.311

Получена / Received: 31.10.2024

Принята / Accepted: 2.12.2024



## Изгиб однослойного графена

**А.Г. Хакимов**

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

Представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого однослойного графена или гибкой балки, для элемента которой записываются уравнения равновесия в проекциях сил на естественные оси координат: касательную, нормальную оси и сумму моментов относительно оси совпадающей с бинормалью. Изгибающий момент определяется как произведение изгибающей жесткости на изменение кривизны, взятое в точном виде. Сформулирована в безразмерном виде нелинейная краевая задача для однослойного графена или гибкой балки в деформированном состоянии и получены точные аналитические общие решения в эллиптических функциях, на основе которых определяются формы деформирования гибкой балки, распределение усилий натяжения, перерезывающих сил, изгибающих моментов. Также дается точное аналитическое решение для случая действия на свободном конце безразмерного изгибающего момента при нулевой перерезывающей силе в эллиптических функциях. Действие усилия натяжения учитывается параметром, зависящим от кривизны и усилия натяжения на свободном конце. Получены формулы для нахождения формы однослойного графена или гибкой балки и безразмерных усилий натяжения, перерезывающей силы и изгибающего момента и проведены соответствующие расчеты. Если на свободном конце усилие натяжения равно нулю, то кривизна поперечного сечения также равна нулю, поэтому изгибающий момент равен нулю, тогда дифференциальное уравнение изгиба упрощается. Учет действия среднего давления задачу не усложняет. В дифференциальном уравнении при искомой функции появляется дополнительный параметр, учитывающий действие среднего давления. Влияние среднего давления зависит от толщины гибкого однослойного графена или гибкой балки.

**Ключевые слова:** однослойный графен, цилиндрический изгиб, форма, усилия, перерезывающие силы, изгибающий момент

Работа выполнена в рамках государственного задания FMRS-2023-0015

## Bending of single-layer graphene

**A.G. Khakimov**

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russia

E-mail: [hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

An analytical geometrically nonlinear model of flexible single-layer graphene or a flexible beam is presented, for an element of which the equilibrium equations are written in projections of forces onto natural coordinate axes: tangent, normal to the axis, and the sum of moments relative to the axis coinciding with the binormal. The bending moment is defined as the product of the bending rigidity and the change in curvature taken in exact form. A nonlinear boundary value problem for single-layer graphene or a flexible beam in a deformed state is formulated in dimensionless form and exact analytical general solutions are obtained in elliptic functions, based on which the deformation modes of the flexible beam, distribution of tension forces, shear forces, and bending moments are determined. An exact analytical solution is also given for the case of a dimensionless bending moment acting at the free end with zero shear force in elliptic functions. The action of the tension force is taken into account by a parameter depending on the curvature and the tension force at the free end. Formulas for finding the shape of single-layer graphene or a flexible beam and dimensionless tension forces are obtained. The shear force and bending moment are calculated accordingly. If the tension force at the free end is zero, the curvature of the cross-section is also zero, so the bending moment is zero, then the differential equation of bending is simplified. Taking into account the effect of the average pressure does not complicate the task. In the differential equation, an additional parameter appears for the desired function, taking into account the effect of the average pressure. The effect of the average pressure depends on the thickness of the flexible single-layer graphene or flexible beam.

**Keywords:** single-layer graphene, cylindrical bending, shape, forces, shear forces, bending moment

### 1. Введение

Линейный изгиб консольного стержня, находящегося под всесторонним давлением и продольной силой, рассматривается в статической и динамической постановках. Учитывается поперечная распределенная сила на стержень, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности. Сжимающая сила может быть неизменного направления и изменяющейся при изгибе. В частности, следящая сила образуется в результате действия давления на концевое сечение стержня. Дается сравнение с классической задачей об устойчивости. Изучены особенности одновременного действия сил неизменного и изменяющегося направлений [1].

Как отмечено в [1], начиная с обобщающих работ по теории тонких пластин и оболочек [2, 3] до недавней монографии [4], поперечная распределенная сила принимается равной  $q = p_1 - p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — избыточные давления на поверхности, перпендикулярные плоскости изгиба. Данные давления положительны, если общее давление превышает атмосферное давление  $p_0$ , и отрицательны при меньшем значении общего давления, чем  $p_0$ . Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей, появляющейся при изгибе стержня и цилиндрическом изгибе пластины, приводит к выражению, которое приводится в [5, 6], откуда следует, что распределенная поперечная сила, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности, направлена в сторону вогнутости.

В [7] представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого цилиндрического шпангоута (обода) трансформируемого прецизионного крупногабаритного рефлектора применяемого в космической технике антенн, изготовленного с использованием полимерных композиционных материалов с памятью формы. Сформулирована нелинейная краевая задача для шпангоута в деформированном (свернутом) состоянии и получены точные аналитические решения в эллиптических функциях и интегралах, описывающие формы деформирования обода. С использованием геометрически нелинейной модели получены точные аналитические решения, позволяющие определять предварительные геометрические размеры и оптимальную форму гибкого шпангоута, а также оценивать накопленную энергию.

В статье [8] исследуются задачи статической и динамической устойчивости тонкого гибкого стержня под действием осевого сжатия с точным учетом геометрической нелинейности и приводится обзор работ по нелинейным задачам, теории и расчету гибких упругих стержней.

В работах [9–11] исследованы задачи о струйном обтекании упругой пластины и цилиндрической оболочки малой кривизны. В [12] доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейной задачи при заданных условиях на параметры, и это решение может

быть найдено методом простых итераций при любом начальном приближении. В линеаризованной постановке названная задача рассматривалась в [13]. Представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения [14].

В настоящей работе представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого однослойного графена или гибкой балки с учетом действия среднего давления.

### 2. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена (рис. 1). Ставится задача определения формы, усилий и моментов в однослойном графене. Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена, для элемента которого запишем уравнения равновесия [15]:

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} = 0; \tag{2}$$

$$Q = \frac{dM}{ds}, \tag{3}$$

где  $T, Q, M$  — усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент;  $R, s$  — радиус кривизны и длина дуги поперечного сечения однослойного графена. Изгибающий момент определяется как

$$M = D \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{4}$$

где  $E, \nu, h$  — модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина однослойного графена;  $D$  — цилиндрическая изгибная жесткость однослойного графена;  $R_N$  — радиус кривизны в недеформированном начальном

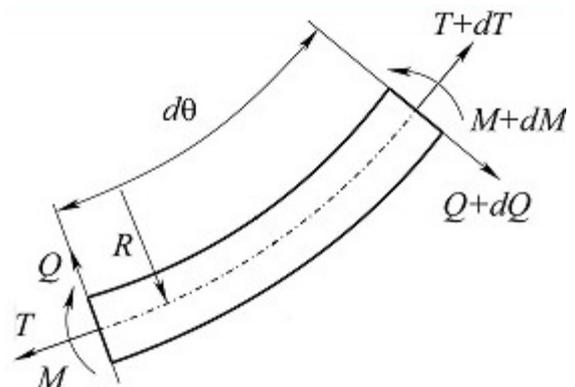


Рис. 1. Расчетная схема

состоянии. Для однослойного графена  $R_N = \infty$ . Из (1) с учетом (3) и (4) следует

$$T = T_0 - \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right), \quad (5)$$

где  $T_0, R_0$  — усилие натяжения и радиус кривизны линии поперечного сечения деформированного однослойного графена в точке  $O$ .

Уравнение (2) с учетом (3) и (5) запишется как

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} - \left( \frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right) \frac{1}{R} = 0. \quad (6)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad x = \frac{x^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{a}, \quad t = \frac{Ta^2}{D},$$

$$q = \frac{Qa^2}{D}, \quad m = \frac{Ma}{D}, \quad \alpha = a^2 \left( \frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right),$$

уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} - \alpha u = 0, \quad (7)$$

где  $x^*, y^*$  — размерные координаты. Общее решение дифференциального уравнения (7) выражается через эллиптический синус  $\text{sn}(\xi)$ :

$$u(\xi) = 2C_2 \text{sn} \left[ (\eta_1 \xi + 2C_1) \eta, \frac{C_2}{\eta_2} \right] \eta,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\alpha}{-1 + 4\alpha + C_2^2}}, \quad \eta_1 = \sqrt{1 - 4\alpha},$$

$$\eta_2 = \sqrt{-1 + 4\alpha},$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования. Решение уравнения (7) с условиями при  $\xi = 0$ :  $u = m_0, du/d\xi = 0$  выражается через эллиптический синус  $\text{sn}(\xi)$  и обратный эллиптический синус  $\text{arcsn}(\xi)$ :

$$u(\xi) = m_0 \eta_3 \text{sn} \left[ \frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left( (\eta_3)^{-1}, \eta_3 \right), \eta_3 \right],$$

$$\eta_3 = \frac{\sqrt{4\alpha - m_0^2}}{m_0}.$$

Производная  $du(\xi)/d\xi$  определяется через эллиптический косинус  $\text{cn}(\xi)$  и дельта амплитуду  $dn(\xi)$ :

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \text{Im}_0^2 \eta_3 [\text{cn}(\eta_4) \text{dn}(\eta_4)],$$

$$\eta_4 = \left[ \frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left( (\eta_3)^{-1}, \eta_3 \right), \eta_3 \right].$$

Угол  $\theta$  между касательной к линии поперечного сечения графена и осью  $x$  находится

$$\theta(\xi) = \int_0^\xi u(\xi_1) d\xi_1.$$

Интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\xi} = \sin \theta,$$

$$x(\xi) = \int_0^\xi \cos \theta(\xi_1) d\xi_1, \quad y(\xi) = \int_0^\xi \sin \theta(\xi_1) d\xi_1$$

находится безразмерная форма однослойного графена.

Безразмерные усилия натяжения  $t$ , перерезывающая сила  $q$  и момент  $m$  ищутся:

$$t = \frac{Ta^2}{D} = \frac{T_0 a^2}{D} - \frac{D}{2D} \left( \frac{a^2}{R^2} - \frac{a^2}{R_0^2} \right) =$$

$$= t_0 - \frac{1}{2} (u^2 - m_0^2),$$

$$q = \frac{du}{d\xi}, \quad m = u, \quad \alpha = \frac{m_0^2}{2} + t_0.$$

На рис. 2(а) приводится форма поперечного сечения графена. Распределение безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене приводятся на рис. 2(б). Видно, что усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси  $x$ .

Отметим, что при стремлении безразмерного усилия натяжения  $t_0$  к нулю безразмерный изгибающий момент  $m$  стремится к  $m_0$ .

Если в точке  $O$  усилие натяжения равно нулю  $T_0 = 0$ , кривизна поперечного сечения  $k$  также равна нулю, изгибающий момент  $m_0 = 0$ , поэтому  $T = -\frac{D}{2} \frac{1}{R^2}$ .

Уравнение (2) с учетом (3) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} = 0. \quad (8)$$

Переходя к безразмерным переменным, запишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} = 0, \quad (9)$$

Решение уравнения (9) с условиями при  $\xi = 0$ :  $u = 0, du/d\xi = q_0$  выражается через эллиптический синус:

$$u(\xi) = \sqrt{2} \sqrt{q_0} \text{sn} \left( \frac{\sqrt{2q_0}}{2} \xi, i \right).$$

Безразмерные усилия и момент определяются:

$$q = \frac{du}{d\xi} = q_0 \text{cn} \left( \frac{\sqrt{2q_0}}{2} \xi, i \right) \cdot \text{dn} \left( \frac{\sqrt{2q_0}}{2} \xi, i \right),$$

$$t = -\frac{u^2}{2}, \quad m = u,$$

где перерезывающая сила определяется через эллиптические косинус  $\text{cn}$  и дельта амплитуду  $\text{dn}$ . На рис. 3(а) приводятся формы поперечного сечения графена при различных  $q_0$ . С ростом перерезывающей силы  $q_0$  происходит увеличение прогибов однослойного графена. Распределение безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене для  $q_0 = 2$  приводится на рис. 3(б). Видно, что усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси  $x$ .

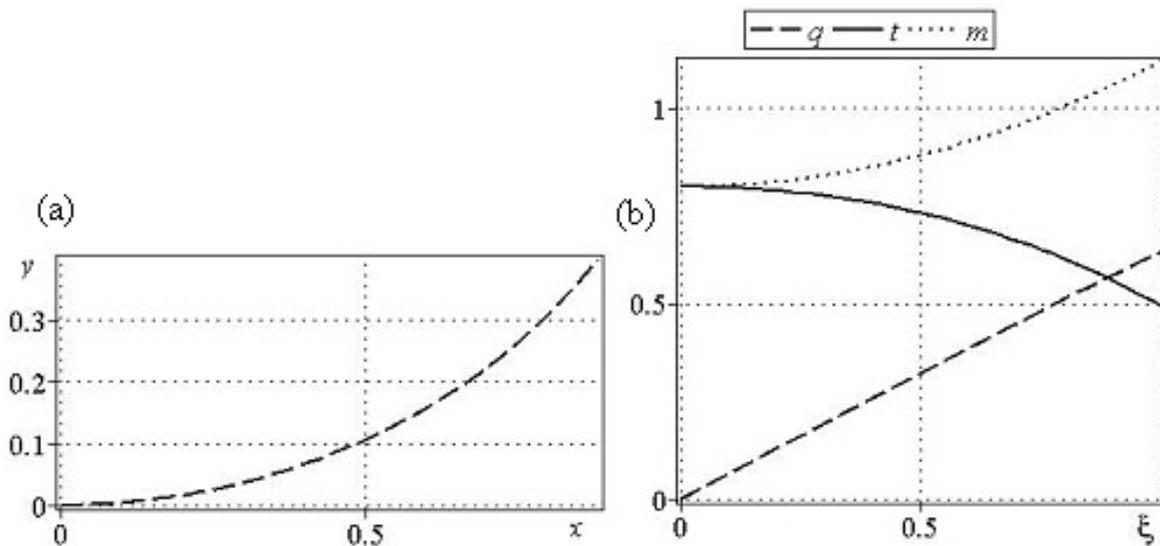


Рис. 2. Для параметров  $m_0 = 0.8, t_0 = 0.8$ : (a) форма поперечного сечения графена; (b) зависимости безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене от безразмерной дуговой абсциссы  $\xi$

### 3. Цилиндрический изгиб однослойного графена под действием среднего давления

где  $P$  — давление в окружающей среде, которое не действует на торец однослойного графена. Изгибающий момент определяется как

В этом случае уравнения (1)–(3) примут вид:

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0, \tag{10}$$

$$M = D \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right), \tag{13}$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} - \frac{Ph}{R} = 0, \tag{11}$$

где  $R_N$  — радиус кривизны поперечного сечения однослойного графена в недеформированном начальном состоянии.

$$Q = \frac{dM}{ds}, \tag{12}$$

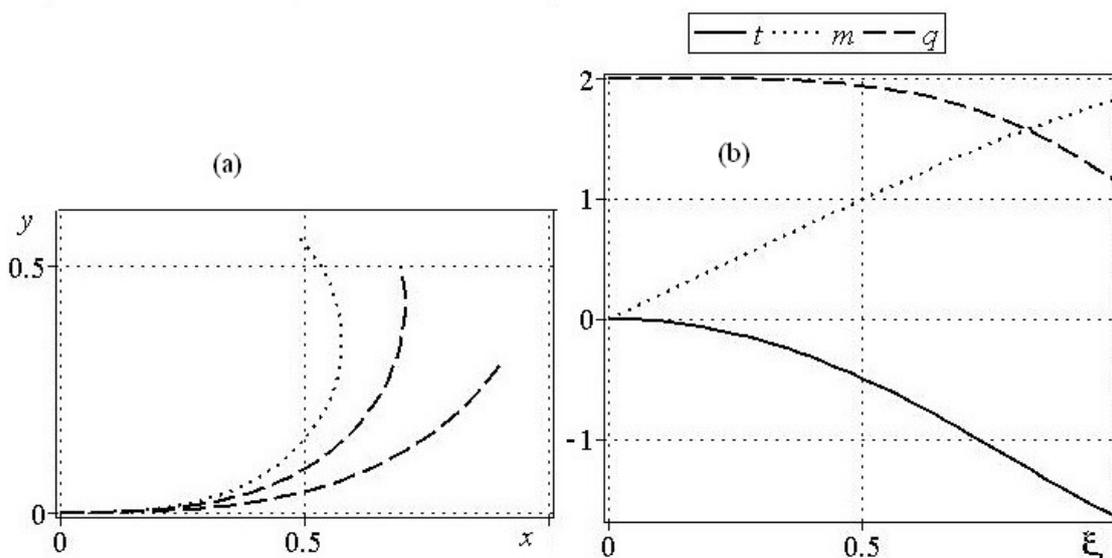


Рис. 3. Для параметров  $m_0 = 0, t_0 = 0$ : (a) формы поперечного сечения графена при различных  $q_0 = 6; 4; 2$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (b) зависимости безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене от безразмерной дуговой абсциссы  $\xi$   $q_0 = 2$

Из (10) с учетом (12) и (13) следует

$$T = T_0 - \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right). \quad (14)$$

Уравнение (11) с учетом (12) и (14) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} - \frac{Ph}{DR} - \left( \frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right) \frac{1}{R} = 0. \quad (15)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad x = \frac{x^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{a}, \quad t = \frac{Ta^2}{D},$$

$$q = \frac{Qa^2}{D}, \quad m = \frac{Ma}{D}, \quad \alpha = a^2 \left( \frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right),$$

$$\beta = \frac{Pha^2}{D},$$

уравнение (15) примет следующий вид:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} - (\alpha + \beta)u = 0, \quad (16)$$

Отметим, что учет действия среднего давления задачу не усложняет, а в дифференциальном уравнении (16) при искомой функции появляется дополнительный параметр, учитывающий действие среднего давления. Влияние среднего давления зависит от толщины гибкого однослойного графена или гибкой балки.

Решение уравнения (16) с условиями при  $\xi = 0$ :  $u = m_0, du/d\xi = 0$  выражается через эллиптический си-

нус  $\text{sn}(\xi)$  и обратный эллиптический синус  $\text{arcsn}(\xi)$ :

$$u(\xi) = m_0 \eta_5 \text{sn} \left[ \frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left( \frac{1}{\eta_5}, \eta_5 \right), \eta_5 \right],$$

$$\eta_5 = \frac{1}{m_0} \sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}.$$

Производная  $du(\xi)/d\xi$  определяется через эллиптический косинус  $\text{cn}(\xi)$  и дельта амплитуду  $\text{dn}(\xi)$ :

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \text{Im}_0^2 \eta_5 [\text{cn}(\eta_6) \text{dn}(\eta_6)],$$

$$\eta_6 = \left( \frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left( (\eta_5)^{-1}, \eta_5 \right), \eta_5 \right).$$

На рис. 4(а) приводится форма поперечного сечения графена. Распределение безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене приводится на рис. 4(б). Видно, что усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси  $x$ . С увеличением  $q$  происходит увеличение прогибов однослойного графена.

#### 4. Заключение

С увеличением перерезывающей силы  $q_0$  происходит увеличение прогибов однослойного графена. Усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси  $x$ . Учет действия среднего давления задачу не усложняет. В дифференциальном уравнении при искомой функции появляется дополнительный параметр, учитывающий действие среднего давления. Влияние среднего давления зависит от толщины гибкого однослойного графена или гибкой балки.

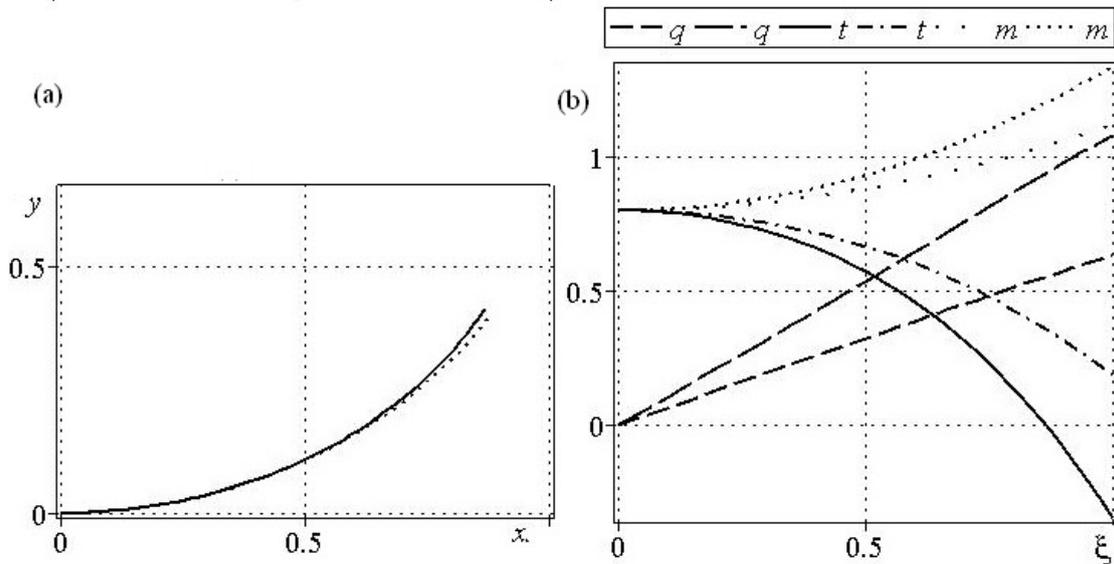


Рис. 4. Для параметров  $m_0 = 0.8, t_0 = 0.8$ : (а) форма поперечного сечения графена для параметра  $\beta = 0.5; 0$  (сплошная и пунктирные линии соответственно); (б) зависимости безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене от безразмерной дуговой абсциссы  $\xi$  для параметра  $\beta = 0.5$  (сплошная, пунктирная, длинная штриховая линии соответственно) и  $\beta=0$  (штрихпунктирная, спецпунктирная, штриховая линии соответственно)

Автор благодарит член–корреспондента РАН Марата Аксановича Ильгамова за постановку и обсуждение задачи.

## Список литературы / References

- [1] Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость консольного стержня под действием давления на его поверхности и продольной силы // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 77–88.  
DOI: [10.31857/S0572329921040061](https://doi.org/10.31857/S0572329921040061)  
Ilgamov M.A. Bending and stability of a cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force // *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 56, No. 4. Pp. 495–504.  
DOI: [10.3103/S0025654421040087](https://doi.org/10.3103/S0025654421040087)
- [2] Стрэтт Дж.В. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с. Rayleigh Strutt J.W. *The Theory of Sound*. Vol. 1. London: Macmillan, 1894. 500 p.
- [3] Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с. Love A. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p.
- [4] Shen H.Sh. *Postbuckling Behavior of Plates and Shells*. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.
- [5] Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и плёнки // ДАН. 2017. Т. 476, № 4. С. 402–405.  
DOI: [10.7868/S086956521728009X](https://doi.org/10.7868/S086956521728009X)  
Ilgamov M.A. Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Doklady Physics*. 2017. Vol. 62, No. 10. Pp. 461–464.  
DOI: [10.1134/S1028335817100020](https://doi.org/10.1134/S1028335817100020)
- [6] Ильгамов М.А. Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 5. С. 598–604.  
Ilgamov M.A. Bending vibrations of a plate with a change in the average pressure on its surfaces // *Acoustic journal*. 2018. Vol. 64, No. 5. Pp. 598–604. (in Russian)  
DOI: [10.1134/S0320791918050039](https://doi.org/10.1134/S0320791918050039)
- [7] Охоткин К.Г., Власов А.Ю., Захаров Ю.В., Аннин Б.Д. Аналитическое моделирование гибкого обода рефлекторов космических антенн // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 5. С. 190–200.  
DOI: [10.15372/PMTF20170519](https://doi.org/10.15372/PMTF20170519)  
Okhotkin K.G., Vlasov A.Y., Zakharov Y.V., Annin B.D. Analytical modeling of the flexible rim of space antenna reflectors // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58, No. 5. Pp. 924–932.  
DOI: [10.1134/S0021894417050194](https://doi.org/10.1134/S0021894417050194)
- [8] Аннин Б.Д., Власов А.Ю., Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Исследование статической и динамической устойчивости гибких стержней в геометрически нелинейной постановке // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 4. С. 6–18.  
EDN: [zbpwul](https://www.edn.ru/zbpwul)
- [9] Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой пластины // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 4. С. 35–42.  
<https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1976/4/35-42>  
Kiselev O.M., Rapoport, E.F. Jet flow around an elastic plate // *Fluid Dyn*. 1976. Vol. 11, No. 4. Pp. 520–526.  
DOI: [10.1007/BF01012996](https://doi.org/10.1007/BF01012996)
- [10] Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой оболочки // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 2. С. 24–32.  
<https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1977/2/24-32>  
Kiselev O.M., Rapoport E.F. Jet flow around an elastic shell // *Fluid Dyn*. 1977, Vol. 12, No. 2. Pp. 186–192.  
DOI: [10.1007/BF01050686](https://doi.org/10.1007/BF01050686)
- [11] Хакимов А.Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 6. С. 147–151.  
<https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1975/6/147-151>  
Khakimov A.G. Flow around a flexible cylindrical shell by a plane stream of an ideal liquid // *Fluid Dyn*. 1975. Vol. 10, No. 6. Pp. 992–996.  
DOI: [10.1007/BF01023279](https://doi.org/10.1007/BF01023279)
- [12] Киселев О.М., Безотрывное обтекание круговой цилиндрической оболочки // Тр. сем. по краев. задачам. 1982. Вып. 18. С. 104–115. Kiselev O.M., Non-separation flow around a circular cylindrical shell // *Proc. sem. on boundary value problems*. 1982. Issue 18. Pp. 104–115.
- [13] Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // Прикл. мех. 1975. Т. 11, № 3. С. 12–19.  
Ilgamov M.A. Bending and stability of a cylindrical shell during transverse flow of liquid around it // *Appl. mech. [Prikladnaya mehanika]* 1975. Vol. 11, No. 3. Pp. 12–19.
- [14] Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 12–18.  
DOI: [10.31857/S0568528120020073](https://doi.org/10.31857/S0568528120020073)  
Khakimov A.G. Flow around a Circular Cylindrical Shell // *Fluid Dynamics*. 2020. Vol. 55, No. 2. Pp. 154–161.  
DOI: [10.1134/S001546282002007X](https://doi.org/10.1134/S001546282002007X)
- [15] Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во Московского университета. 1969. 695 с. Ogibalov P.M., Koltunov M.A. *Shells and plates*. Moscow: Moscow University Publishing. 1969. 695 p.

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Аким Гайфуллинович Хакимов**

канд. физ.-мат. наук, доцент  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,  
Россия

**Akim Gayfullinovich Khakimov**

PhD (Phys. & Math.), Assist. Prof.

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russia

[hakimov@anrb.ru](mailto:hakimov@anrb.ru)

ORCID: [0000-0003-4093-5380](https://orcid.org/0000-0003-4093-5380)