



ISSN: 2658–5782

Номер 4

2024

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Отражение падающего газа от стенки

Р.Ф. Никонорова\*, Л.З. Уразбахтина\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: [renatanikon@gmail.com](mailto:renatanikon@gmail.com)

Для модели движения одноатомного газа в пространстве рассматривается инвариантная подмодель на трехмерной подалгебре из операторов переноса, операторов растяжения и проективного оператора, сведенная к уравнению Абеля. В работе исследуется приближенное решение, полученное по асимптотике интегральных кривых на бесконечности. Решение описывает вихревое движение газа, частицы газа движутся по плоским кривым, лежащим на поверхности вращения. С течением времени газ растекается и остывает. Решение можно интерпретировать как отражение падающего газа от стенки.

**Ключевые слова:** уравнения газовой динамики, проективный оператор, инвариантная подмодель, приближенное решение

## Reflection of the incident gas from the wall

R.F. Nikonorova\*, L.Z. Urazbakhtina\*\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRS RAS, Ufa, Russia

\*\*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: [renatanikon@gmail.com](mailto:renatanikon@gmail.com)

The project explores the motion of a monatomic gas in space using an invariant submodel based on a three-dimensional subalgebra. This subalgebra includes translation operators, dilatation operators, and a projective operator, reducing the problem to the Abel equation. An approximate solution is derived using the asymptotics of integral curves at infinity. This solution characterizes the vortex motion of the gas, with particles following planar curves on a rotational surface. As the gas spreads, it cools down, and the solution can be interpreted as a reflection of the incident gas from a wall.

**Keywords:** equations of gas dynamics, projective operator, invariant submodel, approximate solution

### 1. Введение

Систематическое исследование уравнений газовой динамики с точки зрения наиболее полного использования заложенных в них свойств симметрии и построения всевозможных подмоделей получило существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его последователей [1, 2].

В работе рассматривается система уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned} \rho D\vec{u} + \nabla p &= 0, \\ D\rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ DS &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с уравнением состояния одноатомного газа [1]

$$S = p\rho^{-\frac{5}{3}}, \quad (2)$$

где  $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$  — оператор полного дифференцирования;  $\nabla$  — градиент;  $\vec{u}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плот-

ность;  $p$  — давление;  $S$  — функция энтропии. Газодинамические функции  $\vec{u} = (u, v, w)$ ,  $p, \rho, S$  зависят от времени  $t$  и пространственных декартовых координат  $x, y, z$ .

Система (1)–(2) допускает 14-и параметрическую группу преобразований. Ей соответствует 14-мерная алгебра Ли, в качестве базисных операторов которой можно выбрать следующие:

$X_i, i = 1, 2, 3$  :  $\partial_{\vec{x}}$  — переносы по пространству,

$X_{i+3}$  :  $t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}$  — галилеевы переносы,

$X_{i+6}$  :  $\vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}}$  — вращения,

$X_{10} = \partial_t$  — перенос по времени,

$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}}$  — равномерное растяжение,

$X_{12} = t^2\partial_t + t\vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u}) \cdot \partial_{\vec{x}} - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$  — проективный оператор,

$X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p$ ,  $X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p$  — операторы растяжения.

Особенностью данной алгебры является наличие проективного оператора [1]. Остальные операторы допускаются в случае произвольного политропного газа. Для этой алгебры в работе [3] построена оптимальная система неподобных подалгебр.

## 2. Инвариантная подмодель ранга 1

В работе [4] рассмотрена трехмерная подалгебра с базисом из операторов

$$aX_2 + X_6, \quad -X_3 + aX_5, \quad X_{10} + X_{12} + b(X_{11} - X_{13}), \quad a > 0,$$

и для нее получено следующее представление инвариантного решения:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(\bar{x})e^{b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + t\bar{x}(1+t^2)^{-1}, \\ v &= \bar{v}(\bar{x})e^{b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + (t\bar{y} - a\bar{z})(1+t^2)^{-1}, \\ w &= -\bar{w}(\bar{x})e^{b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + (t\bar{z} + a^{-1}\bar{y})(1+t^2)^{-1}, \\ \rho &= \bar{\rho}(\bar{x})e^{3b\tau}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ p &= \bar{p}(\bar{x})e^{5b\tau}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$S = \bar{S}(\bar{x}), \quad \bar{x} = xe^{-b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau = \arctg t.$$

После подстановки представления решения в уравнения газовой динамики получена инвариантная подмодель ранга 1 (с одной новой независимой переменной  $\bar{x}$ ):

$$\begin{aligned} (\bar{u} - b\bar{x})\bar{u}_{\bar{x}} + \frac{\bar{p}_{\bar{x}}}{\bar{\rho}} &= -b\bar{u} - \bar{x}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{v}_{\bar{x}} &= -b\bar{v} - a\bar{w}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{w}_{\bar{x}} &= -b\bar{w} + a^{-1}\bar{v}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{\rho}_{\bar{x}} + \bar{\rho}\bar{u}_{\bar{x}} &= -3b\bar{\rho}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{S}_{\bar{x}} &= 0, \quad \bar{S} = \bar{p}\bar{\rho}^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $\bar{u} - b\bar{x} \neq 0$  и  $b \neq 0$  после введения новой независимой переменной  $s$  по формуле  $\bar{x}_s = \bar{u} - b\bar{x}$  подмодель частично проинтегрирована с точностью до допускаемых (4) преобразований:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{x}_s + b\bar{x}, \quad \bar{v} = a \sin(s)e^{-bs}, \\ \bar{w} &= -\cos(s)e^{-bs}, \\ \bar{\rho}\bar{x}_s e^{4bs} &= \pm 1, \quad \bar{S} = \pm 1, \quad \bar{p} = \bar{S}\bar{\rho}^{\frac{5}{3}}, \end{aligned} \quad (5)$$

и сведена к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению 2-ого порядка [4]:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ss} + 2b\bar{x}_s + (b^2 + 1)\bar{x} &= \\ = \frac{5}{3}e^{-\frac{8}{3}bs}\bar{x}_s^{-\frac{5}{3}}(\bar{x}_{ss}\bar{x}_s^{-1} + 4b). \end{aligned} \quad (6)$$

Понижением порядка уравнения (6) заменами

$$\bar{x} = k(s)e^{-bs}, \quad k_s = bk + m^3(k) \quad (7)$$

и растяжением

$$m \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{8}} m, \quad k \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{8}} b^{-1}k$$

уравнение (6) приведено к дробно-рациональному виду [4]:

$$\frac{dm}{dk} = \frac{-\varepsilon km^6 + m(3 - m^8)}{3(k + m^3)(m^8 - 1)}, \quad \varepsilon = (1 + b^2)b^{-2} > 1. \quad (8)$$

В работе [4] численно построена картина интегральных кривых этого уравнения и исследовано приближенное решение  $k \approx -m^3/4$  при малых значениях  $k$ , полученное для сепаратрисы седла. В настоящей работе исследуется приближенное решение, соответствующее асимптотике интегральных кривых на бесконечности.

## 3. Асимптотика на бесконечности

В уравнении (8) вводится малый параметр  $\delta$ :

$$k = \delta^{-5}k_1, \quad m = \delta m_1,$$

для представления интегральных кривых  $m = m(k)$  при  $k \rightarrow \pm\infty$ :

$$\frac{dm_1}{dk_1} = \frac{-\varepsilon k_1 m_1^6 + m_1(3 - \delta_1 m_1^8)}{3(k_1 + \delta_1 m_1^3)(\delta_1 m_1^8 - 1)}, \quad \delta_1 = \delta^8. \quad (9)$$

Раскладывая правую часть (9) в ряд по степеням  $\delta_1$ , представляя решение в виде ряда

$$m_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_1^i m_1^i(k_1),$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta_1$ , получим уравнения:

$$\frac{dm_1^0}{dk_1} = \frac{\varepsilon}{3}(m_1^0)^6 - \frac{m_1^0}{k_1}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_1^1}{dk_1} &= (3k_1^2)^{-1} \left[ 6\varepsilon k_1^2 m_1^1 (m_1^0)^5 + \varepsilon k_1^2 (m_1^0)^{14} - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon k_1 (m_1^0)^9 + 3(m_1^0)^4 - 3k_1 m_1^1 - 2k_1 (m_1^0)^9 \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

Решая уравнение (10) для нулевого приближения, получаем

$$m_1^0 = k_1^{-1} \left( C^{-5} + \frac{5\varepsilon}{12} k_1^{-4} \right)^{-\frac{1}{5}},$$

откуда  $m_1^0 \sim Ck_1^{-1}$  при  $k_1 \rightarrow \pm\infty$ .

Возвращаясь к переменным  $m, k$ , получаем, что при  $m \rightarrow 0, k \rightarrow \pm\infty$  интегральные кривые уравнения (8) имеют асимптотику

$$m \sim C_1 k^{-1}, \quad C_1 = \delta^{-4}C. \quad (11)$$

По замечанию рецензента отметим, что данная асимптотика верна не для всех решений уравнения (8), в чем можно убедиться сделав замену  $r = \frac{1}{k}$  в уравнении (8) и исследовав окрестность неэлементарной особой точки (0;0).

Асимптотике (11) соответствует приближенное решение уравнения (6)

$$\bar{x}^4 = \bar{x}_0^4 - \tilde{C}_1 e^{-4bs}, \quad \tilde{C}_1 = C_1^3 \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} b^{-4}, \quad s \rightarrow \infty,$$

заданное в окрестности  $\bar{x}_0$ :

$$\bar{x} \simeq \bar{x}_0. \tag{12}$$

Для этого приближенного решения формулы (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{b\bar{x}_0^4}{\bar{x}^3}, \\ \bar{v} &= -a \sin \left( \frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right|}, \\ \bar{w} &= -\cos \left( \frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right|}, \\ \bar{\rho} &= \pm \frac{\bar{x}^3}{b\tilde{C}_1}, \quad \bar{S} = \pm 1, \quad \bar{p} = \pm \bar{S} \frac{\bar{x}^5}{(b\tilde{C}_1)^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned} \tag{13}$$

С формулами (13) представление решения (3) задает решение уравнений газовой динамики (1), не приведенное здесь в силу громоздкости.

Уравнение движения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$$

определяет мировые линии частиц для этого решения в  $R^4(x, \bar{y} = \frac{y}{a}, z, t)$ :

$$\begin{aligned} x^4 &= (\bar{x}_0^4 (e^{4b\tau} - 1) + \bar{x}_0^4) (1 + t^2)^2, \\ \bar{y} &= - \left( \sin \left( \frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right|} + z_0 \right) t + \bar{y}_0, \\ z &= \left( \cos \left( \frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right|} + \bar{y}_0 \right) t + z_0, \end{aligned} \tag{14}$$

где  $x_0, \bar{y}_0, z_0$  — начальные положения частицы при  $t = 0$  (лагранжевы координаты).

Движение газа является изэнтропическим и вихревым. При  $t \rightarrow \infty$  газ растекается до вакуума

$$\begin{aligned} \rho &= \pm \frac{x^3}{b\tilde{C}_1(1+t^2)^3} \rightarrow 0, \\ p &= \pm S \frac{x^5}{(b\tilde{C}_1)^{\frac{5}{3}}(1+t^2)^5} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Температура определяется формулой ( $R$  — газовая постоянная)

$$T = p\rho^{-1}R^{-1} = SR^{-1} \frac{x^2}{(b\tilde{C}_1)^{\frac{2}{3}}(1+t^2)^2}$$

и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

### 4. Движение частиц

Из представления для инвариантной переменной  $\bar{x}$ , условия (12) и формул (14) следует, что  $x_0 \simeq \bar{x}_0$ . Тогда (14) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} x &\simeq x_0 e^{b\tau} \sqrt{1+t^2}, \\ \bar{y} &\simeq -z_0 t + \bar{y}_0, \\ z &\simeq \bar{y}_0 t + z_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым по формулам (15) равен  $J = e^{b\tau}(1+t^2)^{\frac{3}{2}} > 0$ . Мировые линии частиц не пересекаются. Только частица, находящаяся в точке с координатами (0;0;0), будет оставаться в покое. Частицы, находящиеся на оси  $OX$ , будут двигаться вдоль этой оси.

Проекция мировых линий частиц (15) на плоскость  $(x, t)$  представлена на рис. 1. График имеет точку минимума при  $t = -b : x_{min} = x_0 e^{-b \arctg b} \sqrt{1+b^2}$  и наклонные асимптоты при  $t \rightarrow +\infty : x_+ = x_0 e^{\frac{b\tau}{2}}(t-b)$  и при  $t \rightarrow -\infty : x_- = -x_0 e^{-\frac{b\tau}{2}}(t-b)$ . При  $x_0 = \pm 1$  угол между асимптотами будет равен 90 градусам для любого  $b$ .

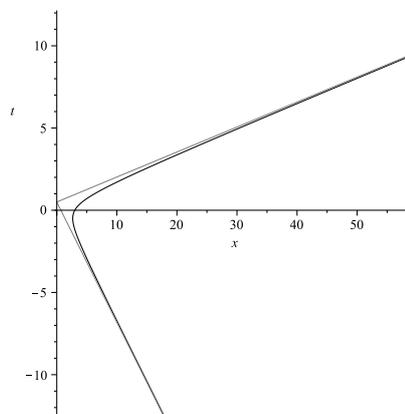


Рис. 1. Проекция кривых (15) на плоскость  $(x, t)$  при  $b = 0.5, x_0 = 3$

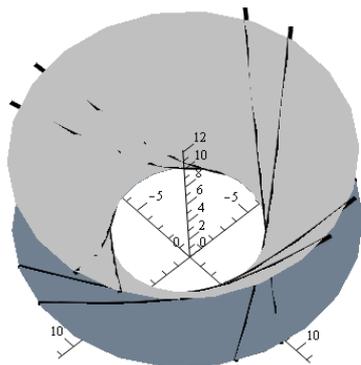


Рис. 2. Поверхность, на которой находятся траектории частиц  $b = 0.5, x_0 = 3, r = 5, t = -2..2$  (вид сверху)

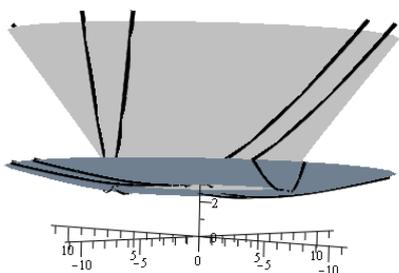


Рис. 3. Поверхность, на которой находятся траектории частиц  $b = 0.5, x_0 = 3, r = 5, t = -2..2$  (вид сбоку)

Проекция движения частиц на плоскость  $(\bar{y}, z)$  являются прямыми линиями с направляющим вектором  $\vec{q} = (-z_0, \bar{y}_0)$ . Нахождение кривой  $F(\bar{y}_0, z_0)$ , с которой точки начинают двигаться по касательным, требует выполнения условия коллинеарности касательной вектору  $\vec{q}$ . Тогда направление нормали  $\vec{n} = (F_{\bar{y}_0}, F_{z_0})$  должно быть коллинеарно  $(\bar{y}_0, z_0)$ :

$$\frac{F_{\bar{y}_0}}{\bar{y}_0} = \frac{F_{z_0}}{z_0}.$$

Искомая кривая есть окружность с центром в точке  $(0,0)$  произвольного радиуса  $r$ :

$$\bar{y}_0^2 + z_0^2 = r^2. \tag{16}$$

Из равенств (15) выражаются  $\bar{y}_0, z_0$ :

$$\bar{y}_0 = \frac{\bar{y} + zt}{1 + t^2}, z_0 = \frac{z - \bar{y}t}{1 + t^2}.$$

Из (16) следует равенство:

$$\bar{y}^2 + z^2 = r^2(1 + t^2). \tag{17}$$

Проекция частиц на плоскость  $(\bar{y}, z)$ , в начальный момент времени находящихся на окружности (16), в

момент времени  $t$  будут находиться на окружности (17). Уравнение (17) совместно с первым уравнением (15) задают поверхность, на которой будут находиться траектории частиц (рис. 2, 3).

Итак, при  $x \neq 0$  частицы будут двигаться по плоским кривым, лежащим на поверхностях вращения с осью вращения, совпадающей с осью  $Ox$ . При  $t < -b$  ( $b > 0$ ) частицы будут приближаться к плоскости  $x = x_0 e^{-b \arctg b \sqrt{1 + b^2}}$ , при  $t > -b$  отдаляться от нее. Частицы, лежащие в плоскости  $x = 0$  в момент времени  $t = 0$  на окружности (16), будут оставаться в этой плоскости на окружностях (17), приближаясь ( $t < 0$ ) к окружности (16) или отдаляясь ( $t > 0$ ) от нее. Описанное движение можно рассматривать как отражение падающего газа от стенки  $x = 0$ . Параметр  $b$  влияет на то, насколько полого будет падать и отражаться газ.

### 5. Заключение

Полученные в работе решения (13), (3) обобщают частное решение подмодели (4) при  $\bar{u} = b\bar{x}$  и  $b = 0$  ( $m = 0$  в уравнении (8)). Это решение исследовано в работе [5], где показано, что оно задает движение частиц газа по гиперболам, лежащим на конусах.

Исследованное в работе [4] приближенное решение в сравнении с решением (13), (3) задает более сложную конфигурацию траекторий частиц, кроме того, поверхности вращений из траекторий для него имеют разные оси вращений.

### Список литературы / References

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55. Ovsyannikov L.V. The «podmodeli» program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V. 58, Iss. 4. Pp. 601–627. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90137-6
- [2] Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «ПОДМОДЕЛИ» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372. EDN: yhiucd Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the "Podmodeli" program for the gas dynamics equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63, Iss. 3. Pp. 349–358. DOI: 10.1016/S0021-8928(99)00046-5
- [3] Черевко А.А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния  $p = f(S)\rho^{5/3}$  / Препр. СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 4–96. Новосибирск, 1996. 39 с. Cherevko A.A. [An optimal system of subalgebras for the Lie algebra of operators allowed by the system of equations of gas dynamics with the equation of state  $p = f(S)\rho^{5/3}$ ] / Preprint SO RAN. In-t gidrodinamiki. No. 4. 1996. 39 p. (in Russian).
- [4] Шаяхметова Р.Ф. Вихревой разлет одноатомного газа вдоль плоских кривых // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 2. С. 63–73. DOI: 10.15372/PMTF20180107 Shayakhmetova R.F. Vortex Scattering of Monatomic Gas Along Plane Curves // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. V. 59. Pp. 241–250. DOI: 10.1134/S0021894418020074
- [5] Шаяхметова Р.Ф. Завихренный разлет одноатомного газа // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 10. Под ред. Урманчеева С.Ф. Уфа: Нефтегазовое дело, 2014. С. 110–113. Shayakhmetova R.F. Vortex expansion of the monatomic gas // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. No. 10. 2014. Pp. 110–113. (in Russian). DOI: 10.21662/uim2014.1.021

## Сведения об авторах / Information about the Authors

### **Рената Фуатовна Никонорова**

канд. физ.-мат. наук

Институт Механики им. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

### **Renata Fuatovna Nikonorova**

Ph.D. (Phys. & Math.)

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

[renatanikon@gmail.com](mailto:renatanikon@gmail.com)

ORCID: [0000-0001-9378-5078](https://orcid.org/0000-0001-9378-5078)

### **Лилия Зинфировна Уразбахтина**

канд. физ.-мат. наук

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

### **Liliia Zinfirovna Urazbakhtina**

Ph.D. (Phys. & Math.)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

[ylz@yandex.ru](mailto:ylz@yandex.ru)

ORCID: [0009-0006-9204-8424](https://orcid.org/0009-0006-9204-8424)