



ISSN: 2658–5782

Номер 3

20204

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Численное исследование взаимодействия ударной волны с засыпкой частиц с использованием модели Баера–Нунциато

П.А. Чупров

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

E-mail: [petchu@mail.ru](mailto:petchu@mail.ru)

Работа посвящена применению модели Баера–Нунциато для изучения ударно-волновых процессов в засыпках частиц. Численный алгоритм основан на HLLC-подобном решателе и учитывает процессы установления равновесия на межфазной границе с учетом эффекта уплотнения частиц. Постановка задачи согласуется с известными экспериментальными данными. В рамках работы получено качественное и количественное соответствие с результатами натуральных экспериментов и расчетов других авторов, предложено объяснение экспериментально наблюдаемым феноменам.

**Ключевые слова:** численное моделирование, уравнения Баера–Нунциато, компактирование

Работа выполнена в рамках государственного задания № 24022400174-3

## Numerical study of the interaction of a shock wave with a layer of particles using the Baer–Nunziato model

P.A. Chuprov

ICAD RAS

E-mail: [petchu@mail.ru](mailto:petchu@mail.ru)

The work is devoted to the application of the Baer–Nunziato model to study shock wave processes in particle beds. The numerical algorithm is based on an HLLC-like solver and takes into account the processes of establishing equilibrium at the interface, taking into account the effect of particle compaction. The problem statement corresponds to the full-scale experiment of B.C. Fan et al. As part of the work, qualitative and quantitative agreement was obtained with the results of natural experiments and calculations of other authors, and an explanation was proposed for the experimentally observed phenomena.

**Keywords:** numerical modeling, Baer–Nunziato equations, compaction

### 1. Введение

Пылевой взрыв — одна из самых опасных ситуаций, которые могут возникнуть при работе с химически активными порошками. Такие явления становятся причинами существенных разрушений и человеческих жертв. Веществами, способных стать причиной пылевого взрыва являются угольная пыль, алюминиевая пыль, мука, древесная пыль и многие другие.

Объемный взрыв отложений химически активной пыли начинается с некоторого начального инициирующего взрыва, природа которого может быть совершенно разной. Например, в угольных шахтах таким инициатором является взрыв метана в глубине. Формирующаяся при этом начальном взрыве ударная волна (УВ) распространяется по помещению, взаимодействует с отложе-

ниями химически активной пыли, диспергирует их в воздух, после чего эти частицы уже сами загораются и усиливают взрыв. Таким образом, важную роль в динамике пылевого взрыва имеет распространяющаяся перед волной горения УВ. При взаимодействии УВ со слоем частиц происходит два эффекта: диспергирование частиц над поверхностью слоя, которое напрямую влияет на параметры волны горения, и деформация, промятие слоя как целого. Первое явление является хорошо изученным как на практике, так и численно [1–3], в то же время волновые процессы в самом слое получили недостаточно внимания и не были столь тщательно исследованы, хотя изменение формы поверхности слоя вследствие сложной волновой динамики в нем может оказывать влияние на параметры волны горения.

## 2. Математическая модель и численный метод

Численное исследование задачи проводилось при помощи модели Баера–Нунциато [4], зарекомендовавшей себя лучшим образом при решении самых разнообразных задач многофазных сред, в том числе и неравновесных. Модель обладает широчайшей областью гиперболичности, что положительно сказывается на качестве численного решения и общей робастности алгоритма. В настоящей работе использовалась двумерная модификация системы, представленная ниже:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_y(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u})\bar{\alpha}_x + \mathbf{i}(\mathbf{u})\bar{\alpha}_y + \mathbf{p} + \mathbf{s},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E} \\ \alpha\rho \\ \alpha\rho v \\ \alpha\rho u \\ \alpha\rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{v}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{v}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho v \\ \alpha(\rho v^2 + p) \\ \alpha\rho uv \\ \alpha v(\rho E + p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{u}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho u \\ \alpha\rho uv \\ \alpha(\rho u^2 + p) \\ \alpha u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} -\bar{v} \\ 0 \\ \bar{p} \\ 0 \\ \bar{p}\bar{v} \\ 0 \\ -\bar{p} \\ 0 \\ -\bar{p}\bar{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} -\bar{u} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{p} \\ \bar{p}\bar{u} \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{p} \\ -\bar{p}\bar{u} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\bar{p} + \beta)F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{p}F \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_x \\ M_y \\ I \\ 0 \\ -M_x \\ -M_y \\ -I \end{bmatrix},$$

$$\bar{\alpha} + \alpha = 1,$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{u}^2}{2} + \frac{\bar{p} + \bar{\gamma}\bar{P}_0}{\bar{\rho}(\bar{\gamma} - 1)},$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{p + \gamma P_0}{\rho(\gamma - 1)},$$

$$F = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{\mu_c}(\bar{p} - p - \beta),$$

$$\beta = \bar{\alpha}\bar{\rho} \frac{dB}{d\bar{\alpha}} = -\bar{\alpha}\bar{\rho} \cdot a \cdot n \cdot \ln \frac{1-\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}_0} \left( \frac{B(\bar{\alpha})}{a} \right)^{\frac{n-1}{n}},$$

$$B(\bar{\alpha}) = \begin{cases} B_a(\bar{\alpha}), & \text{если } \bar{\alpha}_0 < \bar{\alpha} < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$B_a(\bar{\alpha}) = a[b_1(\bar{\alpha}) - b_1(\bar{\alpha}_0) + b_2(\bar{\alpha})]^n,$$

$$b_1(\bar{\alpha}) = (1 - \bar{\alpha}) \cdot \ln(1 - \bar{\alpha}),$$

$$b_2(\bar{\alpha}) = (1 + \ln(1 - \bar{\alpha}_0)) \cdot (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0).$$

Здесь  $t$  — время;  $x$  и  $y$  — пространственные координаты;  $\alpha$  — объемная доля;  $v$  —  $x$ -компонента скорости;  $u$  —  $y$ -компонента скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $F$  — скорость релаксации;  $\beta$  — межгранулярное напряжение;  $\mu_c$  — вязкость компактирования;  $B(\bar{\alpha})$  — потенциальная энергия компактирования. Более подробно процессы релаксации и компактирования описаны, например, в [5, 6]. Вектор  $\mathbf{s}$  содержит в себе обменные члены:  $M_x$  и  $M_y$  соответствуют межфазному обмену импульсом, а  $I$  — энергией. Для расчета обменных членов использовались корреляции из [7].

Для решения полученной системы использовался метод расщепления по физическим процессам. На первом шаге расщепления рассматривается гиперболическая часть системы, на втором — учет вектора  $\mathbf{p}$ , на третьем — вектора  $\mathbf{s}$ . Рассмотрим подробнее гиперболический этап. При решении системы (1) уравнение компактирования решается отдельно. Оставшаяся часть системы на гиперболическом шаге записывается в виде:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}_x(\mathbf{u}) + \mathbf{G}_y(\mathbf{u}) = \mathbf{H}(\mathbf{u})\bar{\alpha}_x + \mathbf{I}(\mathbf{u})\bar{\alpha}_y,$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}\bar{\rho} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E} \\ \alpha\rho \\ \alpha\rho v \\ \alpha\rho u \\ \alpha\rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{v}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{v}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho v \\ \alpha(\rho v^2 + p) \\ \alpha\rho uv \\ \alpha v(\rho E + p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{u}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho u \\ \alpha\rho uv \\ \alpha(\rho u^2 + p) \\ \alpha u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{p} \\ 0 \\ \bar{p}\bar{v} \\ 0 \\ -\bar{p} \\ 0 \\ -\bar{p}\bar{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{p} \\ \bar{p}\bar{u} \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{p} \\ -\bar{p}\bar{u} \end{bmatrix}.$$

Ее конечно-объемная аппроксимация выглядит следующим образом:

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+1/2,j}(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{i+1,j}^n) - \mathbf{F}_{i-1/2,j}(\mathbf{U}_{i-1,j}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n) \right] - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} \left[ \mathbf{G}_{i,j+1/2}(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{i,j+1}^n) - \mathbf{G}_{i,j-1/2}(\mathbf{U}_{i,j-1}^n, \mathbf{U}_{i,j}^n) \right] + \mathbf{H}(\mathbf{U}_{i,j}^n)\Delta(\bar{\alpha})_x + \mathbf{I}(\mathbf{U}_{i,j}^n)\Delta(\bar{\alpha})_y. \quad (2)$$

Численный поток  $\mathbf{F}_{i+1/2,j}(\mathbf{U}_{i,j}^n, \mathbf{U}_{i+1,j}^n)$  рассчитывается с помощью авторского варианта схемы HLLC, основанного на работах [8–11] (остальные численные потоки записываются по аналогии):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{i+1/2,j} &= \begin{bmatrix} \Phi_{i+1/2,j} \\ \bar{\Phi}_{i+1/2,j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{i,j} \\ \bar{\mathbf{W}}_{i,j} \end{bmatrix}, \\
 \Phi_{i+1/2,j} &= \begin{cases} \Phi_{i,j}^n, & \text{если } S_{i+1/2,j}^- \geq 0, \\ \Phi_{i,j}^n + S_{i+1/2,j}^- (\mathbf{Q}_*^- - \mathbf{W}_{i,j}^n), & \text{если } S_{i+1/2,j}^- < 0 \text{ и } S_{i+1/2,j}^* \geq 0, \\ \Phi_{i+1,j}^n + S_{i+1/2,j}^+ (\mathbf{Q}_*^- - \mathbf{W}_{i+1,j}^n), & \text{если } S_{i+1/2,j}^* < 0 \text{ и } S_{i+1/2,j}^+ \geq 0, \\ \Phi_{i+1,j}^n, & \text{если } S_{i+1/2,j}^+ \leq 0, \end{cases} \\
 S_{i+1/2,j}^+ &= \max(v_{i,j}^n + c_{i,j}^n, v_{i+1,j}^n + c_{i+1,j}^n), \\
 S_{i+1/2,j}^- &= \max(v_{i,j}^n - c_{i,j}^n, v_{i+1,j}^n - c_{i+1,j}^n), \\
 S_{i+1/2,j}^* &= \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n + \rho_{i,j}^n v_{i,j}^n (S_{i+1/2,j}^- - v_{i,j}^n) - \rho_{i+1,j}^n v_{i+1,j}^n (S_{i+1/2,j}^+ - v_{i+1,j}^n)}{\rho_{i,j}^n (S_{i+1/2,j}^- - v_{i,j}^n) - \rho_{i+1,j}^n v_{i,j}^n (S_{i+1/2,j}^+ - v_{i+1,j}^n)}, \\
 \mathbf{Q}_*^- &= \begin{bmatrix} C^- \\ C^- S_{i+1/2,j}^* \\ C^- v_{i,j}^n \\ C^- \left[ \frac{p_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^n} + (S_{i+1/2,j}^* - v_{i,j}^n) \left( S_{i+1/2,j}^* + \frac{p_{i,j}^n}{\rho_{i,j}^n (S_{i+1/2,j}^- - v_{i,j}^n)} \right) \right] \end{bmatrix}, \\
 C^- &= \frac{\alpha_{i,j}^n (S_{i+1/2,j}^- - v_{i,j}^n)}{S_{i+1/2,j}^- - S_{i+1/2,j}^*}, \\
 \mathbf{Q}_*^+ &= \begin{bmatrix} C^+ \\ C^+ S_{i+1/2,j}^* \\ C^+ v_{i+1,j}^n \\ C^+ \left[ \frac{p_{i+1,j}^n}{\rho_{i+1,j}^n} + (S_{i+1/2,j}^* - v_{i+1,j}^n) \left( S_{i+1/2,j}^* + \frac{p_{i+1,j}^n}{\rho_{i+1,j}^n (S_{i+1/2,j}^+ - v_{i+1,j}^n)} \right) \right] \end{bmatrix}, \\
 C^+ &= \frac{\alpha_{i+1,j}^n (S_{i+1/2,j}^+ - v_{i+1,j}^n)}{S_{i+1/2,j}^+ - S_{i+1/2,j}^*},
 \end{aligned}$$

где  $c$  — скорость звука. Решатель является симметричным относительно фаз, поэтому выражения для потока в дисперсной фазе получаются из приведенных выше выражений для газовой фазы путем замены величин без черты на величины с чертой.

Аппроксимация градиента объемной доли  $\Delta(\bar{\alpha})_x$  в (2) выглядит как:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\bar{\alpha})_x &= \frac{1}{\Delta x} (\delta_{i+1/2,j} - \delta_{i-1/2,j}), \\
 \delta_{i+1/2,j} &= \begin{cases} \bar{\alpha}_{i,j}^n, & \text{если } \bar{S}_{i+1/2,j}^* \geq 0, \\ \bar{\alpha}_{i+1,j}^n, & \text{иначе.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Наконец, аппроксимация уравнения компактирования выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}_{i,j}^{n+1} &= \bar{\alpha}_{i,j}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [\bar{S}_{i+1/2,j}^* \delta_{i+1/2,j} - \bar{S}_{i-1/2,j}^* \delta_{i-1/2,j}] - \\
 &\quad - \frac{\Delta t^n}{\Delta y} [\bar{S}_{i,j+1/2}^* \delta_{i,j+1/2} - \bar{S}_{i,j-1/2}^* \delta_{i,j-1/2}].
 \end{aligned}$$

### 3. Постановка задачи и результаты

Схематично постановка задачи, основанная на натурном эксперименте из [12], представлена на рис. 1. Через грань АВ в область входит УВ, проходящая сначала над твердым уступом АG, после чего взаимодействующая с засыпкой частиц GDEF. На всех остальных гранях используется граничное условие жесткой стенки с проскальзыванием. В начальный момент времени внутри расчетной области в каждой точке скорости обеих фаз равны нулю, давления равны атмосферному.

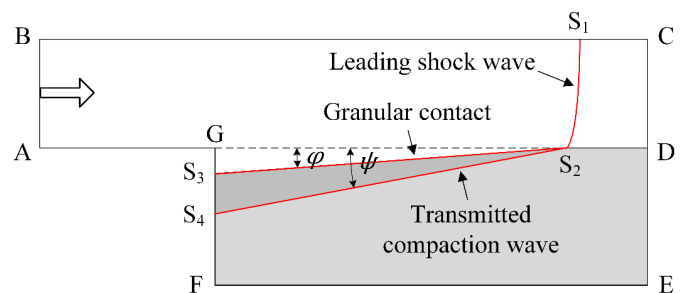


Рис. 1. Схематичное изображение волновой картины

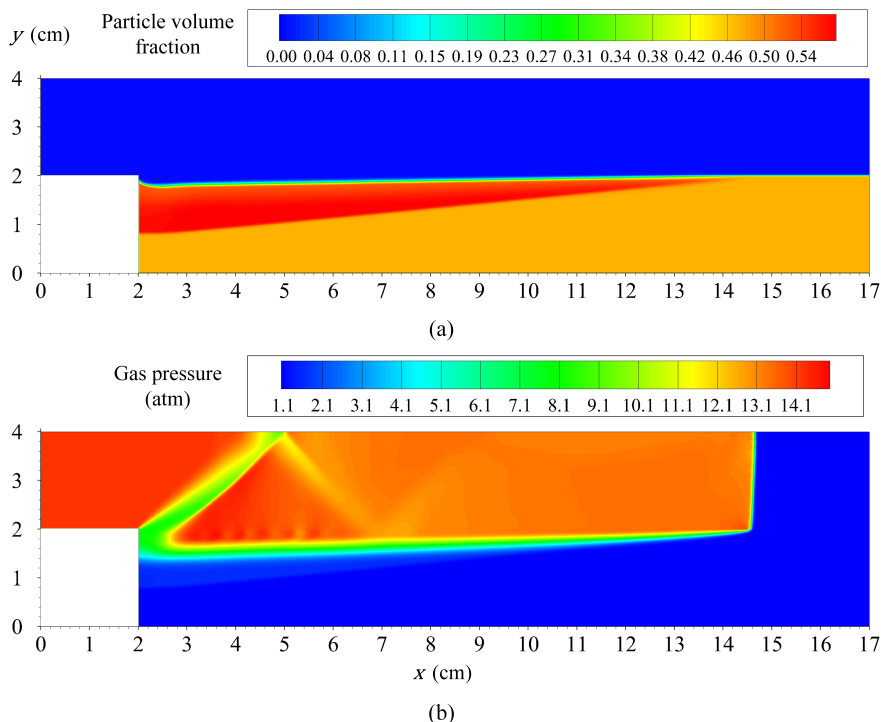


Рис. 2. Пространственное распределение объемной доли частиц (вверху) и давления газа (внизу)

В результате численного моделирования были получены результаты, качественно и количественно соответствующие имеющимся в литературы данным. На рис. 2 представлено пространственные распределения давления газа и объемной доли частиц в момент времени 122 мкс. Из рисунков заметно, что в процессе взаимодействия и УВ, и слой деформируются, происходит промятие слоя под некоторым углом. Более того, под поверхностью слоя формируется зона повышенной объемной доли частиц — зона компактирования. Краевые эффекты у угла уступа и отражение волны компактирования от дна канала не являются предметом интереса настоящей работы, однако представляют перспективную цель дальнейших исследований.

Интерес представляет зависимость геометрических характеристик деформированного слоя от интенсивности проходящей волны. В натуральных экспериментах было обнаружено, что с увеличением числа  $M$  проходящей волны слой проминается все сильнее, то есть угол  $\varphi$  увеличивается, а волна компактирования проникает в слой на все меньшую толщину, то есть угол  $\psi$  уменьшается. Численные эксперименты свидетельствуют о том, что существенное влияние на формирование волновой структуры в слое имеет так называемая «пробка» — область уплотненных частиц перед волной сжатия. Эта «пробка» препятствует проникновению сжатого газа внутрь слоя частиц, ограничивая тем самым зону уплотнения. Доля частиц в «пробке» возрастает с увеличением числа  $M$ , тем самым увеличивая ее останавливающий эффект и уменьшая угол  $\psi$ . На рис. 3 наглядно продемонстрировано наличие вышеупомянутого эффекта, а также наличие эффекта «пробки». В рамках настоящей работы интерес представляет пара-

метрическое исследование «пробки». На рис. 4 представлены аналогичные распределения объемной доли частиц, но для случая разных значений критической объемной доли  $\bar{\alpha}_0$  при превышении которого начинают учитываться эффекты уплотнения частиц.

Ожидаемо, что при увеличении этого значения плотность возникающей пробки увеличивается, а глубина уменьшается в полном соответствии с предложенным ранее механизмом формирования течения в слое — более плотная пробка эффективнее препятствует проникновению волны вглубь слоя. Рассмотрим зависимость течения еще от одного параметра закона компактирования —  $n$ , который входит в выражение для определения межгранулярного напряжения.

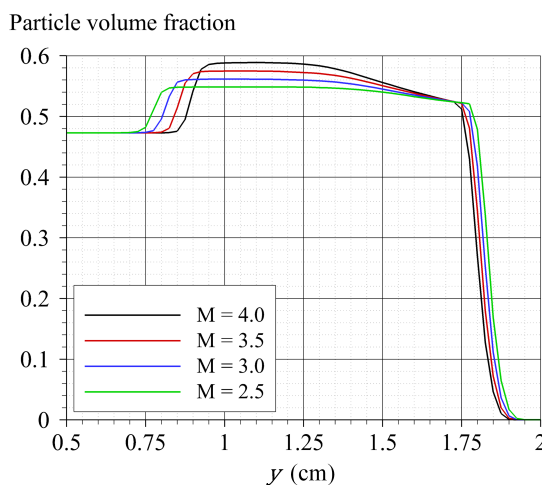


Рис. 3. Зависимость объемной доли частиц от вертикальной координаты для разных интенсивностей проходящей волны в сечении  $x = 3$  см

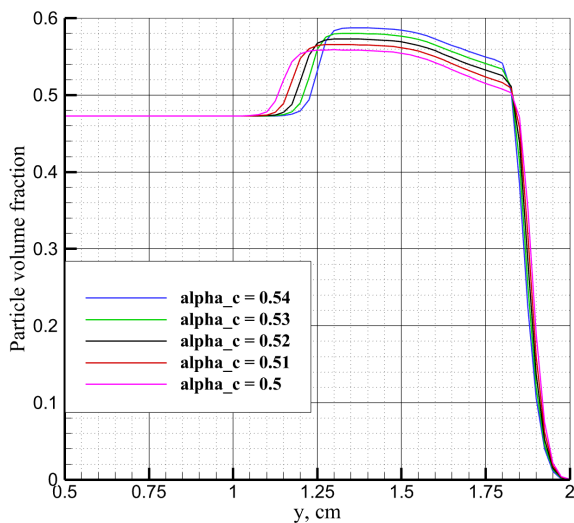


Рис. 4. Зависимость объемной доли частиц от вертикальной координаты для разных значений  $\alpha_0$  в сечении  $x = 4$  см

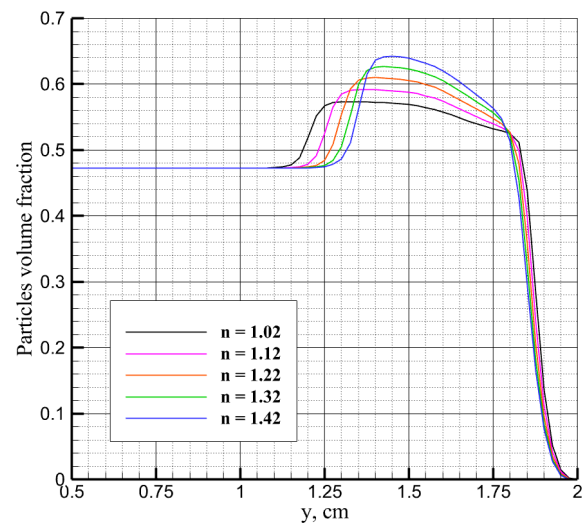


Рис. 5. Зависимость объемной доли частиц от вертикальной координаты для разных значений  $n$  в сечении  $x = 4$  см

На рис. 5 продемонстрированы соответствующие результаты. Представленные кривые показывают аналогичную предыдущим случаям зависимость — увеличение объемной доли в пробке уменьшает ее длину. Стоит отметить, что во всех представленных случаях сокращение длины пробки происходило с обеих сторон, то есть одновременно с уменьшением проникновения волны компактирования вглубь слоя сама поверхность слоя деформировалась больше, несмотря на то, что интенсивность УВ в двух последних случаях не менялась. В рамках настоящей работы предполагается, что это вызвано тем, что более плотный слой эффективнее воспринимает импульс от УВ, что обуславливает более сильную деформацию.

#### 4. Заключение

В рамках настоящей работы продемонстрирована возможность эффективного использования модели Баера–Нунциато для численного моделирования взаимодействия проходящей УВ со слоем частиц. Полученные данные свидетельствуют об эффективности предложенного численного метода, основанного на методе HLLC. На основании полученных данных было предложено объяснение экспериментально наблюдаемому феномену зависимости геометрических характеристик слоя от интенсивности проходящей УВ, заключающееся в формировании под поверхностью слоя области повышенной объемной доли, препятствующей дальнейшему распространению деформации вглубь слоя. Проведено исследование зависимости характеристик деформированного слоя от параметров закона уплотнения частиц. Полученные данные подтверждают правильность предложенного в работе объяснения.

#### Список литературы / References

- [1] Shimura K., Matsuo A. Using an extended CFD-DEM for the two-dimensional simulation of shock-induced layered coal-dust combustion in a narrow channel // *Proc. Comb. Inst.* 2019. V. 37, Issue 3. Pp. 3677–3684. DOI: [10.1016/j.proci.2018.07.066](https://doi.org/10.1016/j.proci.2018.07.066)
- [2] Song Y., Zhang Q. Criterion and propagation process of spark-induced dust layered explosion // *Fuel*. 2020. V. 267. Pp. 117205. DOI: [10.1016/j.fuel.2020.117205](https://doi.org/10.1016/j.fuel.2020.117205)
- [3] Guhathakurta S., Houim R.W. Impact of particle diameter and thermal radiation on the explosion of dust layers // *Proc. Comb. Inst.* 2023. V. 39, Issue 3. Pp. 2905–2914. DOI: [10.1016/j.proci.2022.10.011](https://doi.org/10.1016/j.proci.2022.10.011)
- [4] Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials // *International Journal of Multiphase Flow*. 1986. V. 12, Issue 6. Pp. 861–889. DOI: [10.1016/0301-9322\(86\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0301-9322(86)90033-9)
- [5] Chuprov P.A. Numerical simulation of combustion wave propagation in a black powder charge using a two-fluid model // *Adv. Theory and Practice of Comp. Mech. Smart Innovation, Sys. Tech. Springer*. 2022. V. 274. Pp. 167–178. DOI: [10.1007/978-981-16-8926-0\\_12](https://doi.org/10.1007/978-981-16-8926-0_12)
- [6] Saurel R., Favrie N., Petitpas F., Lallemand M.-H., Gavriluyk S.K. Modeling dynamic and irreversible powder compaction // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 664. Pp. 348–396. DOI: [10.1017/S0022112010003794](https://doi.org/10.1017/S0022112010003794)
- [7] Houim R.W., Oran E.S. A multiphase model for compressible granular-gaseous flows: formulation and initial tests // *J. Fluid Mech.* 2016. V. 789. Pp. 166–220. DOI: [10.1017/jfm.2015.728](https://doi.org/10.1017/jfm.2015.728)
- [8] Li Q., Feng J., Cai T., Hu C. Difference scheme for two-phase flow // *App. Math. Mech.* 2004. V. 25. Pp. 536–545. DOI: [10.1007/BF02437602](https://doi.org/10.1007/BF02437602)
- [9] Liang S., Liu W., Yuan L. Solving seven-equation model for compressible two-phase flow using multiple GPUs // *Comp. & Fluids*. 2014. V. 99. Pp. 156–171. DOI: [10.1016/j.compfluid.2014.04.021](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.04.021)
- [10] Tokareva S.A., Toro E.F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // *J. Comp. Phys.* 2010. V. 229, Issue 10. Pp. 3573–3604. DOI: [10.1016/j.jcp.2010.01.016](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.01.016)

- [11] Lochon H., Daude F., Galon , HerardJ.-M. HLLC-type Riemann solver with approximated two-phase contact for the computation of the Baer-Nunziato two-fluid model // J. Comp. Phys. 2016. V. 326. Pp. 733–762.  
DOI: [10.1016/j.jcp.2016.09.015](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.015)
- [12] Fan B.C., Chen Z.H., JiangX.H., Li H.Z. Interaction of a shock wave with a loose dusty bulk layer // Shock Waves. 2007. V. 16. Pp. 179–187.  
DOI: [10.1007/s00193-006-0059-5](https://doi.org/10.1007/s00193-006-0059-5)

### Сведения об авторах / Information about the Authors

**Петр Анатольевич Чупров**  
Институт автоматизации проектирования РАН, Москва,  
Россия

**Petr Anatolievich Chuprov**  
Institute of Computer Aided Design of the RAS, Moscow,  
Russia  
[petchu@mail.ru](mailto:petchu@mail.ru)  
ORCID: [0000-0003-1564-205X](https://orcid.org/0000-0003-1564-205X)