ISSN: 2658–5782

Номер 2

2024

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 19 (2024), №, 2, с. 73–78

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2024.2.011
DOI: 10.21662/mfs2024.2.011
УДК / UDC: 517.95

Получена / Received: 04.07.2024
Принята / Accepted: 29.07.2024

Приближение решений уравнения теплопроводности с функцией распределения начальной температуры из классов Ульянова по неточным данным

Г.Е. Таугынбаева, А.Ж. Жубанышева, Е.Е. Нурмолдин

Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: axaulezh@mail.ru

Решения уравнений в частных производных, даже в случае их явного выражения посредством рядов Фурье по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора или сверток с соответствующими ядрами, будучи представленные рядами или интегралами фактически представляют собой бесконечные объекты. Поэтому возникает задача их приближения конечными объектами, одна из математических формулировок которой содержится в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П). Задача К(В)П состоит в последовательном выполнении трех задач: К(В)П-1 — восстановление по точной информации в зависимости от вида функционалов и алгоритмов переработки полученной от них числовой информации с указанием оптимального вычислительного агрегата приближения; К(В)П-2 — в оптимальном вычислительном агрегате указание границ значений неточных данных информационных функционалов, сохраняющих порядок восстановления по точной информации; К(В)П-3 — изучается вопрос «существует или не существует другой вычислительный агрегат со структурой, аналогичной структуре рассматриваемого оптимального вычислительного агрегата, и даже, быть может, более общей, но с большей по порядку предельной погрешностью оптимального вычислительного агрегата из задачи К(В)П-2». В настоящей статье рассматривается приближение решений задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальными условиями из классов Ульянова в равномерной и гильбертовой метриках (К(В)П-2) в двумерном случае. Получены порядковые оценки приближения с указанием оптимальных вычислительных агрегатов, построенных по неточным данным тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега. Указаны границы неточностей тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега начальных данных, сохраняющих порядок приближения по точным данным.

Ключевые слова: приближение решений уравнения теплопроводности, задача Коши, классы Ульянова, неточная информация, компьютерный (вычислительный) поперечник

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего образования и науки Республики Казахстан (проект AP 14872564).

Approximation of solutions of the heat conductivity equation with the distribution function of the initial temperature from the Ulyanov classes by inaccurate data

G.E. Taugynbayeva, A.Zh. Zhubanysheva, Y.Y. Nurmoldin

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

E-mail: axaulezh@mail.ru

Solutions of partial differential equations, even in the case of their explicit expression by means of Fourier series with respect to the eigenfunctions of the corresponding differential operator or convolutions with corresponding kernels, being represented by series or integrals, actually again represent infinite objects. Therefore, the problem arises of their approximation by finite objects, one of the mathematical formulations of which is contained in the definition of a Computational (numerical) diameter (C(N)D). The problem of a Computational (numerical) diameter C(N)D consists in the sequential execution of three tasks: C(N)D-1 recovery from accurate information, depending on the type of functionals and algorithms for processing numerical information obtained from them, indicating the optimal computational aggregate of approximation, To C(N)D-2 in an optimal computing aggregate, specifying the boundaries of the values of inaccurate data of information functionals that preserve the order of recovery from accurate information, C(N)D-3 the question is being studied: "does or does not exist another computational aggregate with a structure similar to the structure of the optimal computational aggregate under consideration, and even, perhaps, more general, but with a larger margin of error of the optimal computing unit from the problem C(N)D-2". This article discusses the approximation of solutions to the Cauchy problem for the heat equation with initial conditions from the Ulyanov classes in uniform and Hilbert metrics (C(N)D-2) in the two-dimensional case. Ordinal estimates of the approximation are obtained indicating the optimal computational aggregates based on inaccurate data from the trigonometric Fourier-Lebesgue coefficients. The limits of inaccuracies of the trigonometric Fourier-Lebesgue coefficients of the initial data, preserving the order of approximation according to the exact data, are indicated.

Keywords: approximation of solutions of the heat equation, Cauchy problem, Ul'yanov classes, inaccurate date, Computational (numerical) diameter

1. Введение и постановка задачи

В настоящей статье исследуется проблема приближения решений $u(t, x_1, x_2)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \ \left(t \geqslant 0, (x_1, x_2) \in R^2\right)$$

с начальным условием

$$u(0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \in U_2((0,0), (\theta_1, \theta_2), (1,1))$$

из классов Ульянова (определение классов Ульянова и соответствующие ссылки даны в разделе 2)

$$U_2((0,0), (\theta_1, \theta_2), (1,1))(\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0,1)^2)$$

по неточным данным коэффициентов Фурье функции $f(x_1, x_2)$.

Сформулируем общую постановку задачи приближения решений уравнений в частных производных. Пусть даны нормированные пространства X и Y комплекснозначных функций, определенных соответственно на множествах Ω и Ω_1. Пусть $F \subset X$ и $u(t, x; f)$ решение уравнения теплопроводности с начальным условием из класса F. Ниже предполагается, что все условия корректности (существования, единственности, принадлежности к пространству) выполнены.

Центральным здесь является следующее определение:

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y = \delta_N(\varepsilon_N; F; D_N)_Y = \\ = \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y,$$

где

$$\delta_N\left(\varepsilon_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv \delta_N\left(\varepsilon_N; F; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y \equiv \\ \equiv \sup_{\substack{f \in F \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \leqslant 1 \\ (\tau = 1, \ldots, N)}} \left\| u\left(t, x; f\right) - \varphi_N\left(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)}, \ldots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}, t, x\right) \right\|_Y,$$

$\varepsilon_N = \left(\varepsilon_N^{(1)}, \ldots, \varepsilon_N^{(N)}\right)$; $\quad \varepsilon_N^{(j)} \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, N)$, $l^{(N)} = (l_N^{(1)}, \ldots, l_N^{(N)})$ — набор функционалов $l_N^{(j)} : F \to C \ (j = 1, \ldots, N)$; C — поле комплексных чисел, функция $\varphi_N(z_1, \ldots, z_N; t, x)$ действует из $C^N \times \Omega_1$ в C; $\left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}$ — множество всевозможных пар $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$, $D_N \subset \left\{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right\}$.

Следующая постановка задачи сформулирована Н. Темиргалиевым (см. [1]) и известна под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (К(В)П).

При заданных F, Y, D_N изучаются следующие задачи.

Задача К(В)П-1. Находится порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$, информативная мощность набора вычислительных агрегатов D_N.

Задача К(В)П-2. Производится построение конкретного вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$ из D_N, поддерживающего порядок $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$, для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N$ с неотрицательными компонентами, называемой К(В)П-2 предельной погрешностью (соответствующей вычислительному агрегату $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$), такой, что

$$\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)\right)_Y \equiv \sup_{\substack{f \in F, \\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right| \leqslant 1 \\ (\tau = 1, \ldots, N)}} \left\| u(t, x; f) - \overline{\varphi}_N\left(\bar{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)}, \ldots, \bar{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}; t, x\right) \right\|_Y$$

с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty \ (\ \eta_N > 0) : \varlimsup_{N \to +\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty.$$

Здесь и ниже записи $A_N \ll B_N$ и $A_N \asymp B_N$ соответственно означают $A_N \leqslant cB_N (c > 0)$ и одновременное выполнение $A_N \ll B_N$ и $B_N \ll A_N$, где $\{A_N\}$ и $\{B_N\}$ — неотрицательные последовательности. Тем самым запись $A_N \asymp B_N$ означает, что существуют положительные константы $c_1, c_2 (c_1 < c_2)$, такие, что $c_1 B_N \leqslant A_N \leqslant c_2 B_N$.

Задача К(В)П-3. Устанавливается массивность предельной погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$: находится как можно большое множество $D_N\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$ (обычно связанные со структурой исходного $\left(\bar{l}^{(N)}, \overline{\varphi}_N\right)$) вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty \ (\eta_N > 0):$$

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \left(l^{(N)}, \varphi_N\right)\right)_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty.$$

Задача К(В)П-1 — приближения решений уравнений теплопроводности с начальными условиями из классов Коробова E_s^r, Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r(0,1)^s$, Никольского–Бесова $B_{2,\theta}^r(0,1)^s$, Ульянова $U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$ по точной информации исследовались в [2–5]. Задаче приближения решений уравнения теплопроводности по неточным данным посвящены работы [6, 7].

2. Необходимые определения и утверждения

Лемма А [1]. *Пусть дано целое положительное число s. Для всякой 1-периодической по каждой переменной функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье решение $u(t,x;f)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \ \ (t \geqslant 0, x \in R^s)$$

с начальным условием

$$u(0,x) = f(x), \ x \in R^s$$

представимо в виде:

$$u(t,x;f) = \sum_{m\in Z^s} \hat{f}(m)\, e^{-4\pi^2 (m,m) t} e^{2\pi i (m,x)},$$

где

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i (m,x)} dx \quad (m \in Z^s)$$

— тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега функции $f(x)$.

Напомним необходимые определения.

Пространство Лебега. Пусть $E \subset R^s$ — измеримое множество. Тогда в класс $L^p(E)$ относят все измеримые на E функции f, такие, что конечны следующие нормы:

1. Если $1 \leqslant p < \infty$, то
$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}};$$
2. Если $p = \infty$, то под $L^\infty(E)$ понимается либо пространство равномерно непрерывных на E функций f и тогда
$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(E)} = \sup_{x\in E} |f(x)|,$$
либо пространство существенно ограниченных на E функций f с нормой
$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup_{x\in E} |f(x)|.$$

Под классом $L^{\infty,p} \equiv L^{\infty,p}\left([0,+\infty) \times (0,1)^s\right)$ будем понимать множество всех функций $g: [0,+\infty) \times R^s \to C$, таких, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ функция $g_t(x) = g(t,x)$ как функция аргумента $x \in R^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{\infty,p}} = \sup_{t\geqslant 0} \left(\int\limits_{[0,1]^s} |g(t,x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

П.Л. Ульяновым в [8] были установлены неулучшаемые связи между скоростью убывания коэффициентов Фурье функции одной переменной и скоростью роста ее производных. На основе этих результатов Н. Темиргалиевым в [9] были определены классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, 1-периодических по каждой из s $(s = 1, 2, \dots)$ переменных, таких, что ($\overline{y} = \max\{|y|; 1\}$):

$$\left|\hat{f}(m)\right| \leqslant \prod_{j=1}^{s} (\overline{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\overline{m}_j^{\alpha_j^{-1}}} \psi_j(\overline{m}_j) \ \ (m \in Z^s),$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in R^s$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in (0,1]^s$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ $(\alpha_j > 0 \ (j = 1, \dots, s))$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)$ (здесь $\psi_j(x)$ $(j = 1, \dots, s)$ — медленно колеблющиеся положительные функции, т.е. такие, что для всякого $\delta \neq 0$ величина $\lim\limits_{x\to\infty} x^\delta \psi_j(x)$ равна 0 или $+\infty$, исходя из того $\delta < 0$ или $\delta > 0$):

$$\sum_{m\in Z^s} \prod_{j=1}^{s} (\overline{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\overline{m}_j^{\alpha_j^{-1}}} \psi_j(\overline{m}_j) < +\infty.$$

Шкала классов $U_s(\beta,\theta,\alpha,\psi)$ представляет собой классификацию функций в широком диапазоне от предельно малой гладкости до аналитических и их подклассов, включая известные классы Коробова [10, 11] $E_s^r \equiv U_s\left(-r, \bar{1}, \bar{1}; \bar{1}\right)$, где $r = (r_1, \dots, r_s) \in Z^s$, причем $r_j > 1$ при всех $j = 1, \dots, s$. Более того, при определенных значениях параметров класс $U_s(\beta,\theta,\alpha) \equiv U_s\left(\beta,\theta,\alpha;\bar{1}\right)$ с точностью до постоянных сомножителей может быть определен не опосредованными, типа формул Фурье, а прямыми ограничениями на саму бесконечно дифференцируемую функцию.

Именно в силу теорем из [8] при всех $\beta \in R^s$, $\theta \in (0,1)^s$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]^s$ класс $U_s(\beta,\theta,\alpha)$ в указанном выше смысле совпадает с классом бесконечно дифференцируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1,...,x_s)$, таких, что для всех $k = (k_1,...,k_s) \in Z^s$ ($k_j \geqslant 0, j = 1,...,s$) выполнены неравенства

$$\left\| \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_s}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_s^{k_s}} f\left(x_1,...,x_s\right) \right\|_{C[0,1]^s} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{j=1}^{s} \overline{k_j}^{\alpha_j(\beta_j+\overline{k_j})} \left(\frac{\alpha_j}{e \ln \frac{1}{\theta_j}} \right)^{\alpha_j \overline{k_j}}.$$

Е.Е. Нурмолдиным [5] были получены оптимальные оценки дискретизации решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из класса $U_2 \equiv U_2((0,0),(\theta_1,\theta_2),(1,1))$ в нормах $L^p (2 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Справедливы

Теорема A [5]. *Пусть дано* $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in (0,1)^2$, $\theta_1 \leqslant \theta_2$. *Тогда выполнено соотношение*

$$\inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\varphi_N} \sup_{f \in U_2} ||u(t,x_1,x_2) -$$
$$-\varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),...,\hat{f}(m_1^{(N)},m_2^{(N)});t,x_1,x_2)||_{L^{\infty,\infty}} \asymp$$
$$\asymp N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Теорема B [5]. *Пусть дано* $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in (0,1)^2$, $\theta_1 \leqslant \theta_2$. *Тогда выполнено соотношение*

$$\inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\varphi_N} \sup_{f \in U_2} ||u(t,x_1,x_2) -$$
$$-\varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)},m_2^{(1)}),...,\hat{f}(m_1^{(N)},m_2^{(N)});t,x_1,x_2)||_{L^{\infty,2}} \asymp$$
$$\asymp N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть дано* $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in (0,1)^2$, $\theta_1 \leqslant \theta_2$. *Тогда для оператора приближения*

$$\overline{\varphi}_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);t,x\right) = \\ = \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in Z^2,\\ \overline{m}_1+(log_{\theta_1}\theta_2)\overline{m}_2 \leqslant n}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)}, \qquad (1)$$

$$N = |E_n|,$$
$$E_n = \{m = (m_1,m_2) : \overline{m}_1 + (log_{\theta_1}\theta_2)\overline{m}_2 \leqslant n\},$$
$$\overline{m}_j = \max\{|m_j|,1\} \ (j=1,2), \ n = 2,3,...$$

и для величины $\widetilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1}\theta_2}}$ *справедливо соотношение*

$$\inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\varphi_N} \sup_{\substack{f\in U_2,\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leqslant 1\\ (\tau=1,...,N)}} ||u(t,x_1,x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)},m_2^{(1)}) + \gamma_N^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_N,...,\hat{f}(m_1^{(N)},m_2^{(N)}) + \gamma_N^{(N)}\widetilde{\varepsilon}_N;t,x_1,x_2)||_{L^{\infty,\infty}} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\substack{f\in U_2,\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leqslant 1\\ (\tau=1,...,N)}} \left\| u\left(t,x_1,x_2\right) - \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in Z^2,\\ \overline{m}_1+(log_{\theta_1}\theta_2)\overline{m}_2 \leqslant n}} \left(\hat{f}\left(m\right) + \gamma_N^{(m)}\widetilde{\varepsilon}_N\right) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^{\infty,\infty}} \asymp N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Теорема 2. *Пусть дано* $\theta = (\theta_1,\theta_2) \in (0,1)^2$, $\theta_1 \leqslant \theta_2$. *Тогда для оператора приближения* (1) *и для величины* $\widetilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N log_{\theta_1}\theta_2}}$ *справедливо соотношение*

$$\inf_{m^{(1)},...,m^{(N)};\varphi_N} \sup_{\substack{f\in U_2\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leqslant 1\\ (\tau=1,...,N)}} ||u(t,x_1,x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)},m_2^{(1)}) + \gamma_N^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_N,...,\hat{f}(m_1^{(N)},m_2^{(N)}) + \gamma_N^{(N)}\widetilde{\varepsilon}_N;t,x_1,x_2)||_{L^{\infty,2}} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\substack{f\in U_2\\ \left|\gamma_N^{(\tau)}\right|\leqslant 1\\ (\tau=1,...,N)}} \left\| u\left(t,x_1,x_2\right) - \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in Z^2,\\ \overline{m}_1+(log_{\theta_1}\theta_2)\overline{m}_2 \leqslant n}} \left(\hat{f}\left(m\right) + \gamma_N^{(m)}\widetilde{\varepsilon}_N\right) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)} \right\|_{L^{\infty,2}} \asymp N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\sqrt{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1}\theta_2}}.$$

Схема доказательств Теорем 1 и 2 заключается в следующем: доказательства теорем состоит в оценках ошибок приближения сверху и снизу. Получение оценок сверху заключается в явном представлении решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (когда функция распределения начальных температур данного уравнения 1-периодична по каждой из переменных и имеет сходящийся тригонометрический ряд Фурье) в виде ряда (см. Лемму А) и основано на результатах приближения решения уравнения теплопроводности по точным данным Е. Нурмолдина (Теоремы А и В). Вместе с тем в оценках сверху производится оценивание слагаемого, получаемого при замене точных данных — тригонометрических коэффициентов Фурье функции распределения начальных температур на их приближенные. В оценках снизу для любых вычислительных агрегатов, построенных по значениям тригонометрических коэффициентов Фурье, функцией распределения начальной температуры указывается функция, обеспечивающая полученную сверху оценку.

4. Заключение

В настоящей работе решается задача приближения решений уравнения теплопроводности в условиях искаженных данных. А именно, получены точные порядки убывания погрешностей приближения решений уравнения теплопроводности по неточным данным тригонометрических коэффициентов Фурье начальной температуры в нормах $L^{\infty,2}$ и $L^{\infty,\infty}$. Данные порядки совпадают с порядками убывания погрешностей приближения по точным данным. Так как излишняя точность вычислений при реализации алгоритма приводит к неоправданному увеличению объема памяти и количества арифметических операций и не улучшает заложенного в алгоритме порядка точности, полученные результаты имеют как теоретическую, так и практическую ценность.

Список литературы / References

[1] Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. 2018. Т. 124, № 3. С. 8–88.
Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, Computer Science, Mechanics Series, 2018. V. 124 (3). Pp. 8–88.
EDN: HLDJFP

[2] Hua L.K., Wang Y. Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin– Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1981. 241 p.

[3] Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B/K. Е. Шерниязов: дис.... канд. физ.-матем. наук, КазГУ им. аль-Фараби. Алматы, 1998.
Sherniyazov K.E. [Approximate reconstruction of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E, SW and B/K.] *Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravnenija teploprovodnosti s funkcijami raspredelenija nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i B/K*. Ph.D. theses (phys. & math). al-Farbi Kazakhstan state university, Almaty. 1988.

[4] Ажгалиев Ш.У. О дискретизации решений уравнения теплопроводности // Матем. заметки. 2007. Т. 82, Вып. 2. С. 177–182.
EDN: JSYYED
Azhgaliev S. Discretization of the Solutions of the Heat Equation. Mathematical Notes. 2007. Vol. 82, no. 1–2. Pp. 177–182.
DOI: 10.1134/S000143460707019X

[5] Нурмолдин Е.Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U_2–классов Ульянова // Сиб. журн. вычисл. матем. 2005. Т. 8, № 4. С. 337–351.
Nurmoldin Y.Y. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the ulyanov $U2$-classes // Numerical Analysis and Applications. 2005. V. 8 (4). Pp. 337–351.
EDN: PATVYP

[6] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54.
DOI: 10.4213/sm7301
Magaril-Il'yaevG.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data // Sb. Math. 2009. V. 200 (5). Pp. 665–682.
DOI: 10.1070/SM2009v200n05ABEH004014

[7] Утесов А.Б., Базарханова А.А. Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1705–1714.
DOI: 10.31857/S0374064121120128
Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit // Differential Equations. 2021. V. 57, No. 12. Pp. 1726–1735.
DOI: 10.1134/S0012266121120168

[8] Ульянов П.Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 1990. Т. 181, № 5. С. 589–609.
MathNet: sm1191
Ul'yanov P.L. On classes of infinitely differentiable functions // Math. USSR-Sb. 1991. V. 70 (1). Pp. 11–30.
DOI: 10.1070/SM1991v070n01ABEH001251

[9] Темиргалиев Н. Классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы // Доклады академии наук. 2003. Т. 393, № 5. С. 605–608.
Temirgaliev N. Classes $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ and Quadrature Formulas // Doklady Mathematics. 2003. V. 68, No. 3. Pp. 414–417.
EDN: OPSOPD

[10] Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Москва: Физматгиз. 1963. 224 с.
Korobov N.M. [Number-theoretic methods in approximate analysis] *Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize*. Moscow. 1963. 224 p.

[11] Бахвалов Н.С. Оценки снизу асимптотических характеристик функций с доминирующей смешанной производной // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 6. С. 655–664.
MathNet: mzm9930
Bakhvalov N.S. A lower bound for the asymptotic characteristics of classes of functions with dominating mixed derivative // Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1972. V. 12. Pp. 833-838.
DOI: 10.1007/BF01156040

Сведения об авторах / Information about the Authors

Галия Ерболовна Таугынбаева
PhD
Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

Galiya Erbolovna Taugynbayeva
PhD
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
galija_1981tau@mail.ru
ORCID: 0000-0001-6880-2534

Аксауле Жанбыршиевна Жубанышева
PhD
Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

Aksaule Zhanbyrshievna Zhubanysheva
PhD
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
axaulezh@mail.ru
ORCID: 0000-0003-0713-1719

Ерик Ерсалынович Нурмолдин
кандидат физико-математических наук
Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

Yerik Yersalynovich Nurmoldin
PhD (phys. & math)
Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
e_nurmoldin@mail.ru
ORCID: 0009-0002-6972-2338