



ISSN: 2658–5782

Номер 2

2024

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Деформирование газового шара в иголку или диск

Ю.В. Юлмухаметова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа,
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: tarasova_yulya@mail.ru

Рассматривается одна из 11 известных моделей трехмерного движения газа, скорости частиц которого линейно зависят от пространственных координат. Модель состоит из двух матричных дифференциальных уравнений первого порядка, двух векторных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения состояния газа и функции плотности. Для данной модели найдено точное решение с антидиагональной матрицы линейности. Показано, что для специальных начальных данных решение имеет вид решения с однородной деформацией (когда эйлеровы переменные линейно зависят от лагранжевых переменных). Определены все компоненты вектора скорости и функция плотности. Записаны уравнения мировых линии движения частиц газа, по ним построены траектории движения частиц. Исследовано движение выделенного объема частиц газа.

Ключевые слова: линейное поле скоростей, однородная деформация, газовая динамика, точное решение

Deformation of a gas ball into a needle or disk

Yu.V. Yulmukhametova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia,
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: tarasova_yulya@mail.ru

One model of gas motion is considered, the particle velocities of which linearly depend on spatial coordinates. The model consists of two first-order matrix differential equations, two first-order vector differential equations, a gas equation of state and a density function. An exact solution for the antidiagonal linearity matrix has been found for this model. All components of the velocity vector have been determined. The equations of the world lines of motion of gas particles are written down. The motion of the isolated volume of gas particles is investigated.

Keywords: linear velocity field, uniform deformation, gas dynamics, exact solution

1. Введение

Газовая динамика частиц, скорости которых являются линейными функциями от пространственных координат, тесно связана с теорией эллипсоидальных фигур равновесия. Интерес к данной области обуславливается ее значением для космогонии и астрофизики, в частности, важностью ее выводов для теории устойчивости фигур небесных тел. Первые исследования в этой области берут начало в работах Ньютона, который длительный период изучал статистические состояния фигур равновесия. Далее Маклорен, Якоби, Лиувилль и многие другие [1]. В 1861 г. Риман в статье [2] показал, что при условии линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общий тип движения, совместимый с условием сохранения эллипсоидальной формы фигуры равновесия, представляет собой суперпозицию равномерного вращения и внутренних движений с равномерно распределенной завихренностью жидкости.

Именно после Римана получила развитие математическая теория нахождения и исследования решений в виде линейного поля скоростей. Современный обзор наиболее значимых результатов по динамике жидких и газовых эллипсоидов дан в работе [3], который связан, главным образом, с выводом различных форм уравнений движения и исследованием качественных свойств динамики эллипсоидальных фигур.

2. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения идеальной газовой динамики [4]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ \rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ S_t + (\vec{u} \cdot \nabla) S &= 0 \text{ или} \\ p_t + (\vec{u} \cdot \nabla) p + \rho a^2 \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t, \vec{x} = (x, y, z)$ — независимые переменные; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — оператор градиента; $\vec{u} = (u, v, w)$ — скорость; p — давление; ρ — плотность; S — энтропия; уравнение состояния $p = f(\rho, S)$ замыкает систему (1); $a^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука. Если из уравнения состояния выразить энтропию $S = g(\rho, p)$, то $a^2(p, \rho) = f_\rho(\rho, g(p, \rho))$.

Решение уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей имеет вид:

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (2)$$

где $A(t)$ — линейный оператор 3×3 ; \vec{u}_0 — трехмерный вектор. Если $\vec{u}_0 = 0$, то (2) задает решение с однородной деформацией. Одно из таких решений было найдено и исследовано в [5]. Если $\vec{u}_0 \neq 0$, то (2) является решением с неоднородной деформацией. Такие точные решения найдены и изучены в [6–9].

При классификации моделей с уравнениями газовой динамики с линейным полем скоростей и произвольным уравнением состояния было получено 11 моделей [10], каждая из которых представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (24-го и выше). Есть случаи интегрируемых систем [11]. В каждом из 11 случаев можно найти точные решения. Существует несколько подходов к поиску этих решений. Один из них заключается в выборе конкретной модели с линейным полем скоростей и конкретного вида матрицы линейности A , как это было сделано в работе [9]. Конечно же, выбор матрицы должен быть обоснован некоторыми физическими свойствами газа, но на данном этапе исследований это требование опустим.

3. Поиск точного решения

Рассмотрим МОДЕЛЬ 4 из [10], которая состоит из следующих уравнений:

$$S' + 2SA = (1 - \gamma)S \operatorname{tr} A, \quad A' + A^2 = S, \quad S = S^T,$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 = (1 - \gamma)\vec{v} \operatorname{tr} A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v};$$

уравнение состояния имеет вид:

$$p = H \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma} + \chi(\rho g(S));$$

функция плотности такова:

$$\rho = \rho_0 e^{-\int \operatorname{tr} A dt} |I_1 + (\gamma - 1)I|^{1/(\gamma-1)};$$

где

$$I = \int e^{-\int a_0 dt} - 2 \int \vec{u}_0 \cdot \vec{v} e^{-\int a_0 dt} dt;$$

$$J = \vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{v} \cdot \vec{x}, \quad a_0(t) = (1 - \gamma)\operatorname{tr} A;$$

ρ_0, I_1, H, γ — произвольные постоянные; χ, g — произвольные функции.

Заметим, что в уравнении состояния при $\gamma \rightarrow 0$ получим

$$p = H \ln \rho + \chi(\rho g(S)).$$

Будем искать точное решение с матрицей линейности антидиагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & 0 \\ a_{31}(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы A матрица S :

$$S = \begin{pmatrix} a_{13}a_{31} & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} + a_{22}^2 & 0 \\ a'_{31} & 0 & a_{13}a_{31} \end{pmatrix}.$$

Тогда система из МОДЕЛИ 4 для элементов матрицы A примет вид:

$$\begin{aligned} 3a'_{13}a_{31} + a_{13}a'_{31} &= (1 - \gamma)a_{22}a_{13}a_{31}, \\ a''_{13} + 2a_{13}^2a_{31} &= (1 - \gamma)a_{22}a'_{13}, \\ a''_{22} + 4a_{22}a'_{22} + 2a_{22}^3 &= (1 - \gamma)a_{22}(a'_{22} + a_{22}^2), \\ a''_{31} + 2a_{31}^2a_{13} &= (1 - \gamma)a_{22}a'_{31}, \\ 3a'_{31}a_{13} + a_{31}a'_{13} &= (1 - \gamma)a_{22}a_{13}a_{31}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнений будем искать в виде:

$$a_{13} = c_{13}t^\alpha, \quad a_{31} = c_{31}t^\beta, \quad a_{22} = c_{22}t^\delta, \quad (4)$$

где $c_{13}, c_{31}, c_{22}, \alpha, \beta, \delta$ — постоянные.

После подстановки решения (4) в систему (3) получим равенства:

$$\delta = \alpha = \beta = -1, \quad c_{13}c_{31} = 1, \quad c_{22} = \pm 1.$$

Для определенности положим, что

$$c_{13} = c_{31} = 1, \quad c_{22} = 1 \Rightarrow \gamma = 5.$$

Таким образом, матрицы A и S имеют вид:

$$A = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем дифференциальное уравнение для вектора $\vec{u}_0(t)$:

$$\vec{u}_0'' + 2A'\vec{u}_0 + 2A\vec{u}_0' + 2A^2\vec{u}_0 = (1 - \gamma) \operatorname{tr} A(\vec{u}_0' + A\vec{u}_0).$$

После подстановки матрицы A и постоянной γ распишем равенство по координатам:

$$\begin{aligned} u''_{01} + \frac{4}{t}u'_{01} - \frac{2}{t}u'_{03} + \frac{2}{t^2}u_{01} - \frac{2}{t^2}u_{03} &= 0, \\ u''_{02} + \frac{6}{t}u'_{02} + \frac{4}{t^2}u_{02} &= 0, \\ u''_{03} + \frac{4}{t}u'_{03} - \frac{2}{t}u'_{01} + \frac{2}{t^2}u_{03} - \frac{2}{t^2}u_{01} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение для u_{02} является уравнением Эйлера. После замены $t = e^x$ оно станет линейным однородным

уравнением с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид:

$$u_{02} = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^4},$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Из уравнения для u_{01} вычтем уравнение для u_{03}

$$(u_{01} - u_{03})'' + \frac{6}{t}(u_{01} - u_{03})' + \frac{4}{t}(u_{01} - u_{03}) = 0.$$

Получим уравнение Эйлера, решение которого имеет вид:

$$u_{01} - u_{03} = \frac{c_3}{t} + \frac{c_4}{t^4},$$

где c_3, c_4 — постоянные.

Из последнего равенства выразим u_{01} и подставим в первое уравнение системы (5). Получим уравнение для u_{03}

$$u_{03}'' + \frac{2}{t}u_{03}' + \frac{6}{t^2}c_4 = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$u_{03} = -6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t},$$

где p_0 — постоянная.

Следовательно,

$$u_{01} = -6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t} + \frac{c_3}{t} + \frac{c_4}{t^4}.$$

Таким образом, вектор скорости (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{z}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t} + \frac{c_3}{t} + \frac{c_4}{t^4}, \\ v &= \frac{y}{t} + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^4}, \\ w &= -\frac{x}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t}. \end{aligned}$$

Заметим, что так как уравнения газовой динамики допускают 11-ти параметрическую группу преобразований, то некоторые константы в последних трех формулах можно уточнить. Применяя галлеево преобразование можно добиться $p_0 = c_1 = c_3 = 0$:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{z}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t} + \frac{c_4}{t^4}, \\ v &= \frac{y}{t} + \frac{c_2}{t^4}, \\ w &= -\frac{x}{t} - 6c_4 \ln |t|. \end{aligned} \tag{6}$$

4. Мировые линии

Положение частицы определяется ее скоростью и зависит от времени и начального положения [12]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \tag{7}$$

где t, \vec{x}_0 — лагранжевы переменные; t, \vec{x} — эйлеровы переменные. Связь между эйлеровыми и лагранжевыми переменными дается соотношением $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$ как решение задачи (7).

Распишем (7) по координатам, учитывая (6):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{z}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{c_4}{t^4}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t} + \frac{c_2}{t^4}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{x}{t} - 6c_4 \ln |t|. \end{aligned}$$

Выбором начальных данных зададим $c_2 = c_4 = 0$. Получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{z}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{x}{t}.$$

Система имеет следующее решение:

$$x = tN_x + \frac{N}{2t}, \quad y = tN_y, \quad z = -tN_x + \frac{N}{2t},$$

где N, N_x, N_y — постоянные.

Введем удобную систему координат

$$x + z \rightarrow x, \quad x - z \rightarrow z.$$

Мировые линии движения частиц газа примут вид ($x_0 = N, y_0 = N_y, z_0 = 2N_x$):

$$x = \frac{x_0}{t}, \quad y = ty_0, \quad z = tz_0, \tag{8}$$

где $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — лагранжевы переменные.

При этом плотность задается формулой

$$\rho = \frac{\rho_0}{|t|} |I_1 + 4t^2 x^2|^{1/4}.$$

Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным равен

$$J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right| = t.$$

Он обращается в ноль при $t = 0$. В этот момент времени ранг матрица Якоби равен 1. Значит коллапс частиц газа достигается в точке, причем эта точка бесконечно удаленная на оси Ox , так как в этот момент времени $x = \infty, y = z = 0$. При этом плотность в этой точке обращается в бесконечность.

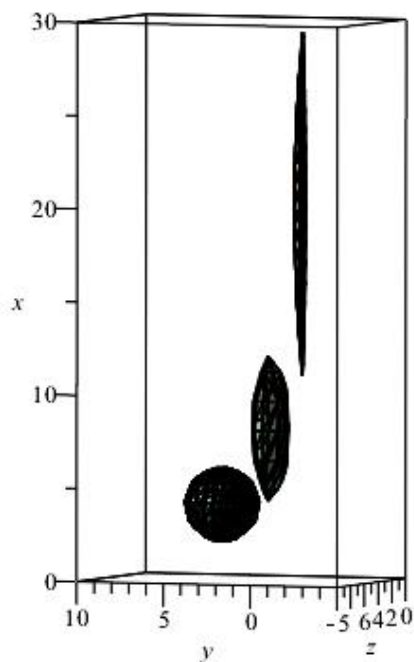
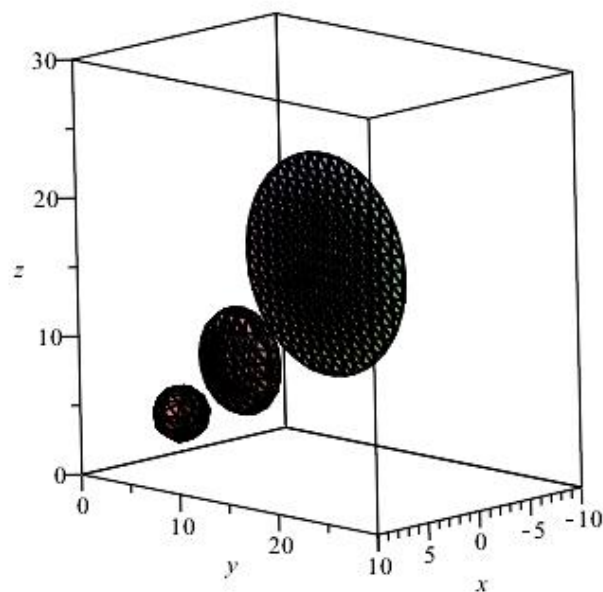
5. Движение выделенного объема

Построим движение выделенного объема сплошной среды, движения частиц которой в пространстве описываются уравнениями (8). Пусть в начальный момент времени $t = 1$ объем ограничен сферой радиуса 2 с центром в точке с координатами (4,4,4):

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 4.$$

Тогда в лагранжевых координатах уравнение сферы примет вид:

$$(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 + (z_0 - 4)^2 = 4.$$

Рис. 1. Движение выделенного объема среды при $t \rightarrow 0$ Рис. 2. Движение выделенного объема среды при $t \rightarrow \infty$

Отсюда следует уравнение для поверхности двигающегося объема:

$$\frac{(x - 4t^{-1})^2}{t^{-2}} + \frac{(y - 4t)^2}{t^2} + \frac{(z - 4t)^2}{t^2} = 4. \quad (9)$$

Построим движение объема при приближении частиц к моменту коллапса, т.е. при $t \rightarrow 0$. Это допустимо, так как полученное точное решение допускает инверсию ($x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$).

Эта поверхность — симметричный эллипсоид с полуосями $a = t^{-1}$, $b = c = t$. При $t \rightarrow 0$ одна полуось неограниченно увеличивается, а две другие полуоси стремятся к нулю. Получаем, что любая сфера превращается в иголку (рис. 1). При этом объем эллипсоида равен $V = abc = t$, то есть объем со временем меняется и стремится к нулю при $t \rightarrow 0$.

При $t \rightarrow \infty$ одна полуось эллипсоида стремится к нулю, а две другие неограниченно увеличиваются. Получаем, что любая сфера превращается в диск (рис. 2).

6. Заключение

Таким образом, найдено точное решение с однородной деформацией с антидиагональной матрицей линейности. Записаны уравнения мировых линий движения частиц, по ним построены траектория движения частиц газа. Выяснено, что $t = 0$ является моментом коллапса частиц. Показано, что если выделить сферический объем, состоящий из некоторого количества частиц газа, то при движении к моменту коллапса этот объем

вытягивается в «иголку». А при движении объема от момента коллапса к бесконечности этот объем принимает форму почти плоского эллипсоида или диска. При этом движущийся объем меняет свое значение. Данные виды деформаций представлены графически.

Список литературы / References

- [1] Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven and London: Yale University Press. 1969. 252 p.
- [2] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoides. Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861.
- [3] Борисов А.М., Мамаев И.С. Динамика жидких и газовых эллипсоидов. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. 364 с.
Borisov A.V., Mamaev I.S. (eds.) Dinamika zhidkikh i gazovykh ellipsoidov [Dynamics of liquid and gas ellipsoids]. Moscow, Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 364 p. (in Russian)
- [4] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
Ovsyannikov L.V. Leksii po osnovam gazovoi dinamiki [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow; Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy, 2003. 336 p. (in Russian)
- [5] Уразбахтина Л.З., Юлмухаметова Ю.В. Плоский коллапс газа с линейным полем скоростей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 207–216.
Urazbakhtina L.Z., Yulmukhametova Yu.V. A planar collapse of a gas with a linear velocity field // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN. 2023. Vol. 29, No. 2. Pp. 207–216. (in Russian)
- [6] Yulmukhametova Yu. Solution with a linear velocity field for a submodel of one-dimensional gas motions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Volume 57, Issue 1. P. 3–10.

- [7] Юлмухаметова Ю.В. Решение гидродинамической подмодели ранга 2 с линейным полем скоростей // Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 3. С. 321–330.
Yulmukhametova Yu. The solution of a hydrodynamic submodel of rank 2 with a linear velocity field // Chelyabinsk Physico-Mathematical Journal. 2021. V. 6, is. 3. С. 321–330. (in Russian)
DOI: [10.47475/2500-0101-2021-16306](https://doi.org/10.47475/2500-0101-2021-16306)
- [8] Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New Exact Solutions with a Linear Velocity Field for the Gas Dynamics Equations for Two Types of State Equations // Mathematics. 2022. V. 10(1). P. 123.
DOI: [10.3390/math10010123](https://doi.org/10.3390/math10010123)
- [9] Гумеров И.И., Каташова А.А., Юлмухаметова Ю.В. Коллапсирующие движения двухатомного газа, плотность которого зависит только от времени // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 1. С. 9–16.
Gumerov I.I., Katashova A.A., Yulmukhametova Yu. Collapsing motions of a diatomic gas, the density of which depends only on time // Multiphase systems. 2023. V. 18, No. 1. P. 9–16. (in Russian)
DOI: [10.21662/mfs2023.1.002](https://doi.org/10.21662/mfs2023.1.002)
- [10] Юлмухаметова Ю.В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9. С. 208–226.
Yulmukhametova Yu.V. Submodels in gas dynamics with linear field of velocity // Journal Siberian Electronic Mathematical Reports. 2012. Vol. 9. Pp. 208–226. (in Russian)
EDN: [puabwb](https://www.edn.ru/puabwb)
- [11] Уразбахтина Л.З. Интегрируемые гидродинамические подмодели с линейным полем скоростей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 3(51). С. 135–145.
EDN: [noukts](https://www.edn.ru/noukts)
Urazbakhtina L. Z. Integrable hydrodynamic submodels with a linear velocity field // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2013, vol. 7, no. 1. pp. 117–126.
DOI: [10.1134/S1990478913010110](https://doi.org/10.1134/S1990478913010110)
- [12] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ. 2013. 224 с.
Khabirov S.V. Lectsii. Analiticheskie metody v gazovoi dinamike [Lectures. Analytical methods in gas dynamics], Ufa, Bashkir State Univ. 2013, 224 p. (in Russian)

Сведения об авторах / Information about the Authors

Юлия Валерьевна Юлмухаметова

к.ф.-м.н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
Уфимский университет науки и технологий

Yulya Valeryevna Yulmukhametova

Ph.D. (physics & mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia,
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia
tarasova_yulya@mail.ru
ORCID: [0000-0002-5127-4584](https://orcid.org/0000-0002-5127-4584)