

## Влияние давления и плотности окружающей среды на спектр частот колебаний прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по контуру

Сабитов К.Б., Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Следуя работам [1], [2] определяется спектр частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, которая помещена в жидкость или газ. Изучен вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. Получены формулы для вычисления частот колебаний прямоугольной пластины, находящейся в несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Для описания колебаний тонкой прямоугольной пластины рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка [3]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

где  $E, \nu, \rho$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала,  $h$  – толщина пластины,  $w(x, y, t)$  – прогиб,  $x, y, t$  – координаты, время,  $q$  – поперечная распределенная нагрузка.

На нижнюю и верхнюю поверхность пластины действуют давления  $p_0 + p_1$  и  $p_0 + p_2$  жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Здесь  $p_0$  – давление сборки, в частности, атмосферное давление, действующее на все поверхности,  $p_1, p_2$  – избыточные давления. При определении нагрузки  $q$  исходим из предположения, что  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и  $p_1, p_2$  остаются постоянными при изгибе пластины.

**Несжимаемая среда.** Предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении осей  $x$  и  $y$ . Возникающие в результате движения пластины давления на нижнюю и верхнюю поверхность обозначим через  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ . Уравнения динамики несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

По условию пластина по осям  $x$  и  $y$  опирается на опоры, расположенные на равных расстояниях  $a$  и  $b$  и допускает поворот. Это означает, что

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad |x| = a, 2a, \dots, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad |y| = 0, b, 2b, \dots \quad (3)$$

Задаются условия на поверхностях контакта со средой:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = -\frac{h}{2}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = \frac{h}{2}. \quad (4)$$

На большом удалении от поверхности возмущения среды от пластины исчезают

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Аналогично [1] определяется распределенная сила

$$q = p_1 - p_2 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \frac{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)h}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

В результате решения системы уравнений (1), (2), (6) при условиях (3) - (5) и  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  находим спектр частот

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}}, \quad (7)$$

где

$$\omega_{0mn}^2 = \frac{D\lambda_{mn}^4}{\rho h}, \quad \alpha_{mn} = \frac{(p_0 + p)h}{D\lambda_{mn}^2}, \quad \mu_{mn} = \frac{2\tilde{\rho}}{\rho h \lambda_{mn}}, \quad \lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right], \quad m, n \in \mathbb{N}$$

и колебания пластины

$$w(x, y, t) = (C_{1mn} \cos \omega_{mn} t + C_{2mn} \sin \omega_{mn} t) v_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin(\omega_{mn} t + \psi_{mn}) v_{mn}(x, y), \quad (8)$$

$$A_{mn} = \sqrt{C_{1mn}^2 + C_{2mn}^2}, \quad \psi_{mn} = \arcsin \frac{C_{1mn}}{A_{mn}},$$

где

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b},$$

$C_{1mn}$  и  $C_{2mn}$  – произвольные постоянные. Нами установлены следующие утверждения.

**Утверждение 1.**

а. Если параметры  $\alpha_{mn}$  и  $\mu_{mn}$ , определяющие соответственно влияние давления и плотности окружающей среды, то при  $\alpha_{mn} \ll 1$ ,  $\mu_{mn} \ll 1$  или  $\alpha_{mn} = \mu_{mn}$  их влияние исчезает;

б.  $\alpha_{mn} > \mu_{mn}$  - преобладает повышающее частоту  $\omega_{mn}$  колебаний влияние давления среды;

в.  $\alpha_{mn} < \mu_{mn}$  - преобладает понижающее частоту  $\omega_{mn}$  колебаний влияние плотности среды.

**Утверждение 2.** Колебания однородной пластины в указанной среде при одинаковых избыточных давлениях  $p_1 = p_2 = p$  и  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  определяется по формуле (8), а частоты по формуле (7).

**Сжимаемая среда.** В случае сжимаемой среды вместо уравнений (2) имеем трехмерные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \quad c_i^2 = \kappa_i \frac{p_i}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

где  $c_i$  – скорость звука,  $\kappa_i$  – коэффициент адиабаты.

Аналогично вышеприведенному в результате решения системы уравнений (1), (9), (6) при условиях (3) - (5) и  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  находим спектр частот

$$\omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{x_{mn}}. \quad (10)$$

где  $x_{mn}$  - корень алгебраического уравнения

$$1 - x_{mn} + \alpha_{mn} = \frac{\mu_{mn} x_{mn}}{\sqrt{1 - \eta_{mn} x_{mn}}} = 0, \quad (11)$$

здесь

$$\mu_{mn} = \frac{2\tilde{\rho}}{\rho h \lambda_{mn}}, \quad \eta_{mn} = \frac{\omega_{0mn}^2}{c_i^2 \lambda_{mn}^2}, \quad \kappa_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 - \frac{\omega_{mn}^2}{c_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Показано, что уравнение (11) имеет решение, которое лежит между нулем и единицей. Установлены следующие утверждения.

**Утверждение 3.** Частоты в случае сжимаемой среды меньше, чем соответствующие частоты в несжимаемой среде.

**Утверждение 4.** С ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия и убывает для воздуха и углекислого газа. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний.

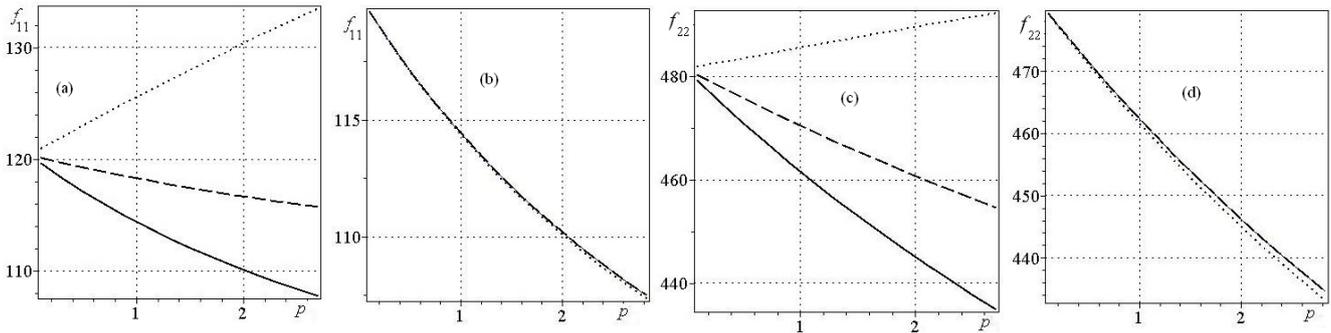


Рис. 1: Зависимости первой и второй частоты изгибных колебаний пластинки  $f_{11}$ ,  $f_{22}$  (Гц) от давления  $p$  (МПа): (а), (с) для разных газов:  $\tilde{\rho} = 0.1785$  (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода) кг/м<sup>3</sup> (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (b), (d) по формулам для несжимаемой (8) и сжимаемой (11) жидкостей для двуокиси углерода  $\tilde{\rho} = 1.9768$  кг/м<sup>3</sup> (сплошная, пунктирная линии соответственно).

**Утверждение 5.** Колебания однородной пластины в указанной среде при одинаковых избыточных давлениях  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  определяются по формуле (8), а частоты по формуле (10).

При  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $h = 0.001$  м,  $a = 0.2$  м,  $b = 0.2$  м,  $\kappa_{1,2} = 1.4$ , атмосферном давлении  $p_a = 0.1$  МПа, плотности воздуха  $\rho_{1a} = 1.2928$  кг/м<sup>3</sup>,  $p = 2$  МПа численное решение уравнения (11) дает корень:  $x_{11} = 0.93948$ . Соответствующая частота равна  $f_{11} = 116.6$  Гц.

Ниже в таблице приводятся частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины  $f_{mn} = \omega_{mn}/2\pi$ . Из нее следует, что частоты, вычисленные по формулам для несжимаемой и сжимаемой сред отличаются незначительно, причем частоты по формуле для несжимаемой среды больше чем частоты по формуле для сжимаемой среды.

Таблица. Частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины для разных  $m$ ,  $n$ , вычисленные по формулам (8) и (10) соответственно для несжимаемой и сжимаемой сред.

$m, n$	$f_{mn}$ , Hz, формула (7)	$f_{mn}$ , Hz, формула (10)
1, 1	116.7	116.6
2, 2	461.3	460.7
3, 3	1045.6	1043.3

На рис. 1, а, с приводятся зависимости первой и второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2, а, с видно, что с ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия и убывает для воздуха и углекислого газа. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 2, b, d приводятся зависимости первой и второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 2, b, d видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

Работа проведена в порядке выполнения государственного задания (№0246-2023-0015).

## Список литературы

- [1] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. №3. С. 88 - 96. <https://doi.org/10.31857/S0572329922030084>.
- [2] Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Изв. вузов. Матем., 2021. №10. С. 60–70. EDN:RZSSHV. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>.
- [3] Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.