



ISSN: 2658–5782

Номер 1

2024

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





<http://mfs.uimech.org/mfs2024.1.002>

DOI: 10.21662/mfs2024.1.002

УДК / UDC: 532.5, 51-72

Получена / Received: 16.02.2024

Принята / Accepted: 26.03.2024



## Теоретический анализ линейных колебаний пузырьков в полидисперсном кластере

Э.Ш. Насибуллаева

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Динамика одиночного пузырька в безграничной жидкости существенно отличается от динамики индивидуального пузырька в скоплениях из-за гидродинамического взаимодействия между пузырьками. Изучение механизма данного взаимодействия является одним из важных аспектов в исследовании фундаментальной природы акустической и гидродинамической кавитации. В настоящей работе для анализа малых колебаний пузырьков в сферическом кластере около устойчивого положения равновесия применена математическая теория линейной консервативной системы с несколькими степенями свободы с целью объяснения механизма взаимодействия между пузырьками разных размеров. С помощью данной теории в общем случае доказано, что число резонансных частот в полидисперсном кластере совпадает с числом фракций. Показано, что области главного резонанса (при низких частотах) пузырьки разных фракций колеблются в фазе, а в областях вторичных резонансов (при высоких частотах) фазы последовательно меняются на противоположные, начиная с фракции, содержащей пузырьки самого большого радиуса, и далее – в порядке его убывания. На примере двухфракционного кластера получено, что между пузырьками имеет место инерциальная связь, а силовая связь отсутствует; при малом числе пузырьков одной из фракций связь между ними и пузырьками другой фракции является слабой, при этом взаимодействие между ними может быть сильным. Анализ передачи энергии между пузырьками разных фракций показал, что изменение характера колебания пузырьков во фракции с малым радиусом, в то время как характер колебания пузырьков в другой фракции не меняется, является результатом динамического демпфирования.

**Ключевые слова:** пузырьковый кластер, амплитудно–частотные характеристики, линейная консервативная система с несколькими степенями свободы, собственная частота колебаний, резонанс, парциальная система, динамическое демпфирование

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001)

## Theoretical analysis of linear oscillations of bubbles in a polydisperse cluster

E.Sh. Nasibullaeva

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The dynamics of a single air bubble in an unbounded liquid are significantly different from the dynamics of an individual bubble in clusters due to the hydrodynamic interaction between the bubbles. Studying the mechanism of this interaction is one of the important aspects in the study of the fundamental nature of acoustic and hydrodynamic cavitation. In this work, to analyze small oscillations of bubbles in a spherical cluster near a stable equilibrium position, the mathematical theory of a linear conservative system with several degrees of freedom is applied to explain the mechanism of interaction between bubbles of different sizes. Using this theory, in the general case, it has been proven that the number of resonance frequencies in a polydisperse cluster coincides with the number of fractions. It is shown that in the regions of the main resonance (at low frequencies) bubbles of different fractions oscillate in phase, and in the regions of secondary resonances (at high frequencies) the phases successively change to the opposite, starting with the fraction containing bubbles of the largest radius, and further changing in order of decreasing. Using the example of a two-fraction cluster, it was found that there is an inertial connection between the bubbles, but there is no force connection; when the number of bubbles of one of the fractions is small, the connection between them and the bubbles of the other fraction is weak, while the interaction between them can be strong. An analysis of the energy transfer between bubbles of different fractions showed that the change in the nature of bubbles oscillations in the fraction with a small radius, while the nature of vibration of bubbles in the other fraction does not change, is the result of dynamic damping.

**Keywords:** bubble cluster, amplitude-frequency characteristics, linear conservative system with several degrees of freedom, natural frequency of oscillations, resonance, partial system, dynamic damping

## 1. Введение

Динамика одиночного пузырька в безграничной жидкости существенно отличается от динамики отдельного пузырька в скоплениях (называемых в литературе облаком пузырьков или пузырьковым кластером) из-за гидродинамического взаимодействия между пузырьками. Исследование механизма данного взаимодействия является одним из важных аспектов в изучении фундаментальной природы акустической и гидродинамической кавитации.

Все теоретические работы, основанные на предположении тепловой природы кавитации, можно разделить на две группы по применяемым в их исследованиях подходам (см., например, [1]):

- анализ макроскопического движения пузырькового кластера путем осреднения уравнений сохранения импульса и массы жидкости и газа, когда смесь жидкости и газовых пузырьков рассматривается как сплошная среда;
- анализ микроскопических движений индивидуальных пузырьков в кластере.

В рамках первого подхода одними из первых были разработаны теории [2, 3], аналогичные теориям для однофазных сжимаемых жидкостей, в которых эффекты динамики индивидуального пузырька не включены, что не позволяло изучить механизм коллективного взаимодействия пузырьков в кластере. Поэтому позднее были разработаны более общие модели течения дисперсионной двухфазной смеси [4–7], включающие эффекты динамики пузырька, сжимаемости жидкости и относительное движение с помощью осреднения уравнений сохранения по объему или по времени для каждой отдельной фазы. Одной из первых работ, где основное внимание было сфокусировано не на пузырьковых жидкостях, а непосредственно на динамике пузырьковых кластеров (то есть когда пузырьки сосредоточены в конечном объеме жидкости, а не находятся по всему ее объему), была работа [8]. В данной работе уравнения осреднялись по пространству и система замыкалась уравнением Рэлея–Плессета, описывающего динамику индивидуальных пузырьков. Проведен анализ коллапса большого числа пузырьков близких к гладкой стенке, и установлено, что возрастание давления около стенки является результатом эффекта взаимодействия. В работах [9–11] была предложена идея совместного коллапса кавитационных пузырьков: коллапс облака пузырьков вызывает образование ударной волны, которая распространяется внутрь скопления. В работе [12] предложено новое уравнение типа Рэлея–Плессета, учитывающее наличие других пузырьков, для прогнозирования динамики пузырьков кластера в сжимаемой жидкости. Линеаризованная или слабо-нелинейная динамика сферического пузырькового облака была исследована в работах [13–17].

При втором подходе основным объектом исследования являлось взаимодействие пузырьков в скопле-

ниях и, как правило, численные исследования ограничивались рассмотрением небольшого числа пузырьков, расположенных в конкретных конфигурациях [18–26]. Модели большого количества взаимодействующих пузырьков, произвольно расположенных в кластере, представлены в работах [1, 27–31]. В исследованиях [27, 28] взаимодействия пузырьков рассматривались с точностью до первого порядка по расстоянию между пузырьками. В [29, 30] изучалось взаимодействие между пузырьками при гидродинамической кавитации. В работах [1, 31, 32] была предложена математическая модель сферического пузырькового кластера при акустическом воздействии. Моделирование осуществлялось при следующих предположениях: размер кластера мал по сравнению с длиной акустической волны (давление внутри кластера является однородным); газовые пузырьки подвергаются адиабатическому сжатию и совершают сферически-симметричные радиальные движения; в системе газовые пузырьки-жидкость отсутствуют процессы тепло- и массопереноса. Тогда в соответствии с данной моделью полидисперсный кластер рассматривался как большая капля, содержащая жидкость и большое количество микропузырьков разных размеров, а пузырьки в кластере условно разбивались на конечное число фракций, где каждая фракция характеризовалась начальным радиусом пузырька. Обоснование математической модели, а также ее границы применимости представлены в работе [1].

В общем виде система уравнений, описывающая колебания индивидуальных пузырьков в полидисперсном (многофракционном) кластере и самого кластера, имеет вид [31]:

$$\begin{aligned}
 R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{p_c - p_I}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l C_l} [\dot{p}_c - \dot{p}_I], \\
 a_i\ddot{a}_i + \frac{3}{2}\dot{a}_i^2 &= \frac{p_{ai} - p_c}{\rho_l}, \\
 \sum_{i=1}^n N_i a_i^2 \dot{a}_i &= R^2 \dot{R}, \\
 p_{ai} &= \left( p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}} \right) \left( \frac{a_i}{a_{0i}} \right)^{-3\gamma} - \frac{2\sigma}{a_i} - \frac{4\mu\dot{a}_i}{a_i}, \\
 p_I &= p_0 - \Delta P \sin(\omega t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  — число фракций с различными начальными радиусами пузырьков  $a_{0i}$ ;  $R = R(t)$  — радиус кластера;  $a_i = a_i(t)$  — радиус пузырька в  $i$ -й фракции;  $p_c = p_c(t)$  — давление жидкости в кластере;  $p_I$  — внешнее давление;  $p_{ai}$  — давление газа около стенки пузырька  $i$ -й фракции;  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $C_l$  — скорость звука в жидкости;  $N_i$  — число пузырьков в  $i$ -й фракции;  $p_0$  — начальное давление в жидкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости;  $\Delta P$  — амплитуда внешнего давления;  $\omega$  — угловая частота и  $t$  — время. Точка над переменной обозначает производную по времени.

В настоящей работе аналитически изучается динамика сферических пузырьков в полидисперсном кластере в случае малых колебаний пузырьков на основе математической модели, представленной в работах [1, 31, 32]. Математическая теория линейной консервативной системы с несколькими степенями свободы [33] применяется к анализу колебаний пузырьков в кластере около устойчивого положения равновесия с целью объяснения механизма взаимодействия между пузырьками разных размеров.

## 2. Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотные характеристики для случая монодисперсного кластера ( $n = 1$ ) представлены в работе [34], а для полидисперсного кластера ( $n > 1$ ) — в [31]. В настоящей работе приведем основные формулы.

При линеаризации системы уравнений (1) предполагается, что параметры  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $R$ ,  $p_c$ ,  $p_l$  мало отклоняются от своих начальных значений [1, 31]:

$$\begin{aligned} a_i &= a_{0i} + \tilde{a}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad R = R_0 + \tilde{R}, \\ p_c &= p_0 + \tilde{p}_c, \quad p_l = p_0 + \tilde{p}_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\tilde{a}_i = \tilde{a}_i(t)$ ,  $\tilde{R} = \tilde{R}(t)$ ,  $\tilde{p}_c = \tilde{p}_c(t)$ ,  $\tilde{p}_l = \tilde{p}_l(t)$  — функции малых отклонений от равновесных значений. Подставляя (2) в систему уравнений (1), получим линеаризованную систему:

$$\ddot{\tilde{a}}_i + \frac{4\mu}{\rho_l a_{0i}^2} \dot{\tilde{a}}_i + \frac{1}{\rho_l a_{0i}^2} \left[ 3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}} (3\gamma - 1) \right] \tilde{a}_i = -\frac{\tilde{p}_c}{\rho_l a_{0i}}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} R_0 \ddot{\tilde{R}} &= \frac{1}{\rho_l} [\tilde{p}_c - \tilde{p}_l] + \frac{R_0}{\rho_l C_l} [\tilde{p}_c - \tilde{p}_l], \\ \sum_{i=1}^n N_i a_{0i}^2 \ddot{\tilde{a}}_i &= R_0^2 \ddot{\tilde{R}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Амплитудно-частотные характеристики для каждой фракции пузырьков в общем случае определяются по формуле

$$\left| \frac{\tilde{A}_{a_i}}{\tilde{A}_{p_l}} \right| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $\tilde{A}_{a_i} = A_{a_i}/a_{0i}$ ,  $\tilde{A}_{p_l} = A_{p_l}/p_0$  — безразмерные параметры;  $A_{a_i}$ ,  $A_{p_l}$  — амплитуды отклонения от равновесных значений функций  $\tilde{a}_i$ ,  $\tilde{p}_l$ ;  $x_i$ ,  $y_i$  — неизвестные, являющиеся решениями системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} d_i x_i - e_i y_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n (f_j x_j - g_j y_j) = -(1 + \theta^2), \\ e_i x_i + d_i y_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n (g_j x_j + f_j y_j) = 0 \end{cases}$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ) с действительными коэффициентами, определяемыми следующими выражениями:

$$\begin{aligned} d_k &= \Gamma_k - \theta^2 ((\alpha_{1k} + \alpha_{2k})\tilde{C}^2 - \Gamma_k) - \theta^4 \alpha_{1k} \tilde{C}^2, \\ e_k &= \theta (\tilde{C}\tilde{\mu} + \theta^2 (\tilde{C}\tilde{\mu} + \alpha_{2k} \tilde{C}^2)), \\ f_k &= -\theta^2 \alpha_{2k} \tilde{C}^2, \\ g_k &= \theta^3 \alpha_{2k} \tilde{C}^2. \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= 3\gamma + 2\sigma(3\gamma - 1)/(a_{0i} p_0), \quad \theta = \omega R_0 / C_l, \\ \alpha_{1i} &= a_{0i}^2 / R_0^2, \quad \alpha_{2i} = N_i a_{0i}^3 / R_0^3, \quad \tilde{C} = C_l / \sqrt{p_0 / \rho_l}, \\ \tilde{\mu} &= 4\mu / (p_0 t_0), \quad t_0 = R_0 / \sqrt{p_0 / \rho_l}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Параметр  $\alpha_{1i}$  выражает отношение площадей поверхности пузырька в  $i$ -й фракции и кластера, а  $\alpha_{2i}$  — концентрацию пузырьков  $i$ -й фракции в кластере соответственно.

На рис. 1 представлены амплитудно-частотные функции, рассчитанные по формуле (5) для двухфракционного кластера (слева внизу) с  $N_1 = 5000$  пузырьками начального радиуса  $a_{01} = 5$  мкм (сплошная линия) и с  $N_2 = 5000$  пузырьками начального радиуса  $a_{02} = 10$  мкм (пунктирная линия). Вертикальной пунктирной линией показаны значения частот Миннаерта  $\omega_M^{(5)}$  и  $\omega_M^{(10)}$  для одиночных пузырьков начального радиуса 5 и 10 мкм, которые определяются по формуле

$$\omega_M^2 = \frac{3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} (3\gamma - 1)}{\rho_l a_0^2}.$$

В случае свободных колебаний в идеальной жидкости ( $\mu = 0$ ) при отсутствии акустического излучения ( $C_l \rightarrow \infty$ ) собственная частота колебаний пузырька в монодисперсном кластере выражается следующей формулой [1]:

$$\omega_c^2 = \frac{3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} (3\gamma - 1)}{\rho_l a_0^2 (1 + \alpha_2 / \alpha_1 - \alpha_2^{1/3})} < \omega_M^2, \quad (6)$$

Отметим, что амплитудно-частотные функции (рис. 1, слева наверху) рассчитаны с учетом диссипации энергии, связанной с вязкостью и акустическим излучением, и для них также выполняется неравенство (6).

Из рис. 1 (слева внизу) видно, что в двухфракционном кластере помимо главного (кластерного) резонанса, имеющего место при низкой частоте, появляется вторичный резонанс при более высоких частотах. На рис. 1 (справа) показаны характеры нелинейных колебаний пузырьков в окрестности этих двух резонансов. В области главного резонанса пузырьки в обеих фракциях колеблются в фазе (рис. 1, справа вверху). В области вторичного резонанса пузырьки в обеих фракциях колеблются в противофазе (рис. 1, справа внизу). В данной

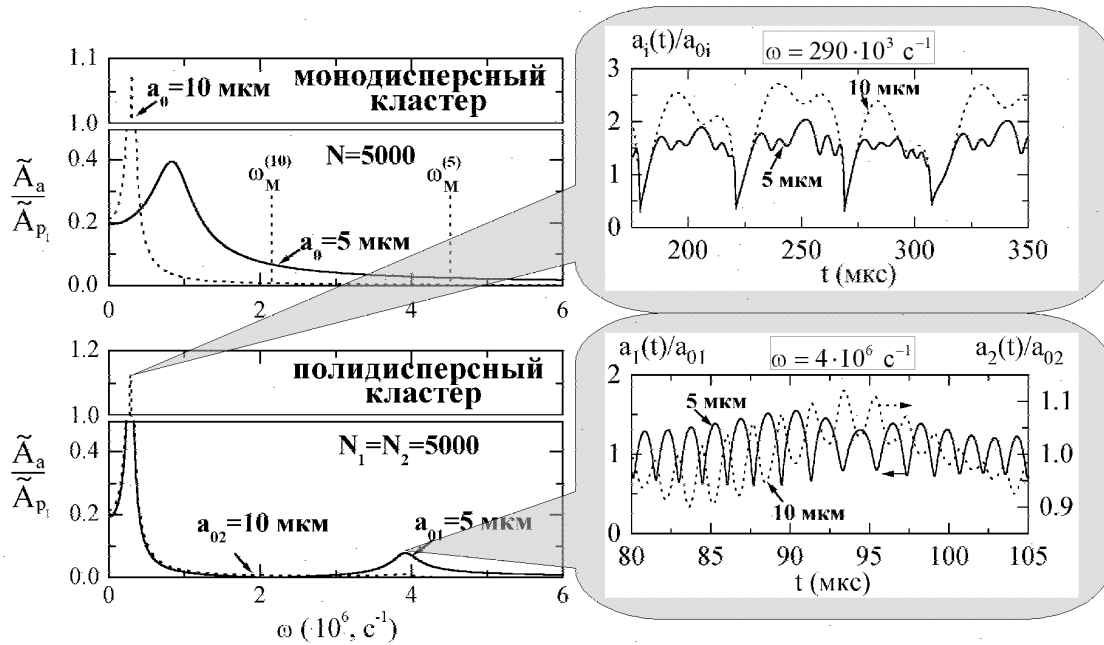


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики для двух монодисперсных и двухфракционного кластеров (слева) и характеры колебаний пузырьков в двухфракционном кластере в областях главного (справа сверху) и вторичного (справа внизу) резонансов для  $R_0 = 1$  мм,  $\Delta P = 5$  атм. Сплошная линия соответствует пузырькам первой фракции с  $a_{01} = 5$  мкм, пунктирная — пузырькам второй фракции с  $a_{02} = 10$  мкм

резонансной области во время роста пузырька в одной фракции, пузырьки в другой фракции сжимаются, и наоборот. Для большей наглядности шкала слева соответствует пузырькам первой фракции ( $a_{01} = 5$  мкм), а справа — второй фракции ( $a_{02} = 10$  мкм).

На рис. 2 (слева внизу) показаны амплитудно-частотные функции для трехфракционного кластера, для которого  $N_1 = N_2 = N_3 = N$  и  $a_{01} = 5$  мкм,  $a_{02} = 10$  мкм,  $a_{03} = 15$  мкм. Вертикальной пунктирной линией показаны значения частот Миннаерта  $\omega_M^{(5)}$ ,  $\omega_M^{(10)}$  и  $\omega_M^{(15)}$  для одиночных пузырьков начального радиуса 5, 10 и 15 мкм соответственно, для которых также выполняется неравенство (6). В этом случае помимо главного резонанса появляются уже два вторичных резонанса. В области главного резонанса пузырьки в трех фракциях также колеблются в фазе (рис. 2, справа сверху). Заметим, что хотя колебания здесь хаотические, однако максимальное сжатие пузырьков во всех фракциях происходит в один и тот же момент времени. Первый вторичный резонанс характеризуется сменой фазы колебания на противофазу пузырьков третьей фракции (рис. 2, справа в центре). В то время, как пузырьки в первых двух фракциях сжимаются, пузырьки в третьей фракции растут, и наоборот. Слева шкала соответствует пузырькам первой и второй фракций, а справа — пузырькам в третьей фракции (рис. 2, справа внизу). В области второго вторичного резонанса меняют характер колебаний уже пузырьки второй фракции. Теперь рост пузырьков в первой фракции происходит во время сжатия пузырьков во второй и третьей фракциях, и наоборот. Слева шкала соответствует пузырькам в первой

фракции, а справа — во второй и третьей. Заметим, что фазы меняются последовательно, начиная с фракции, содержащей самые большие по размеру пузырьки, и далее — по убыванию радиуса.

### 3. Двухфракционный кластер как линейная консервативная система с двумя степенями свободы

Проведем аналитическое исследование линеаризованной системы (3)–(4) для случая двухфракционного кластера ( $n = 2$ ). При подстановке соотношения (4) в последнее уравнение (3) в случае свободных колебаний ( $\tilde{p}_l = 0$ ) при отсутствии вязкости ( $\mu = 0$ ) и акустического излучения ( $C_l \rightarrow \infty$ ), получим следующую линеаризованную систему:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{a}}_1 + \frac{1}{\rho_l a_{01}^2} \left[ 3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{01}} (3\gamma - 1) \right] \tilde{a}_1 &= -\frac{\tilde{p}_c}{\rho_l a_{01}}, \\ \ddot{\tilde{a}}_2 + \frac{1}{\rho_l a_{02}^2} \left[ 3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{02}} (3\gamma - 1) \right] \tilde{a}_2 &= -\frac{\tilde{p}_c}{\rho_l a_{02}}, \\ N_1 a_{01}^2 \ddot{\tilde{a}}_1 + N_2 a_{02}^2 \ddot{\tilde{a}}_2 &= \frac{R_0 \tilde{p}_c}{\rho_l}. \end{aligned}$$

Исключив неизвестную функцию  $\tilde{p}_c$  из данной системы, придем к системе дифференциальных уравнений



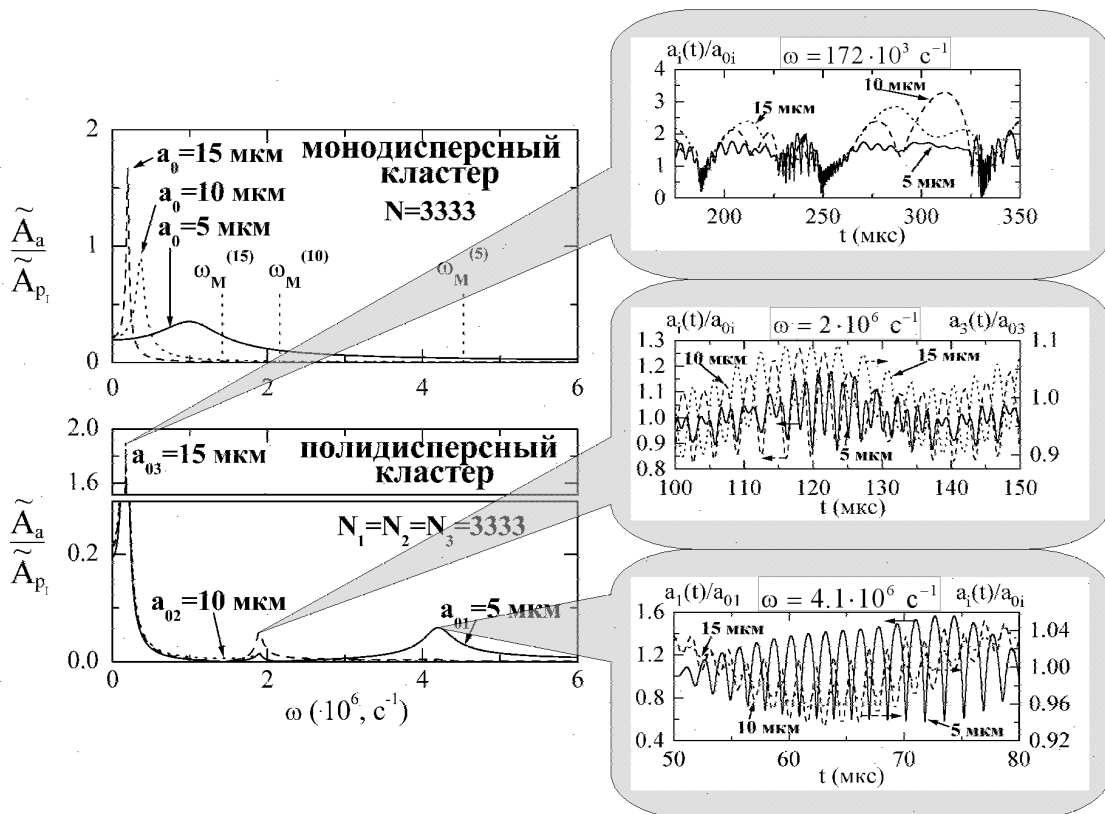


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики для трех монодисперсных и трехфракционного кластеров (слева) и характеры колебаний пузырьков в трехфракционном кластере в области главного резонанса (справа сверху) и двух вторичных резонансов (справа в центре и снизу) для  $R_0 = 1 \text{ мм}$ ,  $\Delta P = 5 \text{ атм}$ . Сплошная линия соответствует пузырькам первой фракции с  $a_{01} = 5 \text{ мкм}$ , штриховая – пузырькам второй фракции с  $a_{02} = 10 \text{ мкм}$ , пунктирная – пузырькам третьей фракции с  $a_{03} = 15 \text{ мкм}$

относительно двух неизвестных  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$ :

$$\begin{aligned} & \left(1 + N_1 \frac{a_{01}}{R_0}\right) \frac{N_1 a_{01}^3}{R_0} \tilde{a}_1 + \frac{N_1 N_2 a_{01}^2 a_{02}^2}{R_0^2} \tilde{a}_2 + \\ & + \frac{N_1 a_{01}}{\rho_l R_0} \left(3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{01}}(3\gamma - 1)\right) \tilde{a}_1 = 0, \\ & \frac{N_1 N_2 a_{01}^2 a_{02}^2}{R_0^2} \tilde{a}_1 + \left(1 + N_2 \frac{a_{02}}{R_0}\right) \frac{N_2 a_{02}^3}{R_0} \tilde{a}_2 + \\ & + \frac{N_2 a_{02}}{\rho_l R_0} \left(3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{02}}(3\gamma - 1)\right) \tilde{a}_2 = 0. \end{aligned}$$

Данная система является частным случаем системы уравнений, описывающей малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия [33], которая в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A\ddot{x} + H\dot{y} + ax + hy = 0, \\ H\ddot{x} + B\dot{y} + hx + by = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для рассматриваемой системы уравнений имеем:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{a}_1, \quad y = \tilde{a}_2, \quad A = \left(1 + N_1 \frac{a_{01}}{R_0}\right) \frac{N_1 a_{01}^3}{R_0}, \\ B &= \left(1 + N_2 \frac{a_{02}}{R_0}\right) \frac{N_2 a_{02}^3}{R_0}, \quad H = \frac{N_1 N_2 a_{01}^2 a_{02}^2}{R_0^2}, \\ a &= \frac{N_1 a_{01}}{\rho_l R_0} \left(3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{01}}(3\gamma - 1)\right), \\ b &= \frac{N_2 a_{02}}{\rho_l R_0} \left(3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{02}}(3\gamma - 1)\right), \quad h = 0. \end{aligned}$$

Поскольку выполняются условия

$$\begin{cases} A > 0, \quad B > 0, \quad AB - H^2 > 0, \\ a > 0, \quad b > 0, \quad ab - h^2 > 0, \end{cases} \quad (8)$$

то потенциальная и кинетическая энергии данной системы являются положительно определенными квадратичными формами от координат и скоростей соответственно:

$$\begin{cases} U = ax^2 + 2hxy + by^2, \\ T = A\dot{x}^2 + 2H\dot{x}\dot{y} + B\dot{y}^2. \end{cases} \quad (9)$$

В рассматриваемом случае  $H \neq 0$ , значит имеем место инерциальная связь ( $H$  называется коэффициентом

том инерциальной связи), и, поскольку  $h = 0$ , то силовая связь отсутствует. Отметим, что, например, в случае системы двух связанных маятников, которая также является системой с двумя степенями свободы, где в качестве  $x$  и  $y$  берутся углы отклонения маятников от вертикальной оси, имеет место силовая и отсутствует инерциальная связь.

Проведем анализ системы с помощью математической теории линейной консервативной системы с двумя степенями свободы, подробно изложенной в [33]. Сначала система с двумя степенями свободы рассматривается как результат связи двух систем, каждая из которых имеет одну степень свободы. Для этого исходная система разделяется на две, определенным образом выделяемые частичные (парциальные) системы, которые связаны между собой. Парциальные системы получаются из данной системы с двумя степенями свободы при «закреплении» одной из координат и имеют одну степень свободы. Одну парциальную систему получим, положив в (9)  $y = 0$ , а другую — положив в (9)  $x = 0$ .

Для первой парциальной системы имеем:

$$T = Ax^2, \quad U = ax^2.$$

Данная система имеет собственную (парциальную) частоту  $n_1$ , такую, что

$$n_1^2 = \frac{a}{A} = \frac{3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{01}}(3\gamma - 1)}{\rho_1 a_{01}^2 \left(1 + N_1 \frac{a_{01}}{R_0}\right)}. \quad (10)$$

Для второй парциальной системы имеем:

$$T = By^2, \quad U = by^2$$

и вторую парциальную частоту  $n_2$ , такую, что

$$n_2^2 = \frac{b}{B} = \frac{3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{02}}(3\gamma - 1)}{\rho_1 a_{02}^2 \left(1 + N_2 \frac{a_{02}}{R_0}\right)}. \quad (11)$$

Заметим, что (10) и (11) есть формулы для собственных частот в монодисперсном кластере

$$\omega_c^2 = \frac{3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}(3\gamma - 1)}{\rho_1 a_0^2 (1 + \alpha_2/\alpha_1)}$$

для пузырьков начального радиуса  $a \equiv a_{01}$  и  $a \equiv a_{02}$  соответственно. Однако, по определению парциальных систем в данном случае кластер не монодисперсный, а двухфракционный, в котором пузырьки в одной из фракции совершают свободные колебания, в то время как пузырьки в другой фракции остаются в состоянии покоя.

Решение уравнения (7) ищется в виде:

$$\begin{aligned} x &= C \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= kC \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $C, k, \omega, \alpha$  — постоянные. Частота  $\omega$  называется нормальной частотой.

Подставляя (12) в (7) и сокращая на общий множитель  $\cos(\omega t + \alpha)$ , получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\omega^2 A - a) + (\omega^2 H - h)k = 0, \\ (\omega^2 H - h) + (\omega^2 B - b)k = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Будем рассматривать эти уравнения как систему двух линейных уравнений относительно неизвестной  $k$ , тогда условие их совместности примет вид

$$\begin{vmatrix} \omega^2 A - a & \omega^2 H - h \\ \omega^2 H - h & \omega^2 B - b \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

Характеристическое уравнение, определяющее неизвестную величину  $\omega^2$ , запишется как

$$(AB - H^2)\omega^4 + (2hH - aB - bA)\omega^2 + ab - h^2 = 0.$$

Для рассматриваемого случая, поскольку  $h = 0$ , с учетом выражений (10) и (11), данное уравнение примет следующий вид:

$$\left(1 - \frac{H^2}{AB}\right)\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0.$$

Положим  $\chi = 1 - H^2/AB$  и  $\omega^2 = \xi$ , тогда получим уравнение параболы

$$\eta = \chi\xi^2 - (n_1^2 + n_2^2)\xi + n_1^2 n_2^2. \quad (15)$$

Абсциссы точек, в которых она пересекает ось  $\xi$ , равны квадратам частот искомым колебаний вида (12). Так как по условиям (8)  $\chi > 0$ , то ветви параболы направлены вверх. При  $\xi = 0$  имеем  $\eta > 0$ ; при  $\xi \rightarrow +\infty - \eta > 0$ ; при  $\xi = n_1^2 > 0 - \eta < 0$  и при  $\xi = n_2^2 > 0 - \eta < 0$ , тогда парабола пересекает ось абсцисс и имеет вид, представленный на рис. 3.

Нормальные частоты выражаются формулой

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4\chi n_1^2 n_2^2}}{2\chi}. \quad (16)$$

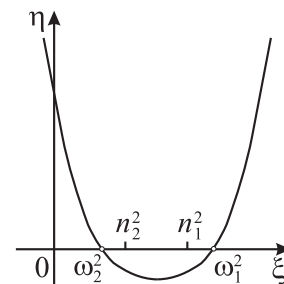


Рис. 3. Парабола, заданная уравнением (15):  $\omega_1, \omega_2$  — нормальные частоты;  $n_1, n_2$  — парциальные частоты

Для рассматриваемого случая имеем  $n_1^2 > n_2^2$ , поскольку  $a_{01} < a_{02}$ , и  $\chi < 1$ , поскольку  $H \neq 0$ . Тогда  $\omega_2^2 < n_2^2 < n_1^2 < \omega_1^2$ , то есть парциальные частоты лежат между нормальными частотами, что можно наблюдать на рис. 1 (слева).

После того, как нашли нормальные частоты, можно определить из (13) соответствующие значения амплитуд  $k_1$  и  $k_2$ :

$$k_{1,2} = -\frac{\omega_{1,2}^2 A - a}{\omega_{1,2}^2 H - h}. \quad (17)$$

Общее решение уравнений (7) как сумма двух частных решений вида (12) имеет вид:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ y = k_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + k_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{cases} \quad (18)$$

Физический смысл данного решения состоит в следующем. Если вывести систему с двумя степенями свободы из состояния равновесия, то каждая координата выразится как функция времени в виде суммы двух синусоидальных колебаний. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  получаются из характеристического уравнения (14). Амплитуда каждой координаты в первом колебании произвольна. Но, если выбрана амплитуда колебаний первой координаты  $C_1$ , то амплитуда первого колебания во второй координате не произвольна, а задается системой. То же самое имеет место для второго колебания.

Если зададим начальные условия, например, при  $t = 0, x = x_0, y = y_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0$ , то получим также значения величин  $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ . И задача станет однозначно определенной.

Для примера рассмотрим двухфракционный кластер, в котором  $a_{01} = 5$  мкм,  $a_{02} = 10$  мкм,  $N_1 = N_2 = 5000$ . В этом случае нормальные частоты будут равны  $\omega_1 = 3911013 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_2 = 287148 \text{ с}^{-1}$ . Резонансные частоты, рассчитанные по (5), которые соответствуют частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , но с учетом вязкости и акустического излучения равны  $\omega_1^* = 3915404 \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_2^* = 284372 \text{ с}^{-1}$ . Относительные погрешности  $\delta_{\omega_1} = |\omega_1 - \omega_1^*| \cdot 100\% / \omega_1^* \approx 1\%$ ,  $\delta_{\omega_2} = |\omega_2 - \omega_2^*| \cdot 100\% / \omega_2^* \approx 0,1\%$ . То есть вязкость и акустическое излучение практически не влияют на собственные частоты пузырьков.

Введем обозначение [33]

$$\rho^2 = \frac{H^2}{AB},$$

где число  $\rho$  называется коэффициентом связи. Говорят, что связь слаба, если

$$\rho \ll 1. \quad (19)$$

Это означает, что добавочный член в энергии, обусловленный связью, мал по сравнению с остальными. Однако важно, выполняется или нет другое условие

$$\rho \ll \frac{|n_1^2 - n_2^2|}{n_1 n_2}, \quad (20)$$

поскольку даже при малой связи (выполняется условие (19)) может наблюдаться сильное взаимодействие (не выполняется условие (20)) между частями системы.

В рассмотренном примере  $\rho \approx 0.94$ , а правая часть в (20)  $\approx 2.6$ , то есть условия (19) и (20) не выполняются. Это означает, что имеют место как сильная связь, так и сильное взаимодействие между пузырьками разных фракций. Условие (19) будет выполняться, когда  $N_1 a_{01} / R_0 \ll 1$  и/или  $N_2 a_{02} / R_0 \ll 1$ . Поскольку параметры  $a_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) и  $R_0$  могут изменяться только в незначительном диапазоне, то остается менять только параметр  $N_i$  ( $i = 1, 2$ ). Последние условия будут выполняться, когда  $N_1$  и/или  $N_2$  мало. То есть, если число пузырьков одной из фракции мало, то связь между ними и пузырьками другой фракции — слабая. Однако взаимосвязь может быть сильной.

Пример случая малой связи, но большой взаимосвязи — двухфракционный кластер, в котором  $N_1 = 10^3$ ,  $a_{01} = 5$  мкм,  $N_2 = 10$ ,  $a_{02} = 10$  мкм,  $R_0 = 10^{-3}$  м, для которого  $\rho \approx 0.076$ , то есть выполняется условие (19), а правая часть (20)  $\approx 0.2$ , то есть не выполняется условие (20).

Заметим, что величина  $k_1$  в (18) характеризует относительную силу первого колебания во второй координате, а величина  $1/k_2$  — относительную слабость второго колебания в первой координате. Причем из формул (16), (17) получаем, что  $k_1 < 0$ , а  $k_2 > 0$ . Для первого рассмотренного примера  $k_1 \approx -0.2$ ,  $k_2 \approx 2.2$  (или  $1/k_2 \approx 0.4$ ). Это означает следующее. При более быстром колебании (в области собственной частоты  $\omega_1$ ) пузырьки в обеих фракциях колеблются в противофазе (так как амплитуды имеют разные знаки), причем амплитуда пузырьков в первой фракции (с меньшим радиусом) больше амплитуды пузырьков во второй фракции (с большим радиусом). Такой характер колебаний и получился при численных расчетах (рис. 1, справа внизу). При медленном колебании (в области собственной частоты  $\omega_2$ ) пузырьки колеблются в фазе (так как амплитуды имеют одинаковые знаки), причем амплитуда пузырьков в первой фракции меньше амплитуды пузырьков во второй фракции (см. рис. 1, справа сверху). Таким образом, характер нелинейных колебаний пузырьков, полученных численным расчетом системы уравнений (1), аналогичен характеру линейных колебаний пузырьков в двухфракционном кластере, рассмотренному в предыдущем пункте.

#### 4. Передача энергии между пузырьками разных фракций

Рассмотрим вопрос о передаче энергии от пузырька в одной фракции к пузырьку в другой фракции. Для случая двух связанных маятников этот вопрос подробно изучен в [33]. Исследуем, каким будет взаимодействие, если пузырьки в первой фракции выведены из состояния равновесия, а пузырьки во второй фракции — нет. Зададим для простоты следующие начальные условия



(при  $t = 0$ ):

$$x = 1, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0.$$

Тогда из двух последних условий получим, что в (18)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , а первые два дают систему двух уравнений относительно неизвестных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 + C_2 = 1, \quad k_1 C_1 + k_2 C_2 = 0,$$

которая имеет решение

$$C_1 = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}, \quad C_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2}.$$

Подставив полученные постоянные в (18), получим следующие выражения для  $x$  и  $y$ :

$$x = \frac{1}{k_1 - k_2} (-k_2 \cos \omega_1 t + k_1 \cos \omega_2 t),$$

$$y = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2} \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t.$$

Для функции  $y$  получили биения, так как второй синус — это быстро колеблющаяся синусоида, а первый — переменная амплитуда. Максимальное значение  $y$  принимает, когда оба синуса равны 1:

$$y_{max} = \frac{2k_1 k_2}{k_1 - k_2}$$

или с учетом (17):

$$y_{max} = \frac{2A}{H} \frac{\rho^2 n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\rho^2 n_1^2 n_2^2}}.$$

Поскольку, как было показано, имеет место сильное взаимодействие (даже при слабой связи), то это означает, что энергия от пузырьков в первой фракции передается пузырькам второй фракции, что заставляет пузырьки этой фракции колебаться.

Далее выведем пузырьки во второй фракции из состояния равновесия, а пузырьки в первой оставим невозмущенными:

$$x = 0, \quad y = 1, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0.$$

Получим следующие значения постоянных

$$C_1 = -\frac{1}{k_1 - k_2}, \quad C_2 = \frac{1}{k_1 - k_2}$$

и максимальное значение  $x$

$$x_{max} = \frac{2A}{H} \frac{b}{a} \frac{\rho^2 n_1^2}{\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\rho^2 n_1^2 n_2^2}}.$$

Поскольку  $b > a$  (так как считаем, что  $a_{01} < a_{02}$ ), то

$$\frac{x_{max}}{y_{max}} = \frac{b}{a} > 1.$$

Таким образом, пузырьки в первой фракции имеют большую амплитуду, чем пузырьки во второй, когда одна из фракций в начальный момент времени выведена из состояния покоя, а другая — нет. Это значит, что пузырьки в первой фракции получают (или отдают) больше энергии, чем пузырьки во второй.

Теперь рассмотрим действие внешней периодической силы  $\tilde{p}_I = -\Delta P \cos pt$  на систему с двумя степенями свободы. Здесь  $p$  — частота внешней силы;  $\Delta P$  — амплитуда внешней силы. В этом случае вместо (7) имеем следующие уравнения движения:

$$\begin{cases} A\ddot{x} + H\ddot{y} + ax + hy = X \cos pt, \\ H\ddot{x} + B\ddot{y} + hx + by = Y \cos pt. \end{cases} \quad (21)$$

Для системы уравнений (3) имеем:

$$X = \frac{N_1 a_{01}^2}{\rho_l R_0} \Delta P, \quad Y = \frac{N_2 a_{02}^2}{\rho_l R_0} \Delta P.$$

Будем искать решение в виде

$$x = \alpha \cos pt, \quad y = \beta \cos pt.$$

Подставляя последнее выражение в (21), получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} (a - Ap^2)\alpha + (h - Hp^2)\beta = X, \\ (h - Hp^2)\alpha + (b - Bp^2)\beta = Y. \end{cases}$$

Данная система уравнений имеет единственное решение, если определитель  $\Delta$  основной матрицы не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - Ap^2 & h - Hp^2 \\ h - Hp^2 & b - Bp^2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (22)$$

Данное решение, полученное с помощью формул Крамера, имеет следующий вид:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} X & h - Hp^2 \\ Y & b - Bp^2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a - Ap^2 & X \\ h - Hp^2 & Y \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Пусть  $Y = 0$ ,  $X \neq 0$ , то есть сила действует только на первую парциальную систему. Тогда

$$\alpha = \frac{X(b - Bp^2)}{\Delta}, \quad \beta = -\frac{X(h - Hp^2)}{\Delta}. \quad (24)$$

Если сила действует только на вторую парциальную систему, то есть  $X = 0$ ,  $Y \neq 0$ , то

$$\alpha = -\frac{Y(h - Hp^2)}{\Delta}, \quad \beta = \frac{Y(a - Ap^2)}{\Delta}. \quad (25)$$

Из формул (24) и (25) получаем следующее. Во-первых, одна из координат не колеблется ( $\alpha = 0$  или  $\beta = 0$ ), если частота внешней силы, действующей на нее, совпадает с парциальной частотой другой координаты ( $p = n_2$  или  $p = n_1$ ). Это явление называется динамическим демпфированием. На рис. 4 сверху показаны

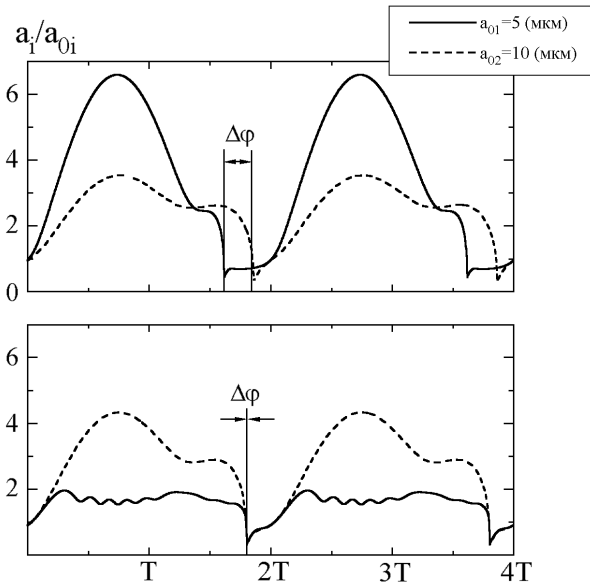


Рис. 4. Динамическое демпфирование в двухфракционном кластере: зависимость радиуса пузырьков от времени в двух монодисперсных кластерах (сверху) и пузырьков каждой фракции в двухфракционном кластере (снизу). Значения параметров:  $\Delta P = 5$  атм,  $\omega = 2\pi \cdot 20$  кГц,  $R_0 = 10^{-3}$  м,  $N = 10^4$  ( $N_1 = N_2 = N/2$ )

характеры колебаний пузырьков в двух монодисперсных кластерах, а внизу — в каждой фракции в двухфракционном кластере. Видно, что с некоторого момента времени колебания пузырьков малого начального радиуса подавляются пузырьками большого радиуса, чья собственная частота ближе к частоте воздействия внешнего поля (см. рис. 4, внизу). Следовательно, изменение характера колебания пузырьков в первой фракции, в то время как характер колебания пузырьков во второй практически не меняется, можно объяснить динамическим демпфированием.

Во-вторых, в соответствии с теоремой взаимности [33], если на вторую координату действует сила  $Y = 1$ , то движение первой координаты такое же, как движение второй координаты, когда на первую будет действовать сила  $X = 1$ . Отметим, что данная теорема справедлива и для систем с любым числом степеней свободы. Тогда, если  $p \rightarrow \omega_1$  или  $\omega_2$ , то по формулам (22), (23) получим, что

$$\Delta \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Это означает, что имеется два положения резонанса. При приближении к резонансу начинает играть роль затухание [33], которое приводит к тому, что при резонансе получается большая, но конечная амплитуда. На рис. 1 видно, что при  $\omega = \omega_1$  или  $\omega = \omega_2$  имеют место локальные максимумы амплитуды  $|\tilde{A}_a / \tilde{A}_{p1}|$ , то есть имеет место резонанс.

В общем случае, когда рассматриваем полидисперсный кластер с  $n$  различными фракциями, система уравнений (3) для свободных колебаний и при отсутствии

диссипации энергии может быть сведена после исключения неизвестной  $\tilde{p}_c$  к следующему виду:

$$\left(1 + \frac{N_i a_{0i}}{R_0}\right) a_{0i} \ddot{a}_i + \sum_{l=1, l \neq i}^n \frac{N_l a_{0l}^2}{R_0} \ddot{a}_l + \frac{1}{\rho_l a_{0i}} \left[3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}}(3\gamma - 1)\right] \ddot{a}_i = 0$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Данную систему можно записать как

$$\sum_{l=1}^n (b_{il} \ddot{a}_l + c_{il} \dot{a}_l) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

где  $b_{ii} = \left(1 + \frac{N_i a_{0i}}{R_0}\right) a_{0i}$ ,  $b_{il} = \frac{N_l a_{0l}^2}{R_0}$  ( $l \neq i$ ),

$$c_{ii} = \frac{1}{\rho_l a_{0i}} \left[3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}}(3\gamma - 1)\right], \quad c_{il} = 0 \quad (l \neq i).$$

Всегда можно в системе (26) сделать так, чтобы  $b_{il} = b_{li}$ . Потенциальная и кинетическая энергии выражаются через координаты следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^n b_{il} \dot{a}_i \dot{a}_l, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^n c_{il} \tilde{a}_i \tilde{a}_l. \quad (27)$$

В случае, когда нулевые значения координат соответствуют устойчивому положению равновесия, имеет место изолированный минимум потенциальной энергии, а выражение для  $U$  в (27) есть положительно определенная квадратичная форма (см., например, [35]). Для этого необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры были положительны (критерий Сильвестра). Для рассматриваемого случая данный критерий выполняется, поскольку все элементы, стоящие на главной диагонали положительны, а остальные — равны нулю.

Решение системы (26) ищется в виде:

$$\tilde{a}_l = A_l \cos(\omega t + \alpha) \quad (l = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Подставив последнее выражение в (26), получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^n \left(-b_{il} \omega^2 + c_{il}\right) A_l = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $\omega$  и  $A_l$  — неизвестные. Данная система может быть рассмотрена как линейная однородная система уравнений по отношению к  $A_l$ . При колебании все неизвестные амплитуды  $A_l$  не могут равняться нулю, поэтому должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов данной системы:

$$\Delta_\omega = \begin{vmatrix} c_{11} - b_{11}\omega^2 & c_{12} - b_{12}\omega^2 & \dots & c_{1n} - b_{1n}\omega^2 \\ c_{21} - b_{21}\omega^2 & c_{22} - b_{22}\omega^2 & \dots & c_{2n} - b_{2n}\omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - b_{n1}\omega^2 & c_{n2} - b_{n2}\omega^2 & \dots & c_{nn} - b_{nn}\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

После того, как развернем определитель  $\Delta_\omega$ , получим алгебраическое уравнение степени  $n$  относительно  $\omega^2$ :

$$d_0 - d_1 \omega^2 + d_2 \omega^4 - \dots + (-1)^n d_n \omega^{2n} = 0,$$

где  $d_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), которое имеет  $n$  корней. Для рассматриваемых систем, совершающих движение около состояния устойчивого равновесия (так как выполняется критерий Сильвестра), все эти корни вещественны и положительны. Их принято обозначать  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  и располагать в порядке возрастания. Таким образом, для частот  $\omega$  определяется  $n$  значений:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n,$$

образующих спектр частот.

Из-за громоздкости формул нет возможности представить общую формулу связи собственных частот с парциальными частотами. Однако представленный анализ позволяет сделать следующий основной вывод. В общем случае число резонансных частот совпадает с числом фракций в полидисперсном кластере. В частности, для трехфракционного кластера (рис. 2, слева внизу) наблюдается три резонанса — главный и два вторичных.

Каждому корню  $\omega_i$  соответствует частное решение типа (28), следовательно, общее решение представит собой сумму таких решений:

$$\tilde{a}_i = \sum_{l=1}^n A_{il} \cos(\omega_l t + \alpha_l) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где первый индекс  $A$  обозначает номер координаты, а второй — номер собственной частоты.

Таким образом, при произвольных начальных условиях изменение каждой координаты следует полигармоническому закону, причем число гармонических составляющих равно числу степеней свободы системы.

## 5. Заключение

В настоящей работе аналитически исследованы малые колебания сферических пузырьков в полидисперсном кластере на основе математической модели, предложенной в работах [1, 31, 32]. На основе полученных в работах [31, 34] амплитудно-частотных характеристик построены соответствующие графики для двух- и трехфракционных кластеров ( $n = 2, 3$ ). Показано, что помимо главного резонанса в области низких частот имеют место вторичные резонансы при более высоких частотах, причем число данных резонансов равно  $n - 1$ . В области главного резонанса пузырьки разных фракций колеблются в фазе, а в областях вторичных резонансов фазы последовательно меняются на противоположные, начиная с фракции, содержащей пузырьки самого большого радиуса, и далее — в порядке его убывания.

Поскольку линеаризованная система уравнений, описывающая динамику самого кластера и пузырьков в каждой фракции, является частным случаем системы уравнений, описывающей малые колебания линейной консервативной системы с несколькими степенями свободы, то к анализу колебаний пузырька в кластере около устойчивого положения равновесия была применена математическая теория, изложенная в монографии [33]. На примере двухфракционного кластера показано:

- между пузырьками имеет место инерциальная связь, а силовая связь отсутствует;
- при малом числе пузырьков одной из фракций связь между ними и пузырьками другой фракции является слабой (выполняется условие (19)), однако взаимодействие между ними может быть сильным (не выполняется условие (20));
- характер нелинейных колебаний пузырьков, полученных численным расчетом системы уравнений (1), а именно, колебания пузырьков разных фракций в фазе или противофазе в различных резонансных областях, может быть объяснен с помощью анализа линейных колебаний пузырьков в кластере.

Анализ передачи энергии между пузырьками разных фракций показал, что изменение характера колебания пузырьков во фракции с малым радиусом (без изменения характера колебания пузырьков в другой фракции) является результатом динамического демпфирования. Кроме того, в общем случае доказано, что число резонансных частот совпадает с числом фракций в полидисперсном кластере (главный и  $n - 1$  вторичный резонансы).

## Список литературы / References

- [1] Nasibullaeva E.S., Akhatov I.S. Bubble cluster dynamics in an acoustic field // *J. Acoust. Soc. Am.* 2013. V. 133, No. 6. P. 3727–3738. DOI: 10.1121/1.4802906
- [2] Hsieh D.Y., Plesset M.S. On the propagation of sounds in a liquid containing gas bubbles // *Phys. Fluids*. 1961. V. 4, No. 8. P. 970–975. DOI: 10.1063/1.1706447
- [3] Wijngaarden L. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles // *J. Fluid. Mech.* 1968. V. 33, No. 3. P. 465–474. DOI: 10.1017/S002211206800145X
- [4] Biesheuvel A., Wijngaarden L. Two-phase flow equation for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 301–318. DOI: 10.1017/S0022112084002366
- [5] Ishii M. Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow. Paris: Eyrolles. 1975. 248 p.
- [6] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука. 1987. 464 с.  
Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. New York: Hemisphere, 1991, vol. 1. P. 360.
- [7] Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Shreiber I.R. Wave Propagation in Gas-Liquid Media. New York: Begell House. 1993. Chap. 3. Pp. 53–90. DOI: 10.1017/S0022112094224515
- [8] Wijngaarden L. On the collective collapse of a large number of cavitation bubbles in water // *Proc. 11th International Congress of Applied Mechanics, Munich, 1964*, ed. H. Görtler, Springer Verlag. 1964. P. 854–865. DOI: 10.1007/978-3-662-29364-5\_112
- [9] Hansson I., Kedrinskii V.K., Mørch K.A. On the dynamics of cavity clusters // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1982. V. 15, No. 9. P. 1725–1734. DOI: 10.1088/0022-3727/15/9/017
- [10] Hansson J., Mørch K.A. The dynamics of cavity clusters in ultrasonic (vibratory) cavitation erosion // *J. Appl. Phys.* 1980. V. 51, No. 9. P. 4651–4658. DOI: 10.1063/1.328335
- [11] Kanthale P.M., Gogate P.R., Pandit A.B., Wilhelm A.M. Cavity cluster approach for quantification of cavitation intensity in sonochemical reactors // *Ultrason. Sonochem.* 2003. V. 10, No. 4–5. P. 181–189. DOI: 10.1016/S1350-4177(03)00088-9

- [12] Fuster D., Colonius T. Modelling bubble clusters in compressible liquids // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 688. P. 352–389.  
DOI: [10.1017/jfm.2011.380](https://doi.org/10.1017/jfm.2011.380)
- [13] Omta R. Oscillations of a cloud of bubbles of small and not so small amplitude // *J. Acoust. Soc. Am.* 1987. V. 82, No. 3. P. 1018–1033.  
DOI: [10.1121/1.395376](https://doi.org/10.1121/1.395376)
- [14] D'Agostino L., Brennen C.E. Acoustical absorption and scattering cross sections of spherical bubble clouds // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. V. 84, No. 6. P. 2126–2134.  
DOI: [10.1121/1.397058](https://doi.org/10.1121/1.397058)
- [15] D'Agostino L., Brennen C.E. Linearized dynamics of spherical bubble clouds // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 199. P. 155–176.  
DOI: [10.1017/S0022112089000339](https://doi.org/10.1017/S0022112089000339)
- [16] Smereka P., Banerjee S. The dynamics of periodically driven bubble clouds // *Phys. Fluids*. 1988. V. 31, No. 12. P. 3519–3531.  
DOI: [10.1063/1.857559](https://doi.org/10.1063/1.857559)
- [17] Birnir B., Smereka P. Existence theory and invariant manifolds of bubble clouds // *Commun. Pure Appl. Maths.* 1990. V. 43, No. 3. P. 363–413.  
DOI: [10.1002/cpa.3160430304](https://doi.org/10.1002/cpa.3160430304)
- [18] Daemi M., Taeibi-Rahnt M., Massah H. Study of acoustic bubble cluster dynamics using a lattice Boltzmann model // *Chinese Physics B*. 2015. V. 24, No. 2. P. 024302.  
DOI: [10.1088/1674-1056/24/2/024302](https://doi.org/10.1088/1674-1056/24/2/024302)
- [19] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Гидродинамическое взаимодействие слабонесферических газовых пузырьков в жидкости в трёхмерной постановке задачи // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 51–58.  
Аганин А.А., Давлетшин А.И. Hydrodynamic interaction of weakly nonspherical gas bubbles in a liquid in the three-dimensional problem statement. *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*. 2017. V. 12, No. 1. P. 51–58 (in Russian).  
DOI: [10.21662/uim2017.1.008](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.008)
- [20] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Деформации взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости при акустическом воздействии // *Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки*. 2018. Т. 160, № 4. С. 657–669.  
Аганин А.А., Давлетшин А.И. [Deformation of interacting gas bubbles in liquid under acoustic excitation]. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskoye nauki*. 2018. V. 160, No. 4. P. 657–669 (in Russian).  
EDN: [yyjckn](https://www.edn.ru/yjckn)
- [21] Аганин А.А., Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф. Численное моделирование динамики пузырьков в центральной области струйера // *Многофазные системы*. 2018. Т. 13, № 3. С. 11–22.  
Аганин А.А., Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф. Numerical simulation of bubble dynamics in central region of streamer. *Multiphase Systems*. 2018. V. 13, No. 3. P. 11–22 (in Russian).  
DOI: [10.21662/mfs2018.3.002](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.002)
- [22] Qinghim N. Acoustic cavitation characteristics of mixed bubble groups composed of different types of bubbles // *Acta Phys. Sin.* 2020. V. 69, No. 18. P. 184301.  
DOI: [10.7498/aps.69.20200381](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200381)
- [23] Chahine G.L., Duraiswami R. Dynamical interaction in a Multi-Bubble Cloud // *J. Fluids Eng.* 1992. V. 114, No. 4. P. 680–686.  
DOI: [10.1115/1.2910085](https://doi.org/10.1115/1.2910085)
- [24] Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S. Dynamics of a Cluster of Bubbles in a Liquid (Theoretical Analysis) // *JSME Int. J. Ser. B*. 1994. V. 37, No. 2. P. 297–305.  
DOI: [10.1299/jsmeb.37.297](https://doi.org/10.1299/jsmeb.37.297)
- [25] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113, No. 6. P. 3001–3011.  
DOI: [10.1121/1.1572141](https://doi.org/10.1121/1.1572141)
- [26] Akhatov I., Konovalova S. Structure formation in acoustic cavitation // *Multiphase Sci. Technol.* 2005. V. 17, No. 4. P. 343–371.  
DOI: [10.1615/MultScienTechn.v17.i4.30](https://doi.org/10.1615/MultScienTechn.v17.i4.30)
- [27] Doinikov A.A. Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116, No. 2. P. 821–827.  
DOI: [10.1121/1.1768255](https://doi.org/10.1121/1.1768255)
- [28] Ilinskii Y.A., Hamilton M.F., Zabolotskaya E.A. Bubble interaction dynamics in Lagrangian and Hamiltonian mechanics // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121, No. 2. P. 786–795.  
DOI: [10.1121/1.2404798](https://doi.org/10.1121/1.2404798)
- [29] Yasui K., Iida Y., Tuziuti T., Kozuka T., Towata A. Strongly interacting bubbles under an ultrasonic horn // *Physical Review E*. 2008. V. 77. P. 016609.  
DOI: [10.1103/PhysRevE.77.016609](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.016609)
- [30] LV L., Zhang H., Cui B., Chen L., Luo X. The Numerical Investigation on Bubble Interaction Dynamics in Hydrodynamic Cavitation // *MECHANIKA*. 2021. V. 27, No. 2. P. 115–121.  
DOI: [10.5755/j02.mech.26187](https://doi.org/10.5755/j02.mech.26187)
- [31] Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Динамика пузырькового кластера в акустическом поле // *Акуст. ж.* 2005. Т. 51, № 6. С. 709–717.  
EDN: [hsinhv](https://www.edn.ru/hsinhv)  
Насибуллаева Э.Ш., Ахатов И.Ш. Dynamics of a bubble cluster in an acoustic field. *Acoustical Physics*. 2005. V. 51, No. 6. P. 705–712.  
DOI: [10.11334/1.2130902](https://doi.org/10.11334/1.2130902)
- [32] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Vakhitova N.K., Nasibullaeva E.Sh. Dynamics of bubble clusters // in *Nonlinear Acoustics at the Turn of the Millennium* (AIP conference proceedings), Melville, New York, USA. 2000. V. 524, No. 1. P. 455–460.  
DOI: [10.1063/1.1309263](https://doi.org/10.1063/1.1309263)
- [33] Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука. 1972. 470 с.  
Mandelstam L.I. Lectures on the Theory of Oscillations. Moscow: Nauka. 1972. P. 470 (in Russian).
- [34] Нигматулин Р.И., Ахатов И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Вахитова Н.К. Динамика пузырьковых кластеров // *Вестник БашГУ. Уфа*. 1999. № 2. С. 12–15.  
Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Vakhitova N.K. [Dynamics of bubble clusters]. *Vestnik bashkirskogo universiteta* [Bulletin of the Bashkir State University]. 1999. No. 2. P. 12–15 (in Russian).
- [35] Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука. 1980. 272 с.  
Panovko Ya.G. Introduction to the theory of mechanical vibrations. Moscow: Nauka. 1980. P. 272 (in Russian).

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Эльвира Шамилевна Насибуллаева**

к.ф.-м.н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Elvira Sh. Nasibullaeva**

Ph.D (Physics & Mathematics)

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russia

[elvira98@mail.ru](mailto:elvira98@mail.ru)

ORCID: [0000-0003-1242-9800](https://orcid.org/0000-0003-1242-9800)