

ISSN: 2658–5782

Номер 2

2024

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Преобразования эквивалентности для уравнений газовой динамики

А.В. Борисов, С.В. Хабиров

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: [habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)

Объектом исследования в настоящей работе являются уравнения газовой динамики с произвольным уравнением состояния (удельная внутренняя энергия как функция удельного объема и энтропии). Требуется найти преобразования эквивалентности не изменяющих систему уравнений, но меняющих лишь уравнение состояния. Операторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности находятся из критерия инвариантности. Интегрируется переопределенная система уравнений на координаты оператора. Получена бесконечная алгебра Ли с двумя произвольными функциями.

**Ключевые слова:** групповой анализ, преобразование эквивалентности, уравнения газовой динамики, однопараметрическая группа, алгебра Ли, условие инвариантности

## Equivalence transformations for equations of gas dynamics

A.V. Borisov, S.V. Habirov

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: [habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)

The object of research in this paper is the equations of gas dynamics with an arbitrary equation of state (specific internal energy as a function of specific volume and entropy). It is required to find equivalence transformations that do not change the system of equations, but only change the equation of state. Operators of one-parameter groups of equivalence transformations are found from the invariance criterion. The redefined system of equations is integrated onto the coordinates of the operator. An infinite Lie algebra with two arbitrary functions is obtained.

**Keywords:** group analysis, equivalence transformation, equations of gas dynamics, one-parameter group, Lie algebra, invariance condition

### 1. Введение

Основной задачей группового анализа является групповая классификация уравнений с произвольным элементом, а именно, нахождение произвольных элементов, когда допускаемая группа расширяется [1]. При этом произвольный элемент определяется с точностью до преобразований эквивалентности не изменяющих вид уравнений, но меняющих лишь произвольный элемент. Для уравнений газовой динамики задача решена в работе [2], где уравнение состояния (произвольный элемент) взято в виде некоторой функции давления и плотности. В этом случае преобразование эквивалентности есть трехпараметрическая группа [2]. Наиболее общее уравнение состояния задается равенством  $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$ , где  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $V$  — удельный объем;  $S$  — энтропия [3, 4].

Уравнения газовой динамики записываются в виде:

$$V_t + \vec{u} \cdot \nabla V = V \nabla \cdot \vec{u}, \quad (1)$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = V(\varepsilon_{VS} \nabla S + \varepsilon_{VV} \nabla V), \quad (2)$$

$$S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{u}$  — скорость частицы;  $t$  — время;  $\vec{x}$  — положение частицы;  $\nabla = \partial_{\vec{x}}$  — вектор градиента. Плотность, давление и температура вычисляются по формулам  $\rho = V^{-1}$ ,  $p = -\varepsilon_V$ ,  $T = \varepsilon_S$ . Функция, задающая уравнение состояния, удовлетворяет равенствам

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{x^k} = \varepsilon_{u^k} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Преобразования всех переменных, входящих в систему уравнений (1)–(4), сохраняющих вид системы, но изменяющих функцию  $\varepsilon(V, S)$ , называются преобразованием эквивалентности. Мы разыскиваем преобразование эквивалентности, образующие однопараметрическую группу [5]. Однопараметрическим группам соответствуют операторы дифференцирования первого порядка, которые образуют алгебру Ли. Операторы преобразований эквивалентности имеют вид [5, 6]:

$$X = \xi^t \partial_t + \vec{\xi} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \cdot \partial_{\vec{u}} + \eta^V \partial_V + \eta^S \partial_S + \eta^\varepsilon \partial_\varepsilon,$$

где  $\xi^t, \xi^k, \eta, \eta^V, \eta^S$  — функции от переменных  $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S$ , а  $\eta^\varepsilon$  — от  $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S, \varepsilon$ .

Оператор  $X$  продолжается на производные, входящие в уравнение [5]:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = & X + (\tilde{D}_t \eta^k - u_i^k \tilde{D}_t \xi^t - u_j^k \tilde{D}_t \xi^j) \partial_{u_i^k} + \\ & + (\tilde{D}_t \eta^k - u_i^k \tilde{D}_t \xi^t - u_j^k \tilde{D}_t \xi^j) \partial_{u_i^k} + \\ & + (\tilde{D}_t \eta^V - V_i \tilde{D}_t \xi^t - V_j \tilde{D}_t \xi^j) \partial_{V_i} + \\ & + (\tilde{D}_t \eta^V - V_i \tilde{D}_t \xi^t - V_j \tilde{D}_t \xi^j) \partial_{V_i} + \\ & + (\tilde{D}_t \eta^S - S_i \tilde{D}_t \xi^t - S_j \tilde{D}_t \xi^j) \partial_{S_i} + \\ & + (\tilde{D}_t \eta^S - S_i \tilde{D}_t \xi^t - S_j \tilde{D}_t \xi^j) \partial_{S_i} + \\ & + (D_t \eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_t \eta^V - \varepsilon_S D_t \eta^S) \partial_{\varepsilon_t} + \\ & + (D_k \eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_k \eta^V - \varepsilon_S D_k \eta^S) \partial_{\varepsilon_k} + \\ & + (D_{u^k} \eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_{u^k} \eta^V - \varepsilon_S D_{u^k} \eta^S) \partial_{\varepsilon_{u^k}} + \\ & + \zeta^V \partial_{\varepsilon_V} + \zeta^{VV} \partial_{\varepsilon_{VV}} + \zeta^{VS} \partial_{\varepsilon_{VS}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta^V &= D_V \eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_V \eta^V - \varepsilon_S D_V \eta^S, \\ \zeta^{VV} &= D_V \zeta^V - \varepsilon_{VV} D_V \eta^V - \varepsilon_{VS} D_V \eta^S, \\ \zeta^{VS} &= D_S \zeta^V - \varepsilon_{VV} D_S \eta^V - \varepsilon_{VS} D_S \eta^S, \\ D_t &= \partial_t, \quad D_k = \partial_k, \quad D_{u^k} = \partial_{u^k}, \\ D_V &= \partial_V + \varepsilon_V \partial_\varepsilon + \varepsilon_{VV} \partial_{\varepsilon_V} + \varepsilon_{VS} \partial_{\varepsilon_S}, \\ D_S &= \partial_S + \varepsilon_S \partial_\varepsilon + \varepsilon_{VS} \partial_{\varepsilon_V} + \varepsilon_{SS} \partial_{\varepsilon_S}, \\ \tilde{D}_t &= \partial_t + u_i^k \partial_{u_i^k} + V_i \partial_{V_i} + S_i \partial_{S_i}, \\ \tilde{D}_k &= \partial_k + u_i^k \partial_{u_i^k} + V_k \partial_{V_k} + S_k \partial_{S_k}. \end{aligned}$$

Координаты оператора  $X$  разыскиваются из условия инвариантности. На каждое уравнение системы (1)–(4) действуем продолженным оператором в силу уравнений системы. В результате получаются уравнения, в которые входят некоторые производные в качестве свободных переменных. Приравнявая нулю коэффициенты при свободных переменных, получаем переопределенную систему уравнений на координаты оператора  $X$ .

## 2. Условие инвариантности уравнения (3)

Действуем на уравнение (3) оператором  $\tilde{X}$ :

$$\begin{aligned} 0 = & \tilde{D}_t \eta^S - S_t \tilde{D}_t \xi^t - \nabla S \cdot \tilde{D}_t \xi + \eta \cdot \nabla S + \\ & + u^k \left( \tilde{D}_k \eta^S - S_t \tilde{D}_k \xi^t - \nabla S \cdot \tilde{D}_k \xi \right) = \eta_t^S + \\ & + \vec{u} \cdot \nabla \eta^S + \eta_{u^k}^S V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) + \eta_V^S V \nabla \cdot \vec{u} + \\ & + \vec{u} \cdot \nabla S \left( \xi_t^t + \vec{u} \cdot \nabla \xi^t + \xi_{u^k}^t V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) + \right. \\ & \left. + \xi_V^t V \nabla \cdot \vec{u} \right) + \nabla S \cdot \left( \vec{\eta} - \xi_t - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\xi} - \right. \\ & \left. - \xi_{u^k}^t V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) - \xi_V^t V \nabla \cdot \vec{u} \right). \end{aligned}$$

Соберем квадратичные слагаемые по свободным производным  $\nabla \cdot \vec{u}$ :

$$\left( \xi_V^t \vec{u} - \xi_V^t \right) \cdot \nabla S = 0.$$

Отсюда получим равенство

$$\vec{u} \xi_V^t = \xi_V^t. \quad (5)$$

Выпишем оставшиеся квадратичные слагаемые

$$\left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) \left( \xi_{u^k}^t \vec{u} - \xi_{u^k}^t \right) \cdot \nabla S = 0.$$

Отсюда получим равенство

$$\xi_{u^k}^t \vec{u} = \xi_{u^k}^t. \quad (6)$$

Предположили, что  $\varepsilon_{VS}$  и  $\varepsilon_{VV}$  не равны нулю одновременно. Если это не так, то уравнения (1)–(2) интегрируются в лагранжевых координатах.

Линейные слагаемые по производным дают:

$$\eta_V^S = 0, \quad \varepsilon_{VV} \eta_{u^k}^S = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \eta^k &= \xi_t^k + (\vec{u} \cdot \nabla) \xi^k - \\ &- u^k \left( \xi_t^t + (\vec{u} \cdot \nabla) \xi^t \right) - V \varepsilon_{VS} \eta_{u^k}^S. \end{aligned} \quad (8)$$

Остается уравнение

$$\eta_t^S + \vec{u} \cdot \nabla \eta^S = 0. \quad (9)$$

## 3. Условие инвариантности уравнения (1)

Действуем на уравнение (1) оператором  $\tilde{X}$ :

$$\begin{aligned} 0 = & \tilde{D}_t \eta^V - V_t \tilde{D}_t \xi^t - \nabla V \cdot \tilde{D}_t \xi + \vec{\eta} \cdot \nabla V + \\ & + u^k \left( \tilde{D}_k \eta^V - V_t \tilde{D}_k \xi^t - \nabla V \cdot \tilde{D}_k \xi \right) - \eta^V \nabla \cdot \vec{u} - \\ & - V \left( \tilde{D}_k \eta^k - u_i^k \tilde{D}_k \xi^t - u_j^k \tilde{D}_k \xi^j \right) = \\ & = \eta_t^V + \vec{u} \cdot \nabla \eta^V + \\ & + \eta_{u^k}^V V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) + \eta_V^V V \nabla \cdot \vec{u} - \eta^V \nabla \cdot \vec{u} - \\ & - \left( V \nabla \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla V \right) \left( \xi_t^t + \vec{u} \cdot \nabla \xi^t + \right. \\ & \left. \xi_{u^k}^t V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) + \right. \\ & \left. + \xi_V^t V \nabla \cdot \vec{u} \right) + V \left( -u^j u_k^j + V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) \right) \times \\ & \times \left( \xi_k^t + \xi_{u^j}^t u_k^j + \xi_V^t V_k + \xi_S^t S_k \right) + \\ & + \nabla V \cdot \left( \vec{\eta} - \xi_t - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\xi} - \right. \\ & \left. - \xi_{u^j}^t V \left( \varepsilon_{VS} S_k + \varepsilon_{VV} V_k \right) - \xi_V^t V \nabla \cdot \vec{u} \right) - \\ & - V \left( \eta_k^k + \eta_{u^j}^k u_k^j + \eta_V^k V_k + \eta_S^k S_k - \right. \\ & \left. - u_j^k \left( \xi_k^j + \xi_{u^l}^j u_k^l + \xi_V^j V_k + \xi_S^j S_k \right) \right). \end{aligned}$$

Квадратичные слагаемые по производным  $\vec{u}$  в силу (5) и (6) дают

$$\xi_V^t = \xi_V^t = 0.$$

Квадратные слагаемые, содержащие производные  $\vec{u}$ , расщепляем по  $S_k$  и  $V_k$ :

$$V_k : \varepsilon_{VV} \left( \xi_{uj}^t u_k^j - \xi_{uk}^t \nabla \cdot \vec{u} \right) = 0 \implies \varepsilon_{VV} \xi_{uk}^t = 0.$$

$$S_k : V \varepsilon_{VS} \left( \xi_{uj}^t u_k^j - \xi_{uk}^t \nabla \cdot \vec{u} \right) = \vec{u} \cdot \nabla u^k \xi_S^t - u_j^k \xi_S^j = 0 \implies \varepsilon_{VS} \xi_{uk}^t = 0.$$

Следовательно,

$$\xi_{uk}^t = \vec{\xi}_{uk} = 0.$$

Остаются слагаемые

$$u_j^k \xi_S^j = \xi_S^t u^j u_k^j \implies \xi_S^j = u^j \xi_S^t.$$

Отсюда получаем

$$\xi_S^t = \vec{\xi}_S = 0.$$

Таким образом,  $\xi^t(t, \vec{x})$ ,  $\vec{\xi}(t, \vec{x})$ .

Линейные слагаемые по производным, содержащие  $u_j^k$ :

$$\begin{aligned} & \left( \eta_V^V - V^{-1} \eta^V - \xi_t^t - \vec{u} \cdot \nabla \xi^t \right) \nabla \cdot \vec{u} = \\ & = u_k^j \left( \eta_{uj}^k + u^k \xi_j^t - \xi_j^k \right). \end{aligned}$$

Расщепление по  $u_j^k$  даёт:

$$j \neq k : \quad \eta_{uj}^k = \xi_j^k - u^k \xi_j^t, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} j = k : \quad \eta_V^V - V^{-1} \eta^V - \xi_t^t - \vec{u} \cdot \nabla \xi^t = \\ = \eta_{u^1}^1 + u^1 \xi_1^t - \xi_1^1 = \eta_{u^2}^2 + u^2 \xi_2^t - \xi_2^2 = \\ = \eta_{u^3}^3 + u^3 \xi_3^t - \xi_3^3. \end{aligned} \quad (11)$$

Слагаемые с производными  $S_k, V_k$  дают уравнения:

$$\eta_S^k = \varepsilon_{VS} (\eta_{uk}^V + V \xi_k^t), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \eta^k = -(\xi_t^t u^l + \xi_t^l) u^k + u^l \xi_l^k + \xi_t^k + \\ + V \eta_V^k - V \varepsilon_{VV} (\eta_{uk}^V + V \xi_k^t). \end{aligned} \quad (13)$$

Остаются слагаемые без производных

$$\eta_t^V + u^k \eta_k^V = V \eta_k^k. \quad (14)$$

#### 4. Условие инвариантности уравнения (2)

Действуем на уравнение (2) оператором  $\tilde{X}$ :

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{D}_t \eta^k - u_t^k \tilde{D}_t \xi^t - u_j^k \tilde{D}_t \xi^j + \\ + u^l (\tilde{D}_l \eta^k - u_t^l \tilde{D}_l \xi^t - u_j^l \tilde{D}_l \xi^j) + \\ + (\vec{\eta} \cdot \nabla) u^k - \eta^V (\varepsilon_{VV} V_k + \varepsilon_{VS} S_k) - \\ - V \varepsilon_{VV} \left( \tilde{D}_k \eta^V - V_t \tilde{D}_k \xi^t - V_j \tilde{D}_k \xi^j \right) - \\ - V \varepsilon_{VS} \left( \tilde{D}_k \eta^S - S_t \tilde{D}_k \xi^t - S_j \tilde{D}_k \xi^j \right) - \\ - V V_k \zeta^{VV} - V S_k \zeta^{VS}. \end{aligned}$$

Собирая слагаемые для каждой координаты оператора  $\tilde{X}$  и используя полученные выражения для  $\xi^t, \vec{\xi}$ , получим:

$$\begin{aligned} 0 = \eta_t^k + \vec{u} \cdot \nabla \eta^k + \eta_{uj}^k V (\varepsilon_{VV} V_j + \varepsilon_{VS} S_j) + \\ + \eta_V^k V \nabla \cdot \vec{u} + \eta^l u_l^k - (\xi_t^t + \vec{u} \cdot \nabla \xi^t) \times \\ \times \left( -u^l u_l^k + V (\varepsilon_{VV} V_k + \varepsilon_{VS} S_k) \right) + \\ + \xi_S^t V (\varepsilon_{VV} (-\vec{u} \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \vec{u}) - \varepsilon_{VS} \vec{u} \cdot \nabla S) - \\ - u_j^k (\xi_t^j + \vec{u} \cdot \nabla \xi^j) + V (\varepsilon_{VV} V_j + \varepsilon_{VS} S_j) \xi_k^j - \\ - \eta^V (\varepsilon_{VV} V_k + \varepsilon_{VS} S_k) - \\ - V \varepsilon_{VV} \left( \eta_k^V + \eta_{ul}^V u_l^k + \eta_V^V V_k + \eta_S^V S_k \right) - \\ - V \varepsilon_{VS} \left( \eta_k^S + \eta_S^S S_k + \eta_{ul}^S u_l^k \right) - \\ - V V_k \left( D_V^2 \eta^e - 2 \varepsilon_{VV} \eta_V^V - \varepsilon_V \eta_{VV}^V \right) - \\ - V S_k \left( D_S D_V \eta^e - \varepsilon_{VS} \eta_V^V - \varepsilon_V \eta_{VS}^V - \varepsilon_{VV} \eta_S^V - \varepsilon_{VS} \eta_S^S \right). \end{aligned}$$

Слагаемые с производными функции  $\vec{u}$ , учитывая (8), дают равенство

$$\begin{aligned} (V \varepsilon_{VS})_V \eta_{uk}^S \nabla \cdot \vec{u} + \varepsilon_{VS} \eta_{ul}^S (u_l^k + u_l^l) + \\ + \varepsilon_{VV} \eta_{ul}^V u_l^k = \xi_k^t V \varepsilon_{VV} \nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, учитывая (7):

$$\eta_{ul}^S = 0, \quad \varepsilon_{VV} \eta_{ul}^V = 0, \quad \varepsilon_{VV} \xi_k^t = 0 \implies \vec{\eta}_V = 0. \quad (15)$$

Слагаемые с  $V_j$  и  $S_j$ , учитывая (8) и полученные соотношения, дают равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{VV} (\xi_j^k + \xi_k^j - 2 \xi_t^t \delta_j^k) = \delta_j^k D_V^2 \eta^e + \\ + (-\eta_V^V + V^{-1} \eta^V) \varepsilon_{VV} \delta_j^k - \delta_j^k \varepsilon_V \eta_{VV}^V. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{VS} \left( \xi_j^k + \xi_k^j - 2 (\xi_t^t + \vec{u} \cdot \nabla \xi^t) \delta_j^k - \right. \\ \left. - u^k \xi_j^t - u^j \xi_k^t \right) = \delta_j^k (D_S D_V \eta^e - \varepsilon_V \eta_{VS}^V). \end{aligned} \quad (17)$$

Останутся следующие слагаемые:

$$\eta_t^k + \vec{u} \cdot \nabla \eta^k = V \varepsilon_{VV} \eta_k^V + V \varepsilon_{VS} \eta_k^S. \quad (18)$$

Из равенств (16) и (17) при  $k \neq j$  следует, учитывая (15):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{VV} (\xi_j^k + \xi_k^j) = 0, \\ \varepsilon_{VS} \left( \xi_j^k + \xi_k^j - u^k \xi_j^t - u^j \xi_k^t \right) = 0 \implies \xi_k^t = 0, \\ \xi_j^k + \xi_k^j = 0, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (8), (11), (12) в силу (15) следует:

$$\begin{aligned} \vec{\eta} = \vec{\xi}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\xi} - \vec{u} \xi_t^t, \\ \eta_V^V = V^{-1} \eta^V \implies \eta^V = V \vec{\eta}(t, \vec{x}, S), \end{aligned}$$

при этом (10) и (13) тождественно выполнены.

Из (16) и (17) при  $k = j$  получим:

$$\begin{aligned} D_V^2 \eta^e + 2\varepsilon_{VV} \xi_t^e &= 2\varepsilon_{VV} n, \\ \xi_1^1 &= \xi_2^2 = \xi_3^3 = n(t, \vec{x}), \\ D_S D_V \eta^e + 2\varepsilon_{VS} \xi_t^e &= \varepsilon_V \bar{\eta}_S + 2\varepsilon_{VS} n. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (9) следует в силу (15)

$$\eta_t^S = \eta_k^S = 0 \implies \eta^S = \eta(S).$$

Из (14) следует

$$\bar{\eta}_t + \vec{u} \cdot \nabla \bar{\eta} = 3n_t + 3\vec{u} \cdot \nabla n \implies \bar{\eta} = 3n + \alpha(S).$$

Из (18) следует:

$$\begin{aligned} \xi_{tt}^k + 2(\vec{u} \cdot \nabla) \xi_t^k - u^k \xi_{tt}^k + u^l u^j \xi_{lj}^k &= V^2 \varepsilon_{VV} 3n_k, \\ \xi_{t2}^1 &= \xi_{t3}^1 = \xi_{t1}^2 = \xi_{t3}^2 = \xi_{t1}^3 = \xi_{t2}^3 = 0, \\ \xi_{lj}^k &= 0, \quad n_k = 0, \quad \xi_{tt}^k = 0, \quad \xi_{tt}^t = 2n_t. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (19), (20):

$$\begin{aligned} \xi^k &= \omega_j^k(t) x^j + a^k(t), \quad \omega_j^k + \omega_k^j = 0 \quad (j \neq k), \\ \omega_1^1 &= \omega_2^2 = \omega_3^3 = n(t), \\ a^k &= A^k t + A_0^k, \quad \omega_j^{k''} = 0, \\ n'' &= 0, \quad \omega_j^k = \Omega_j^k, \quad \Omega_j^k + \Omega_k^j = 0, \quad n = Nt + N_0, \\ \xi_{ttt}^t &= 0 \implies \xi^t = Nt^2 + Bt + B_0, \\ \vec{\xi} &= \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{A}t + \vec{A}_0 + (Nt + N_0) \vec{x}, \\ \bar{\eta} &= N\vec{x} + \vec{A} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{u}(-Nt + N_0 - B), \\ \eta^S &= \eta(S), \quad \eta^V = V(3Nt + 3N_0 + \alpha(S)), \end{aligned}$$

Большими буквами обозначены произвольные постоянные.

Равенство (20) интегрируется по  $V$ :

$$\eta^e = 2\varepsilon(N_0 - B - Nt) + V\mu(S, \vec{u}, t, \vec{x}) + v(S, \vec{u}, t, \vec{x}), \quad \mu_S = \varepsilon_V \alpha_S. \quad (21)$$

### 5. Условие инвариантности уравнения (4)

Действуем оператором  $\tilde{X}$  на уравнения (4) в силу (21):

$$D_k \eta^e = 0, \quad D_{u^k} \eta^e = 0, \quad D_t \eta^e = \varepsilon_V 3NV.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \mu_k &= v_k = 0, \quad \mu_{u^k} = v_{u^k} = 0, \\ V\mu_t + v_t &= N(3V\varepsilon_V + 2\varepsilon), \\ \mu_{St} = 0 &\implies \mu = \varphi(S) + \psi(t), \\ \varphi' &= \varepsilon_V \alpha', \quad \psi'' = 0, \quad v_{tt} = 0, \\ \psi &= \Psi_1 t + \Psi_0, \quad v = v_1(S)t + v_0(S), \\ V\Psi_1 + v_1(S) &= N(3V\varepsilon_V + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} \eta^e &= 2\varepsilon(N_0 - B - Nt) + V(\varphi(S) + \Psi_1 t + \Psi_0) + \\ &+ v_1(S)t + v_0(S), \quad \varphi' = \alpha' \varepsilon_V, \\ V\Psi_1 + v_1(S) &= N(3V\varepsilon_V + 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Если  $\varepsilon(V, S)$  — произвольная, то  $\varphi' = \alpha' = 0 \implies \varphi = \Phi, \alpha = E$ , постоянные  $N = 0, \Psi_1 = 0, v_1(S) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \xi^t &= Bt + B_0, \quad \vec{\xi} = \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{A}t + \vec{A}_0 + N_0 \vec{x}, \\ \bar{\eta} &= \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{u}(N_0 - B) + \vec{A}, \\ \eta^S &= \eta(S), \quad \eta^V = V(3N_0 + E), \\ \eta^e &= 2\varepsilon(N_0 - B) + V(\Phi + \Psi_0) + v(S). \end{aligned}$$

Здесь  $B, B_0, \vec{A}, \vec{A}_0, N_0, E, \vec{\Omega}, \Phi + \Psi_0$  — произвольные постоянные;  $\eta(S), v(S)$  — произвольные функции.

Если один произвольный элемент не равен нулю, а остальные обнулить, то получим базисные операторы алгебры Ли  $L$ :

$$\begin{aligned} A_0^k, k = 1, 2, 3 : \partial_{\vec{x}} &= \{X_1, X_2, X_3\}, \\ A^k, k = 1, 2, 3 : t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}} &= \{X_4, X_5, X_6\}, \\ \vec{\Omega} : \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}} &= \{X_7, X_8, X_9\}, \\ B_0 : \partial_t = X_{10}, B + N_0 - 3E : t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} &= X_{11}, \\ N_0 - 3E : \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} + 2\varepsilon\partial_\varepsilon &= X_{12}, \\ E : V\partial_V = X_{13}; \Phi + \Psi_0 : V\partial_\varepsilon &= X_{14}, \\ \eta(S) : \eta(S)\partial_S = \langle \eta \rangle_1; v(S) : v(S)\partial_\varepsilon &= \langle v \rangle_2. \end{aligned}$$

Алгебра Ли  $L$  раскладывается в полупрямую сумму  $L = L_{11} \oplus L_\infty$  идеала  $L_{11} = \{X_1, \dots, X_{11}\}$  и бесконечной подалгебры  $L_\infty = \{X_{12}, X_{13}, X_{14}, \langle \eta \rangle_1, \langle v \rangle_2\}$ . Преобразования алгебры  $L_{11}$  не преобразуют уравнение состояния, значит  $L_{11}$  допускаются уравнениями газовой динамики с любым уравнением состояния. Это ядро допускаемых алгебр [2].

### 6. Заключение

Вычислены операторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности для уравнений газовой динамики с уравнением состояния в виде произвольной функции удельной внутренней энергии, зависящей от удельного объема и энтропии. Получена бесконечная алгебра Ли с двумя произвольными функциями. Конечномерная часть этой алгебры 14-мерна.

### Список литературы / References

- [1] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. 239 с. Ovsyannikov L.V. [Group property of differential equations] *Групповые свойства дифференциальных уравнений*. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. P. 239 (in Russian).
- [2] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55. Ovsyannikov L.V. [Program SUBMODELS. Gas dynamics] *Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика* // ПММ. 1994. V. 58, no. 4. Pp. 30–55 (in Russian).

- [3] Хабиров С.В. Лекции аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ, 2013. 224 с.  
Habirov S.V. [Lectures Analytical methods in gas dynamics] *Lekcii analiticheskie metody v gazovoj dinamike*. Ufa: BGU, 2013. P. 224 (in Russian).
- [4] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики: учеб. пособие для студентов механико–мат. специальностей ун-тов. Изд. 2-е, доп. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.  
Ovsyannikov L.V. [Lectures on the fundamentals of gas dynamics: a textbook for students of mechanical and mathematical specialties at universities. Ed. 2nd, add.] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki: uchebnoye posobiye dlya studentov mekhaniko–matem. spetsial'nostey univ-tov. Izd. 2-ye, dop.*. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternyx issledovaniy, 2003. P. 336 (in Russian).
- [5] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012, 659 с.  
Chirkunov Yu.A., Habirov S.V. [Elements of the symmetric analysis of differential equations of continuum mechanics] *Elementi simmetriinogo analiza differentsialnix uravnenij mehaniki sploshnoi sredy*. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2012. P. 659 (in Russian).
- [6] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.  
Ibragimov N.H. [Transformation groups in mathematical physics] *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike*. Moscow: Nauka, 1983. P. 280 (in Russian).

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Артем Вячеславович Борисов**

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

**Салават Валеевич Хабиров**

д.ф.-м.н., профессор

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

**Artyom V. Borisov**

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

**Salavat V. Khabirov**

Sc.D. (physics & mathematics), Prof.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

[habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)

ORCID: [0000-0002-6126-9033](https://orcid.org/0000-0002-6126-9033)



## Математическое моделирование процесса закачки диоксида углерода в содержащий метан и его гидрат пласт

Н.Г. Мусакаев, С.Л. Бородин, Д.С. Бельских

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Тюмень

E-mail: [musakaev68@yandex.ru](mailto:musakaev68@yandex.ru)

В последнее время проблематике разработки залежей природных газогидратов уделяется особое внимание в связи с их широким распространением в природе и большими запасами углеводородов, содержащихся в месторождениях. В статье рассматривается инновационный метод отбора газа, основанный на закачке диоксида углерода в газогидратный пласт. Данная технология позволяет аккумулировать парниковые газы в твердой газогидратной форме при очень малых экономических затратах, а также решить проблему извлечения природного газа. Для получения прогнозных расчетов на основе методов и уравнений механики многофазных сред построена математическая модель неизоотермической фильтрации диоксида углерода в газообразном состоянии, метана и воды с учетом замещения метана в составе газового гидрата углекислым газом. В модели дополнительно учитываются такие немаловажные факторы, как фильтрационное течение воды и газа, реальные свойства газа, эффекты Джоуля–Томсона и адиабатического сжатия; процесс замещения  $\text{CH}_4$ – $\text{CO}_2$  в газогидрате предполагается равновесным. В одномерном радиальном осесимметричном приближении представлены уравнения, позволяющие рассчитать значения основных параметров процесса (давления, температуры, массовой доли компонент газовой фазы, насыщенностей фаз и др.). Записаны дискретные аналоги дифференциальных уравнений и приведена методика численного решения предложенной математической модели. Расчет распределений насыщенностей гидратов метана и углекислого газа производится с учетом их фазового равновесия при текущих значениях давления, температуры и водонасыщенности. Для задачи закачки углекислого газа в пласт, который изначально насыщен метаном и его гидратом, построены численные решения, описывающие распределения в пласте давления, температуры, массовых концентраций компонент газовой фазы и насыщенностей гидратами метана и углекислого газа.

**Ключевые слова:** математическая модель, фильтрация, замещение метана в газогидрате углекислым газом, алгоритм решения

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ 124021500017-5).

## Mathematical modeling of the process of the injection of carbon dioxide into a formation containing methane and its hydrate

N.G. Musakaev, S.L. Borodin, D.S. Belskikh

Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS

E-mail: [musakaev68@yandex.ru](mailto:musakaev68@yandex.ru)

Recently, special attention is paid to the development of deposits of natural gas hydrates due to their wide distribution in nature and the large reserves of hydrocarbons contained in such deposits. The article discusses an innovative gas extraction method based on the injection of carbon dioxide into a gas hydrate formation. This technology makes it possible to accumulate greenhouse gases in solid gas hydrate form at very low economic costs, as well as solve the problem of natural gas extraction. A mathematical model of non-isothermal filtration of carbon dioxide in the gaseous state, methane and water is constructed based on methods and equations of mechanics of multiphase media considering the replacement of methane in the gas hydrate with carbon dioxide to obtain predictive calculations. The model additionally takes into account such important factors as filtration flow of water and gas, real gas properties, Joule–Thomson and adiabatic compression effects; the process of  $\text{CH}_4$ – $\text{CO}_2$  replacement in gas hydrate is assumed to be equilibrium. The equations are presented to calculate the values of the main process parameters (pressure, temperature, mass fraction of gas phase components, phase saturations, etc.) in one-dimensional radial axisymmetric approximation. Discrete analogues of differential equations are written down and an algorithm for numerical solution of the proposed mathematical model is given. Calculation of saturation distributions of methane and carbon dioxide hydrates is carried out considering their phase equilibrium at current values of pressure, temperature and water saturation. Numerical solutions are constructed that describe the distributions of pressure, temperature, mass concentrations of gas phase components and saturations of methane and carbon dioxide hydrates in the reservoir for the problem of injecting carbon dioxide into a reservoir initially saturated with methane and its hydrate.

**Keywords:** mathematical model, filtration, replacement of methane in gas hydrate with carbon dioxide, algorithm of solution

## 1. Введение

По имеющимся научным работам отмечается неугасающий интерес к тематике, связанной с необходимостью добычи природного газа, и, в частности, метана, из имеющихся газогидратных месторождений. При этом исследования связаны как с «классическими» методами добычи газа из его гидратов (понижение давления, повышение температуры или использование ингибиторов), так и с инновационным методом замещения метана в его гидрате диоксидом углерода [1–3]. Последний метод считается более выгодным благодаря одновременной возможности как добычи природного газа, так и захоронения диоксида углерода в пласте [4–7]. Преимущество этого метода неоспоримо, поскольку до сих пор остро стоит проблема снижения выбросов парниковых газов, одним из которых и является диоксид углерода, а значит, и уменьшение антропогенного влияния на климат Земли [8]. При этом захоронение диоксида углерода может происходить и в уже отработанных нефтяных и газовых месторождениях [9]. Стоит отметить, что закачка диоксида углерода может производиться как в случае его нахождения в газообразном, так и в жидком состоянии, что позволяет использовать более широкий диапазон давлений закачиваемого диоксида углерода [10, 11]. На данный момент также имеются экспериментальные данные с тестовых скважин, где использовался метод замещения для добычи природного газа из подземных хранилищ, содержащих газовые гидраты [12].

Для исследования задач, связанных с закачкой углекислого газа в подземный пласт, и получения прогнозных расчетов необходимо провести математическое моделирование данного процесса [13]. Построенная математическая модель и методика решения позволят провести исследование влияния различных параметров на процесс закачки газообразного диоксида углерода, а затем и добычи замещенного природного газа, полученного из подземных хранилищ.

## 2. Математическая модель

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть пористый пласт в начальный момент времени насыщен метаном и его гидратом. Давление  $p_0$  и температура  $T_0$  соответствуют условиям стабильного существования гидрата метана, т.е.  $p_0 > p_{emh}(T_0)$ , где  $p_{emh}(T_0)$  — равновесное давление образования гидрата метана, соответствующее начальной пластовой температуре  $T_0$ . Задача рассматривается в одномерной радиальной осесимметричной постановке, внешний радиус пласта равен  $R$ , радиус скважины —  $r_w$ . Через скважину производится закачка  $\text{CO}_2$  с постоянными давлением  $p_{inj}$  и температурой  $T_{inj}$  (рис. 1). При этом параметры закачки ( $p_{inj}$  и  $T_{inj}$ ) такие, чтобы, во-первых,  $\text{CO}_2$  был в газообразном состоянии и, во-вторых, было возможным образование гидрата диоксида углерода (рис. 2). Метан и углекислый газ могут перемешиваться. В модели учитывается фильтрация как газовой, так и водной фазы. При филь-

трации будет происходить замещение метана в составе газового гидрата углекислым газом.

При математическом моделировании примем следующие допущения: температуры всех фаз в некотором бесконечно малом объеме системы совпадают (рассматривается однотемпературная модель); капиллярные эффекты не учитываются, то есть давление всех фаз совпадает; не учитываются растворение метана и углекислого газа в воде, а также испарение воды в газовую фазу; пористость пласта не меняется со временем; скелет пористой среды несжимаем и неподвижен; газовые гидраты метана и углекислого газа несжимаемы и неподвижны; плотность, динамическая вязкость, теплоемкость, теплопроводность гидратов метана и углекислого газа постоянны; газовые гидраты метана и углекислого газа являются двухкомпонентными системами с постоянными массовыми долями компонент; плотность, динамическая вязкость, теплоемкость и теплопроводность воды постоянны; динамическая вязкость, теплоемкость и теплопроводность метана постоянны; динамическая вязкость, теплоемкость и теплопроводность углекислого газа постоянны.

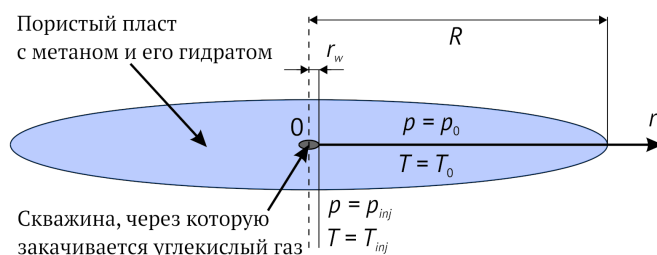


Рис. 1. Схематичное представление рассматриваемой задачи

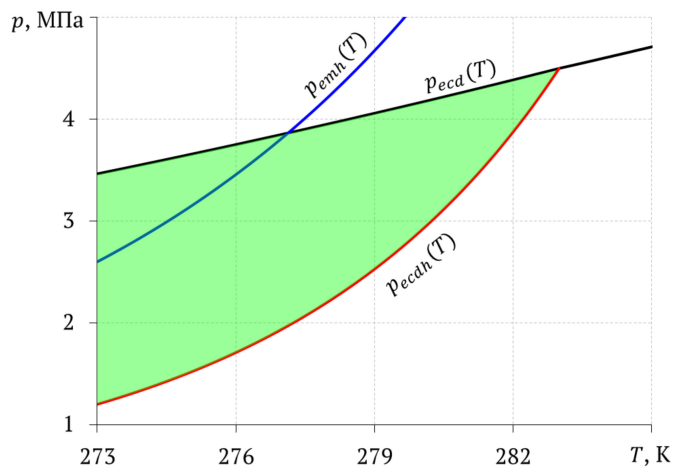


Рис. 2. Кривые фазового равновесия для систем « $\text{CH}_4\text{-H}_2\text{O} \leftrightarrow$  гидрат  $\text{CH}_4$ »  $p_{emh}(T)$ , « $\text{CO}_2\text{-H}_2\text{O} \leftrightarrow$  гидрат  $\text{CO}_2$ »  $p_{ecdh}(T)$ , а также «жидкий  $\leftrightarrow$  газообразный  $\text{CO}_2$ »  $p_{ecd}(T)$ . Зеленым выделена область, в которой одновременно  $\text{CO}_2$  находится в газообразном состоянии и возможно образование гидрата  $\text{CO}_2$



Для рассматриваемой постановки задачи в системе могут присутствовать следующие фазы (компоненты):

- газ  $g$  (может содержать метан ( $m$ ) и углекислый газ ( $cd$ ));
- вода  $w$ ;
- гидрат метана  $hm$  (содержит воду ( $w$ ) и метан ( $m$ ));

- гидрат углекислого газа  $hcd$  (содержит воду ( $w$ ) и углекислый газ ( $cd$ ));
- скелет пористой среды  $sk$ .

Расчетные соотношения для рассматриваемой системы могут быть получены на основе методов и уравнений механики многофазных сред и теплофизики [14].

В одномерной радиальной постановке уравнение расчета давления принимает вид [13, 15, 16]:

$$\frac{S_g}{z_g \rho_g R_g T} \frac{\partial p}{\partial t} = S_g \left( \frac{1}{z_g} \frac{\partial z_g}{\partial t} + \frac{1}{R_g} \frac{\partial R_g}{\partial t} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{\partial S_{hm}}{\partial t} \left( 1 - \omega_{hm(m)} \frac{\rho_{hm}}{\rho_g} - \omega_{hm(w)} \frac{\rho_{hm}}{\rho_w} \right) + \frac{\partial S_{hcd}}{\partial t} \left( 1 - \omega_{hcd(cd)} \frac{\rho_{hcd}}{\rho_g} - \omega_{hcd(w)} \frac{\rho_{hcd}}{\rho_w} \right) + \frac{1}{r\phi} \left[ \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} k \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_{rw} k \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время, с;  $r$  — радиальная координата, м;  $p$  — давление, Па;  $T$  — температура, К;  $\phi$  — пористость;  $S_j$  ( $j = g, w, hm, hcd$ ) — насыщенность пористой среды  $j$ -ой фазой;  $\rho_j$  ( $j = g, w, hm, hcd$ ) — плотность  $j$ -ой фазы, кг/м<sup>3</sup>;  $k_{rg}$  и  $k_{rw}$  — относительные фазовые проницаемости для газа и воды, соответственно;  $\mu_g$  и  $\mu_w$  — динамические вязкости газа и воды, соответственно, Па·с;  $k$  — абсолютная проницаемость пористой среды, м<sup>2</sup>;

$z_g$  — коэффициент сжимаемости газовой фазы;  $R_g = R/M_g$  — удельная газовая «постоянная», этот параметр может изменяться в зависимости от состава газовой фазы, Дж/(кг·К);  $R$  — универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К);  $M_g$  — молярная масса газовой фазы, кг/моль.

Уравнение для нахождения температуры в одномерной радиальной постановке можно записать в следующем виде [13, 15, 16]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{\partial p}{\partial r} \left( \rho_g c_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_g \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \rho_w c_w \frac{k_{rw}}{\mu_w} \left( \frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_w \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right) + \rho_g c_g \eta_g \phi S_g \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \rho_{hm} L_{hm} \frac{\partial S_{hm}}{\partial t} + \phi \rho_{hcd} L_{hcd} \frac{\partial S_{hcd}}{\partial t},$$

$$\rho c = \phi (S_g \rho_g c_g + S_w \rho_w c_w + S_{hm} \rho_{hm} c_{hm} + S_{hcd} \rho_{hcd} c_{hcd}) + (1 - \phi) \rho_{sk} c_{sk},$$

$$\lambda = \phi (S_g \lambda_g + S_w \lambda_w + S_{hm} \lambda_{hm} + S_{hcd} \lambda_{hcd}) + (1 - \phi) \lambda_{sk},$$

$$\varepsilon_g = - \frac{0.4p}{\rho_g c_g z_g p_{cr} \ln 10} \left( 0.4lg \left( \frac{T}{T_{cr}} \right) + 0.73 \right)^{p/p_{cr}-1},$$

$$\varepsilon_w = \frac{1}{\rho_w c_w}, \quad \eta_g = \frac{1}{\rho_g c_g} - \varepsilon_g. \quad (2)$$

Здесь  $\rho c$  — объёмная теплоёмкость насыщенной пористой среды, Дж/(м<sup>3</sup>·К);  $c_j$  ( $j = g, w, hm, hcd$ ) — изобарная удельная теплоёмкость  $j$ -ой фазы, Дж/(кг·К);  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды, Вт/(м·К);  $\lambda_j$  ( $j = g, w, hm, hcd$ ) — коэффициент теплопроводности  $j$ -ой фазы, Вт/(м·К);  $\varepsilon_j$  ( $j = g, w$ ) — коэффициент Джоуля–Томсона для  $j$ -ой фазы, К/Па;  $T_{cr}$  и  $p_{cr}$  — критические температура и давление смеси газов;  $\eta_g$  — коэффициент адиабатического охлаждения для газовой фазы, К/Па;  $L_{hm}$  и  $L_{hcd}$  — удельная теплота образования/разложения гидратов метана и углекислого газа, соответственно, Дж/кг.

В одномерной радиальной постановке можно записать уравнение для расчета массовой доли метана в

газовой фазе  $\omega_{g(m)}$ :

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \omega_{g(m)} \rho_g S_g \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \omega_{g(m)} \rho_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} k \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \omega_{hm(m)} \rho_{hm} \phi \frac{\partial S_{hm}}{\partial t}. \quad (3)$$

Далее можно рассчитать массовую долю углекислого газа в газовой фазе  $\omega_{g(cd)}$ :

$$\omega_{g(cd)} = 1 - \omega_{g(m)}. \quad (4)$$

Уравнение для расчета водонасыщенности в одно-

мерной радиальной постановке имеет следующий вид:

$$\rho_w \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{\rho_w}{\mu_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k_{rw} k \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \phi \left( \omega_{hm(w)} \rho_{hm} \frac{\partial S_{hm}}{\partial t} + \omega_{hcd(w)} \rho_{hcd} \frac{\partial S_{hcd}}{\partial t} \right). \quad (5)$$

Для расчета газонасыщенности используется следующее выражение:

$$S_g = 1 - S_w - S_{hm} - S_{hcd}. \quad (6)$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

$$t = 0, r_w \leq r \leq R :$$

$$p = p_0, T = T_0, S_g = S_{g0}, S_{hm} = 1 - S_{g0}, \omega_{g(m)} = 1;$$

$$t > 0, r = r_w :$$

$$p = p_{inj}, T = T_{inj}, S_g = 1, \omega_{g(cd)} = 1;$$

$$t > 0, r = R :$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \frac{\partial S_{j=g,w,hm,hcd}}{\partial r} = 0, \frac{\partial \omega_{g(m)}}{\partial r} = 0, \frac{\partial \omega_{g(cd)}}{\partial r} = 0.$$

Далее в разделе с алгоритмом подробно расписан порядок расчетов, дискретные аналоги уравнений (1), (2), (3) и (5), а также методика расчета насыщенностей гидратами метана и углекислого газа. Особенностью предложенной модели является отсутствие явных уравнений для нахождения гидратонасыщенностей, поэтому разработана итерационная процедура для их вычисления с использованием условия равновесности фазового перехода.

### 3. Алгоритм решения и дискретные аналоги уравнений

На рис. 3 представлена блок-схема алгоритма решения вышеописанной системы уравнений математической модели. Для решения системы уравнений используется метод простой итерации. При этом параметры,

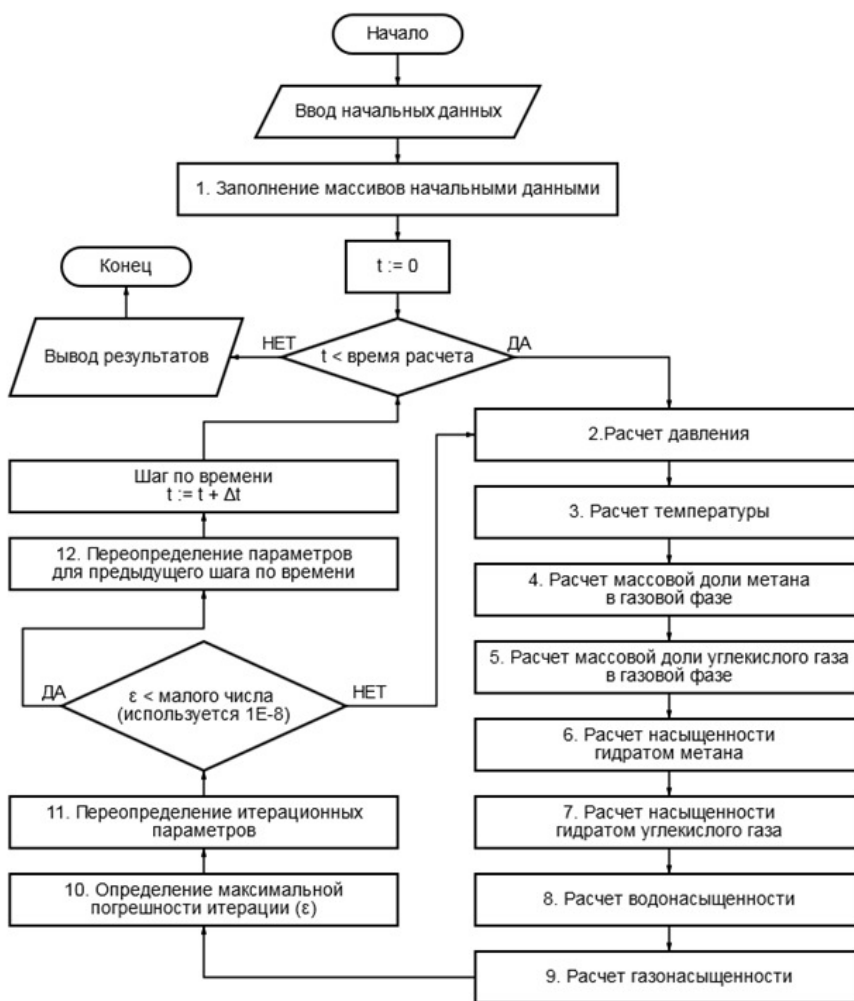


Рис. 3. Блок-схема алгоритма решения системы уравнений математической модели

которые рассчитаны на более ранних шагах алгоритма, используются в расчетах параметров на более поздних шагах. Например, давление, рассчитанное на шаге 2, используется в шагах 3–4 и 6–8.

Уравнения для расчета давления (1), температуры (2) и массовой доли метана в газовой фазе (3) решаются по неявной схеме методом прогонки. Водонасыщенность рассчитывается явно из уравнения (5) (IMPES-метод), также явно рассчитываются массовая доля углекислого газа в газовой фазе (4) и газонасыщенность (6). Насыщенности гидратами метана и углекислого газа рассчитываются с использованием условия равновесности фазового перехода, подробный алгоритм их расчета представлен далее.

Далее нижний индекс  $i$  будет относиться к параметрам в  $i$ -ом узле пространственной сетки; верхними индексами  $old$ ,  $iter$ ,  $new$  отмечены параметры для предыдущего шага по времени, итерационные и для нового шага по времени, соответственно.

**1. Расчет давления.** Построим дискретный аналог уравнения (1), для удобства вывода введем дополнительные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K1} &= \frac{(S_g)_i^{iter}}{(z_g)_i^{iter} (\rho_g)_i^{iter} (R_g)_i^{iter} T_i^{iter} \Delta t}, \\
 \mathbf{K2} &= \frac{(S_g)_i^{iter}}{\Delta t} \times \\
 &\times \left( 3 - \frac{(z_g)_i^{old}}{(z_g)_i^{iter}} - \frac{(R_g)_i^{old}}{(R_g)_i^{iter}} - \frac{T_i^{old}}{T_i^{iter}} \right) + \\
 &+ \frac{(S_{hm})_i^{iter} - (S_{hm})_i^{old}}{\Delta t} \times \\
 &\times \left( 1 - \omega_{hm(m)} \frac{\rho_{hm}}{(\rho_g)_i^{iter}} - \omega_{hm(w)} \frac{\rho_{hm}}{\rho_w} \right) + \\
 &+ \frac{(S_{hcd})_i^{iter} - (S_{hcd})_i^{old}}{\Delta t} \times \\
 &\times \left( 1 - \omega_{hcd(cd)} \frac{\rho_{hcd}}{(\rho_g)_i^{iter}} - \omega_{hcd(w)} \frac{\rho_{hcd}}{\rho_w} \right), \\
 \mathbf{K3} &= \frac{1}{\phi_i (\rho_g)_i^{iter}} \frac{1}{r_i r_{i+0.5} - r_{i-0.5}}, \\
 \mathbf{K4} &= r_{i+0.5} (\rho_g)_{i+0.5}^{iter} \frac{(k_{rg})_{i+0.5}^{iter}}{(\mu_g)_{i+0.5}^{iter}} k_{i+0.5}^{iter} \frac{1}{r_{i+1} - r_i}, \\
 \mathbf{K5} &= r_{i-0.5} (\rho_g)_{i-0.5}^{iter} \frac{(k_{rg})_{i-0.5}^{iter}}{(\mu_g)_{i-0.5}^{iter}} k_{i-0.5}^{iter} \frac{1}{r_i - r_{i-1}}, \\
 \mathbf{K6} &= \frac{1}{\phi_i \mu_w r_i r_{i+0.5} - r_{i-0.5}}, \\
 \mathbf{K7} &= r_{i+0.5} (k_{rw})_{i+0.5}^{iter} k_{i+0.5}^{iter} \frac{1}{r_{i+1} - r_i}, \\
 \mathbf{K8} &= r_{i-0.5} (k_{rw})_{i-0.5}^{iter} k_{i-0.5}^{iter} \frac{1}{r_i - r_{i-1}}.
 \end{aligned}$$

С вышеприведенными коэффициентами дискретный аналог уравнения (1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K1} (p_i^{new} - p_i^{old}) &= \mathbf{K2} + \\
 + \mathbf{K3} [\mathbf{K4} (p_{i+1}^{new} - p_i^{new}) - \mathbf{K5} (p_i^{new} - p_{i-1}^{new})] &+ \\
 + \mathbf{K6} [\mathbf{K7} (p_{i+1}^{new} - p_i^{new}) - \mathbf{K8} (p_i^{new} - p_{i-1}^{new})]. &
 \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты для метода прогонки:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= -\mathbf{K3} \cdot \mathbf{K5} - \mathbf{K6} \cdot \mathbf{K8}, \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{K1} + \mathbf{K3} \cdot (\mathbf{K4} + \mathbf{K5}) + \mathbf{K6} \cdot (\mathbf{K7} + \mathbf{K8}), \\
 \mathbf{C} &= -\mathbf{K3} \cdot \mathbf{K4} - \mathbf{K6} \cdot \mathbf{K7}, \\
 \mathbf{F} &= \mathbf{K1} \cdot p_i^{old} + \mathbf{K2}.
 \end{aligned}$$

Значения координаты  $r$ , плотности газа  $\rho_g$  и динамической вязкости газа  $\mu_g$  в промежуточных узлах расчетной сетки ( $i + 0.5$ ) и ( $i - 0.5$ ) рассчитываются как среднее арифметическое:

$$\begin{aligned}
 r_{i+0.5} &= (r_i + r_{i+1}) / 2, \\
 r_{i-0.5} &= (r_{i-1} + r_i) / 2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\rho_g)_{i+0.5}^{iter} &= ((\rho_g)_i^{iter} + (\rho_g)_{i+1}^{iter}) / 2, \\
 (\rho_g)_{i-0.5}^{iter} &= ((\rho_g)_{i-1}^{iter} + (\rho_g)_i^{iter}) / 2, \\
 (\mu_g)_{i+0.5}^{iter} &= ((\mu_g)_i^{iter} + (\mu_g)_{i+1}^{iter}) / 2, \\
 (\mu_g)_{i-0.5}^{iter} &= ((\mu_g)_{i-1}^{iter} + (\mu_g)_i^{iter}) / 2.
 \end{aligned}$$

Значения проницаемости пористой среды  $k$  в промежуточных узлах рассчитываются как среднее гармоническое:

$$k_{i+0.5}^{iter} = \frac{2 \cdot k_{i+1}^{iter} \cdot k_i^{iter}}{k_{i+1}^{iter} + k_i^{iter}}, \quad k_{i-0.5}^{iter} = \frac{2 \cdot k_i^{iter} \cdot k_{i-1}^{iter}}{k_i^{iter} + k_{i-1}^{iter}}.$$

Значения относительной фазовой проницаемости для газа  $k_{rg}$  и воды  $k_{rw}$  в промежуточных узлах определяются «вверх по потоку»:

$$\begin{aligned}
 \frac{p_{i+1}^{iter} - p_i^{iter}}{r_{i+1} - r_i} &> 0 : \\
 (k_{rg})_{i+0.5}^{iter} &= (k_{rg})_{i+1}^{iter}, (k_{rw})_{i+0.5}^{iter} = (k_{rw})_{i+1}^{iter}; \\
 \frac{p_{i+1}^{iter} - p_i^{iter}}{r_{i+1} - r_i} &\leq 0 : \\
 (k_{rg})_{i+0.5}^{iter} &= (k_{rg})_i^{iter}, (k_{rw})_{i+0.5}^{iter} = (k_{rw})_i^{iter}; \\
 \frac{p_i^{iter} - p_{i-1}^{iter}}{r_i - r_{i-1}} &> 0 : \\
 (k_{rg})_{i-0.5}^{iter} &= (k_{rg})_i^{iter}, (k_{rw})_{i-0.5}^{iter} = (k_{rw})_i^{iter}; \\
 \frac{p_i^{iter} - p_{i-1}^{iter}}{r_i - r_{i-1}} &\leq 0 : \\
 (k_{rg})_{i-0.5}^{iter} &= (k_{rg})_{i-1}^{iter}, (k_{rw})_{i-0.5}^{iter} = (k_{rw})_{i-1}^{iter}.
 \end{aligned}$$

2. **Расчет температуры.** Построим дискретный аналог уравнения (2), для удобства вывода введем дополнительные коэффициенты (при этом используется уже рассчитанное распределение давления):

$$\begin{aligned} \mathbf{K1} &= \frac{1}{r_i r_{i+0.5} - r_{i-0.5}}, \\ \mathbf{K2} &= \frac{p_{i+1}^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_{i+1} - r_{i-1}}, \\ \mathbf{K3} &= (\rho_g)_i^{iter} (c_g)_i^{iter} \frac{(k_{rg})_i^{iter}}{(\mu_g)_i^{iter}}, \\ \mathbf{K4} &= \rho_w c_w \frac{(k_{rw})_i^{iter}}{\mu_w}, \\ \mathbf{K5} &= \frac{\Phi_i}{\Delta t} \times \\ &\times \left[ (\rho_g)_i^{iter} (c_g)_i^{iter} (\eta_g)_i^{iter} (S_g)_i^{iter} (p_i^{new} - p_i^{old}) + \right. \\ &+ \rho_{hm} L_{hm} \left( (S_{hm})_i^{iter} - (S_{hm})_i^{old} \right) + \\ &\left. + \rho_{hcd} L_{hcd} \left( (S_{hcd})_i^{iter} - (S_{hcd})_i^{old} \right) \right]. \end{aligned}$$

С вышеприведенными коэффициентами дискретный аналог уравнения (2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (\rho c)_i^{iter} \frac{T_i^{new} - T_i^{old}}{\Delta t} &= \\ &= \mathbf{K1} \left( r_{i+0.5} \lambda_{i+0.5}^{iter} \frac{T_{i+1}^{new} - T_i^{new}}{r_{i+1} - r_i} - \right. \\ &\quad \left. - r_{i-0.5} \lambda_{i-0.5}^{iter} \frac{T_i^{new} - T_{i-1}^{new}}{r_i - r_{i-1}} \right) + \\ &+ k_i^{iter} \mathbf{K2} \left( \mathbf{K3} \left( \frac{T_{i+1}^{new} - T_{i-1}^{new}}{r_{i+1} - r_{i-1}} + (\varepsilon_g)_i^{iter} \mathbf{K2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{K4} \left( \frac{T_{i+1}^{new} - T_{i-1}^{new}}{r_{i+1} - r_{i-1}} + \varepsilon_w \mathbf{K2} \right) \right) + \mathbf{K5}. \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты для метода прогонки следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{K1} \frac{r_{i-0.5} \lambda_{i-0.5}^{iter}}{r_i - r_{i-1}} + k_i^{iter} \frac{\mathbf{K2}}{r_{i+1} - r_{i-1}} (\mathbf{K3} + \mathbf{K4}), \\ \mathbf{B} &= \frac{(\rho c)_i^{iter}}{\Delta t} + \mathbf{K1} \cdot \left( \frac{r_{i+0.5} \lambda_{i+0.5}^{iter}}{r_{i+1} - r_i} + \frac{r_{i-0.5} \lambda_{i-0.5}^{iter}}{r_i - r_{i-1}} \right), \\ \mathbf{C} &= -\mathbf{K1} \frac{r_{i+0.5} \lambda_{i+0.5}^{iter}}{r_{i+1} - r_i} - k_i^{iter} \frac{\mathbf{K2}}{r_{i+1} - r_{i-1}} (\mathbf{K3} + \mathbf{K4}), \\ \mathbf{F} &= \frac{(\rho c)_i^{iter}}{\Delta t} T_i^{old} + \\ &+ k_i^{iter} (\mathbf{K2})^2 \left( \mathbf{K3} (\varepsilon_g)_i^{iter} + \mathbf{K4} \varepsilon_w \right) + \mathbf{K5}. \end{aligned}$$

Значения теплопроводности  $\lambda$  в промежуточных узлах расчетной сетки ( $i + 0.5$ ) и ( $i - 0.5$ ) рассчитываются как среднее гармоническое:

$$\lambda_{i+0.5}^{iter} = \frac{2 \cdot \lambda_{i+1}^{iter} \cdot \lambda_i^{iter}}{\lambda_{i+1}^{iter} + \lambda_i^{iter}}, \quad \lambda_{i-0.5}^{iter} = \frac{2 \cdot \lambda_i^{iter} \cdot \lambda_{i-1}^{iter}}{\lambda_i^{iter} + \lambda_{i-1}^{iter}}.$$

Значение проницаемости пористой среды  $k$  между ( $i - 1$ ) и ( $i + 1$ ) узлами расчетной сетки рассчитывается как среднее гармоническое:

$$k_i^{iter} = \frac{2 \cdot k_{i+1}^{iter} \cdot k_{i-1}^{iter}}{k_{i+1}^{iter} + k_{i-1}^{iter}}.$$

Значения относительной фазовой проницаемости для газа  $k_{rg}$  и воды  $k_{rw}$  при расчете потока между ( $i - 1$ ) и ( $i + 1$ ) узлами расчетной сетки определяются «вверх по потоку»:

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1}^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_{i+1} - r_{i-1}} > 0 : \\ (k_{rg})_i^{iter} &= (k_{rg})_{i+1}^{iter}, \quad (k_{rw})_i^{iter} = (k_{rw})_{i+1}^{iter}; \\ \frac{p_{i+1}^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \leq 0 : \\ (k_{rg})_i^{iter} &= (k_{rg})_{i-1}^{iter}, \quad (k_{rw})_i^{iter} = (k_{rw})_{i-1}^{iter}. \end{aligned}$$

Остальные параметры при расчете потока между ( $i - 1$ ) и ( $i + 1$ ) узлами расчетной сетки берутся непосредственно в узле  $i$ , а именно:  $(\rho_g)_i^{iter}$ ,  $(c_g)_i^{iter}$ ,  $(\mu_g)_i^{iter}$ ,  $(\varepsilon_g)_i^{iter}$ .

3. **Расчет массовой доли метана в газовой фазе.** Построим дискретный аналог уравнения (3), для удобства вывода введем дополнительные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \mathbf{K1} &= \frac{1}{r_i r_{i+0.5} - r_{i-0.5}}, \\ \mathbf{K2} &= r_{i+0.5} (\rho_g)_{i+0.5}^{iter} \frac{(k_{rg})_{i+0.5}^{iter}}{(\mu_g)_{i+0.5}^{iter}} k_{i+0.5}^{iter} \frac{p_{i+1}^{new} - p_i^{new}}{r_{i+1} - r_i}, \\ \mathbf{K3} &= r_{i-0.5} (\rho_g)_{i-0.5}^{iter} \frac{(k_{rg})_{i-0.5}^{iter}}{(\mu_g)_{i-0.5}^{iter}} k_{i-0.5}^{iter} \frac{p_i^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_i - r_{i-1}}, \\ \mathbf{K4} &= -\omega_{hm(m)} \rho_{hm} \Phi_i \frac{(S_{hm})_i^{iter} - (S_{hm})_i^{old}}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Значения в промежуточных узлах расчетной сетки ( $i + 0.5$ ) и ( $i - 0.5$ ) рассчитываются так, как приведено выше для расчета давления. С данными коэффициентами дискретный аналог уравнения (3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_i \frac{(\omega_{g(m)})_i^{new} (\rho_g)_i^{iter} (S_g)_i^{iter}}{\Delta t} - \\ - \Phi_i \frac{(\omega_{g(m)})_i^{old} (\rho_g)_i^{old} (S_g)_i^{old}}{\Delta t} = \\ = \mathbf{K1} \left( \mathbf{K2} (\omega_{g(m)})_{i+0.5}^{new} - \mathbf{K3} (\omega_{g(m)})_{i-0.5}^{new} \right) + \mathbf{K4}. \end{aligned}$$

При решении вышеприведенного уравнения значения для массовой доли метана в газовой фазе

$\omega_{g(m)}$  в промежуточных узлах  $(i + 0.5)$  и  $(i - 0.5)$  определяются «вверх по потоку»:

$$\begin{aligned} \frac{p_{i+1}^{new} - p_i^{new}}{r_{i+1} - r_i} > 0 : (\omega_{g(m)})_{i+0.5}^{new} &= (\omega_{g(m)})_{i+1}^{new}; \\ \frac{p_{i+1}^{new} - p_i^{new}}{r_{i+1} - r_i} > 0 : (\omega_{g(m)})_{i+0.5}^{new} &= (\omega_{g(m)})_i^{new}; \\ \frac{p_i^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_i - r_{i-1}} > 0 : (\omega_{g(m)})_{i-0.5}^{new} &= (\omega_{g(m)})_i^{new}; \\ \frac{p_i^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_i - r_{i-1}} \leq 0 : (\omega_{g(m)})_{i-0.5}^{new} &= (\omega_{g(m)})_{i-1}^{new}. \end{aligned}$$

Соответственно, коэффициенты для метода прогонки определяются следующим образом:

- 1)  $\mathbf{A} := 0, \mathbf{B} := 0, \mathbf{C} := 0, \mathbf{F} := 0.$
- 2) Если  $\frac{p_i^{new} - p_{i-1}^{new}}{r_i - r_{i-1}} > 0$ , то  $\mathbf{B} := \mathbf{K1} \cdot \mathbf{K3}$ , иначе  $\mathbf{A} := \mathbf{K1} \cdot \mathbf{K3}.$
- 3) Если  $\frac{p_{i+1}^{new} - p_i^{new}}{r_{i+1} - r_i} > 0$ , то  $\mathbf{C} := -\mathbf{K1} \cdot \mathbf{K2}$ , иначе  $\mathbf{B} := \mathbf{B} - \mathbf{K1} \cdot \mathbf{K2}.$
- 4)  $\mathbf{B} := \mathbf{B} + \Phi_i (\rho_g)_i^{iter} (S_g)_i^{iter} / \Delta t.$
- 5)  $\mathbf{F} := \Phi_i (\omega_{g(m)})_i^{old} (\rho_g)_i^{old} (S_g)_i^{old} / \Delta t + \mathbf{K4}.$   
Здесь символ «:=» означает «присвоить», то есть заменяет предыдущее значение переменной, стоящей в левой части, на новое, которое находится в правой части.

#### 4. Расчет массовой доли углекислого газа в газовой фазе

$$(\omega_{g(cd)})_i^{new} = 1 - (\omega_{g(m)})_i^{new}.$$

#### 5. Расчет насыщенности гидратом метана. Для каждой точки пространственной сетки значение насыщенности гидратом метана рассчитывается по следующему алгоритму:

- 1) Вычисляются парциальные давления метана  $(p_m)_i^{new}$  и углекислого газа  $(p_{cd})_i^{new}$  в газовой фазе:

$$(p_m)_i^{new} = (\chi_{g(m)})_i^{new} p_i^{new},$$

$$(p_{cd})_i^{new} = (\chi_{g(cd)})_i^{new} p_i^{new},$$

$$(\chi_{g(m)})_i^{new} = \frac{(\omega_{g(m)})_i^{new}}{M_{(m)}} (M_g)_i^{new},$$

$$(\chi_{g(cd)})_i^{new} = \frac{(\omega_{g(cd)})_i^{new}}{M_{(cd)}} (M_g)_i^{new},$$

$$(M_g)_i^{new} = \left( \frac{(\omega_{g(m)})_i^{new}}{M_{(m)}} + \frac{(\omega_{g(cd)})_i^{new}}{M_{(cd)}} \right)^{-1},$$

где  $\chi_{g(m)}$  и  $\chi_{g(cd)}$  — мольная доля метана и углекислого газа в газовой смеси;  $M_g$  — молярная масса газовой смеси, кг/моль;  $M_{(m)}$  и  $M_{(cd)}$  — молярные массы метана и диоксида углерода, кг/моль.

- 2) С помощью эмпирических соотношений из [17] вычисляются равновесные параметры для гидрата метана: равновесная температура для парциального давления метана  $(T_{emh})_i^{new} = T_{emh}((p_m)_i^{new})$  и равновесное давление для пластовой температуры  $(p_{emh})_i^{new} = p_{emh}(T_i^{new})$ .
- 3) Вычисляется сумма парциального давления углекислого газа и равновесного давления для гидрата метана. Таким образом мы находим пластовое давление, при котором гидрат метана будет в состоянии фазового равновесия для текущего количества углекислого газа в газовой смеси:

$$(p_{eq_{new}})_i^{new} = (p_{cd})_i^{new} + (p_{emh})_i^{new}.$$

- 4) Если термодинамические условия допускают разложение гидрата метана, то есть парциальное давление метана меньше равновесного давления для гидрата метана  $(p_m)_i^{new} < (p_{emh})_i^{new}$ , и гидрат метана есть, то есть  $(S_{hm})_i^{iter} > 0$ , то переходим к пункту 5, иначе — к пункту 7.
- 5) Рассчитывается, какое количество гидрата метана может разложиться при понижении пластовой температуры до  $(T_{emh})_i^{new}$  и при повышении пластового давления до  $(p_{eq_{new}})_i^{new}$ :

$$\Delta S^T = (T_i^{new} - (T_{emh})_i^{new}) \frac{(\rho c)_i^{iter}}{\Phi_i \rho_{hm} L_{hm}},$$

$$\Delta S^P = \frac{(p_i^{new} - (p_{eq_{new}})_i^{new}) (S_g)_i^{iter}}{p_i^{new} \left( 1 - \omega_{hm(m)} \frac{\rho_{hm}}{(\rho_g)_i^{new}} - \omega_{hm(w)} \frac{\rho_{hm}}{\rho_w} \right)}.$$

- 6) Определяем количество гидрата, которое может разложиться для текущей итерации, далее находим гидратонасыщенность для новой итерации:

$$\Delta S = \min \left( (S_{hm})_i^{iter}, \Delta S^T, \Delta S^P \right),$$

$$(S_{hm})_i^{new} = (S_{hm})_i^{iter} - \Delta S.$$

Переходим к пункту 11.

- 7) Если термодинамические условия допускают образование гидрата метана, то есть парциальное давление метана выше равновесного давления для гидрата метана  $(p_m)_i^{new} >$

$(p_{emh})_i^{new}$ , и присутствуют гидратообразователи, а именно, вода  $(S_w)_i^{iter} > 0$  и метан  $(p_m)_i^{new} > 0$ , то переходим к пункту 8, иначе — к пункту 10.

- 8) Рассчитывается, какое количество гидрата метана может образоваться при повышении пластовой температуры до  $(T_{emh})_i^{new}$  и при понижении пластового давления до  $(p_{eq_{new}})_i^{new}$ :

$$\Delta S^T = ((T_{emh})_i^{new} - T_i^{new}) \frac{(\rho c)_i^{iter}}{\Phi_i \rho_{hm} L_{hm}},$$

$$\Delta S^p = \frac{((p_{eq_{new}})_i^{new} - p_i^{new}) (S_g)_i^{iter}}{p_i^{new} \left( 1 - \omega_{hm(m)} \frac{\rho_{hm}}{(\rho_g)_i^{new}} - \omega_{hm(w)} \frac{\rho_{hm}}{\rho_w} \right)},$$

$$\Delta S^w = \frac{(S_w)_i^{iter}}{\left( \omega_{hm(w)} \frac{\rho_{hm}}{\rho_w} \right)}.$$

- 9) Определяем количество гидрата, которое может образоваться для текущей итерации, и находим гидратонасыщенность для новой итерации:

$$\Delta S = \min(\Delta S^T, \Delta S^p, \Delta S^w),$$

$$(S_{hm})_i^{new} = (S_{hm})_i^{iter} + \Delta S.$$

Переходим к пункту 11.

- 10) Насыщенность гидратом метана не изменяется на данной итерации  $(S_{hm})_i^{new} = (S_{hm})_i^{iter}$ .
- 11) Расчет насыщенности гидратом метана завершен.

6. **Расчет насыщенности гидратом углекислого газа.** Алгоритм расчета насыщенности гидратом углекислого газа аналогичен алгоритму расчета насыщенности гидратом метана (пункт 6).

7. **Расчет водонасыщенности.** Построим дискретный аналог уравнения (5):

$$(S_w)_i^{new} = (S_w)_i^{old} + \frac{1}{\Phi_i \mu_w r_i} \frac{\Delta t}{r_{i+0.5} - r_{i-0.5}} \times$$

$$\times \left( r_{i+0.5} (k_{rw})_{i+0.5}^{iter} k_{i+0.5}^{iter} \frac{p_{i+1}^{iter} - p_i^{iter}}{r_{i+1} - r_i} - \right.$$

$$\left. - r_{i-0.5} (k_{rw})_{i-0.5}^{iter} k_{i-0.5}^{iter} \frac{p_i^{iter} - p_{i-1}^{iter}}{r_i - r_{i-1}} \right) -$$

$$- \frac{1}{\rho_w} \left[ \omega_{hm(w)} \rho_{hm} \left( (S_{hm})_i^{new} - (S_{hm})_i^{old} \right) + \right.$$

$$\left. + \omega_{hcd(w)} \rho_{hcd} \left( (S_{hcd})_i^{new} - (S_{hcd})_i^{old} \right) \right].$$

Значения параметров в промежуточных узлах рас-

четной сетки рассчитываются таким же образом, как и при расчете давления.

## 8. Расчет газонасыщенности

$$(S_g)_i^{new} = 1 - (S_w)_i^{new} - (S_{hm})_i^{new} - (S_{hcd})_i^{new}.$$

На основе представленной методики численной реализации математической модели была разработана вычислительная программа и проведены расчеты. На рис. 4 представлены распределения давления, температуры, массовых долей метана и диоксида углерода в газовой фазе, а также насыщенностей пористой среды водой и гидратами  $\text{CH}_4$  и  $\text{CO}_2$ . Расчеты проводились при следующих значениях параметров [3, 18–21]:  $\Delta t = 60$  с;  $r_w = 0,1$  м;  $R = 100$  м;  $\Delta r = 0,005$  м;  $p_0 = 3$  МПа;  $p_{inj} = 4$  МПа;  $T_0 = 1$  °С;  $T_{inj} = 7$  °С;  $k_0 = 10^{-15}$  м<sup>2</sup>;  $\phi = 0,2$ ;  $S_{g0} = 0,8$ ;  $\rho_{sk} = 2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_{hm} = 900$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_{hcd} = 1100$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_{sk} = 1000$  Дж/кг·К;  $c_w = 4200$  Дж/кг·К;  $c_{hm} = 2000$  Дж/кг·К;  $c_{hcd} = 2000$  Дж/кг·К;  $\lambda_{sk} = 1,5$  Вт/м·К;  $\lambda_w = 0,6$  Вт/м·К;  $\lambda_{hm} = 0,5$  Вт/м·К;  $\lambda_{hcd} = 0,5$  Вт/м·К;  $L_{hm} = 4,5 \cdot 10^5$  Дж/кг;  $L_{hcd} = 3,5 \cdot 10^5$  Дж/кг;  $\omega_{hm(m)} = 0,12$ ;  $\omega_{hcd(cd)} = 0,28$ ;  $\mu_w = 1,5 \cdot 10^{-3}$  Па·с;  $\mu_{g(m)} = 1 \cdot 10^{-5}$  Па·с;  $\mu_{g(cd)} = 1,5 \cdot 10^{-5}$  Па·с.

Из данных, представленных на рис. 4, видно, что при принятых в работе значениях параметров в пласте можно выделить три зоны: в первой зоне пласта, прилегающей к границе нагнетания углекислого газа, поры насыщены углекислым газом и его гидратом; далее (по координате  $r$ ) в порах пласта присутствуют газовая фаза, вода и газогидрат; в третьей зоне поровый объем занят метаном и его гидратом. Таким образом, имеет место замещение в газогидрате метана углекислым газом и предложенная в работе математическая модель адекватно описывает изучаемый процесс. Стоит отметить, что размеры второй зоны, в которой присутствует вода в свободном состоянии, пренебрежимо малы (в расчетах протяженность составила величину порядка 1 см), поэтому можно констатировать фронтальный режим процесса замещения  $\text{CO}_2$ – $\text{CH}_4$  в газогидрате. Также незначительный размер второй зоны позволяет не учитывать в математической модели растворимость углекислого газа в воде.

Построенное распределение массовых содержаний  $\text{CO}_2$  и  $\text{CH}_4$  в газовой фазе (рис. 4) указывает на то, что на некотором участке пласта имеет место совместная фильтрация углекислого газа и метана. Эти расчеты отличаются от данных, представленных в работах [9, 22], в которых принят фронтальный режим вытеснения метана углекислым газом. Построенное распределение температуры свидетельствует об экзотермическом характере процесса замещения метана двуокисью углерода в метаногидрате, что отмечается и в других работах [22, 23].

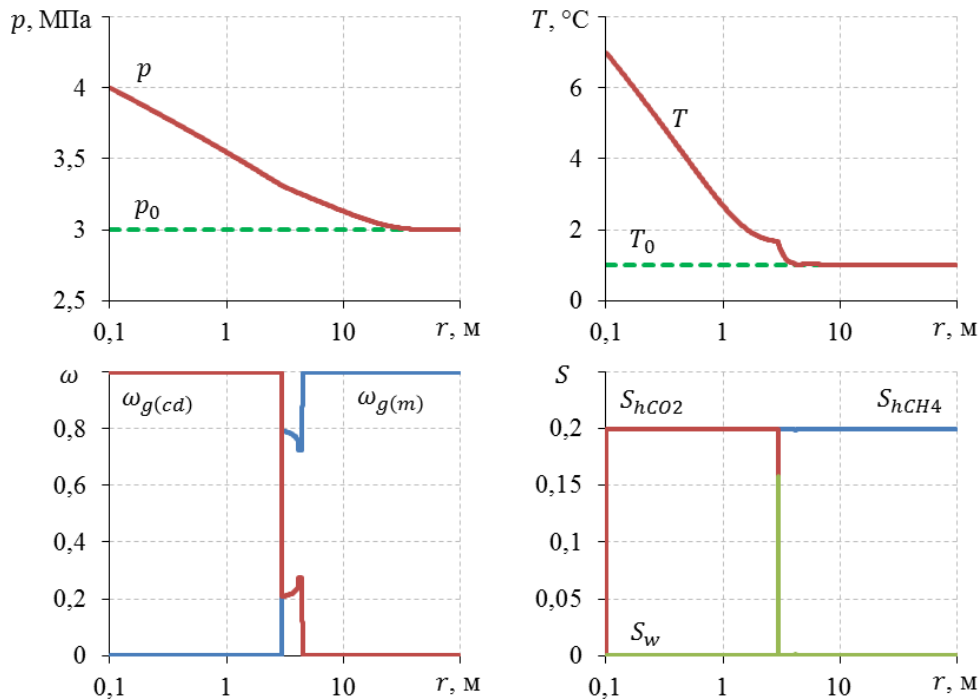


Рис. 4. Распределения по координате  $r$  давления  $p$ , температуры  $T$ , массовых долей метана  $\omega_{g(m)}$  и углекислого газа  $\omega_{g(cd)}$  в газовой фазе, насыщенностей пористой среды водой  $S_w$ , гидратом метана  $S_{hm}$  и гидратом углекислого газа  $S_{hcd}$ . Время закачки углекислого газа в пористый пласт  $t = 10$  сут.

#### 4. Заключение

В работе выполнена постановка задачи о закачке углекислого газа в пористый пласт, заполненный в начальном состоянии метаном и его гидратом. Представлена математическая модель неизотермической фильтрации газа и воды с учетом образования/разложения гидратов метана и углекислого газа, построен алгоритм решения уравнений представленной математической модели. Для одномерного плоскорадиального случая получены распределения давления, температуры, массовых долей метана и диоксида углерода, насыщенностей гидратов метана и диоксида углерода, а также водонасыщенности в пористом пласте. Расчетным путем показано, что процесс замещения метана двуокисью углерода в метаногидрате для принятых расчетных параметров фактически происходит на фронтальной границе; протяженность зоны, в которой присутствуют вода в свободном состоянии, пренебрежимо мала. В области вблизи фронта замещения  $CO_2-CH_4$  в газогидрате температура превышает исходную пластовую температуру, что вызвано экзотермическим характером процесса замещения.

#### Список литературы / References

[1] Konno Y., Masuda Y., Hariguchi Y., Kurihara M., Ouchi H. Key factors for depressurization-induced gas production from oceanic methane hydrates // *Energy Fuels*. 2010. V. 24, No. 3. Pp. 1736–1744. DOI: 10.1021/ef901115h

[2] Попов В.В. Численное исследование разложения гидратов идеального газа в пласте при понижении давления и одновременном нагревании // *Математические заметки СВФУ*. 2019. Т. 26, № 4. С. 83–97.

Popov V.V. A mathematical model of ideal gas hydrate decomposition in a reservoir through decreasing pressure and simultaneous heating // *Mathematical notes of NEFU*. 2019. V. 26, No 4. Pp. 83–97. DOI: 10.25587/SVFU.2019.39.76.008

[3] Бородин С.Л. Современное состояние исследований, связанных с извлечением метана из гидратосодержащей пористой среды // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2018. Т. 4, № 4. С. 131–147. Borodin S.L. The Current State of Researches Related to the Extraction of Methane from a Porous Medium Containing Hydrate // *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*. 2018. V. 4, No 4. Pp. 131–147. DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-131-147

[4] Jung J.W., Santamarina J.C.  $CH_4-CO_2$  replacement in hydrate-bearing sediments: A pore-scale study // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. 2010. No. 11. Q0AA13. DOI: 10.2113/GSELEMENTS.4.5.325

[5] Benson S.M., Cole D.R.  $CO_2$  Sequestration in Deep Sedimentary Formations // *Elements*. 2008. No. 4. Pp. 325–331. DOI: 10.2113/GSELEMENTS.4.5.325

[6] Zhang L., Yang L., Wang J., Zhao J., Dong H., Yang M., Liu Y., Song Y. Enhanced  $CH_4$  Recovery and  $CO_2$  Storage via Thermal Stimulation in the  $CH_4/CO_2$  Replacement of Methane Hydrate // *Chemical Engineering Journal*. 2017. No. 308. Pp. 40–49. DOI: 10.1016/j.cej.2016.09.047

[7] Хасанов М.К. Математическое моделирование процесса образования газогидрата при закачке диоксида углерода в насыщенный метаном и льдом пласт // *Криосфера Земли*. 2016. Т. 20, № 3. С. 63–70. Khasanov M.K., Musakaev N.G. Mathematical modeling of the process of gas hydrate formation at the injection of carbon dioxide into the layer saturated with methane and ice // *Earth's Cryosphere*. 2016. V. 20, No 3. Pp. 63–70. DOI: 10.21782/KZ1560-7496-2016-3(63-70)

[8] Алексеенко С.В. Изменение климата и энергетика // *Углекислотная и экология Кузбасса: Сборник тезисов докладов XI Международного Российско-Казахстанского Симпозиума, Кемерово, 04–06 июля 2022 года*. Кемерово: Федеральный исследовательский центр угля и углекислоты Сибирского отделения Российской академии наук. 2022. С. 16.

- Alekseenko S.V. [Climate change and energy] *Izmenenie klimata i jenergetika*. [Coal chemistry and ecology of Kuzbass: Collection of abstracts of the XI International Russian-Kazakh Symposium, Kemerovo, July 04–06, 2022] *Uglehimija i jekologija Kuzbassa: Sbornik tezisov dokladov XI Mezhdunarodnogo Rossijsko-Kazahstanskogo Simpoziuma, Kemerovo, 04–06 ijulja 2022 goda*. Kemerovo: The Federal Research Center of Coal and Coal-Chemistry of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. 2022. P. 16 (in Russian).  
DOI: [10.53650/9785902305651\\_16](https://doi.org/10.53650/9785902305651_16)
- [9] Цыпкин Г.Г. Образование гидрата углекислого газа при его инъекции в истощенное месторождение углеводородов // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2014. № 6. С. 101–108.  
EDN: TEFOOD  
Tsyupkin G.G. Formation of carbon dioxide hydrate at the injection of carbon dioxide into a depleted hydrocarbon field // *Fluid Dynamics*. 2014. V. 49, No 6. Pp. 789–795.  
DOI: [10.1134/S0015462814060106](https://doi.org/10.1134/S0015462814060106)
- [10] Khasanov M.K., Stolpovsky M.V., Kildibaeva S.R., Musakaev N.G. Mathematical model of decomposition of methane hydrate during the injection of liquid carbon dioxide into a reservoir saturated with methane and its hydrate // *Mathematics*. 2020. V. 8, No. 9. P. 1482.  
DOI: [10.3390/math8091482](https://doi.org/10.3390/math8091482)
- [11] Khasanov M.K., Stolpovsky M.V., Gimatlidinov I.K. Mathematical model of injection of liquid carbon dioxide in a reservoir saturated with methane and its hydrate // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2019. V. 132. Pp. 529–538.  
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.033](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.12.033)
- [12] Schoderbek D., Boswell R. Ignik Sikumi #1, Gas Hydrate Test Well, Successfully Installed on the Alaska North Slope // *Fire in the Ice, NETL Methane Hydrate Newsletter*. 2011. V. 11, No. 1. Pp. 1–5.
- [13] Басниев К.С. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. [Underground Hydrodynamics] *Podzemnaja gidromehanika*. М.: Nedra, 1993. 416 p. (in Russian).
- [14] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1,2. М.: Наука, 1987. 464 с. Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. Hemisphere Publ. Corp., New York, 1991. 464 p.
- [15] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. [Theory of non-stationary filtration of liquid and gas] *Teorija nestacionarnoj fil'tracii zhidkosti i gaza*. М.: Nedra, 1972. 288 p. (in Russian).  
EDN: WQVQAO
- [16] Borodin S.L., Musakaev N.G., Belskikh D.S. Mathematical Modeling of a Non-Isothermal Flow in a Porous Medium Considering Gas Hydrate Decomposition: A Review // *Mathematics*. 2022. V. 10, No. 24. P. 4674.  
DOI: [10.3390/math10244674](https://doi.org/10.3390/math10244674)
- [17] Musakaev N.G., Borodin S.L. To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide // *MATEC Web Conf*. 2017. V. 115. 05002.  
DOI: [10.1051/mateconf/201711505002](https://doi.org/10.1051/mateconf/201711505002)
- [18] Misyura S.Y., Donskoy I.G. Dissociation kinetics of methane hydrate and CO<sub>2</sub> hydrate for different granular composition // *Fuel*. 2020. V. 262. 116614.  
DOI: [10.1016/j.fuel.2019.116614](https://doi.org/10.1016/j.fuel.2019.116614)
- [19] Hu T., Xu T., Tian H., Zhou B., Yang Y. A study of CO<sub>2</sub> injection well selection in the naturally fractured undulating formation in the Jurong Oilfield, China // *Int. J. of Greenhouse Gas Control*. 2021. No. 109. 103377.  
DOI: [10.1016/j.ijggc.2021.103377](https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2021.103377)
- [20] Sloan E.D., Koh C.A. *Clathrate Hydrates of Natural Gases* (3rd ed.). Boca Raton: CRC Press, 2007. 752 p.
- [21] Anderson G.K. Enthalpy of dissociation and hydration number of carbon dioxide from the Clapeyron equation // *Journal of Chemical Thermodynamics*. 2003. V. 35, No. 7. Pp. 1171–1183.  
DOI: [10.1016/S0021-9614\(03\)00093-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9614(03)00093-4)
- [22] Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G., Duong N.H. Theoretical research of the gas hydrate deposits development using the injection of carbon dioxide // *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2017. V. 107. Pp. 347–357.  
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.034](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.034)
- [23] Zhao J., Xu K., Song Y., Liu W., Lam W., Liu Y., Xue K., Zhu Y., Yu X., Li Q. A Review on Research on Replacement of CH<sub>4</sub> in Natural Gas Hydrates by Use of CO<sub>2</sub> // *Energies*. 2012. V. 5, No. 2. Pp. 399–419.  
DOI: [10.3390/en5020399](https://doi.org/10.3390/en5020399)

## Сведения об авторах / Information about the Authors

### Наиль Габсалимович Мусакаев

доктор физ.-мат. наук, профессор  
Тюменский филиал Института теоретической и  
прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

### Станислав Леонидович Бородин

кандидат физ.-мат. наук  
Тюменский филиал Института теоретической и  
прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

### Денис Сергеевич Бельских

кандидат физ.-мат. наук  
Тюменский филиал Института теоретической и  
прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

### Nail Gabsalyamovich Musakaev

Sc.D. (physics & mathematics), Prof.  
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical  
and Applied Mechanics SB RAS  
[musakaev68@yandex.ru](mailto:musakaev68@yandex.ru)  
ORCID: [0000-0002-8589-9793](https://orcid.org/0000-0002-8589-9793)

### Stanislav Leonidovich Borodin

Ph.D. (physics & mathematics)  
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical  
and Applied Mechanics SB RAS  
[S.L.Borodin@yandex.ru](mailto:S.L.Borodin@yandex.ru)  
ORCID: [0000-0002-2850-5989](https://orcid.org/0000-0002-2850-5989)

### Denis Sergeyevich Belskikh

Ph.D. (physics & mathematics)  
Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical  
and Applied Mechanics SB RAS  
[denisbel skikh@gmail.com](mailto:denisbel skikh@gmail.com)  
ORCID: [0000-0002-0813-5765](https://orcid.org/0000-0002-0813-5765)





## Деформирование газового шара в иголку или диск

Ю.В. Юлмухаметова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа,  
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: [tarasova\\_yulya@mail.ru](mailto:tarasova_yulya@mail.ru)

Рассматривается одна из 11 известных моделей трехмерного движения газа, скорости частиц которого линейно зависят от пространственных координат. Модель состоит из двух матричных дифференциальных уравнений первого порядка, двух векторных дифференциальных уравнений первого порядка, уравнения состояния газа и функции плотности. Для данной модели найдено точное решение с антидиагональной матрицы линейности. Показано, что для специальных начальных данных решение имеет вид решения с однородной деформацией (когда эйлеровы переменные линейно зависят от лагранжевых переменных). Определены все компоненты вектора скорости и функция плотности. Записаны уравнения мировых линии движения частиц газа, по ним построены траектории движения частиц. Исследовано движение выделенного объема частиц газа.

**Ключевые слова:** линейное поле скоростей, однородная деформация, газовая динамика, точное решение

## Deformation of a gas ball into a needle or disk

Yu.V. Yulmukhametova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia,  
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: [tarasova\\_yulya@mail.ru](mailto:tarasova_yulya@mail.ru)

One model of gas motion is considered, the particle velocities of which linearly depend on spatial coordinates. The model consists of two first-order matrix differential equations, two first-order vector differential equations, a gas equation of state and a density function. An exact solution for the antidiagonal linearity matrix has been found for this model. All components of the velocity vector have been determined. The equations of the world lines of motion of gas particles are written down. The motion of the isolated volume of gas particles is investigated.

**Keywords:** linear velocity field, uniform deformation, gas dynamics, exact solution

### 1. Введение

Газовая динамика частиц, скорости которых являются линейными функциями от пространственных координат, тесно связана с теорией эллипсоидальных фигур равновесия. Интерес к данной области обуславливается ее значением для космогонии и астрофизики, в частности, важностью ее выводов для теории устойчивости фигур небесных тел. Первые исследования в этой области берут начало в работах Ньютона, который длительный период изучал статистические состояния фигур равновесия. Далее Маклорен, Якоби, Лиувилль и многие другие [1]. В 1861 г. Риман в статье [2] показал, что при условии линейной зависимости поля скоростей от координат наиболее общий тип движения, совместимый с условием сохранения эллипсоидальной формы фигуры равновесия, представляет собой суперпозицию равномерного вращения и внутренних движений с равномерно распределенной завихренностью жидкости.

Именно после Римана получила развитие математическая теория нахождения и исследования решений в виде линейного поля скоростей. Современный обзор наиболее значимых результатов по динамике жидких и газовых эллипсоидов дан в работе [3], который связан, главным образом, с выводом различных форм уравнений движения и исследованием качественных свойств динамики эллипсоидальных фигур.

### 2. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения идеальной газовой динамики [4]:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ \rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ S_t + (\vec{u} \cdot \nabla) S &= 0 \text{ или} \\ p_t + (\vec{u} \cdot \nabla) p + \rho a^2 \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t, \vec{x} = (x, y, z)$  — независимые переменные;  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  — оператор градиента;  $\vec{u} = (u, v, w)$  — скорость;  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $S$  — энтропия; уравнение состояния  $p = f(\rho, S)$  замыкает систему (1);  $a^2 = f_\rho$  — квадрат скорости звука. Если из уравнения состояния выразить энтропию  $S = g(\rho, p)$ , то  $a^2(p, \rho) = f_\rho(\rho, g(p, \rho))$ .

Решение уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей имеет вид:

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \quad (2)$$

где  $A(t)$  — линейный оператор  $3 \times 3$ ;  $\vec{u}_0$  — трехмерный вектор. Если  $\vec{u}_0 = 0$ , то (2) задает решение с однородной деформацией. Одно из таких решений было найдено и исследовано в [5]. Если  $\vec{u}_0 \neq 0$ , то (2) является решением с неоднородной деформацией. Такие точные решения найдены и изучены в [6–9].

При классификации моделей с уравнениями газовой динамики с линейным полем скоростей и произвольным уравнением состояния было получено 11 моделей [10], каждая из которых представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (24-го и выше). Есть случаи интегрируемых систем [11]. В каждом из 11 случаев можно найти точные решения. Существует несколько подходов к поиску этих решений. Один из них заключается в выборе конкретной модели с линейным полем скоростей и конкретного вида матрицы линейности  $A$ , как это было сделано в работе [9]. Конечно же, выбор матрицы должен быть обоснован некоторыми физическими свойствами газа, но на данном этапе исследований это требование опустим.

### 3. Поиск точного решения

Рассмотрим МОДЕЛЬ 4 из [10], которая состоит из следующих уравнений:

$$S' + 2SA = (1 - \gamma)S \operatorname{tr} A, \quad A' + A^2 = S, \quad S = S^T,$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 = (1 - \gamma)\vec{v} \operatorname{tr} A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v};$$

уравнение состояния имеет вид:

$$p = H \frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma} + \chi(\rho g(S));$$

функция плотности такова:

$$\rho = \rho_0 e^{-\int \operatorname{tr} A dt} |I_1 + (\gamma - 1)I|^{1/(\gamma-1)};$$

где

$$I = \int e^{-\int a_0 dt} - 2 \int \vec{u}_0 \cdot \vec{v} e^{-\int a_0 dt} dt;$$

$$J = \vec{x} \cdot S\vec{x} + 2\vec{v} \cdot \vec{x}, \quad a_0(t) = (1 - \gamma)\operatorname{tr} A;$$

$\rho_0, I_1, H, \gamma$  — произвольные постоянные;  $\chi, g$  — произвольные функции.

Заметим, что в уравнении состояния при  $\gamma \rightarrow 0$  получим

$$p = H \ln \rho + \chi(\rho g(S)).$$

Будем искать точное решение с матрицей линейности антидиагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & 0 \\ a_{31}(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для такой матрицы  $A$  матрица  $S$ :

$$S = \begin{pmatrix} a_{13}a_{31} & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} + a_{22}^2 & 0 \\ a'_{31} & 0 & a_{13}a_{31} \end{pmatrix}.$$

Тогда система из МОДЕЛИ 4 для элементов матрицы  $A$  примет вид:

$$\begin{aligned} 3a'_{13}a_{31} + a_{13}a'_{31} &= (1 - \gamma)a_{22}a_{13}a_{31}, \\ a''_{13} + 2a_{13}^2a_{31} &= (1 - \gamma)a_{22}a'_{13}, \\ a''_{22} + 4a_{22}a'_{22} + 2a_{22}^3 &= (1 - \gamma)a_{22}(a'_{22} + a_{22}^2), \\ a''_{31} + 2a_{31}^2a_{13} &= (1 - \gamma)a_{22}a'_{31}, \\ 3a'_{31}a_{13} + a_{31}a'_{13} &= (1 - \gamma)a_{22}a_{13}a_{31}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение уравнений будем искать в виде:

$$a_{13} = c_{13}t^\alpha, \quad a_{31} = c_{31}t^\beta, \quad a_{22} = c_{22}t^\delta, \quad (4)$$

где  $c_{13}, c_{31}, c_{22}, \alpha, \beta, \delta$  — постоянные.

После подстановки решения (4) в систему (3) получим равенства:

$$\delta = \alpha = \beta = -1, \quad c_{13}c_{31} = 1, \quad c_{22} = \pm 1.$$

Для определенности положим, что

$$c_{13} = c_{31} = 1, \quad c_{22} = 1 \Rightarrow \gamma = 5.$$

Таким образом, матрицы  $A$  и  $S$  имеют вид:

$$A = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем дифференциальное уравнение для вектора  $\vec{u}_0(t)$ :

$$\vec{u}_0'' + 2A'\vec{u}_0 + 2A\vec{u}_0' + 2A^2\vec{u}_0 = (1 - \gamma) \operatorname{tr} A(\vec{u}_0' + A\vec{u}_0).$$

После подстановки матрицы  $A$  и постоянной  $\gamma$  распишем равенство по координатам:

$$\begin{aligned} u''_{01} + \frac{4}{t}u'_{01} - \frac{2}{t}u'_{03} + \frac{2}{t^2}u_{01} - \frac{2}{t^2}u_{03} &= 0, \\ u''_{02} + \frac{6}{t}u'_{02} + \frac{4}{t^2}u_{02} &= 0, \\ u''_{03} + \frac{4}{t}u'_{03} - \frac{2}{t}u'_{01} + \frac{2}{t^2}u_{03} - \frac{2}{t^2}u_{01} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение для  $u_{02}$  является уравнением Эйлера. После замены  $t = e^x$  оно станет линейным однородным

уравнением с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид:

$$u_{02} = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^4},$$

где  $c_1, c_2$  — постоянные.

Из уравнения для  $u_{01}$  вычтем уравнение для  $u_{03}$

$$(u_{01} - u_{03})'' + \frac{6}{t}(u_{01} - u_{03})' + \frac{4}{t}(u_{01} - u_{03}) = 0.$$

Получим уравнение Эйлера, решение которого имеет вид:

$$u_{01} - u_{03} = \frac{c_3}{t} + \frac{c_4}{t^4},$$

где  $c_3, c_4$  — постоянные.

Из последнего равенства выразим  $u_{01}$  и подставим в первое уравнение системы (5). Получим уравнение для  $u_{03}$

$$u_{03}'' + \frac{2}{t}u_{03}' + \frac{6}{t^2}c_4 = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$u_{03} = -6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t},$$

где  $p_0$  — постоянная.

Следовательно,

$$u_{01} = -6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t} + \frac{c_3}{t} + \frac{c_4}{t^4}.$$

Таким образом, вектор скорости (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{z}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t} + \frac{c_3}{t} + \frac{c_4}{t^4}, \\ v &= \frac{y}{t} + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^4}, \\ w &= -\frac{x}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t}. \end{aligned}$$

Заметим, что так как уравнения газовой динамики допускают 11-ти параметрическую группу преобразований, то некоторые константы в последних трех формулах можно уточнить. Применяя галелево преобразование можно добиться  $p_0 = c_1 = c_3 = 0$ :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{z}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{p_0}{t} + \frac{c_4}{t^4}, \\ v &= \frac{y}{t} + \frac{c_2}{t^4}, \\ w &= -\frac{x}{t} - 6c_4 \ln |t|. \end{aligned} \tag{6}$$

#### 4. Мировые линии

Положение частицы определяется ее скоростью и зависит от времени и начального положения [12]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \tag{7}$$

где  $t, \vec{x}_0$  — лагранжевы переменные;  $t, \vec{x}$  — эйлеровы переменные. Связь между эйлеровыми и лагранжевыми переменными дается соотношением  $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$  как решение задачи (7).

Распишем (7) по координатам, учитывая (6):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{z}{t} - 6c_4 \ln |t| - \frac{c_4}{t^4}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{t} + \frac{c_2}{t^4}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{x}{t} - 6c_4 \ln |t|. \end{aligned}$$

Выбором начальных данных зададим  $c_2 = c_4 = 0$ . Получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{z}{t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{x}{t}.$$

Система имеет следующее решение:

$$x = tN_x + \frac{N}{2t}, \quad y = tN_y, \quad z = -tN_x + \frac{N}{2t},$$

где  $N, N_x, N_y$  — постоянные.

Введем удобную систему координат

$$x + z \rightarrow x, \quad x - z \rightarrow z.$$

Мировые линии движения частиц газа примут вид ( $x_0 = N, y_0 = N_y, z_0 = 2N_x$ ):

$$x = \frac{x_0}{t}, \quad y = ty_0, \quad z = tz_0, \tag{8}$$

где  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  — лагранжевы переменные.

При этом плотность задается формулой

$$\rho = \frac{\rho_0}{|t|} |I_1 + 4t^2 x^2|^{1/4}.$$

Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным равен

$$J = \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} \right| = t.$$

Он обращается в ноль при  $t = 0$ . В этот момент времени ранг матрица Якоби равен 1. Значит коллапс частиц газа достигается в точке, причем эта точка бесконечно удаленная на оси  $Ox$ , так как в этот момент времени  $x = \infty, y = z = 0$ . При этом плотность в этой точке обращается в бесконечность.

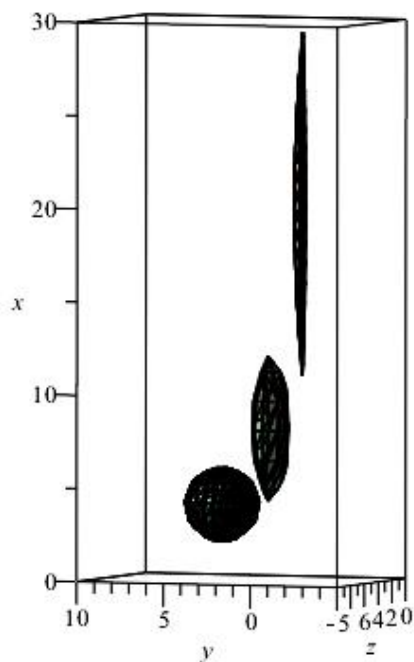
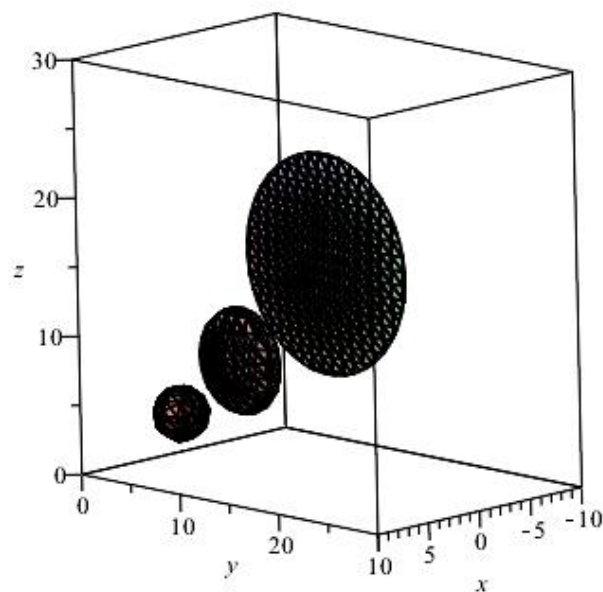
#### 5. Движение выделенного объема

Построим движение выделенного объема сплошной среды, движения частиц которой в пространстве описываются уравнениями (8). Пусть в начальный момент времени  $t = 1$  объем ограничен сферой радиуса 2 с центром в точке с координатами (4,4,4):

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 4.$$

Тогда в лагранжевых координатах уравнение сферы примет вид:

$$(x_0 - 4)^2 + (y_0 - 4)^2 + (z_0 - 4)^2 = 4.$$

Рис. 1. Движение выделенного объема среды при  $t \rightarrow 0$ Рис. 2. Движение выделенного объема среды при  $t \rightarrow \infty$ 

Отсюда следует уравнение для поверхности двигающегося объема:

$$\frac{(x - 4t^{-1})^2}{t^{-2}} + \frac{(y - 4t)^2}{t^2} + \frac{(z - 4t)^2}{t^2} = 4. \quad (9)$$

Построим движение объема при приближении частиц к моменту коллапса, т.е. при  $t \rightarrow 0$ . Это допустимо, так как полученное точное решение допускает инверсию ( $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ ,  $z \rightarrow -z$ ).

Эта поверхность — симметричный эллипсоид с полуосями  $a = t^{-1}$ ,  $b = c = t$ . При  $t \rightarrow 0$  одна полуось неограниченно увеличивается, а две другие полуоси стремятся к нулю. Получаем, что любая сфера превращается в иголку (рис. 1). При этом объем эллипсоида равен  $V = abc = t$ , то есть объем со временем меняется и стремится к нулю при  $t \rightarrow 0$ .

При  $t \rightarrow \infty$  одна полуось эллипсоида стремится к нулю, а две другие неограниченно увеличиваются. Получаем, что любая сфера превращается в диск (рис. 2).

## 6. Заключение

Таким образом, найдено точное решение с однородной деформацией с антидиагональной матрицей линейности. Записаны уравнения мировых линий движения частиц, по ним построены траектория движения частиц газа. Выяснено, что  $t = 0$  является моментом коллапса частиц. Показано, что если выделить сферический объем, состоящий из некоторого количества частиц газа, то при движении к моменту коллапса этот объем

вытягивается в «иголку». А при движении объема от момента коллапса к бесконечности этот объем принимает форму почти плоского эллипсоида или диска. При этом движущийся объем меняет свое значение. Данные виды деформаций представлены графически.

## Список литературы / References

- [1] Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.  
Chandrasekhar S. Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven and London: Yale University Press. 1969. 252 p.
- [2] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoides. Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861.
- [3] Борисов А.М., Мамаев И.С. Динамика жидких и газовых эллипсоидов. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. 364 с.  
Borisov A.V., Mamaev I.S. (eds.) Dinamika zhidkikh i gazovykh ellipsoidov [Dynamics of liquid and gas ellipsoids]. Moscow, Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy Publ., 2010. 364 p. (in Russian)
- [4] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.  
Ovsyannikov L.V. Leksii po osnovam gazovoi dinamiki [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow; Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy, 2003. 336 p. (in Russian)
- [5] Уразбахтина Л.З., Юлмухаметова Ю.В. Плоский коллапс газа с линейным полем скоростей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 207–216.  
Urazbakhtina L.Z., Yulmukhametova Yu.V. A planar collapse of a gas with a linear velocity field // Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN. 2023. Vol. 29, No. 2. Pp. 207–216. (in Russian)
- [6] Yulmukhametova Yu. Solution with a linear velocity field for a submodel of one-dimensional gas motions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Volume 57, Issue 1. P. 3–10.

- [7] Юлмухаметова Ю.В. Решение гидродинамической подмодели ранга 2 с линейным полем скоростей // Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6, вып. 3. С. 321–330.  
Yulmukhametova Yu. The solution of a hydrodynamic submodel of rank 2 with a linear velocity field // Chelyabinsk Physico-Mathematical Journal. 2021. V. 6, is. 3. С. 321–330. (in Russian)  
DOI: [10.47475/2500-0101-2021-16306](https://doi.org/10.47475/2500-0101-2021-16306)
- [8] Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New Exact Solutions with a Linear Velocity Field for the Gas Dynamics Equations for Two Types of State Equations // Mathematics. 2022. V. 10(1). P. 123.  
DOI: [10.3390/math10010123](https://doi.org/10.3390/math10010123)
- [9] Гумеров И.И., Каташова А.А., Юлмухаметова Ю.В. Коллапсирующие движения двухатомного газа, плотность которого зависит только от времени // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 1. С. 9–16.  
Gumerov I.I., Katashova A.A., Yulmukhametova Yu. Collapsing motions of a diatomic gas, the density of which depends only on time // Multiphase systems. 2023. V. 18, No. 1. P. 9–16. (in Russian)  
DOI: [10.21662/mfs2023.1.002](https://doi.org/10.21662/mfs2023.1.002)
- [10] Юлмухаметова Ю.В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // Сибирские электронные математические известия. 2012. Т. 9. С. 208–226.  
Yulmukhametova Yu.V. Submodels in gas dynamics with linear field of velocity // Journal Siberian Electronic Mathematical Reports. 2012. Vol. 9. Pp. 208–226. (in Russian)  
EDN: [puabwb](https://www.edn.ru/puabwb)
- [11] Уразбахтина Л.З. Интегрируемые гидродинамические подмодели с линейным полем скоростей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15, № 3(51). С. 135–145.  
EDN: [noukts](https://www.edn.ru/noukts)  
Urazbakhtina L. Z. Integrable hydrodynamic submodels with a linear velocity field // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2013, vol. 7, no. 1. pp. 117–126.  
DOI: [10.1134/S1990478913010110](https://doi.org/10.1134/S1990478913010110)
- [12] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ. 2013. 224 с.  
Khabirov S.V. Lectsii. Analiticheskie metody v gazovoi dinamike [Lectures. Analytical methods in gas dynamics], Ufa, Bashkir State Univ. 2013, 224 p. (in Russian)

## Сведения об авторах / Information about the Authors

### Юлия Валерьевна Юлмухаметова

к.ф.-м.н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН  
Уфимский университет науки и технологий

### Yulya Valeryevna Yulmukhametova

Ph.D. (physics & mathematics)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia,  
Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia  
[tarasova\\_yulya@mail.ru](mailto:tarasova_yulya@mail.ru)  
ORCID: [0000-0002-5127-4584](https://orcid.org/0000-0002-5127-4584)



## Моделирование термоконвекции в микропробирке при точечном нагреве: подготовка вычислительной сетки и выбор методов

А.И. Исламов, К.Р. Набиуллина

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: [nabiullina1998@gmail.com](mailto:nabiullina1998@gmail.com)

В настоящей работе приводятся результаты подготовительного этапа моделирования процесса температурной конвекции в микропробирках. Проведено построение конечно-объемной сетки конусообразной микропробирки для использования в рамках программного пакета OpenFOAM. Проведены анализ и тестирование полученной сетки. Важным этапом настоящей работы является анализ встроенных решателей из программного пакета OpenFOAM, а также выбор оптимального решателя для решения данной конкретной задачи. В работе рассмотрены преимущества и недостатки двух стандартных решателей – buoyantBoussinesqPimpleFoam и buoyantPimpleFoam. Показано, что достаточным для рассмотренной задачи является решатель buoyantBoussinesqPimpleFoam при условии выполнения программы с использованием вычислений на основе библиотек OpenMPI, что позволяет значительно уменьшить время вычислительных экспериментов. Таким образом, по результатам проведенного исследования подготовлена трехмерная модель микропробирки, проведено ее тестирование и подобран встроенный решатель из программного пакета OpenFOAM. Использование полученных результатов может оказать существенное влияние на последующие исследования в области температурной конвекции в микропробирках, а следовательно, и в процессах оптимизации проведения полимеразной цепной реакции.

**Ключевые слова:** ПЦР, полимеразная цепная реакция, OpenFOAM, OpenMPI, тепловая конвекция, микрофлюидика

## Modeling of thermoconvection in a microtube under point heating: computational grid preparation and choice of method

A.I. Islamov, K.R. Nabiullina

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: [nabiullina1998@gmail.com](mailto:nabiullina1998@gmail.com)

This paper presents the results of the preparatory stage of modeling the process of thermal convection in microtubes. The finite-volume mesh for a cone-shaped microtube for use within the OpenFOAM software package has been constructed. The obtained mesh was analyzed and tested. An important stage of this work is the analysis of built-in solvers from the OpenFOAM software package, as well as the selection of the optimal solver for solving this particular problem. The advantages and disadvantages of two standard solvers – buoyantBoussinesqPimpleFoam and buoyantPimpleFoam – are considered. It is shown that buoyantBoussinesqPimpleFoam is sufficient for the considered problem, provided that the program is executed using computations based on OpenMPI libraries, which allows to significantly reduce the time of computational experiments. Thus, according to the results of the conducted research, a three-dimensional model of the microtube was prepared, its testing was carried out and the built-in solver from the OpenFOAM software package was selected. The use of the obtained results can have a significant impact on further research in the field of temperature convection in microtubes, and consequently in the processes of optimization of PCR.

**Keywords:** PCR, polymerase chain reaction, OpenFOAM, OpenMPI, thermal convection, microfluidics

### 1. Введение

Полимеразная цепная реакция (ПЦР) представляет собой процесс контролируемого «молекулярного копирования» определенного участка ДНК, позволяющий нарабатывать (амплифицировать) сколь угодно большое число интересующих последовательностей ДНК [1].

Разработка метода ПЦР стала одним из важнейших

событий в молекулярной биологии последнего времени [1]. Это достижение стимулировало расширение научных исследований в этой области, а также расширило возможности медицинской диагностики.

Метод ПЦР — это метод, который позволяет быстро идентифицировать патогены, манипулировать экспрессией генов и диагностировать наследственные за-

болевания и инфекции. Все это произвело революцию в 1980-х годах, проложив путь к новой эре биологии и медицины.

Клеппе и его коллеги ввели концепцию объединения праймеров и реакционных смесей [2, 3], совершив первые шаги в объяснении реакций, связанных с увеличением числа копий ДНК, а также принципов использования праймеров и реакционных смесей. Они были первыми, кто разработал метод экспоненциального увеличения количества копий исходного фрагмента ДНК в 1971 году.

Первые упоминания полимеразной цепной реакции можно обнаружить в работах нобелевского лауреата Кэри Маллиса [4] в 1983 году. Цифровая ПЦР (цПЦР) была упомянута в нескольких независимых работах в 1990 и 1991 годах, которые были посвящены изучению ВИЧ [5]. В 1992 году цПЦР была описана более детально [6], но только в 1999 году она получила свое нынешнее название в статье о мутациях в гене *ras* [7]. А вот внедрения в лабораторные исследования данного вида ПЦР так и не случилось, так как в 1992 году сотрудники Калифорнийского института Roche Molecular Systems разработали новую на тот момент ПЦР в реальном времени [8], которая требовала намного меньше затрат, нежели цПЦР.

Впервые понятие конвекционной ПЦР встречается в патенте США 2003 года [9]. Конвективная ПЦР (Convective PCR) является новым методом, разработанным для ускорения процесса ПЦР за счет использования конвекции. Этот метод позволяет значительно сократить время амплификации ДНК и повысить эффективность реакции.

Концепция конвективной ПЦР основана на использовании тепловой конвекции для ускорения циркуляции реагентов в реакционной смеси. Это позволяет равномерно распределять тепло и компоненты ПЦР по всему объему реакционной смеси, что способствует более быстрой и эффективной амплификации ДНК. Исследования в области конвективной ПЦР продолжаются, и этот метод может стать перспективным инструментом для ускорения и улучшения процесса амплификации ДНК в различных областях науки и медицины.

Метод ПЦР предложен в различных модификациях, разработано несколько тест-систем, позволяющих выявлять микроорганизмы и точечные мутации с помощью ПЦР, описаны десятки применений [10]. Лабораторно-диагностическая практика последние десять лет активно внедряет метод ПЦР в свои повседневные процедуры. Скорость, специфичность и чувствительность метода делают его высокоэффективным и быстрым инструментом клинической диагностики.

При проведении конвекционной ПЦР температура внутри реакционной смеси имеет тенденцию меняться из-за градиента силы поверхностного натяжения, вызванного разницей температур, поэтому для описания конвекционной ячейки используется ячейка Марангони. Это привело к разработке метода ПЦР, в основе которого для амплификации использовались микропоточ-

ные устройства, а не пробирки. Недостатком данного метода являются невысокая скорость протекания реакции и плохая масштабируемость [11].

Микрофлюидика — технология, использующая наноструктурированные устройства для манипулирования малыми объемами жидкости (обычно в масштабе микролитров или нанолитров), — играет значительную роль в усовершенствовании методов ПЦР. Технологии микрочипов выгодны для методов ПЦР, поскольку они в миниатюре могут значительно повысить скорость нагрева и охлаждения реакционной смеси, главным образом за счет значительного увеличения скорости. Условия термического усиления обеспечиваются за счет включения в микрочип реакционных камер с устройствами нагрева и охлаждения, которые затем наносятся на микрочип для создания резонансных камер, настроенных на усиление звука [12].

ПЦР можно эффективно и результативно проводить благодаря современным методам изготовления микрочипов с реакционной камерой и высоким отношением поверхности к объему. Классификация этих микроустройств зависит от концепции и способа нагрева реакционной смеси, а также от способов транспортировки смеси (стационарные и проточные реакционные камеры). Каждый цикл амплификации в стационарных реакционных камерах включает изменение температуры; для репликации обоих типов реакций используются однокамерные [13] или мультикамерные ПЦР-чипы [14]; температура в каждом цикле меняется в течение каждого цикла амплификации.

Микрочипы с микрофлюидными камерами имеют огромное значение в ПЦР, так как они предлагают ряд преимуществ и улучшений в проведении этого метода амплификации ДНК.

Одним из главных преимуществ микрочипов с микрофлюидными камерами в ПЦР является уменьшение объема реакционной смеси. Благодаря микроскопическим размерам камер можно использовать намного меньшее количество реагентов, что снижает затраты и делает сам процесс более экономичным и эффективным. Таким образом можно организовать ускорение ПЦР за счет последовательного прохождения реакционной смеси по микроканалам через разнообразные температурные зоны. Идею использования подобного чипа для ПЦР впервые предложили Накано и его соавторы в 1994 году [14].

В связи с необходимостью оптимизации процесса диагностики ДНК большое внимание уделяется сокращению продолжительности ПЦР. Существует несколько способов ускорения ПЦР. Наиболее широко используемым методом является проведение конвективной ПЦР, в этом случае изменение температуры реакционной смеси достигается за счет перемещения реакционного содержимого под действием тепловой конвекции. Движение жидкости осуществляется за счет температурного градиента, возникающего из-за нагрева и (или) охлаждения некоторых точек микропробирки, в которой осуществляется ПЦР [12].

Исследование проблемы ускорения ПЦР остается актуальным и важным даже при наличии уже разработанных средств и методов. Экспериментальные проверки требуют больших трудозатрат, в связи с чем появляется необходимость в предварительном моделировании и проведение расчетов для дальнейших исследований.

В рамках настоящей работы представлен обзор методов построения сетки микропробирки в программном комплексе OpenFOAM, а также исследование и тестирование различных решателей для моделирования температурной конвекции в таких системах.

## 2. Основные понятия тепловой конвекции и микрофлюидики

Слово «конвекция» происходит от латинского слова «convectio», что означает «приносить, доставлять» [15]. Неоднородность движения объясняется множеством причин, включая поверхностное натяжение, подъемную силу и другие механизмы, которые приводят в движение. Вязкость играет решающую роль в стабилизации движения и может ограничивать его. В процессе конвекции существует некоторая пороговая точка, определяемая критическим числом Нуссельта, выше которой возникают организованные движения упорядоченных структур, что является одной из основных особенностей.

Характеристики различных явлений гидродинамической устойчивости типичны для конвективных процессов в плоском горизонтальном слое жидкости, нагреваемого за счет его поднятия или понижения. Конвекция типа Рэлея–Бенара является идеальным примером изучения процессов самоорганизации упорядоченных пространственных структур [16]. Этот тип конвекции, имеющий как пространственные, так и временные эффекты, делает его привлекательной темой как для экспериментальных, так и для теоретических исследований. Подробный анализ развития структур, их особенностей и вариаций режимов конвекции, а также их характера и поведения приведен в [18].

Микрочипы — это устройства с рядом микрожидкостных каналов и резервуаров, которые взаимодействуют с лежащими в основе молекулами жидкости, создавая систему жидкостных чипов. Небольшие объемы работы в лаборатории позволяют снизить расход реагентов, сократить использование реагентов в конкретных приложениях, получить возможность использовать большое количество реакционных камер на одном устройстве [21], а также использовать новые аналитические подходы и методы анализа. В связи с растущим спросом на генетический анализ с помощью микрочипов теперь возможно применять небольшие автоматизированные системы, которые могут комплексно анализировать образец [17].

Микрофлюидные устройства используются в приборостроении для устройств анализа биологических образцов, которые могут производить компоненты с высокой скоростью изменения, требуют очень мало реаген-

тов и имеют небольшие размеры, что способствует развитию эффективного обнаружения и скрининга онкологических заболеваний. В лаборатории Информационно-измерительных био- и хемосенсорных микросистем Института аналитического приборостроения (ИПФ РАН) проведена ПЦР в реальном времени (ОТ-ПЦР) на микрофлюидных приборах. Ранее были рассмотрены особенности реализации и основные результаты [19, 20].

Использование микрочипов для ПЦР может значительно сократить использование реагентов, снизить их расход и повысить общую скорость обработки. Материалы и элементы конструкции микрочипа подвергаются значительному давлению при переходе на микрореакторы, в которых проводится ПЦР, несмотря на более низкую стоимость и доступность сырья. Необходим контроль физико-химических свойств поверхностей реакционных камер. Микрочипы, подключенные к подложке ПЦР, можно использовать для мониторинга и анализа полученных продуктов ПЦР в режиме онлайн, в частности, для проверки процесса реакции амплификации [22].

## 3. Конечно-объемная сетка и граничные условия

Моделируется конвекция в микропробирке со следующими параметрами: диаметр пробирки — 4 мм, радиус закругления дна — 1 мм, высота без учета дна — 7 мм; общая высота — 8 мм.

Схема расчетной области с указанием точек (небольших областей) приложения нагрева и охлаждения приведена на рис. 1. Данная схема нагрева/охлаждения задана с учетом экспериментов, описанных в работах [27–29].

Граничные условия для рассматриваемой задачи заданы в достаточно простом виде. По всем границам принято наличие твердой стенки, что означает применение граничного условия прилипания для скорости  $\vec{v}$ :

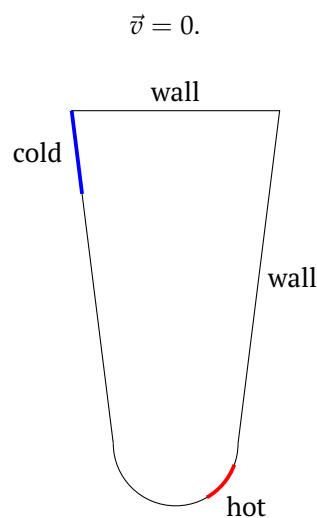


Рис. 1. Схема вычислительной области



Для температуры выделены две диагонально расположенные граничные области в нижней и верхней частях пробы, в которых  $T$  задается как величина с постоянным значением: область нагрева с  $T_{hot} = 400$  К и область охлаждения с  $T_{cold} = 300$  К, начальная температура принята равной 300 К. На остальных границах для температуры задан нулевой градиент относительно нормали  $\vec{n}$  или «условие протекания»:

$$\nabla T \cdot \vec{n} = 0.$$

При такой постановке задача характеризуется безразмерными числами: Рейнольдса  $Re \approx 10$ , Рэлея  $Ra \approx 10^6$ , Нуссельта  $Nu \approx 1.7$ .

В качестве инструмента для решения поставленной задачи выбран пакет прикладных программ OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation). Это открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред [24]. Стандартная версия пакета OpenFOAM поставляется с многочисленными программами-решателями, библиотеками, кроме этого в состав пакета входят множество утилит, позволяющих генерировать и конвертировать расчетную сетку, задавать пространственные распределения физических величин и многие другие.

При разработке конечно-объемной сетки для вычислительного моделирования поставленной задачи авторы придерживались принципов, изложенных в [25]. Это значит, что построенная сетка должна быть по возможности ортогонализированной (то есть углы между гранями конечных объемов должны стремиться к  $90^\circ$ ) и равномерной. Такой подход позволяет снизить вычислительную погрешность и одновременно ускорить вычисления за счет возможности использования большего шага по времени.

#### 4. Особенности построения сетки средствами OpenFOAM

OpenFOAM базируется на методе конечных объемов, что делает создание расчетной сетки неотъемлемым этапом численного решения задачи. Помимо определения геометрии расчетной области необходимо сформировать соответствующую сетку. Для этого можно воспользоваться утилитами самого OpenFOAM или сторонними приложениями. В настоящем исследовании используется утилита blockMesh из набора OpenFOAM, предназначенная для построения структурированных блочных сеток. Следует отметить, что OpenFOAM всегда оперирует трехмерной декартовой системой координат, и все геометрические параметры задаются в трех измерениях [26].

OpenFOAM использует структурированную сетку, которая может быть построена с использованием различных методов. Данная сетка строится из блоков (или ячеек), которые состоят из гексаэдрических элементов (гексаэдров). Использование гексаэдров обусловлено более точным представлением геометрии и потоков, что в свою очередь позволяет улучшить точность расчетов.

Учитывая специфику построения сетки средствами OpenFOAM для удобства было необходимо отображать номера точек на сетке. В настоящей работе для реализации использовалась версия OpenFOAM-2312, которая, к сожалению, не поддерживает такую функцию, в связи с чем авторы были вынуждены развернуть дополнительно версию OpenFOAM-1912 посредством docker-compose. Отображение нумерации точек осуществлялось с помощью встроенной команды -block, которая позволяет запустить файл с расширением .blockMesh в среде parafoam для просмотра компонентов сетки.

При построении сетки в OpenFOAM авторы столкнулись с рядом трудностей, особенно при создании сетки для «кончика» пробы. «Кончик» пробы представляет собой часть сферы, что затрудняет процесс генерации качественной сетки в терминологии OpenFOAM. Из-за особенностей формы кончика пробы необходимо уделить особое внимание расстановке узлов и определению граничных условий для обеспечения точности моделирования и сохранению принципов построения качественной сетки. Эти сложности требуют тщательного подхода к построению сетки и выбору соответствующих методов интерполяции для обеспечения правильного представления геометрии и точных расчетов в дальнейшем. Несмотря на то, что сфера является одной из самых простых геометрических фигур, существует несколько вариантов построения сетки, вот некоторые из них: UV sphere, Icosphere, Quad sphere, Goldberg polyhedra.

Рассмотрим преимущества и недостатки каждого из вариантов:

1. UV sphere — удобна для текстурирования, проста в создании, но при этом имеет проблемы с искажением текстур при выполнении расчетов.
2. Icosphere — построение осуществляется с помощью икосаэдров, что обеспечивает более равномерное распределение полигонов по сравнению с UV Sphere. Хорошо подходит для симуляций и моделирования поверхностей. Из минусов: сложнее в текстурировании из-за своей геометрии по сравнению с UV sphere.
3. Quad sphere — обеспечивает более равномерное распределение полигонов благодаря использованию квадратных участков. Улучшает качество сетки, что полезно для ряда вычислительных задач. Из минусов: сложнее в текстурировании из-за своей геометрии по сравнению с UV sphere.
4. Goldberg polyhedra — из плюсов: обладают определенной симметрией и геометрической простотой. Из минусов: могут быть менее удобными для определенных вычислительных задач из-за своей особенной геометрии.

Каждый из приведенных выше способов построения сетки обладает как положительными, так и отрицательными свойствами в зависимости от исследуемой геометрической области, а также решаемой системы

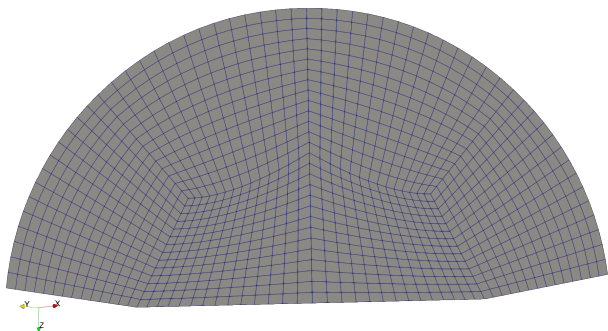


Рис. 2. Построение блоков «кончика» пробирики в разрезе

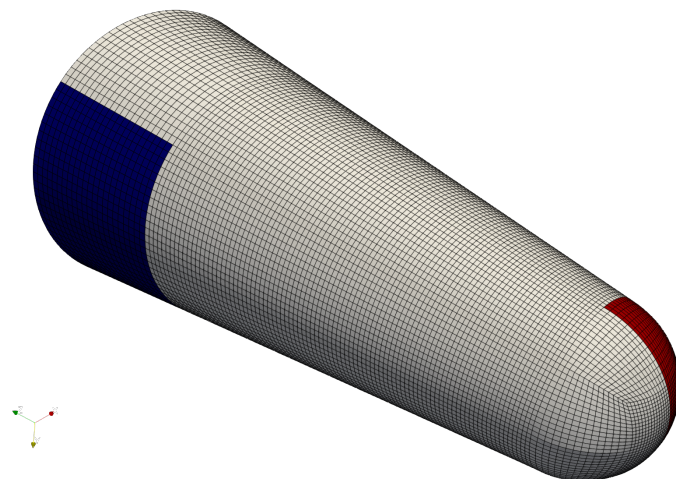


Рис. 3. Полученная сетка микропробирки

дифференциальных уравнений в частных производных и алгоритма решения данной системы. Хорошо известно, что для решения уравнения динамики жидкости наилучший результат дает гексаэдральная ортогональная сетка. Очень хорошее приближение к такому типу сетки может быть достигнуто при использовании подхода Quad sphere и утилиты blockMesh.

На рис. 2 представлено построение блоков в разрезе. Важно отметить, что для построения правильной сетки потребовалось провести перпендикуляр от внутреннего блока к цилиндру основания пробирики.

Общий вид сетки с выделенными граничными областями нагрева и охлаждения показан на рис. 3

## 5. Оценка качества расчетной сетки

Команда checkMesh в OpenFOAM используется для проверки сетки (mesh) перед запуском вычислений и выполняет различные виды проверок, чтобы гарантировать качество сетки и избежать потенциальных проблем в процессе численного моделирования. Вот некоторые из основных принципов, которые проверяются при использовании checkMesh:

1. *Непрерывность.* Результаты проверки на непрерывность могут включать обнаруженные разрывы и неконсистентности в сетке, а также информацию о том, какие части сетки требуют дополнительной коррекции.
2. *Качество ячеек.* В выходном файле будут отображены результаты проверки качества ячеек, такие как: аспектные отношения, объемы ячеек, углы между гранями и другие параметры, а также возможные рекомендации по улучшению качества сетки.
3. *Границы.* Информация о правильности определения граничных условий и границ сетки, включая возможные ошибки или несоответствия.

4. *Пересечения.* Результаты проверки на пересечения между ячейками или границами, включая информацию о найденных пересечениях и предложения по их устранению.
5. *Общая целостность.* Выводится информация о целостности сетки и ее соответствии ожидаемой топологии, а также возможные рекомендации по исправлению обнаруженных проблем.
6. *Дубликаты.* Результаты проверки на наличие дубликатов узлов или граней в сетке, включая информацию о найденных дубликатах и предложения по их удалению.

По результатам тестирования построенной сетки были получены следующие результаты:

- Информация о корректности топологии сетки

```
Checking topology...
Boundary definition OK.
Cell to face addressing OK.
Point usage OK.
Upper triangular ordering OK.
Face vertices OK.
Number of regions: 1 (OK).
```

Интерпретация полученных результатов:

1. Boundary definition OK — определение границы модели выполнено корректно.
2. Cell to face addressing OK — соотнесение ячеек с гранями выполнено без ошибок.
3. Point usage OK — использование точек (узлов) в модели выполнено правильно.
4. Upper triangular ordering OK — правильное упорядочение верхнего треугольника выполнено без ошибок.
5. Face vertices OK — проверка вершин грани прошла успешно.

6. Number of regions: 1 (OK) — количество регионов в модели равно 1, что также является допустимым значением.

В целом эти параметры указывают на успешное выполнение проверки топологии модели в OpenFOAM, гарантируя правильность структуры и граничных условий модели.

- Количественные параметры сетки, в том числе значения показателей качества

```
Checking geometry...
Overall domain bounding box
(-0.002 -0.002 -0.001)
(0.002 0.002 0.007)
```

```
Mesh has 3 geometric (non-empty/wedge)
directions (1 1 1)
```

```
Mesh has 3 solution (non-empty)
directions (1 1 1)
```

```
Boundary openness
(3.74116e-16 1.75382e-17 -1.3686e-15) OK.
```

```
Max cell openness = 2.92269e-16 OK.
Max aspect ratio = 2.7816 OK.
Minimum face area = 4.08184e-10.
Maximum face area = 1.01658e-08.
Face area magnitudes OK.
Min volume = 1.04635e-14.
Max volume = 7.21835e-13.
Total volume = 5.34764e-08.
Cell volumes OK.
Mesh non-orthogonality
Max: 46.2948 average: 9.65687
Non-orthogonality check OK.
Face pyramids OK.
Max skewness = 0.786067 OK.
```

```
Coupled point location
match (average 0) OK.
```

Mesh OK.

Интерпретация полученных результатов:

1. Overall domain bounding box — показывает общие координаты ограничивающего объема (минимальные и максимальные значения по направлениям  $x, y, z$ ).
2. Mesh has 3 geometric (non-empty/wedge) directions — показывает количество геометрических (непустых/клиновидных) направлений сетки.
3. Mesh has 3 solution (non-empty) directions — показывает количество направлений сетки для решения задачи (непустые направления).

4. Boundary openness — проверяет открытость границы. Если значение отлично от нуля, это может свидетельствовать о проблемах с поддержанием границы во время моделирования.

5. Max cell openness — максимальное отклонение от идеальной ячейки: чем меньше значение, тем лучше.

6. Max aspect ratio — максимальное соотношение сторон ячейки: чем ближе к 1, тем лучше.

7. Min/Max face area — минимальная и максимальная площади граней сетки.

8. Min/Max volume — минимальный и максимальный объемы ячейки, общий объем сетки.

9. Mesh non-orthogonality Max/average — неортогональность сетки. Показывает максимальное и среднее значение.

10. Face pyramids — проверяет пирамиды граней сетки.

11. Max skewness — максимальное значение коэффициента асимметрии ячеек: чем ближе к 0, тем лучше.

12. Coupled point location match — соответствие средних точек. Оценивает непрерывность секток между сетками.

13. Mesh OK — показывает общую оценку состояния сетки (если все параметры в пределах допустимых значений — выводится «OK»).

Эти параметры позволяют быстро оценить качество сетки и идентифицировать возможные проблемы, которые могут повлиять на результаты моделирования. По результатам анализа можно сделать выводы о том, что сетка соответствует стандартам качества и должна предоставить достаточно точные результаты при расчетах.

## 6. Оценка сходимости

Для оценки сходимости рассчитан коэффициент  $\xi$  перемешивания жидкости при разном шаге по времени  $\Delta t \in [0.001, 0.1]$  и  $\alpha = 45^\circ$ :

$$\xi(\alpha) = \frac{\sum_1^N (V_i \cdot |\vec{v}_i|)}{V_{full}},$$

где  $\xi$  — коэффициент перемешивания;  $\alpha$  — угол наклона пробирки;  $V$  — значение объема в  $i$ -ой ячейке;  $|\vec{v}_i|$  — значение модуля вектора скорости в  $i$ -ой ячейке;  $n$  — количество ячеек сетки;  $V_{full}$  — общий объем.

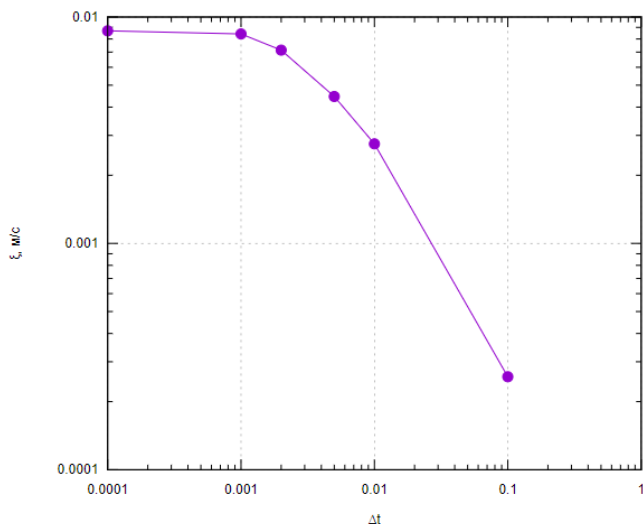


Рис. 4. График зависимости коэффициента перемешивания от шага по времени

При уменьшении шага по времени результат сходится к значению  $\xi \approx 0.0087$  м/с (рис. 4), что служит одним из критериев оценки адекватности модели.

## 7. Решатель

Наиболее подходящими встроенными решателями для решения поставленной задачи являются `buoyantPimpleFoam` и `buoyantBoussinesqPimpleFoam`. Данные решатели предназначены для моделирования турбулентных потоков с учетом плавучести, которые возникают из-за разницы в температурах. Они используются в различных приложениях, где важно учитывать влияние температуры на движение жидкости или газа.

Далее рассмотрим различия между данными решателями: `buoyantPimpleFoam` подходит для ситуаций с высокими температурными градиентами, где изменение плотности имеет значительное влияние на поток, в то время как `buoyantBoussinesqPimpleFoam` подходит для задач с малыми температурными градиентами, где изменение плотности минимально. Также одним из важных моментов при выборе решателя было то, что `buoyantPimpleFoam` использует полное уравнение состояния для расчета плотности в зависимости от температуры.

Так как в настоящей работе рассматривается течение несжимаемой жидкости и предполагается, что температурные градиенты достаточно малы, чтобы изменениями плотности можно было пренебречь, в модели плавучести изменение плотности остается только в приближении Буссинеска [23]. Поскольку предполагается, что в остальных членах уравнения плотность постоянна, то у нас нет необходимости вводить уравнение состояния.

Таким образом, для рассматриваемой задачи в текущей постановке достаточным является решатель `buoyantBoussinesqPimpleFoam`. Указанный решатель предназначен для моделирования переходных процес-

сов в несжимаемых потоках при учете плавучести, описываемой в приближении Буссинеска. То есть плавучесть описывается как линейное изменение плотности жидкости при изменении температуры на основе эталонного значения температуры. Решатель особенно точен и эффективен, когда изменения плотности по сравнению с эталонной плотностью невелики.

## 8. Заключение

В настоящей статье рассмотрены подходы, применимые при массовом вычислительном эксперименте температурной конвекции в микропробирках. В частности, рассмотрены методы построения сетки с использованием инструмента `OpenFOAM` и приведены рассуждения по выбору стандартного решателя.

Использование инструмента `OpenFOAM` позволяет проводить сложные численные расчеты с высокой точностью и эффективностью. В рамках работы проанализированы существующие варианты построения сетки, после чего построена оптимальная в рамках решения данной задачи трехмерная модель микропробирки в условиях температурной конвекции, проведена оценка качества построенной сетки.

Помимо анализа и моделирования сетки в статье обоснован выбор решателя среди применимых для решаемой задачи и данной модели сетки. После сравнения подходящих стандартных решателей `buoyantBoussinesqPimpleFoam` и `buoyantPimpleFoam` принято решение, что подходящим и достаточным для рассматриваемой задачи является `buoyantBoussinesqPimpleFoam`.

## Список литературы / References

- [1] Петров А.И. Исследование и практическая реализация программно-аппаратных средств проведения полимеразной цепной реакции с наблюдением в реальном времени. Санкт-Петербург, 2016. 112 с.  
Petrov A.I. [Research and practical implementation of software and hardware for conducting polymerase chain reaction with real-time monitoring] *Issledovanie i prakticheskaja realizacija programno-apparatnyh sredstv provedenia polimerznoj cepnoj reakcii s nabljudeniem v real'nom vremeni*. St. Petersburg. 2016. P. 112.
- [2] Kleppe K.E., Ohtsuka R., Kleppe I. Molineux and Khorana, Studies on polynucleotides. XCVI. Repair replications of short synthetic DNA's as catalyzed by DNA polymerases // *J. Mol. Biol.* 1971. V. 56. Pp. 341–346.  
DOI: [10.1016/0022-2836\(71\)90469-4](https://doi.org/10.1016/0022-2836(71)90469-4)
- [3] Singh J., Birbian N., Sinha S., Goswami A. A critical review on PCR, its types and applications // *Int. J. Adv. Res. BioSci.* 2014. V. 1, No. 7. Pp. 65–80.  
<https://ijarbs.com/pdfcopy/oct2014/ijarbs11.pdf>
- [4] Saiki R.K., Scharf S., Faloona F., Mullis K.B., Horn G.T., Erlich H.A., Arnheim N. Enzymatic amplification of globin genomic sequences and restriction site analysis for diagnosis of Sickle Cell Anemia // *Science*. 1985. V. 230. Pp. 1350–1354.  
DOI: [10.1126/science.299998](https://doi.org/10.1126/science.299998)
- [5] Simmonds P., Balfe P., Peutherer J.F., Ludlam C.A., Bishop J.O., Brown A.J. Human immunodeficiency virus-infected individuals contain provirus in small numbers of peripheral mononuclear cells and at low copy numbers // *J. Virol.* 1990. No. 64. Pp. 864–872.  
DOI: [10.1128/jvi.64.2.864-872.1990](https://doi.org/10.1128/jvi.64.2.864-872.1990)
- [6] Sykes P.J., Neoh S.H., Brisco M.J., Hughes E., Condon J., Morley A.A. Quantitation of targets for PCR by use of limiting dilution // *Biotechniques*. 1992. No. 13. Pp. 444–449.  
[https://www.academia.edu/download/39689043/Quantitation\\_of\\_targets\\_for\\_PCR\\_by\\_use\\_o20151104-16311-gtud2z.pdf](https://www.academia.edu/download/39689043/Quantitation_of_targets_for_PCR_by_use_o20151104-16311-gtud2z.pdf)

- [7] Morley A.A. Digital PCR: A brief history // *Biomolecular Detection and Quantification*. 2014. No. 1. Pp. 1–2.  
DOI: [10.1016/j.bdq.2014.06.001](https://doi.org/10.1016/j.bdq.2014.06.001)
- [8] Higuchi R., Dollinger G., Walsh P.S., Griffith R. Simultaneous Amplification and Detection of Specific DNA Sequences // *Nat. Biotechnol.* 1992. No. 10. Pp. 413–417.  
<https://www.nature.com/articles/nbt0492-413>
- [9] Patent No. US 6,586,233B2, Int. Cl. C12M 1/36. Convectively driven PCR thermal-cycling : No. 09/802,549 : register 09.03.2001 : published 01.07.2003 / Bennett W.J., Richards J.B., Milanovich F.P.  
URL: <https://patents.google.com/patent/US6586233B2/en> (accessed: 19.08.2024).
- [10] Patent No. US 5,994,056 A, Int. Cl. C12P 1/48; C12P 1/68; C12N 15/10. Homogeneous methods for nucleic acid amplification and detection : No. 07/695,201 : register 02.05.1991 : published 30.11.1999 / Higuchi R.G.  
URL: <https://patents.google.com/patent/US5994056A/en> (accessed: 19.08.2024).
- [11] Патент № 2413770 Российская Федерация, МПК C12P 19/34 (2006.01), C12Q 1/68 (2006.01). Способ проведения полимеразной цепной реакции с помощью конвекции : № 2007121893/10: заявл. 14.06.2007 : опубл. 20.12.2008 / Чемерис Д.А., Чемерис А.В., Магданов Э.Г., Гарифутдинов Р.Р., Вахитов В.А., Урманчиев С.Ф., Лебедев Ю.А.  
Patent No. RU 2413770 C2, Int. Cl. МПК C12P 19/34 (2006.01), C12Q 1/68 (2006.01). Method of carrying out polymerase chain reaction by means of convection : No. 2007121893/10: register 14.06.2007 : published 20.12.2008 / Chemeris D.A., Chemeris A.V., Magdanov E.G., Garafutdinov R.R., Vakhitov V.A., Uрманchiev S.F., Lebedev Ju.A.  
URL: [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_37744165\\_76189553.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_37744165_76189553.pdf) (accessed: 19.08.2024).
- [12] Wu J., Cao W., Wen W. et al. Polydimethylsiloxane microfluidic chip with integrated microheater and thermal sensor // *Biomicrofluidics*. 2009. V. 3. P. 012005.  
DOI: [10.1063/1.3058587](https://doi.org/10.1063/1.3058587)
- [13] Patent No. US 2006/0216725 A1, Int. Cl. CI2O I/68 (2006.01); C12P 19/34 (2006.01); C12M I/34 (2006.01). Polymer chain reaction apparatus using Marangoni convection and polymer chain reaction method using the same : No. 11/219,182 : register 02.09.2005 : published 28.09.2006 / Lee Y-S., Kuk K., Oh Y-S., Shih S-H., Kim M-S.  
URL: <https://patents.google.com/patent/US20060216725A1/en> (accessed: 19.08.2024).
- [14] Matsubara Y., Kerman K., Kobayashi M. et al. Microchamber array based DNA quantification and specific sequence detection from a single copy via PCR in nanoliter volumes // *Biosens. Bioelectron.* 2005. V. 20. Pp. 1482–1490.  
DOI: [10.1016/j.bios.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.bios.2004.07.002)
- [15] Симяхина М.А. Условия возникновения и методика расчета параметров конвекции в атмосфере: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат.наук: 25.00.30. Ставрополь, 2010. 21 с.  
Simakhina M.A. [Conditions of occurrence and methods of calculating parameters of convection in the atmosphere] *Usloviya vozniknoveniya i metodika rascheta parametrov konvekcii v atmosfere*. Ph.D theses (Phys. & math). Stavropol. 2010. 21 p.
- [16] Гарифуллин Ф.А. Возникновение конвекции в горизонтальных слоях жидкости // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 8. С. 108–114.  
Garifullin F.A. [The occurrence of convection in horizontal layers of liquid] *Vozniknovenie konvekcii v gorizontalnyh slojah zhidkosti*. Soros educational journal. 2000. V. 6(8). Pp. 108–114.
- [17] Hopwood A.J., Hurth C., Yang J., Cai Z., Moran N., LeemEdghill J.G., Nordquist A., Lenigk R., Estes M.D., Haley J.P., McAlister C.R., Chen X., Brooks C., Smith S., Elliott K., Koumi P., Zenhausern F., Tully G. Integrated Microfluidic System for Rapid Forensic DNA Analysis: Sample Collection to DNA Profile // *Analyt. Chem.* 2010. V. 82, No. 16. Pp. 6991–6999.  
DOI: [10.1021/ac101355r](https://doi.org/10.1021/ac101355r)
- [18] Гетлинг А.В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея–Бенара // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161, № 9. С. 1–80.  
DOI: [10.3367/UFNr.0161.199109a.0001](https://doi.org/10.3367/UFNr.0161.199109a.0001)  
Getting A.V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Sov. Phys. Usp.* 1991. 34 (9). Pp. 737–776  
DOI: [10.1070/PU1991v034n09ABEH002470](https://doi.org/10.1070/PU1991v034n09ABEH002470)
- [19] Антонова О.С., Рудницкая Г.Е., Тупик А.Н., Буляница А.Л., Евстапов А.А., Курочкин В.Е. Полимеразная цепная реакция: приборная и методическая реализация. Обзор аналитических характеристик // *Научное приборостроение*. 2011. Т. 21, № 4. С. 5–21.  
Antonova O.S., Rudnitskaya G.E., Tupik A.N., Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Kurochkin V.E. Polymerase chain reaction: devices and methods. A systematic review of literature. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2011. V. 21 (4). Pp. 5–21.  
EDN: oipjzn
- [20] Тупик А.Н., Курочкин В.Е., Евстапов А.А. и др. Стеклообразные чипы для ПЦР в геле // XIX Менделеевский съезд по общей и прикладной химии (Волгоград, 25–30 сент. 2011). Сб. материалов. 2011. Т. 4. С. 294.  
Tupik A.N., Kurochkin V.E., Evstrapov A.A. et al. [Glass chips for PCR in gel] *Stekljannye chipy dlya PCR v gele*. Proc. of XIX Mendeleev symposium of common and applied chemistry. 2011. V. 4. Pp. 294.
- [21] Золотов Ю.А., Курочкина В.Е. Микрофлюидные системы для химического анализа. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 528 с.  
Zolotov Yu.A., Kurochkin V.E. [Microfluidic systems for chemical analysis] *Mikrofluidnye sistemy dlya himicheskogo analiza*. Moscow. 2011. 528 p.
- [22] Евстапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Лукашенко Т.А., Тупик А.Н., Цымбалов А.И., Есикова Н.А., Посмитная Я.С. Оценка результатов полимеразной цепной реакции в реальном времени кДНК онкомаркеров СК-19 методом электрофореза на микрофлюидном чипе // *Научное приборостроение*. 2012. Т. 22, № 4. С. 77–85.  
Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al. The estimate of results of the real-time polymerase chain reaction of tumor markers cytokeratin-19 (CK-19) cDNA by electrophoresis method in microfluidic chip. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2012. V. 22 (4). Pp. 77–85.  
EDN: pggthv
- [23] Boussinesq J. Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section. Gauthier-Villars. 1897. 64 p.
- [24] OPENFOAM® (дата обращения 10.04.2024).  
<https://openfoam.org/>
- [25] Mikhaylenko C.I. Building a finite-difference mesh and selecting a turbulence model for numerical simulations of a vortex tube in OpenFOAM software // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1677. 012021.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1677/1/012021](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1677/1/012021)
- [26] Нуриев А.Н., Зайцева О.Н., Камалутдинов А.М., Жучкова О.С. Введение в компьютерное моделирование гидродинамических процессов в программном комплексе OpenFOAM: учебное пособие. Казань: Издательство Казанского университета, 2022. 84 с.  
Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Zhuchkova O.S. [Introduction to computer modeling of hydrodynamic processes in the OpenFOAM software package] *Vvedenie v kompjuternoe modelirovanie gidrodinamicheskikh processov d programnom komplekse OpenFOAM*. Kazan. 2022. 84 p.
- [27] Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Изолированные режимы течений при конвекции аномально термовязкой жидкости в плоской ячейке // *Прикладная математика и механика*. 2019. № 3. С. 484–494.  
DOI: [10.1134/S0032823519030093](https://doi.org/10.1134/S0032823519030093)  
Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Uрманchiev S.F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54, No. 7. Pp. 983–990.  
DOI: [10.1134/S0015462819070097](https://doi.org/10.1134/S0015462819070097)
- [28] Кулешов В.С., Моисеев К.В. Конвекция термовязкой жидкости в ячейке, подогреваемой сбоку // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 1. С. 67–72.  
Kuleshov V.S., Moiseev K.V. Convection of thermoviscous fluid in a cell heated from the side. *Multiphase Systems*. 14 (2019) 1. 67–72.  
DOI: [10.21662/mfs2019.1.010](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.010)
- [29] Кулешов В.С. Стационарные режимы конвекции жидкости с гауссовской зависимостью вязкости от температуры // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 2. С. 218–225.  
Kuleshov V.S. Stationary fluid convection modes with a Gaussian viscosity dependence of temperature. *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*. 2016. 11(2). 218–225.  
DOI: [10.21662/uim2016.2.032](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.032)

**Сведения об авторах / Information about the Authors****Артур Ильзирович Исламов**

Уфимский университет науки и технологий

**Artur Ilzirovich Islamov**

Ufa University of Science and Technology

[ai.islamov@tensor.ru](mailto:ai.islamov@tensor.ru)ORCID: [0009-0005-0863-0108](https://orcid.org/0009-0005-0863-0108)**Камилла Радиковна Набиуллина**

Уфимский университет науки и технологий

**Kamilla Radikovna Nabiullina**

Ufa University of Science and Technology

[nabiullina1998@gmail.com](mailto:nabiullina1998@gmail.com)ORCID: [0009-0004-7004-2086](https://orcid.org/0009-0004-7004-2086)



## Приближение решений уравнения теплопроводности с функцией распределения начальной температуры из классов Ульянова по неточным данным

Г.Е. Таугынбаева, А.Ж. Жубанышева, Е.Е. Нурмолдин

Институт теоретической математики и научных вычислений, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: [axaulezh@mail.ru](mailto:axaulezh@mail.ru)

Решения уравнений в частных производных, даже в случае их явного выражения посредством рядов Фурье по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора или сверток с соответствующими ядрами, будучи представленные рядами или интегралами фактически представляют собой бесконечные объекты. Поэтому возникает задача их приближения конечными объектами, одна из математических формулировок которой содержится в определении Компьютерного (вычислительного) поперечника  $(K(V)P)$ . Задача  $K(V)P$  состоит в последовательном выполнении трех задач:  $K(V)P-1$  – восстановление по точной информации в зависимости от вида функционалов и алгоритмов переработки полученной от них числовой информации с указанием оптимального вычислительного агрегата приближения;  $K(V)P-2$  – в оптимальном вычислительном агрегате указание границ значений неточных данных информационных функционалов, сохраняющих порядок восстановления по точной информации;  $K(V)P-3$  – изучается вопрос «существует или не существует другой вычислительный агрегат со структурой, аналогичной структуре рассматриваемого оптимального вычислительного агрегата, и даже, быть может, более общей, но с большей по порядку предельной погрешностью оптимального вычислительного агрегата из задачи  $K(V)P-2$ ». В настоящей статье рассматривается приближение решений задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальными условиями из классов Ульянова в равномерной и гильбертовой метриках ( $K(V)P-2$ ) в двумерном случае. Получены порядковые оценки приближения с указанием оптимальных вычислительных агрегатов, построенных по неточным данным тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега. Указаны границы неточностей тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега начальных данных, сохраняющих порядок приближения по точным данным.

**Ключевые слова:** приближение решений уравнения теплопроводности, задача Коши, классы Ульянова, неточная информация, компьютерный (вычислительный) поперечник

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего образования и науки Республики Казахстан (проект AP 14872564).

## Approximation of solutions of the heat conductivity equation with the distribution function of the initial temperature from the Ulyanov classes by inaccurate data

G.E. Taugynbayeva, A.Zh. Zhubanysheva, Y.Y. Nurmoldin

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

E-mail: [axaulezh@mail.ru](mailto:axaulezh@mail.ru)

Solutions of partial differential equations, even in the case of their explicit expression by means of Fourier series with respect to the eigenfunctions of the corresponding differential operator or convolutions with corresponding kernels, being represented by series or integrals, actually again represent infinite objects. Therefore, the problem arises of their approximation by finite objects, one of the mathematical formulations of which is contained in the definition of a Computational (numerical) diameter  $(C(N)D)$ . The problem of a Computational (numerical) diameter  $C(N)D$  consists in the sequential execution of three tasks:  $C(N)D-1$  recovery from accurate information, depending on the type of functionals and algorithms for processing numerical information obtained from them, indicating the optimal computational aggregate of approximation, To  $C(N)D-2$  in an optimal computing aggregate, specifying the boundaries of the values of inaccurate data of information functionals that preserve the order of recovery from accurate information,  $C(N)D-3$  the question is being studied: “does or does not exist another computational aggregate with a structure similar to the structure of the optimal computational aggregate under consideration, and even, perhaps, more general, but with a larger margin of error of the optimal computing unit from the problem  $C(N)D-2$ ”. This article discusses the approximation of solutions to the Cauchy problem for the heat equation with initial conditions from the Ulyanov classes in uniform and Hilbert metrics ( $C(N)D-2$ ) in the two-dimensional case. Ordinal estimates of the

approximation are obtained indicating the optimal computational aggregates based on inaccurate data from the trigonometric Fourier-Lebesgue coefficients. The limits of inaccuracies of the trigonometric Fourier-Lebesgue coefficients of the initial data, preserving the order of approximation according to the exact data, are indicated.

**Keywords:** approximation of solutions of the heat equation, Cauchy problem, Ul'yanov classes, inaccurate date, Computational (numerical) diameter

### 1. Введение и постановка задачи

В настоящей статье исследуется проблема приближения решений  $u(t, x_1, x_2)$  задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (t \geq 0, (x_1, x_2) \in R^2)$$

с начальным условием

$$u(0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \in U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1))$$

из классов Ульянова (определение классов Ульянова и соответствующие ссылки даны в разделе 2)

$$U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1)) (\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0, 1)^2)$$

по неточным данным коэффициентов Фурье функции  $f(x_1, x_2)$ .

Сформулируем общую постановку задачи приближения решений уравнений в частных производных. Пусть даны нормированные пространства  $X$  и  $Y$  комплекснозначных функций, определенных соответственно на множествах  $\Omega$  и  $\Omega_1$ . Пусть  $F \subset X$  и  $u(t, x; f)$  решение уравнения теплопроводности с начальным условием из класса  $F$ . Ниже предполагается, что все условия корректности (существования, единственности, принадлежности к пространству) выполнены.

Центральным здесь является следующее определение:

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N)_Y = \delta_N(\varepsilon_N; F; D_N)_Y = \inf_{(I^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (I^{(N)}, \varphi_N))_Y,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_N(\varepsilon_N; (I^{(N)}, \varphi_N))_Y &\equiv \delta_N(\varepsilon_N; F; (I^{(N)}, \varphi_N))_Y \equiv \\ &\equiv \sup_{\substack{f \in F \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau=1, \dots, N)}} \left\| u(t, x; f) - \varphi_N \left( I_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}, \dots, I_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}, t, x \right) \right\|_Y, \end{aligned}$$

$\varepsilon_N = (\varepsilon_N^{(1)}, \dots, \varepsilon_N^{(N)})$ ;  $\varepsilon_N^{(j)} \geq 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ),  $I_N^{(j)} = (I_N^{(j,1)}, \dots, I_N^{(j,N)})$  — набор функционалов  $I_N^{(j)} : F \rightarrow C$  ( $j = 1, \dots, N$ );  $C$  — поле комплексных чисел, функция  $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; t, x)$  действует из  $C^N \times \Omega_1$  в  $C$ ;  $\{(I^{(N)}, \varphi_N)\}$  — множество всевозможных пар  $(I^{(N)}, \varphi_N)$ ,  $D_N \subset \{(I^{(N)}, \varphi_N)\}$ .

Следующая постановка задачи сформулирована Н. Темиргалиевым (см. [1]) и известна под названием «Компьютерный (вычислительный) поперечник» (К(В)П).

При заданных  $F, Y, D_N$  изучаются следующие за-

дачи.

**Задача К(В)П-1.** Находится порядок  $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$ , информативная мощность набора вычислительных агрегатов  $D_N$ .

**Задача К(В)П-2.** Производится построение конкретного вычислительного агрегата  $(\bar{I}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$  из  $D_N$ , поддерживающего порядок  $\asymp \delta_N(0; D_N)_Y$ , для которого исследуется задача существования и нахождения последовательности  $\tilde{\varepsilon}_N$  с неотрицательными компонентами, называемой К(В)П-2 предельной погрешностью (соответствующей вычислительному агрегату  $(\bar{I}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ ), такой, что

$$\delta_N(0; D_N)_Y \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N; (\bar{I}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y \equiv \sup_{\substack{f \in F, \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau=1, \dots, N)}} \left\| u(t, x; f) - \bar{\varphi}_N \left( \bar{I}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}, \dots, \bar{I}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; t, x \right) \right\|_Y$$

с одновременным выполнением

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (\eta_N > 0) : \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N; (\bar{I}^{(N)}, \bar{\varphi}_N))_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty.$$



Здесь и ниже записи  $A_N \ll B_N$  и  $A_N \asymp B_N$  соответственно означают  $A_N \leq cB_N (c > 0)$  и одновременное выполнение  $A_N \ll B_N$  и  $B_N \ll A_N$ , где  $\{A_N\}$  и  $\{B_N\}$  — неотрицательные последовательности. Тем самым запись  $A_N \asymp B_N$  означает, что существуют положительные константы  $c_1, c_2 (c_1 < c_2)$ , такие, что  $c_1 B_N \leq A_N \leq c_2 B_N$ .

**Задача К(В)П-3.** Устанавливается массивность предельной погрешности  $\tilde{\epsilon}_N$ : находится как можно большее множество  $D_N (\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$  (обычно связанные со структурой исходного  $(\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N)$ ) вычислительных агрегатов  $(l^{(N)}, \varphi_N)$  таких, что для каждого из них выполнено соотношение

$$\forall \eta_N \uparrow +\infty (\eta_N > 0) : \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \tilde{\epsilon}_N; (l^{(N)}, \varphi_N))_Y}{\delta_N(0; D_N)_Y} = +\infty.$$

Задача К(В)П-1 — приближения решений уравнений теплопроводности с начальными условиями из классов Коробова  $E_s^r$ , Соболева с доминирующей смешанной производной  $SW_2^s(0, 1)^s$ , Никольского–Бесова  $B_{2,0}^r(0, 1)^s$ , Ульянова  $U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1))$  по точной информации исследовались в [2–5]. Задаче приближения решений уравнения теплопроводности по неточным данным посвящены работы [6, 7].

## 2. Необходимые определения и утверждения

**Лемма А [1].** Пусть дано целое положительное число  $s$ . Для всякой 1-периодической по каждой переменной функции  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$  с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье решение  $u(t, x; f)$  задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad (t \geq 0, x \in R^s)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in R^s$$

представимо в виде:

$$u(t, x; f) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t} e^{2\pi i(m,x)},$$

где

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx \quad (m \in Z^s)$$

— тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега функции  $f(x)$ .

Напомним необходимые определения.

**Пространство Лебега.** Пусть  $E \subset R^s$  — измеримое множество. Тогда в класс  $L^p(E)$  относят все измеримые на  $E$  функции  $f$ , такие, что конечны следующие нормы:

1. Если  $1 \leq p < \infty$ , то

$$\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(E)} = \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

2. Если  $p = \infty$ , то под  $L^\infty(E)$  понимается либо пространство равномерно непрерывных на  $E$  функций  $f$  и тогда

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(E)} = \sup_{x \in E} |f(x)|,$$

либо пространство существенно ограниченных на  $E$  функций  $f$  с нормой

$$\|f\|_\infty = \text{vrai sup}_{x \in E} |f(x)|.$$

Под классом  $L^{\infty,p} \equiv L^{\infty,p}([0, +\infty) \times (0, 1)^s)$  будем понимать множество всех функций  $g : [0, +\infty) \times R^s \rightarrow C$ , таких, что для каждого  $t \in [0, +\infty)$  функция  $g_t(x) = g(t, x)$  как функция аргумента  $x \in R^s$  является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих  $s$  переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{\infty,p}} = \sup_{t \geq 0} \left( \int_{[0,1]^s} |g(t, x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

П.Л. Ульяновым в [8] были установлены неулучшаемые связи между скоростью убывания коэффициентов Фурье функции одной переменной и скоростью роста ее производных. На основе этих результатов Н. Темиргалиевым в [9] были определены классы  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , 1-периодических по каждой из  $s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) переменных, таких, что  $(\bar{y} = \max\{|y|; 1\})$ :

$$|\hat{f}(m)| \leq \prod_{j=1}^s (\bar{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\bar{m}_j^{\alpha_j - 1}} \psi_j(\bar{m}_j) \quad (m \in Z^s),$$

где  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in R^s$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s) \in (0, 1]^s$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$  ( $\alpha_j > 0$  ( $j = 1, \dots, s$ )),  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)$  (здесь  $\psi_j(x)$  ( $j = 1, \dots, s$ ) — медленно колеблющиеся положительные функции, т.е. такие, что для всякого  $\delta \neq 0$  величина  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\delta \psi_j(x)$  равна 0 или  $+\infty$ , исходя из того  $\delta < 0$  или  $\delta > 0$ ):

$$\sum_{m \in Z^s} \prod_{j=1}^s (\bar{m}_j)^{\beta_j} \theta_j^{\bar{m}_j^{\alpha_j - 1}} \psi_j(\bar{m}_j) < +\infty.$$

Шкала классов  $U_s(\beta, \theta, \alpha, \psi)$  представляет собой классификацию функций в широком диапазоне от предельно малой гладкости до аналитических и их подклассов, включая известные классы Коробова [10, 11]  $E_s^r \equiv U_s(-r, \bar{1}, \bar{1}; \bar{1})$ , где  $r = (r_1, \dots, r_s) \in Z^s$ , причем  $r_j > 1$  при всех  $j = 1, \dots, s$ . Более того, при определенных значениях параметров класс  $U_s(\beta, \theta, \alpha) \equiv U_s(\beta, \theta, \alpha; \bar{1})$  с точностью до постоянных множителей

может быть определен не опосредованными, типа формул Фурье, а прямыми ограничениями на саму бесконечно дифференцируемую функцию.

Именно в силу теорем из [8] при всех  $\beta \in R^s$ ,  $\theta \in (0, 1)^s$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]^s$  класс  $U_s(\beta, \theta, \alpha)$  в указанном выше смысле совпадает с классом бесконечно дифференцируемых 1-периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ , таких, что для всех  $k = (k_1, \dots, k_s) \in Z^s$  ( $k_j \geq 0, j = 1, \dots, s$ ) выполнены неравенства

$$\left\| \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_s}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_s^{k_s}} f(x_1, \dots, x_s) \right\|_{C[0, 1]^s} \leq \prod_{j=1}^s k_j^{\alpha_j (\beta_j + k_j)} \left( \frac{\alpha_j}{e \ln \frac{1}{\theta_j}} \right)^{\alpha_j k_j}.$$

Е.Е. Нурмолдиным [5] были получены оптимальные оценки дискретизации решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из класса  $U_2 \equiv U_2((0, 0), (\theta_1, \theta_2), (1, 1))$  в нормах  $L^p$  ( $2 \leq p \leq \infty$ ).

Справедливы

**Теорема А [5].** Пусть дано  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0, 1)^2$ ,  $\theta_1 \leq \theta_2$ . Тогда выполнено соотношение

$$\inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}; \varphi_N f \in U_2} \sup \|u(t, x_1, x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); t, x_1, x_2)\|_{L^{\infty, \infty}} \asymp N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}.$$

**Теорема В [5].** Пусть дано  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0, 1)^2$ ,  $\theta_1 \leq \theta_2$ . Тогда выполнено соотношение

$$\inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}; \varphi_N f \in U_2} \sup \|u(t, x_1, x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}); t, x_1, x_2)\|_{L^{\infty, 2}} \asymp N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}.$$

### 3. Основные результаты

**Теорема 1.** Пусть дано  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0, 1)^2$ ,  $\theta_1 \leq \theta_2$ . Тогда для оператора приближения

$$\bar{\varphi}_N \left( \hat{f}(m^{(1)}), \dots, \hat{f}(m^{(N)}) ; t, x \right) = \sum_{\substack{m=(m_1, m_2) \in Z^2, \\ \bar{m}_1 + (\log_{\theta_1} \theta_2) \bar{m}_2 \leq n}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)}, \quad (1)$$

$$N = |E_n|,$$

$$E_n = \{m = (m_1, m_2) : \bar{m}_1 + (\log_{\theta_1} \theta_2) \bar{m}_2 \leq n\},$$

$$\bar{m}_j = \max\{|m_j|, 1\} \quad (j = 1, 2), \quad n = 2, 3, \dots$$

и для величины  $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{1}{2}} \theta_1^{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}$  справедливо соотношение

$$\inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}; \varphi_N} \sup_{\substack{f \in U_2, \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau=1, \dots, N)}} \|u(t, x_1, x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N; t, x_1, x_2)\|_{L^{\infty, \infty}} \asymp \sup_{\substack{f \in U_2, \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau=1, \dots, N)}} \left\| u(t, x_1, x_2) - \sum_{\substack{m=(m_1, m_2) \in Z^2, \\ \bar{m}_1 + (\log_{\theta_1} \theta_2) \bar{m}_2 \leq n}} \left( \hat{f}(m) + \gamma_N^{(m)} \tilde{\varepsilon}_N \right) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, \infty}} \asymp N^{\frac{1}{2}} \theta_1^{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}.$$

**Теорема 2.** Пусть дано  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in (0, 1)^2$ ,  $\theta_1 \leq \theta_2$ . Тогда для оператора приближения (1) и для величины  $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{1}{4}} \theta_1^{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}$  справедливо соотношение

$$\inf_{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}; \varphi_N} \sup_{\substack{f \in U_2, \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau=1, \dots, N)}} \|u(t, x_1, x_2) - \varphi_N(\hat{f}(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}) + \gamma_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N, \dots, \hat{f}(m_1^{(N)}, m_2^{(N)}) + \gamma_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N; t, x_1, x_2)\|_{L^{\infty, 2}} \asymp \sup_{\substack{f \in U_2, \\ |\gamma_N^{(\tau)}| \leq 1 \\ (\tau=1, \dots, N)}} \left\| u(t, x_1, x_2) - \sum_{\substack{m=(m_1, m_2) \in Z^2, \\ \bar{m}_1 + (\log_{\theta_1} \theta_2) \bar{m}_2 \leq n}} \left( \hat{f}(m) + \gamma_N^{(m)} \tilde{\varepsilon}_N \right) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{\infty, 2}} \asymp N^{\frac{1}{4}} \theta_1^{\frac{1}{2} N \log_{\theta_1} \theta_2}.$$

Схема доказательств Теорем 1 и 2 заключается в следующем: доказательства теорем состоит в оценках ошибок приближения сверху и снизу. Получение оценок сверху заключается в явном представлении решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (когда функция распределения начальных температур данного уравнения 1-периодична по каждой из переменных и имеет сходящийся тригонометрический ряд Фурье) в виде ряда (см. Лемму А) и основано на результатах приближения решения уравнения теплопроводности по точным данным Е. Нурмолдина (Теоремы А и В). Вместе с тем в оценках сверху производится оценивание слагаемого, получаемого при замене точных данных — тригонометрических коэффициентов Фурье функции распределения начальных температур на их приближенные. В оценках снизу для любых вычислительных агрегатов, построенных по значениям тригонометрических коэффициентов Фурье, функцией распределения начальной температуры указывается функция, обеспечивающая полученную сверху оценку.

#### 4. Заключение

В настоящей работе решается задача приближения решений уравнения теплопроводности в условиях искаженных данных. А именно, получены точные порядки убывания погрешностей приближения решений уравнения теплопроводности по неточным данным тригонометрических коэффициентов Фурье начальной температуры в нормах  $L^{\infty,2}$  и  $L^{\infty,\infty}$ . Данные порядки совпадают с порядками убывания погрешностей приближения по точным данным. Так как излишняя точность вычислений при реализации алгоритма приводит к неоправданному увеличению объема памяти и количества арифметических операций и не улучшает заложенного в алгоритме порядка точности, полученные результаты имеют как теоретическую, так и практическую ценность.

#### Список литературы / References

- [1] Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) перечника // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. 2018. Т. 124, № 3. С. 8–88. Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics, Computer Science, Mechanics Series, 2018. V. 124 (3). Pp. 8–88. EDN: HLDJFP
- [2] Hua L.K., Wang Y. Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1981. 241 p.
- [3] Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B/K. Е. Шерниязов: дис.... канд. физ.-матем. наук, КазГУ им. аль-Фараби. Алматы, 1998. Sherniyazov K.E. [Approximate reconstruction of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E, SW and B/K.] *Priblizhennoe vosstanovlenie funktsij i reshenij uravnenija teploprovodnosti s funktsijami raspredelenija nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i B/K*. Ph.D. theses (phys. & math). al-Farbi Kazakhstan state university, Almaty. 1988.
- [4] Ажгалиев Ш.У. О дискретизации решений уравнения теплопроводности // Матем. заметки. 2007. Т. 82, Вып. 2. С. 177–182. EDN: JSYYED  
Azhgaliev S. Discretization of the Solutions of the Heat Equation. *Mathematical Notes*. 2007. Vol. 82, no. 1–2. Pp. 177–182. DOI: 10.1134/S000143460707019X
- [5] Нурмолдин Е.Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из  $U_2$ -классов Ульянова // Сиб. журн. вычисл. матем. 2005. Т. 8, № 4. С. 337–351. Nurmoldin Y.Y. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the ulyanov  $U_2$ -classes // *Numerical Analysis and Applications*. 2005. V. 8 (4). Pp. 337–351. EDN: PATVYP
- [6] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54. DOI: 10.4213/sm7301  
Magaril-Ilyaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data // *Sb. Math*. 2009. V. 200 (5). Pp. 665–682. DOI: 10.1070/SM2009v200n05ABEH004014
- [7] Утесов А.Б., Базарханова А.А. Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 12. С. 1705–1714. DOI: 10.31857/S0374064121120128  
Utesov A.B., Bazarkhanova A.A. On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit // *Differential Equations*. 2021. V. 57, No. 12. Pp. 1726–1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168
- [8] Ульянов П.Л. О классах бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 1990. Т. 181, № 5. С. 589–609. MathNet: sm1191  
Ulyanov P.L. On classes of infinitely differentiable functions // *Math. USSR-Sb*. 1991. V. 70 (1). Pp. 11–30. DOI: 10.1070/SM1991v070n01ABEH001251
- [9] Темиргалиев Н. Классы  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  и квадратурные формулы // Доклады академии наук. 2003. Т. 393, № 5. С. 605–608. Temirgaliyev N. Classes  $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$  and Quadrature Formulas // *Doklady Mathematics*. 2003. V. 68, No. 3. Pp. 414–417. EDN: OPSOPD
- [10] Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Москва: Физматгиз. 1963. 224 с. Korobov N.M. [Number-theoretic methods in approximate analysis] *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize*. Moscow. 1963. 224 p.
- [11] Бахвалов Н.С. Оценки снизу асимптотических характеристик функций с доминирующей смешанной производной // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 6. С. 655–664. MathNet: mzm9930  
Bakhvalov N.S. A lower bound for the asymptotic characteristics of classes of functions with dominating mixed derivative // *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1972. V. 12. Pp. 833–838. DOI: 10.1007/BF01156040

**Сведения об авторах / Information about the Authors****Галия Ерболовна Таугынбаева**

PhD

Институт теоретической математики и научных  
вычислений, Евразийский национальный университет  
имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

**Galiya Erbolovna Taugynbayeva**

PhD

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific  
Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University,  
Astana, Kazakhstan

[galija\\_1981tau@mail.ru](mailto:galija_1981tau@mail.ru)

ORCID: 0000-0001-6880-2534

**Аксауле Жанбыршиевна Жубанышева**

PhD

Институт теоретической математики и научных  
вычислений, Евразийский национальный университет  
имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

**Aksaule Zhanbyrshievna Zhubanysheva**

PhD

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific  
Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University,  
Astana, Kazakhstan

[axaulezh@mail.ru](mailto:axaulezh@mail.ru)

ORCID: 0000-0003-0713-1719

**Ерик Ерсалынович Нурмолдин**

кандидат физико-математических наук

Институт теоретической математики и научных  
вычислений, Евразийский национальный университет  
имени Л.Н. Гумилева, г.Астана, Казахстан

**Yerik Yersalynovich Nurmoldin**

PhD (phys. &amp; math)

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific  
Computations, L.N. Gumilyov Eurasian National University,  
Astana, Kazakhstan

[e\\_nurmoldin@mail.ru](mailto:e_nurmoldin@mail.ru)

ORCID: 0009-0002-6972-2338



<http://mfs.uimech.org/mfs2024.2.012>

DOI: 10.21662/mfs2024.2.012

УДК / UDC: 621.865.8

Получена / Received: 04.07.2024

Принята / Accepted: 12.08.2024



## Статистический анализ дефектов УЭЦН, выявленных при роботизации контрольных операций

И.И. Гиндуллин

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

E-mail: [dennyrus007@gmail.com](mailto:dennyrus007@gmail.com)

В настоящей статье представлены перспективы использования статистического анализа дефектов деталей установок электроцентробежных насосов (УЭЦН), которые выявляются в ходе выполнения операций очистки, оценки и дефектоскопии в специализированном роботизированном автономном модуле диагностики. Проведен комплексный статистический анализ с использованием методов описательной статистики, регрессионного анализа, анализа временных рядов и многомерных методов на основе репрезентативной базы данных об отказах УЭЦН. Анализ результатов регрессионного анализа выявил значительное влияние температуры и давления на вероятность возникновения дефектов деталей УЭЦН. С использованием полученного результата и данных о режимах работы реализован прототип экспертно-советующей системы, генерирующей рекомендации по оптимизации режимов чистки, оценки и дефектоскопии, указывающей на наиболее вероятные типы дефектов. Внедрение предложенных рекомендаций обеспечивает сокращение временных и стоимостных затрат на подготовительные операции, массогабаритный контроль, повышение точности дефектоскопии и, как следствие, рост надежности функционирования УЭЦН, снижение операционных издержек нефтегазодобывающих предприятий. Проведенное исследование демонстрирует высокий потенциал для применения современных статистических методов решения практических задач в нефтегазовой промышленности.

**Ключевые слова:** установки электроцентробежных насосов, дефекты деталей, статистический анализ, регрессионный анализ, дефектоскопия, нефтегазовая промышленность

## Statistical analysis of ESP defects detected during the robotization of control operations

I.I. Gindullin

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

E-mail: [dennyrus007@gmail.com](mailto:dennyrus007@gmail.com)

This article presents the prospects for using statistical analysis of defects in parts of electric centrifugal pumps (ECP) installations, which are detected during cleaning, evaluation and flaw detection operations in a specialized robotic autonomous diagnostic module. A comprehensive statistical analysis was carried out using methods of descriptive statistics, regression analysis, time series analysis and multidimensional methods based on a representative database of ESP failures. The analysis of the regression analysis results revealed a significant influence of temperature and pressure on the probability of defects in the ESP parts. Using the obtained result and data on operating modes, a prototype of an expert-advising system has been implemented that generates recommendations for optimizing cleaning, evaluation and flaw detection modes, indicating the most likely types of defects. The implementation of the proposed recommendations ensures a reduction in time and cost costs for preparatory operations, weight and dimensional control, increased accuracy of flaw detection and, as a result, increased reliability of the operation of the ESP, reduced operating costs of oil and gas producing enterprises. The conducted research demonstrates a high potential for the application of modern statistical methods for solving practical problems in the oil and gas industry.

**Keywords:** electrical submersible pump units, component defects, statistical analysis, regression analysis, defectoscopy, oil and gas industry

### 1. Введение

Установки электроцентробежных насосов (УЭЦН) являются неотъемлемой частью системы добычи нефти в современной нефтегазовой промышленности, поэтому актуальной проблемой является обеспечение бес-

перебойной работы скважинного оборудования, в том числе и за счет организации своевременного ремонта на месте. Эксплуатационная надежность оборудования напрямую зависит от качества составляющих его деталей, сборочного процесса и режимов работы. В процессе функционирования УЭЦН большая часть его де-

талей подвергаются воздействию агрессивных сред и значительным механическим нагрузкам, что приводит к ускоренному развитию процессов износа и проявлению различных видов дефектов, которые могут спровоцировать преждевременный отказ системы.

Подготовительным этапом к проведению дефектоскопии деталей является их очистка (промывка) с целью удаления загрязнений, препятствующих определению дефектов или оказывающих негативное влияние на качество контроля. Однако данные операции зачастую характеризуются высокими трудоемкостью и временными затратами, что снижает общую производительность процесса подготовки.

После завершения операций очистки осуществляются визуальный и инструментальный контроль для поиска и классификации дефектов, выполняется составление карты с указанием координат и размеров выявленных отклонений формы, нарушений поверхностей и пр. согласно дефектной ведомости. Традиционные методы контроля обладают рядом недостатков, такими как субъективность оценки, вариабельная продолжительность процесса, а также потенциально невысокая точность при обработке больших объемов изделий.

В связи с вышеизложенным для интенсификации процесса, повышения эффективности, качества и оптимизации операций очистки, промывки и дефектоскопии деталей УЭЦН предлагается не только провести автоматизацию контрольных операций за счет использования промышленного робота, а также разработать методику применения статистических методов анализа полученной и входной информации. Использование статистического аппарата позволит оптимизировать режимы очистки и промывки деталей, поступающих в комплекс, а также реализовать гибкие, адаптивные алгоритмы детектирования и классификации дефектов с высокой степенью точности.

Корректное использование статистических методов обеспечит значительное сокращение временных затрат на подготовительные операции при поступлении деталей на контроль и повысит качество их дефектоскопии, гарантируя быстрое выявление дефектных элементов. Это, в свою очередь, позволит предупредить отказы оборудования, минимизировать издержки, связанные с ремонтом и простоями, а также повысить уровень промышленной безопасности технологических процессов в нефтегазовой отрасли.

Таким образом, проведение статистического анализа для оптимизации процессов подготовки и контроля деталей УЭЦН является актуальной задачей, решение которой имеет важное научно-практическое значение для повышения эффективности и надежности функционирования промышленного оборудования.

## 2. Использование статистического анализа для выявления причин отказов

Методы статистического анализа долгое время находят применение в нефтегазовой отрасли для решения различных задач, связанных с повышением эффектив-

ности добычи, транспортировки и переработки углеводородов. Так, в работе [1] представлен обзор методов, используемых для оценки надежности нефтегазового оборудования и позволяющих выполнить анализ выживаемости или вида распределения наработки на отказ, регрессионный анализ и анализ временных рядов. Авторы подчеркивают важность применения статистических методов для поиска различных факторов или их комбинаций, влияющих на надежность оборудования, и служащих информационным базисом при разработке эффективных мер по предотвращению отказов.

В работе [2] рассмотрено применение анализа Парето для идентификации наиболее значимых факторов, влияющих на отказы нефтегазового оборудования. Авторы демонстрируют эффективность предлагаемого метода на примере анализа отказов трубопроводов, что позволило выявить основные причины отказов и сосредоточить усилия на их устранении.

Применение методов статистического анализа открывает новые возможности для корректного и адекватного учета причин отказов оборудования, а в нашем случае это самое массово применяемое на месторождениях — УЭЦН [3]. По сравнению с традиционными подходами для анализа информации, базирующимися на основе эмпирического опыта, статистический анализ обладает рядом существенных преимуществ:

1. Объективность и обоснованность выводов за счет использования проверенных (рекомендуемых) математических методов обработки больших массивов данных, не зависящих от субъективного мнения экспертов.
2. Возможность комплексного учета влияния множества факторов: условий эксплуатации, режимов работы, конструктивных особенностей и т.д.
3. Выявление скрытых взаимосвязей и зависимостей между факторами и показателями надежности, которые сложно обнаружить при использовании традиционных методов.
4. Построение количественных моделей, позволяющих прогнозировать вероятность отказов и остаточный ресурс в зависимости от наиболее значимых переменных [3].
5. Ранжирование причин отказов по степени их деструктивного воздействия, что дает основу для выработки приоритетных мер по повышению надежности.
6. Возможность выявления периодических колебаний и (или) сезонных изменений в частоте отказов.

Таким образом, методы статистического анализа могут стать мощным инструментом для исследования причин отказов УЭЦН, позволяющим перейти от качественных экспертных оценок к количественно обоснованным выводам, полученным на основе обработки объективных данных. Предлагаемый подход открывает

новые перспективы для роста эффективности нефтедобычи за счет повышения надежности используемого оборудования.

Анализ видов и причин отказов УЭЦН является в современных условиях необходимой задачей, поскольку позволяет разработать превентивные меры для повышения надежности этого вида оборудования. В исследовании [3] проводится комплексный анализ причин основных видов отказов УЭЦН, таких как коррозия, износ, засорение и механические повреждения деталей. Авторы выявили, что наиболее распространенными причинами являются коррозия корпусных деталей, износ рабочих колес насоса и засорение рабочих ступеней механическими примесями.

В работе [4] изучается влияние режимов работы УЭЦН, в частности, объемных расходов подачи и создаваемого напора, на их надежность. Авторы обнаружили, что отклонение от оптимальных режимов работы может привести к повышенному износу деталей насоса и, как следствие, к поломкам оборудования.

Условия эксплуатации скважин, такие как обводненность, температура пластовой жидкости, содержание сероводорода и механических примесей оказывают значительное влияние на надежность УЭЦН. В работе [5] рассматривается воздействие высокой обводненности на коррозию и износ деталей УЭЦН и показано, что повышенная обводненность может ускорить процессы коррозии и способствовать более интенсивному износу рабочих колес насоса.

Авторы другого исследования [6] анализируют влияние высокого содержания сероводорода на повреждение подшипников электродвигателя и коррозию корпусных деталей УЭЦН. Результаты свидетельствуют о необходимости применения специальных коррозионно-стойких материалов и регулярного мониторинга состояния подшипников в условиях высокого содержания сероводорода.

### 3. Постановка задачи при разработке робототехнического модуля

Основной целью настоящего исследования является проведение статистического анализа дефектов деталей УЭЦН для разработки рекомендаций по интенсификации и повышению эффективности процессов их очистки, промывки с последующей дефектоскопией.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующего комплекса взаимосвязанных задач:

1. Анализ существующих методов статистического исследования дефектов в применении к объектам нефтегазовой промышленности с целью определения наиболее перспективных подходов.
2. Формирование репрезентативной базы данных о дефектах деталей УЭЦН, включающей информацию о видах, локализации, характеристиках дефектов, а также условиях эксплуатации оборудования.

3. Проведение обоснованного выбора статистических методов и программных средств для анализа сформированной базы данных.
4. Проведение статистического исследования дефектов деталей УЭЦН с использованием методов описательной статистики, кластерного анализа, многомерного шкалирования и других релевантных методов.
5. Выявление закономерностей возникновения и взаимосвязей различных видов дефектов на основе результатов проведенного статистического анализа.
6. Разработка рекомендаций по оптимизации режимов чистки и промывки деталей с учетом выявленных закономерностей для повышения производительности данных операций.
7. Предложение усовершенствованной системы дефектоскопии деталей УЭЦН с использованием методов автоматической классификации дефектов на основе статистического анализа для повышения скорости и качества контроля.
8. Оценка потенциальных экономических эффектов от внедрения разработанных рекомендаций по интенсификации процессов подготовки и контроля деталей УЭЦН.

Решение поставленных задач позволит получить научно-обоснованные результаты, имеющие важное прикладное значение для повышения производительности, качества и безопасности технологических процессов в нефтегазовой отрасли.

### 4. Методология исследования. Источники и сбор данных об отказах УЭЦН, выбор метода

В качестве источников данных для проведения статистического анализа загрязнений и дефектов деталей УЭЦН были использованы отчеты о ремонтах и описания отказов скважинного оборудования, предоставленные нефтегазодобывающими компаниями и находящиеся в открытом доступе. Собранные данные охватывали информацию об отказах УЭЦН на различных месторождениях с разнообразными геолого-физическими условиями эксплуатации [7–9]. В отчетах содержались сведения о видах отказов, наработке на отказ, условиях эксплуатации скважин (обводненность, содержание сероводорода, температура пластовой жидкости, содержание механических примесей) и режимах работы УЭЦН (подача, напор). Собранные данные были обработаны, систематизированы и подготовлены для дальнейшего статистического анализа.

Основные причины отказов отражены в табл. 1 и 2 согласно работам [10–14].

Далее приведем описание областей применения, решаемых задач и использованных в исследовании методов статистического анализа.

Таблица 1. Причины разрушения УЭЦН по группам типоразмеров, %

Причины	Типоразмер УЭЦН		
	ВННПИ5-25	ВННПИ5-(59..125)	ВННПИ5А-(124..240)
Причины, связанные с нарушением технологии эксплуатации скважин			
Геолого-технические мероприятия	31	34	33
Солеотложения	22	8	4
Засорение механическими примесями	11	8	8
Снижение динамического уровня	12	17	
Вина нефтегазодобывающего управления (НГДУ)	5		8
Некачественный вывод на режим			
Некачественный подбор УЭЦН	0,2		
Коррозия	1,41		
Бесконтрольная эксплуатация	0,2		
Причины, связанные с нарушением технологии подземного ремонта скважин (ПРС)			
Негерметичность НКТ	5	8	
Механические повреждения кабеля	0,4		4
Нарушение технологии спуско-подъемной операции (СПО)		8	
Полет по НКТ	0,2		4
Некачественная подготовка скважины	0,4		
Конструктивная надежность УЭЦН			
Отказ ЭЦН			13
Отказ погружного электродвигателя (ПЭД)			
Отказ гидрозащиты			
Отказ кабельной линии			
Некачественный ремонт	3		18

Таблица 2. Список возможных дефектов деталей УЭЦН

Специфика месторождения	Ожидаемая неисправность	Вероятность, %
Высокая обводненность	Износ рабочих колес насоса	5,0
	Коррозия корпусных деталей	4,4
	Засорение рабочих ступеней механическими примесями	5,6
	Отложения солей на деталях	5,0
Высокое содержание сероводорода	Повреждение подшипников электродвигателя	7,0
	Коррозия корпусных деталей	8,0
	Разрушение рабочих лопаток	8,0
Высокая температура пластовой жидкости	Повреждение уплотнений вала	7,0
	Выход из строя электродвигателя	5,0
	Трещины в корпусе насоса	7,0
Высокое содержание механических примесей	Износ рабочих колес насоса	8,0
	Засорение рабочих ступеней механическими примесями	5,0
	Разрушение рабочих лопаток	8,0
Высокий газовый фактор	Обрыв кабельной линии	12,0
	Выход из строя электродвигателя	5,0



Методы описательной статистики позволяют получить общее представление о массиве данных по отказам УЭЦН, рассчитать основные статистические показатели и визуализировать распределение дефектов. К таким методам относятся:

- Расчет среднего, медианы, моды, квартилей для количественных переменных (например, количества отказов за период).
- Построение гистограмм, диаграмм размаха для визуализации распределения дефектов по типам, деталям, условиям эксплуатации.
- Расчет частот (процентных долей) для качественных переменных (например, доля коррозионных повреждений).

Основное преимущество приведенных выше методов заключается в наглядности представления данных, поэтому они довольно часто используются в нефтегазовой отрасли. Но им также присущ существенный недостаток — они не позволяют выявить какие-либо связи между переменными и факторами. Поэтому предлагается использовать регрессионный анализ, так как методы регрессионного анализа помогут установить зависимости между факторами (условиями эксплуатации УЭЦН) и вероятностью возникновения различных видов дефектов деталей. Так линейная регрессия позволит построить модели зависимости вероятности дефекта от одного или нескольких факторов (состав флюида, температура, давление и т.д.). А логическая регрессия может быть применена в более простых задачах для выявления бинарно зависимой переменной (дефект есть/нет).

Преимущества регрессионного анализа: количественная оценка влияния факторов, возможность прогнозирования. Недостатки: требуются большие объемы данных, необходимо выполнение целого ряда предположений.

Использование другого метода, а именно, анализа временных рядов позволит исследовать в динамике изменения частоты возникновения дефектов во времени, выявлять устойчивые тренды и сезонные компоненты. Для этого применяются следующие инструменты:

1. Разложение временного ряда на составляющие (тренд, сезонность, остаток) с помощью сглаживающих процедур.
2. Прогнозирование будущих значений временного ряда с использованием различных методов (экспоненциальное сглаживание, ARIMA и др.)

Достоинства метода: эффективность выявления периодичности в анализируемых данных. Недостатки: не учитывает влияние факторов, требуется большой объем наблюдений.

Контрольные карты применяются как инструмент контроля качества процессов, что позволяет отслеживать стабильность частот возникновения дефектов, своевременно фиксировать нежелательные выбросы.

Так карты Шухарта необходимы для получения количественных данных — числа дефектов за определенный период. Может быть построена карта долей для качественных данных, например, доля дефектных деталей. Преимущества данного метода: эффективность как инструмента текущего контроля. Недостатки: не способен выявить причины нестабильности.

Кластерный анализ позволяет разбить совокупность объектов (отказов УЭЦН) на группы (кластеры) по признакам сходства. Наиболее известные виды кластерного анализа: иерархические методы (агломеративные, дивизимные); метод  $k$ -средних; метод EM. Достоинства: способен выделить типичные сочетания дефектов, характерные для разных условий эксплуатации. Недостатки: необъективность выбора мер сходства, сложность интерпретации кластеров.

Многомерные методы анализа, к которым относятся как факторный анализ, так и анализ главных компонент. Их корректное использование позволяет сократить размерность анализируемых данных и эффективно выявить даже скрытые факторы, влияющие на возникновение дефектов. Преимущества: позволяют учитывать комплексное взаимодействие множества переменных. Недостатки: сложность интерпретации результатов, большие требования к объему данных.

Так как основная задача исследования состояла в оценке перспективности применения статистических методов для решения задачи повышения эффективности роботизированного модуля дефектовки, то был выбран метод линейной регрессии. Его простота в реализации позволила эффективно и адекватно решить поставленную задачу — количественно оценить влияние различных факторов (состав флюида, температура, давление и т.д.) на вероятность возникновения отдельных видов дефектов деталей УЭЦН. При наличии больших массивов накопленных данных по отказам УЭЦН с его помощью можно построить качественные регрессионные модели с высокой степенью достоверности. К тому же, при необходимости, дополнительно могут использоваться и другие методы, например, метод описательной статистики для визуализации данных или кластерный анализ для выявления типичных комбинаций дефектов.

## 5. Результаты исследований применимости выбранного метода

Построена компьютерная модель для определения зависимости частоты проявления дефектов в деталях УЭЦН от различных факторов эксплуатации [15–17], базирующаяся на линейной регрессии. Основными независимыми переменными, включенными в модель, выбраны состав флюида, температура и давление. Для оценки качества модели были рассчитаны следующие метрики:

- среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error, MSE): 0.50 ;
- коэффициент детерминации ( $R^2$ ): 0.82;

- скорректированный коэффициент детерминации (Adjusted  $R^2$ ): 0.64.

Количество наблюдений в исследовании было ограничено 10-ю измерениями. Это относительно небольшой объем данных, что может влиять на точность и надежность модели, но для поставленной задачи по качественной оценке этого вполне достаточно.

Результаты оценки модели представлены на рис. 1.

Результаты оценки модели линейной регрессии показали высокую степень объяснительной способности ( $R^2 = 0.82$ ), что указывает на значительное влияние рассматриваемых факторов на вероятность возникновения дефектов. Тем не менее, относительно невысокое значение скорректированного  $R^2$  (0.64) и небольшое количество наблюдений (10) предполагают необходимость увеличения объема данных для повышения надежности выводов. Коэффициенты модели также указывают на значительное влияние температуры и давления на вероятность дефектов, что может служить основанием для проведения дальнейших исследований для выбора эффективных мер по оптимизации условий эксплуатации УЭЦН с целью уменьшения частоты возникновения дефектов.

Результаты исследования демонстрируют потенциальные и перспективные направления улучшения модели, включая сбор большего объема данных и разработку алгоритмов проверки выполнения предпосылок линейной регрессии.

Построенные регрессионные модели будут использоваться для прогнозирования и оптимизации программ ремонтно-профилактических мероприятий.

## 6. Заключение

Проведенное исследование продемонстрировало актуальность и перспективность применения методов статистического анализа для выявления причин отказов УЭЦН и оптимизации процессов их подготовки, ремонта и контроля.

На основе собранной базы данных, сформированной из отчетов о ремонтах и истории отказов скважинного оборудования, был проведен комплексный статистический анализ с использованием методов описательной статистики, регрессионного анализа, анализа временных рядов и многомерных методов.

Результаты регрессионного анализа с применением модели линейной регрессии выявили значительное влияние таких факторов, как температура и давление, на вероятность возникновения различных видов дефектов деталей УЭЦН. Это указывает на необходимость дальнейшей оптимизации условий эксплуатации оборудования для повышения его надежности.

Полученные в ходе исследования данные и выводы позволили сформулировать рекомендации по совершенствованию режимов чистки, промывки и дефектоскопии деталей УЭЦН с целью интенсификации этих процессов, повышения их производительности и качества.

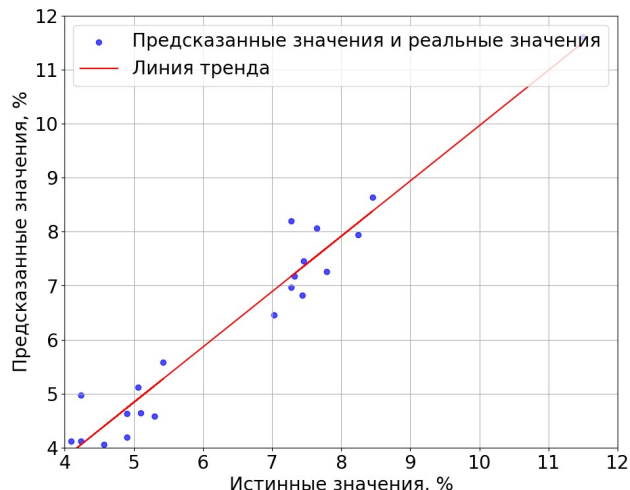


Рис. 1. Результаты моделирования отказа УЭЦН

Внедрение предложенных рекомендаций, базирующихся на результатах статистического анализа, будет способствовать сокращению временных и трудовых затрат на подготовку деталей к контролю, повышению точности и эффективности дефектоскопии, что в конечном итоге обеспечит рост надежности функционирования УЭЦН и снижение издержек нефтегазодобывающих предприятий.

Таким образом, проведенное исследование демонстрирует высокий потенциал применения современных статистических методов для решения практических задач в области нефтегазовой промышленности и открывает перспективы для дальнейших научных разработок в данном направлении.

## Список литературы / References

- [1] Эконометрика: учебник для вузов / И.И. Елисеева [и др.]; под редакцией И.И. Елисеевой. Москва: Издательство Юрайт, 2024. 449 с. [Econometrics: textbook for universities] *Ekonometrika: uchebnik dlya vuzov* (ed. I.I. Eliseeva). Moscow: Izdatel'stvo Yurajt, 2024. P. 449 (in Russian). <https://urait.ru/bcode/535449>
- [2] Орлов А.И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006. 671 с. Orlov A.I. [Applied Statistics] *Prikladnaya statistika*. Moscow: Ekzamen, 2006. P. 671 (in Russian).
- [3] Ивановский В.Н., Пекин С.С., Сабиров А.А. Установки погружных центробежных насосов для добычи нефти. М.: ГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2002. 256 с. Ivanovskij V.N., Pekin S.S., Sabirov A.A. [Installations of submersible centrifugal pumps for oil production] *Ustanovki pogruzhnyh centroběžnyh nasosov dlya dobychi nefiti*. Moscow: GUP Izd-vo «Neft' i gaz» RGU nefiti i gaza im. I.M. Gubkina, 2002. P. 256 (in Russian).
- [4] Ляпков П.Д. Подбор установки погружного центробежного насоса к скважине. М.: МИНГ, 1987. 71 с. Lyapkov P.D. [Selection of installation of a submersible centrifugal pump for a well] *Podbor ustanovki pogruzhnogo centroběžnogo nasosa k skvazhine*. Moscow: MING, 1987. P. 71 (in Russian).
- [5] Мищенко И.Т. Скважинная добыча нефти: Учебное пособие для вузов. М.: ФГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. 816 с. Mishchenko I.T. [Well oil production: A textbook for universities] *Skvazhinnaya dobycha nefiti: Uchebnoe posobie dlya vuzov*. Moscow: FGUP Izd-vo «Neft' i gaz» RGU nefiti i gaza im. I.M. Gubkina, 2003. P. 816 (in Russian).
- [6] Ивановский В.Н., Дарищев В.И., Сабиров А.А. и др. Оборудование для добычи нефти и газа: В 2 т. М.: ВНИИОЭНГ, 2001. Т. 1. 304 с.

- Ivanovskij V.N., Darishchev V.I., Sabirov A.A. et al. [Equipment for oil and gas production] *Oborudovanie dlya dobychi nefiti i gaza*. M.: VNIIOENG, 2001. Vol. 1. P. 304 (in Russian).
- [7] Мухаметшин В.Ш. Моделирование процесса нефтеизвлечения с использованием опыта разработки месторождений, находящихся длительное время в эксплуатации // Нефтегазовое дело. 2011. Т. 9, № 4. С. 47–50.  
Mukhametshin V.Sh. Model for ecast of the oil recovery process using development experience of old-run fields. *Petroleum engineering*. 2011. Vol. 9, no. 4. Pp. 47–50 (in Russian).  
EDN: PANEU
- [8] Галлямов М.Н., Рахимкулов Р.Ш. Повышение эффективности эксплуатации нефтяных скважин на поздней стадии разработки месторождений. Москва: Недра, 1978. 207 с.  
Gallyamov M.N., Rahimkulov R.Sh. [Increasing the efficiency of oil well operation at a late stage of field development] *Povyshenie effektivnosti ekspluatatsii neftyanykh skvazhin na pozdnej stadii razrabotki mestorozhdenij*. Moscow: Nedra, 1978. P. 207 (in Russian).
- [9] Серебренников А.В., Петрикевич П.А., Тороп О.В., Фролов В.В. Эксплуатация механизированного фонда скважин в осложненных условиях // Деловой журнал Neftegaz.RU. 2017. № 7(67). С. 86–97.  
Serebrennikov A.V., Petrikevich P.A., Torop O.V., Frolov V.V. [Operation of mechanized well stock in difficult conditions] *Ekspluatatsiya mekhanizirovannogo fonda skvazhin v oslozhnennykh usloviyah*. Delovoj zhurnal Neftegaz.RU. 2017. NO. 7(67). Pp. 86–97 (in Russian).  
EDN: ZRZUHP
- [10] Ибрагимов Н.Г., Хафизов А.Р., Шайдаков В.В. Осложнения в нефтедобыче. Уфа: Монография, 2003. 302 с.  
Ibragimov N.G., Hafizov A.R., Shajdakov V.V. [Complications in oil production] *Oslozhneniya v neftedobyche*. Ufa: Monografiya, 2003. P. 302 (in Russian).
- [11] Антониади Д.Г., Гарушев А.Р., Ишханов В.Г. Настольная книга по термическим методам добычи нефти. Краснодар: Советская Кубань, 2000. 461 с.  
Antoniadi D.G., Garushev A.R., Ishkhanov V.G. [Handbook on thermal methods of oil production] *Nastol'naya kniga po termicheskim metodam dobychi nefiti*. Krasnodar: Sovetskaya Kuban', 2000. P. 461 (in Russian).
- [12] Соловьев И.Г., Константинов И.В., Говорков Д.А. Оптимизация параметров оборудования и режима эксплуатации скважины с ЭЦН в условиях осложнений // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2019. № 9(554). С. 28–35.  
Solovyev I.G., Konstantinov I.V., Govorkov D.A. Optimization of equipment parameters and a well operational mode with esp under conditions of complications. *Automation, telemechanization and communication in oil industry*. 2019. No. 9(554). Pp. 28–35 (in Russian).  
DOI: 10.33285/0132-2222-2019-9(554)-28-35
- [13] Сабиров А.А., Деговцов А.В., Кузнецов И.В., Алиев Ш.А., Мазеин И.И., Меркушев С.В., Красноборов Д.Н. Прогнозирование наработки на отказ, выбор исполнения и оптимизация закупок установок электроцентробежных насосов для осложненного фонда скважин // Территория Нефтегаз. 2019. № 7–8. С. 44–48.  
Sabirov A.A., Degovtsov A.V., Kuznetsov I.V., Aliev Sh.A., Mazein I.I., Merkushev S.V., Krasnoborov D.N. Forecasting the operating time to failure, selection of design and optimization of procurement of electric centrifugal pump installations for complicated wells stock. *Territorija neftegaz*. 2019. No. 7–8. Pp. 44–48 (in Russian).  
EDN: IMAHPU
- [14] Бахтизин Р.Н., Уразаков К.Р., Латыпов Б.М., Ишмухаметов Б.Х. Утечки жидкости в штанговом насосе с регулируемым ходом плунжера // Нефтегазовое дело. 2016. Т. 14, № 4. С. 33–39.  
Bachtizin R.N., Urazakov K.R., Latypov B.M., Ishmukhametov B.H. Fluid leakage in a sucker-rod pump with regular micro-relief at surface of the plunger. *Petroleum engineering*. 2016. Vol. 14, no. 4. Pp. 33–39 (in Russian).  
EDN: YNBDMV
- [15] Шангараева Л.А., Максютин А.В., Султанова Д.А. Способы предотвращения слеотложения при разработке и эксплуатации залежей нефти // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. С. 336.  
Shangaraeva L.A., Maksyutin A.V., Sultanova D.A. Methods to prevent scale during the development and exploitation of oil fields. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*. 2015. No. 1-1. P. 336 (in Russian).  
EDN: VIDYCV
- [16] Колтырин А.Н. Разработка методики и оценка эффективности работоспособности вероятностно-статистических моделей для прогнозирования прироста дебита нефти в скважинах после проведения гидроразрыва пласта // Геология, геофизика и разработка нефтяных и газовых месторождений. 2022. № 4(364). С. 49–58.  
Koltyrin A.N. Development of the method and estimation of applicability and efficiency of probability-statistical models for forecasting oil production rate increase in wells after hydraulic fracturing. *Geology, geophysics and development of oil and gas fields*. 2022. No. 4(364). Pp. 49–58 (in Russian).  
DOI: 10.33285/2413-5011-2022-4(364)-49-58
- [17] Кожин А.Г., Соловьев И.Г. Анализ факторов, влияющих на износ погружного электрооборудования // Вестник кибернетики. 2006. № 2. С. 45–52.  
Kozhyn A.G., Solovyev I.G. Analysis of the factors influencing deterioration of submersible electric equipment. *Proceedings in Cybernetics*. 2006. No. 2. Pp. 45–52 (in Russian).  
EDN: JWBSF

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Ильдар Ирекович Гиндуллин**

Уфимский нефтяной государственный технический университет, Уфа

**Ildar Irekovich Gindullin**

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

[dennyrus007@gmail.com](mailto:dennyrus007@gmail.com)

ORCID: 0009-0005-6426-2696



## Модификация алгоритмов нейросетевого распознавания формы деталей УЭЦН при роботизации контрольной операции

Л.С. Салихов

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

E-mail: [salihovlinar@mail.ru](mailto:salihovlinar@mail.ru)

За последние несколько десятков лет основной технологией нефтедобычи в России является механизированный способ, реализуемый за счет размещения в скважинах установки электроцентробежного насоса (УЭЦН). По причине удаленности месторождений нефтедобычи и экономической нецелесообразностью транспортировки отработавших свой рабочий ресурс установок, возникает простой и скапливание УЭЦН непосредственно рядом с месторождением. Для реализации возможности ремонта и возвращения работоспособности вышедшим из строя насосам предлагается разработка мобильного робототехнического модуля сортировки, дефектовки и хранения деталей УЭЦН, входящего в состав мобильного робототехнического комплекса по проведению ремонта установок. В статье рассматриваются современные методы проведения контроля формы деталей, реализуемые за счет использования нейронных сетей и машинного обучения, что позволит увеличить точность распознавания дефектов. На основе анализа различных методов контроля выявлены их недостатки, которые могут проявиться при использовании в разрабатываемом робототехническом модуле на этапе предварительной обработки. Для устранения выявленных недочетов предложено использовать дообучение нейросетевой модели непосредственно в ходе ее эксплуатации. По итогам анализа и проведенных компьютерных экспериментов определен оптимальный способ решения поставленной задачи в виде методики и алгоритмов модификации нейросетевого метода распознавания формы деталей УЭЦН, что позволило увеличить точность выявления наиболее распространенных дефектов.

**Ключевые слова:** нейросетевая модель, машинное обучение, распознавание объектов, ремонт УЭЦН, контроль формы, дефектовка

## Modification of algorithms for neural network-based shape recognition of ESP components in the automation of inspection operations

L.S. Salikhov

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

E-mail: [salihovlinar@mail.ru](mailto:salihovlinar@mail.ru)

In recent decades, the primary oil extraction technology in Russia has been the mechanized method, implemented by installing Electric Submersible Pump (ESP) units in wells. Due to the remote locations of oil fields and the economic impracticality of transporting units that have exhausted their service life, downtime and accumulation of ESPs occur directly near the fields. Given the possibility of repairing and restoring the functionality of failed pumps, the development of a mobile robotic module for sorting, defect detection and storage of ESP components is proposed. This module would be part of a mobile robotic complex for conducting repairs of the units. This article examines modern methods of shape inspection of components using neural networks and machine learning, which also improve defect recognition accuracy. Based on the analysis of various control methods, their disadvantages have been identified, which may manifest themselves when they are used in the developed robotic module at the preprocessing stage. To eliminate the identified shortcomings, it is proposed to use additional training of the neural network model directly during its operation. Based on the results of the analysis and conducted computer experiments, the optimal way to solve the problem was determined in the form of methods and algorithms for modifying the neural network method for recognizing the shape of ESP parts, which made it possible to increase the accuracy of detecting the most common defects.

**Keywords:** neural network model, machine learning, object recognition, ESP repair, shape inspection, defect detection

### 1. Введение

Согласно отчетам Министерства финансов Российской Федерации за последние годы нефтяные доходы составляют значительную часть федерального бюджета

та [1] и являются одной из наиболее прибыльных доходных статей страны. Одной из распространенных технологий добычи нефти является эксплуатация механизированных установок электрических центробежных

насосов (УЭЦН) [2]. Более двух третей всей нефтедобычи на освоенных месторождениях осуществляется с использованием УЭЦН, при этом большая их часть расположена в отдаленных регионах страны [3]. Одной из основных проблем, помимо отдаленности участков нефтедобычи и тяжелых климатических условий, с которой сталкиваются нефтедобывающие компании, является простой месторождения из-за преждевременного отказа УЭЦН, вызванного износом оборудования из-за различных примесей (соли, песок, парафин и другие). Основываясь на экономических аспектах целесообразности замены и ремонта УЭЦН можно отметить, что нефтедобывающим компаниям выгоднее складировать отработанные УЭЦН рядом с месторождением. Так как время работы УЭЦН относительно отработки всей скважины приблизительно определяется как 20 к 1 [4], а концентрация скважин на одном месторождении достигает нескольких сотен [5], то накопленные после демонтажа УЭЦН являются потенциальным запасом вновь реализуемого, после восстановительных процедур, оборудования. Поэтому в настоящее время актуальными становятся разработка и применение новых методов автоматизации ремонта УЭЦН, что позволит сократить простой скважин и сэкономить ресурсы нефтедобывающих компаний, а также повысить общую эффективность нефтедобычи. Поэтому было предложено разработать мобильный роботизированный модуль для осуществления ремонта УЭЦН непосредственно на месторождении.

В работе [6] авторами была проведена декомпозиция задач, итогом которой стала архитектура роботизированного модуля, включающая три функционально самостоятельных модуля: модуль предварительной подготовки деталей, модуль дефектовки и модуль хранения деталей УЭЦН. Для каждого модуля выделены наиболее затратные и трудоемкие операции, требующие специфического подхода при решении поставленных задач. Так, для модуля предварительной подготовки — это операция обработки (очистки) поступающих после разбора УЭЦН деталей и проведение входного контроля формы; для модуля дефектовки — контроль формы, выявление дефектов поверхности и определение отклонений размеров в соответствии с картой контроля, а для модуля хранения — логистика входного, внутреннего и выходного потоков, статистическая обработка данных, содержащихся в базе данных.

Модуль предварительной подготовки и обработки деталей представляет собой комплекс оборудования, в котором необходимо провести необходимые виды обработки входного потока и выполнить предварительную (грубую) дефектовку деталей УЭЦН (детали типа: аппарат направляющий, втулка защитная вала, колесо рабочее (рис. 1) и прочее). В качестве базового оборудования используются манипулятор с захватным устройством, автоматическая адаптивная мойка для очистки деталей, сушильный шкаф, а также программно-аппаратный комплекс выявления дефектов формы и веса деталей. В статье сжато приводится описание пред-

лагаемой модификации алгоритмов нейросетевого распознавания формы деталей при роботизации операции контроля, определяется вариант реализации в модуле предварительной подготовки.

В соответствии с предложенным подходом эффективность всего разрабатываемого модуля складывается из решения задач в каждом из этапов сортировки с целью увеличения производительности, снижения энергозатрат и автоматизации технологического процесса. Качественная обработка деталей с отбраковкой явного нарушения формы и массы позволит в целом сократить время обработки входного потока, так как более затратными по времени операциями являются операции контроля поверхностных дефектов и размеров. Благодаря предлагаемому подходу на указанные выше этапы попадут детали, не имеющие явных отклонений от технических требований согласно дефектационной карте.

## 2. Постановка задачи дефектовки деталей на этапе предварительной обработки

### 2.1. Влияние загрязненности на дефекты формы деталей УЭЦН

Одной из распространенных причин отказа работ УЭЦН является не только неисправность деталей ввиду явных дефектов, но и сильная загрязненность деталей. Типы и интенсивность загрязнений напрямую зависят от условий эксплуатации насосов: достаточно часто совместно с пластовыми водами происходит захват механических примесей в виде песка [7], изменение физических и химических параметров добываемой нефти приводит к возникновению и отложению солей [8], а простой между закачкой нефти приводят к асфальтосмолопарафиновым отложениям (АСПО) и образованию эмульсионных пленок [9]. Типы загрязнений и методы их ликвидации на деталях представлены в табл. 1.

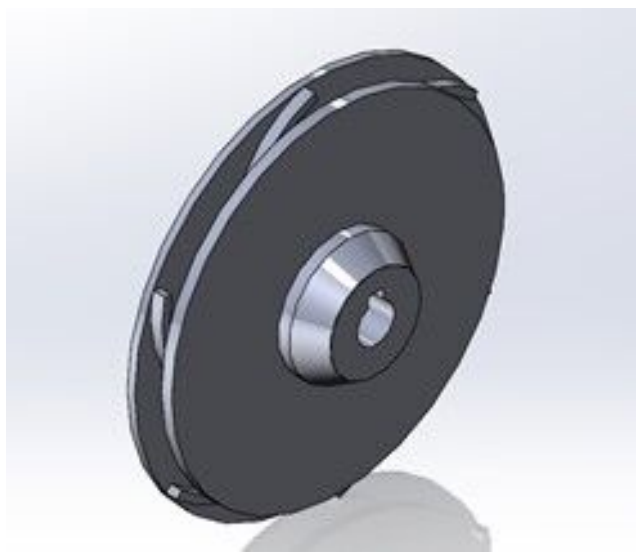


Рис. 1. CAD-модель детали «Аппарат направляющий (ЭЦНМ 5-125)»

Таблица 1. Типы загрязнений деталей УЭЦН и методы очистки

Тип загрязненности	Методы очистки
Отложения солей	Использование химических растворов или кислот для растворения и удаления химических отложений
Асфальтосмолопарафиновые отложения	Комбинированные способы очистки с использованием тепловых методов вместе с химическими растворами
Парафиновое налипание	Промывка высокотемпературными растворами
Образование эмульсионных пленок	Химическое растворение с использованием специализированных растворов или растворителей. Промывка под высокими давлением и температурой
Песчано-глинистые отложения	Промывка под высоким давлением или ультразвуком
Коррозия	Электрохимический или ультразвуковой метод избавления от коррозии. Механическая чистка деталей

Загрязненность деталей часто имеет комплексный характер и сопровождается несколькими типами загрязнений, при этом интенсивность загрязнений может привести к невозможности деликатной очистки, так как попытки убрать такие сложные наслоения приводит к разрушению поверхности детали. Поэтому необходимо отсеивать подобные детали на этапе предварительной обработки и отправлять в брак.

После очистки и сушки деталей проводится анализ на выявление дефектов формы и массы. Если дефект формы и массы были выявлены, деталь отправляется в брак, в иных случаях, если целостность не нарушена, деталь направляется для дальнейшей дефектовки поверхности и размеров в следующий модуль.

## 2.2. Виды дефектов формы деталей УЭЦН и способы их диагностики

К дефектам формы деталей относятся отклонения от изначальной геометрической формы, от заданного профиля (сечения) детали, различные виды деформации и искривления, разрушение компонентов или детали в целом ввиду износа во время эксплуатации и воздействия загрязняющих факторов. Сравнительный анализ методов контроля соответствующих дефектов описан в табл. 2.

Дефекты формы могут также, как и загрязнения, иметь комплексный характер, поэтому необходимо рассмотреть возможность одновременного использования нескольких методов контроля для увеличения

Таблица 2. Сравнительный анализ перечня распознавания и контроля дефектов формы деталей

Метод контроля	Преимущества	Недостатки
С использованием датчиков координатно-измерительных машин (КИМ) – щупы	Простота внедрения и установки. Возможность определения формы сложных объектов	Времязатратное определение дефектов. Быстрый износ щупов по причине стирания головки щупа
Сопоставление с облаком точек САD-модели	Высокая точность определения формы объекта и возникшего дефекта	Крайне низкая скорость определения дефектов. Сопоставление облака точек с исследуемым объектом
Контроль формы по методу «световой щели»	Высокая скорость обнаружения дефектов. Низкая стоимость внедрения оборудования	Условность использования метода. Ограниченность в определении видов дефектов формы
Метод контроля формы при помощи сканирующей электронной микроскопии	Высокое разрешение изображения для обнаружения различных дефектов	Высокая стоимость оборудования
Доплеровская интерферометрия	Высокая точность измерений формы и деформаций	Высокая стоимость оборудования
Метод сопоставления с трехмерной идеальной САD-моделью	Высокая точность определения дефектов формы	Сопоставление исследуемого объекта с моделью
Метод контроля с использованием оборудования КИМ	Высокая точность и скорость определения дефектов деталей. Возможность работать со сложными типами деталей	Крайне большие габариты оборудования. Высокая стоимость оборудования и инструментов

скорости и точности определения дефектов. К предпочтительным методам контроля формы, выполняемым за счет специфического оборудования, относятся контроль формы объектов по методу «световой щели» и метод сопоставления с трехмерной идеальной CAD-моделью.

Для реализации предлагаемых методов контроля формы на этапе предварительной обработки деталей с целью увеличения производительности, точности и скорости распознавания дефектов наиболее эффективным способом реализации цифровой обработки полученных данных представляется использование нейросетевых методов контроля при модификации алгоритмов распознавания с учетом специфики решаемой задачи.

### 3. Методология контроля формы

Перед отправкой деталей в модуль дефектовки, с целью снижения его загрузки, необходимо отбраковать детали, имеющие явные дефекты: критические разрушения детали; деформации, не допускающие восстановительных работ; отсутствие функциональных и конструктивных частей детали. Для применения нейросетевых методов, как было показано выше, необходимо выбрать эффективный способ их модификации.

На сегодняшний день существует множество различных методов модификации нейронных сетей с целью увеличения скорости и точности распознавания. К таким методам относятся сверточные нейронные сети на базе операторов Собеля или Приютта [10], также параллельно рассматривалась возможность использования нечеткой логики для определения дефектов формы. Однако данные методы неприменимы на практике и в производстве ввиду высоких требований, предъявляемых к оборудованию, и сложности в практической реализации (эксперименты показали, что при малых смещениях объекта значительно падает точность распознавания). В связи с этим предлагаются более современные методы и подходы для решения задачи распознавания дефектов формы, в которых используются обученные и модифицированные нейронные сети, адаптированные для использования на реальных производствах.

#### 3.1. Анализ нейросетевых методик контроля формы

Одним из наиболее эффективных методов распознавания дефектных деталей представляется использование сверточных нейронных сетей с внедрением изменений, целью которых являются различные способы улучшения модели: уменьшение входных параметров, сокращение выборки с сохранением точности, оптимизация размера выборки для увеличения точности и прочее.

Так, в работе [11] продемонстрировано использование сверточных нейронных сетей для решения задачи распознавания конденсаторов, что позволило не только добиться высокой точности, но и высокой скорости распознавания, приближенной к эффективности

работы человека. Отличительной особенностью реализации является применение метода всего для 4-х классов, вследствие чего появилась возможность использования модели YOLO-v3 [12], способной обрабатывать изображения в реальном времени. Также была модифицирована классификационная модель с использованием MobileNet, что позволило уменьшить входные параметры, а значит увеличить скорость работы классификатора. Экспериментальная проверка модифицированной сверточной нейросети продемонстрировала точность ~95 %, что является достаточно высоким результатом для четырехклассовой модели.

В работе [13] представлены исследование и анализ различных нейросетевых моделей, целью которых было сравнение эффективности простых моделей с малым числом слоев и моделей с большим числом слоев. Результаты исследования показали, что модели с малым числом слоев не сильно отстают в показателях качества и точности по сравнению с большими моделями. Продолжение эта работа получила в [14], где показана модернизация модели ResNet с использованием архитектур Swin-B и Swin-T, демонстрирующая увеличение точности распознавания по сравнению с классическими вариантами модели без модернизации.

Таким образом, для проведения контроля дефектов формы деталей предлагается использовать нейронные сети, к которым применены модификации, позволяющие повысить скорость и точность распознавания таких дефектов формы, как формообразующие дефекты, сильное разрушение детали, искривления и отсутствие технологических элементов распознаваемого объекта.

### 4. Решение поставленной задачи модифицированным нейросетевым методом

Целью проведенной работы является генерация обучающей выборки на основе трехмерных CAD-моделей исследуемых объектов, что позволит выявить и обосновать модификации, необходимые для увеличения точности распознавания дефектов.

Для достижения поставленной цели предлагается следующая технология решения:

1. На основе чертежей, дефектационных карт и технологической документации выполнить создание идеальных CAD-моделей исследуемых объектов (Solidworks), моделей с различными типами дефектов.
2. Сформировать выборку из нескольких сотен изображений для дальнейшего обучения модели.
3. Обучить модель типа ResNet для классификации и контроля дефектов формы, провести проверку точности обученной модели.
4. Произвести модификацию модели на предобученной модели ImageNet и сравнить результаты с результатами, полученными на модели без модификации.

5. Оценить возможность использования предобученной модели для контроля реальных деталей и возможность ее дообучения в ходе работы с увеличением набора данных за счет расширения выборки объектов, прошедших предварительную дефектовку формы в роботизированном модуле.

Реализация предлагаемого подхода позволит улучшить качество модели и роботизированного модуля в целом, что позволит увеличить скорость работы модуля предварительной подготовки и разгрузить прочие модули для решения более приоритетных задач по сортировке, дефектовке и хранению деталей.

### 5. Результаты тестирования полученных нейросетевых моделей

Определение результатов тестирования модели целесообразно осуществлять на основе матрицы ошибок (Confusion matrix) (рис. 2), позволяющей оценить точность разработанной (применяемой) модели по нескольким параметрам:

- истинно-положительные объекты (True Positive) — объект представляет собой класс 1 и алгоритм идентифицирует как класс 1;
- ложно-положительные объекты (False Positive) — объект представляет собой класс 0, а алгоритм идентифицирует как класс 1;
- истинно-отрицательные объекты (True Negative) — объект представляет собой класс 0 и алгоритм идентифицирует как класс 0;
- ложно-отрицательные объекты (False Negative) — объект представляет собой класс 1, а алгоритм идентифицирует как класс 0.

Точность (или Precision) определяется как отношение числа истинно-положительных классификаций к общему числу положительных идентификаций:

$$Precision_{\text{(Точность)}} = \frac{TP}{(TP + FP)}$$

Таблица 3. Матрица ошибок нейросетевой модели без модификаций

	Колесо рабочее	Аппарат направляющий	
Колесо рабочее	40	13	0,75
Аппарат направляющий	12	35	

Таблица 4. Матрица ошибок нейросетевой модели с учетом модификаций

	Колесо рабочее	Аппарат направляющий	
Колесо рабочее	48	10	0,86
Аппарат направляющий	4	38	

	Actually Positive (1)	Actually Negative (0)
Predicted Positive (1)	True Positives (TPs)	False Positives (FPs)
Predicted Negative (0)	False Negatives (FNs)	True Negatives (TNs)

Рис. 2. Матрица ошибок (Confusion matrix)

Полнота (Recall) — доля истинно-положительных примеров:

$$Recall_{\text{(Полнота)}} = \frac{TP}{(TP + FN)}$$

Доля правильно классифицированных примеров называют также Accurasy:

$$ACC = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

В табл. 3 представлена матрица ошибок для модели без учета модификации.

В табл. 4 представлена матрица ошибок с учетом модификации.

На основе выбранных для тестирования деталей — колесо рабочее и аппарат направляющий — были разработаны трехмерные CAD-модели объектов, сформирована обучающая выборка, произведено обучение нейросетевой модели и проверка распознавания объектов моделью без учета модификаций и с учетом модификации, получены результаты точности. По результатам тестирования можно сделать выводы о том, что модификации выбранного метода позволяют увеличить точность модели на ~16 %, достигнутые значения удовлетворяет предъявляемым требованиям. Использование нейросети на предварительном этапе контроля изделий, качественная отбраковка деталей позволили сократить поток и загрузку прочих модулей, а также эффективно отсеивать явно бракованные детали.



По результатам тестирования классификационной модели сделано предположение о достижимости аналогичной точности при реальной работе роботизированного модуля с реализацией возможности дообучения на результатах выполненного контроля деталей.

## 6. Заключение

Выполненный в ходе работы анализ известных нейросетевых методов позволил сформировать оригинальный, новый подход для реализации технологии контроля и распознавания деталей УЭЦН, отличающийся повышенной эффективностью, достигаемой за счет модификации алгоритмов нейросетевого распознавания формы объектов. Показана необходимость дообучения полученной модели на реальных деталях, что потребует определенное время на этапе технической реализации робототехнического модуля контроля, но предоставит возможность продемонстрировать возросшие работоспособность и эффективность модели после ее модификации с учетом данных, полученных в ходе работы и результатов статистической обработки данных.

## Список литературы / References

- [1] Исполнение федерального бюджета и бюджетов системы Российской Федерации за 2022 год. М.: Минфин России. 2023. [Execution of the federal budget and budgets of the Russian Federation system for 2022] *Ispolnenie federal'nogo byudzheta i byudzhetov sistemy Rossijskoj Federacii za 2022 god.* [Moscow: Ministry of Finance of Russia] *Minfin Rossii.* 2023. [https://minfin.gov.ru/common/upload/library/2023/08/main/Ilustrirovanoe\\_izdanie\\_za\\_2022\\_god.pdf](https://minfin.gov.ru/common/upload/library/2023/08/main/Ilustrirovanoe_izdanie_za_2022_god.pdf)
- [2] Рудницкий С.В., Зацепин А.Ю., Демин Е.В., Ющенко Т.С. Перспективное скважинное оборудование для добычи сланцевой нефти баженовской свиты // *ПРОНефть. Профессионально о нефти.* 2021. Т. 6, № 1. С. 64–75. Rudnitsky S.V., Zatsepina A.YU., Demin E.V., Yushchenko T.S. Prospective artificial lift equipment for shale oil production from the Bazhenov formation. *PROneft. Professionally about oil.* 2021. Vol. 6, No. 1. Pp. 64–75 (in Russian). DOI: 10.51890/2587-7399-2021-6-1-64-75
- [3] Конторович А.Э., Эдер Л.В., Филимонова И.В., Мишенин М.В. Роль уникальных и крупных месторождений в нефтяной промышленности России: ретроспектива, современное состояние, прогноз // *Энергетическая политика.* 2016. № 2. С. 34–43. Kontorovich A.E., Eder L.V., Filimonova I.V., Mishenin M.V. The role of unique and large deposits in russian oil sector: retrospective analysis, current state and forecast. *Energy policy.* 2016. No. 2. Pp. 34–43 (in Russian). EDN: WXMMYV
- [4] Мотина С.И., Копейкин И.С. Техническая экспертиза промышленной безопасности эксплуатационных колонн нефтяных скважин. // *Материалы Международной научно-технической конференции «Современные проблемы нефтегазового оборудования».* 2019. С. 436–440. Motina S.I., Kopeikin I.S. Technical expertise of industrial safety of production columns of oil wells. *Materials of the International Scientific and Technical Conference «Modern problems of oil and gas equipment».* 2019. Pp. 436–440 (in Russian). EDN: QCPZZA
- [5] Галиев К.Р., Ямалиев В.У. Методы повышения безотказности УЭЦН в осложнённых условиях эксплуатации // *Материалы Международной научно-технической конференции «Современные проблемы нефтегазового оборудования».* 2019. С. 209–218. Galiev K.R., Yamaliev V.U. Methods for improving the operation reliability of electric centrifugal pump installation in complicated operating conditions. *Materials of the International Scientific and Technical Conference «Modern problems of oil and gas equipment».* 2019. Pp. 209–218 (in Russian). EDN: SMTDPL
- [6] Гиндуллин И.И., Лоншаков А.А., Салихов Л.С. Структура робототехнического модуля сортировки деталей // *Завалишинские чтения: XVII Международная конференция по электромеханике и робототехнике (СПб., 18–19 апреля 2023 г.). Молодёжная секция: сб. докл.: в 2 ч. Ч. 1.* СПб.: ГУАП, 2023. С. 41–44. Gindullin I.I., Lonshakov A.A., Salikhov L.S. [The structure of the robotic module for sorting parts] *Struktura robototekhnicheskogo modulya sortirovki detalej.* *Struktura robototekhnicheskogo modulya sortirovki detalej.* Zavalishinsky readings: XVII International Conference on Electromechanics and Robotics (St. Petersburg, April 18–19, 2023). Youth section. Vol. 2, No. 1. St. Petersburg: GUAP. 2023. Pp. 41–44 (in Russian).
- [7] Zhu H., Zhu J., Zhou Z., Rutter R., Forsberg M., Gunter S., Zhang H.-Q. Experimental Study of Sand Erosion in Multistage Electrical Submersible Pump ESP: Performance Degradation, Wear and Vibration // *International Petroleum Technology Conference: Day 1 Tue, March 26, 2019.* Paper Number: IPTC-19264-MS. DOI: 10.2523/iptc-19264-ms
- [8] Волошин А.И., Гусаков В.Н., Фахреева А.В., Докичев В.А. Ингибиторы для предотвращения солеотложения в нефтедобыче // *Нефтяное хозяйство.* 2018. № 11. С. 60–72. Voloshin A.I., Gusakov V.N., Fahreeva A.V., Dokichev V.A. Scaling prevention inhibitors in oil production. *Neftepromyslovoe delo.* 2018. No. 11. Pp. 60–72 (in Russian). DOI: 10.30713/0207-2351-2018-11-60-72
- [9] Bulgarelli N., Biazussi J., Verde W., Perles C., de Castro M., Bannwar A. Experimental investigation of the Electrical Submersible Pump's energy consumption under unstable and stable oil/water emulsions: A catastrophic phase inversion analysis // *Journal of Petroleum Science and Engineering.* 2022. Vol. 216. Paper 110814. DOI: 10.1016/j.petrol.2022.110814
- [10] Seif A., Salut M.M., Marsono M.N. A hardware architecture of Prewitt edge detection // *2010 IEEE Conference on Sustainable Utilization and Development in Engineering and Technology.* 2010. Pp. 99–101. DOI: 10.1109/STUDENT.2010.5686999
- [11] Huang R., Gu J., Sun X., Hou Y., Uddin S. A rapid recognition method for electronic components based on the improved YOLO-V3 network // *Electronics.* 2019. Vol. 8, no. 8. Paper 825. DOI: 10.3390/electronics8080825
- [12] Tian Y., Yang G., Wang Z., Wang H., Li E., Liang Z. Apple detection during different growth stages in orchards using the improved YOLO-V3 model // *Computers and electronics in agriculture.* 2019. Vol. 157. Pp. 417–426. DOI: 10.1016/j.compag.2019.01.012
- [13] He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep Residual Learning for Image Recognition // *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Las Vegas, NV, USA, 2016.* Pp. 770–778. DOI: 10.1109/cvpr.2016.90
- [14] Liu Z., Mao H., Wu C.-Y., Feichtenhofer C., Darrell T., Xie S. A ConvNet for the 2020s // *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2022.* Pp. 11976–11986. DOI: 10.48550/arXiv.2201.03545

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Линар Суфьянович Салихов**  
Уфимский государственный нефтяной технический университет

**Linar S. Salikhov**  
Ufa State Petroleum Technological University  
[salihovlinar@mail.ru](mailto:salihovlinar@mail.ru)  
ORCID: 0009-0003-3703-4810

# Содержание

## Механика жидкости и газа

**А.В. Борисов, С.В. Хабиров**

Преобразования эквивалентности для уравнений газовой динамики ..... 49–58

**Н.Г. Мусакаев, С.Л. Бородин, Д.С. Бельских**

Математическое моделирование процесса закачки диоксида углерода  
в содержащий метан и его гидрат пласт ..... 49–58

**Ю.В. Юлмухаметова**

Деформирование газового шара в иголку или диск ..... 59–63

**А.И. Исламов, К.Р. Набиуллина**

Моделирование термоконвекции в микропробирке при точечном нагреве:  
подготовка вычислительной сетки и выбор методов ..... 64–72

**Г.Е. Таугынбаева, А.Ж. Жубанышева, Е.Е. Нурмолдин**

Приближение решений уравнения теплопроводности  
с функцией распределения начальной температуры из классов Ульянова по неточным данным ..... 73–78

## Робототехника и теория управления

**И.И. Гиндуллин**

Статистический анализ дефектов УЭЦН, выявленных при роботизации контрольных операций ..... 79–85

**Л.С. Салихов**

Модификация алгоритмов нейросетевого распознавания формы деталей УЭЦН  
при роботизации контрольной операции ..... 86–91

# Contents

## Liquid & Gas Mechanics

**A.V. Borisov, S.V. Habirov**

Equivalence transformations for equations of gas dynamics ..... 44–48

**N.G. Musakaev, S.L. Borodin, D.S. Belskikh**

Mathematical modeling of the process of the injection of carbon dioxide into a formation containing methane and its hydrate ..... 49–58

**Yu.V. Yulmukhametova**

Deformation of a gas ball into a needle or disk ..... 59–63

**A.I. Islamov, K.R. Nabiullina**

Modeling of thermoconvection in a microtube under point heating: computational grid preparation and choice of method ..... 64–72

**G.E. Taugynbayeva, A.Zh. Zhubanysheva, Y.Y. Nurmoldin**

Approximation of solutions of the heat conductivity equation with the distribution function of the initial temperature from the Ulyanov classes by inaccurate data ..... 73–78

## Robotics & Control Theory

**I.I. Gindullin**

Statistical analysis of ESP defects detected during the robotization of control operations ..... 79–85

**L.S. Salikhov**

Modification of algorithms for neural network-based shape recognition of ESP components in the automation of inspection operations ..... 86–91