

# Сборник трудов

VIII Российской конференции —  
школы молодых ученых с международным участием  
**«Многофазные системы:  
модели, эксперимент, приложения»**

посвященной  
300-летию Российской академии наук,  
90-летию чл.-корр. РАН М.А. Ильгамова и  
юбилею д.ф.-м.н. Р.Х. Болотновой

Уфа, 24–28 июня 2024 г.



## Организаторы конференции



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации,

**ОЭММПУ РАН**

Отделение энергетики, машиностроения,  
механики и процессов управления  
Российской академии наук (ОЭММПУ РАН),



УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Уфимский федеральный исследовательский  
центр РАН (УФИЦ РАН),



Академия наук Республики Башкортостан  
(АН РБ),



АНО «УК НОЦ РБ» («Евразийский НОЦ»),



Институт механики  
им. Р.Р. Мавлютова  
Уфимского научного центра РАН

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова  
УФИЦ РАН (ИМех УФИЦ РАН)



## Краткий обзор некоторых исследований и разработок в механике

М.А. Ильгамов

Уважаемые коллеги!

Всем известно, что беды российской науки обусловлены невостребованностью ее результатов нашей экономикой. Такое положение было характерно в значительной мере и в советское время, что было одной из причин низкой эффективности экономики, ее заката, разрушения страны.

Но в то время была одна отрасль, даже целое направление отраслей, где связи науки и производства были плодотворными. Это военно-промышленный комплекс. Не случайно, по прошествии десятилетий продукция его является конкурентоспособной. Созданные в то время изделия в аэрокосмической технике, атомной промышленности, отдельные системы вооружений все еще исправно служат, являются экспортной продукцией. Если еще в мире считаются с Россией, то именно благодаря этому наследию советского времени.

Возможно, юбилеи – это повод для воспоминаний о плодотворном взаимодействии науки и экономики, промышленности.

Такие исследования и разработки выполнялись по хоздоговорам с предприятиями, по заданиям военно-промышленной комиссии Совета Министров СССР, по постановлениям ЦК КПСС и Совета Министров СССР. К работе привлекались академические институты, отраслевые НИИ, ОКБ, вузы, предприятия, полигоны.

Довелось быть участником таких работ и мне. Остановлюсь на трех разработках.

1. Прочность и динамика камер сгорания, реакторов и трубопроводов
2. Прочность и рабочие процессы в двигателях твердого топлива
3. Динамика мягких оболочек в потоке газа

1. Исследование динамических процессов в камерах сгорания жидкостных ракетных двигателей привело к обнаружению периодических ударных волн, распространяющихся вдоль камеры. На рис. 1 показаны эти волны, возникающие в упрощенной экспериментальной установке.

Камера сгорания является резонатором таких волн, которые приводят к разрушению двигателей.

Подобные резонаторы (в виде трубы) в дальнейшем были использованы в мирных целях. Например, при создании эффективной установки для очистки отходящих газов на предприятии «Авангард» (г. Стерлитамак). На рис. 2 показан макет установки с резонатором (в нижней части рисунка).

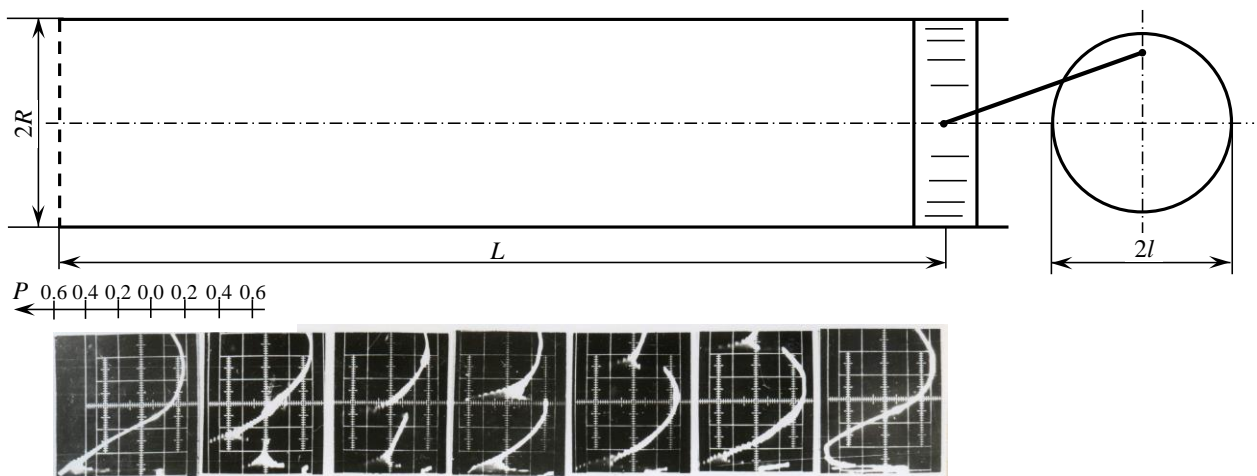


Рис. 1. Периодические ударные волны в модели камеры сгорания

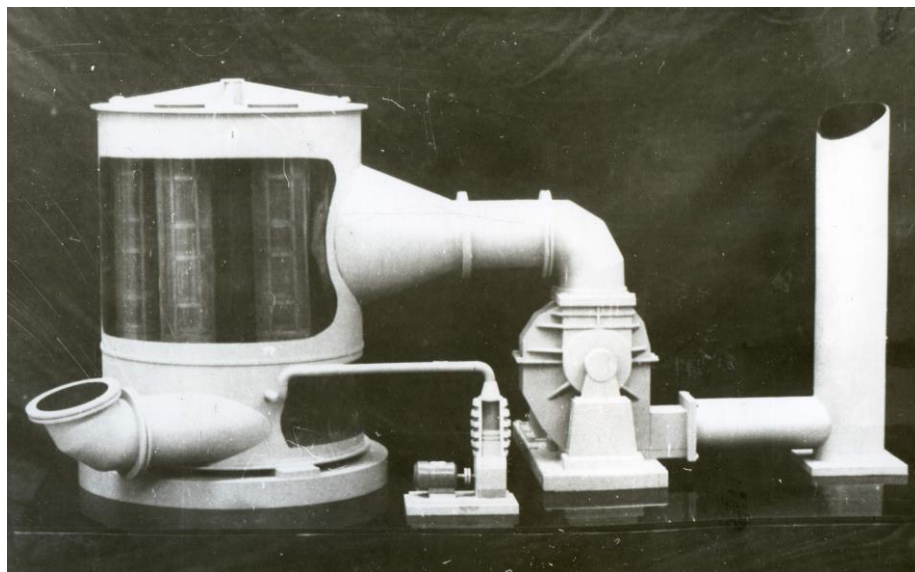


Рис. 2. Макет установки улова диметилформанида из отходящих газов с использованием ударных волн г. Стерлитамак, завод «Авангард» (1985-90г.г.)

Такая работа проводилась группой инженеров завода, сотрудников Казанского химико-технологического института с нашим участием. Если въезжаете в Стерлитамак с северной стороны города, то «Авангард» будет слева, а справа – его общежития, где мы и останавливались. Душой этих работ был заместитель директора, ныне покойный Ф.М. Газизов. В курсе работы было руководство города, которое всегда поддерживало ее. Когда был достигнут положительный результат с очисткой отходящих газов, не стало видно очень вредного ярко-оранжевого выхода из трубы (окислы азота), в городской газете появилась статья под названием «Исчез лисий хвост».

Хотя это небольшой эпизод в жизни, я привел его, так как речь идет о внедрении.

2. Динамика и прочность твердотопливных ракет. От легендарных реактивных артиллерийских систем «Катюша» времен Великой Отечественной войны до современных ракет «Тополь» – путь, пройденный двигателями на твердом топливе. На рис. 3 показана система СС–20 («Тополь», «Тополь–М» являются модификацией СС–20). Здесь виден контейнер, внутри которого находится ракета. Эта система устанавливалась также на железнодорожных вагонах для постоянного передвижения.

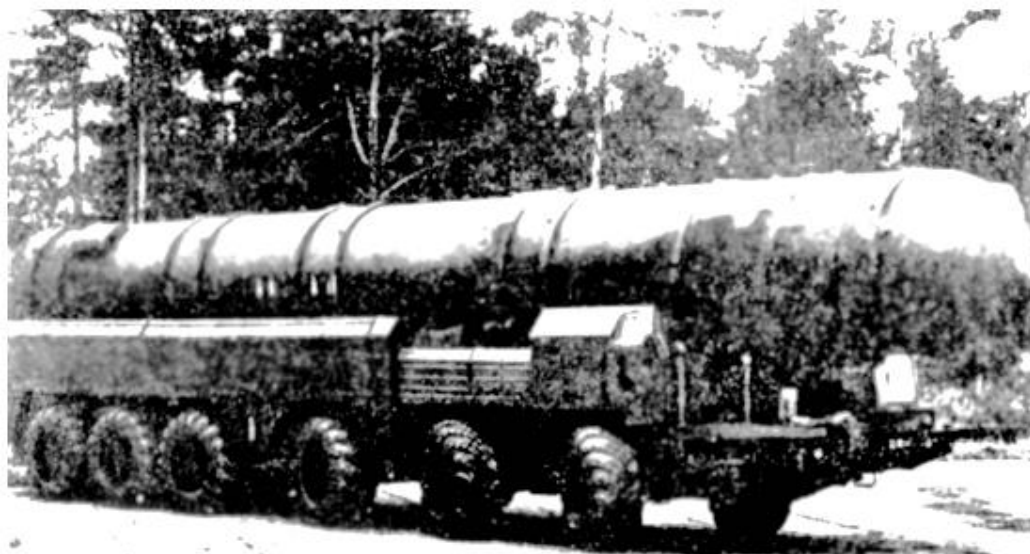


Рис. 3. Ракета с твердотопливным двигателем

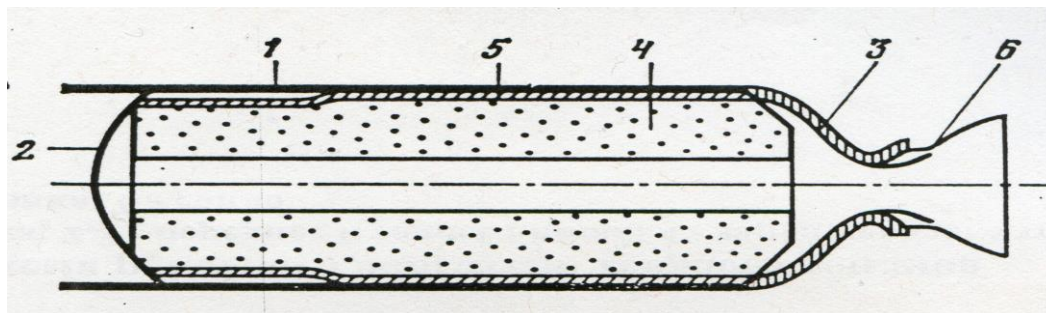


Рис. 4. Схема ракетного двигателя твердого топлива

1 – обечайка; 2, 3 – переднее и заднее днища; 4 – заряд твердого топлива; 5 – бронировка; 6 – сопло

Цикл работ был посвящен определению напряженно-деформированного состояния заряда и корпуса ракеты. На рис. 4 виден корпус, внутри которого находится твердотопливная ракета. Ракета представляет собой цилиндрическую оболочку 1 из композиционных материалов (в частности, стекловолокно с наполнителем-связующим) и само топливо 4, которое по механическим характеристикам близко к резине. На рис. 4 видны переднее днище 2 и сопло 3 и 6. Для обеспечения большей поверхности горения внутреннему каналу заряда придается звездообразная форма (рис.5).

По прочности и динамике таких ракет при хранении, транспортировке, запуске в пределах допустимого были опубликованы наши две книги, первая из которых сразу же была переведена на английский в США.

Модификации этих ракет и сейчас стоят на вооружении. Но с тех пор в них не вносились принципиальные изменения. Получается, что перевооружение, объявленное в стране в данном случае означает изготовление новых изделий той же разработки. А разработчики подобных изделий в других странах ушли вперед.

Наши ученые могли бы участвовать в решении научно-технических проблем, которые возникают при создании образцов изделий в рамках программы перевооружения армии. В этом отношении были надежды на Д.О. Рогозина, но он согласился с «реформой» РАН. Что же тогда может означать перевооружение армии без самого активного участия научных сил страны?

а – горящий с торца; б – крестообразный; в – звездообразный; г – телескопический; д – цилиндрический

Задействовать научные силы страны – это самый важный аргумент в пользу реформы научных учреждений, а количество публикаций, их цитируемость и т.д., важные для научной сферы, не интересны для общества и властей. Говоря по-простому, должен быть толк от науки для страны, т.е. внедрение. Отсюда и цель реальной реформы: снять искусственно возведенные барьеры хотя бы между предприятиями с государственным участием (от частных фирм вряд ли можно дожидаться) и вузами, РАН, остатками отраслевых НИИ, стимулировать их взаимодействие с помощью гибкой кредитно-налоговой политики, сделать так, чтобы результаты исследований, патенты, изобретения направлялись на создание новой техники, технологий, материалов, лекарств, изделий военно-промышленного комплекса и т.д. Без этого объявленный курс на модернизацию страны останется только на словах.

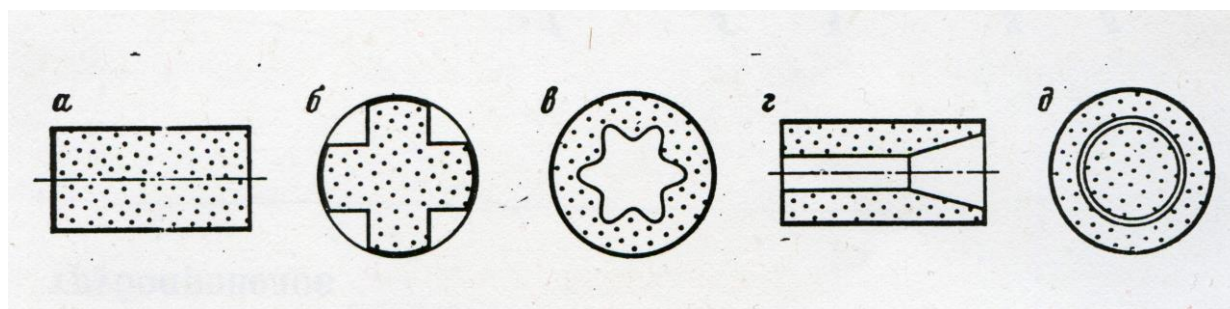


Рис. 5. Форма зарядов

Между тем, можно было бы возобновить это сотрудничество. Если взять нашу сферу деятельности, то есть и положительный фактор – сильное развитие средств и методов численного моделирования прочности, динамики, рабочих процессов. Один квалифицированный сотрудник теперь может выполнять работу, которую тогда делали два-три человека.

### 3. Динамика и прочность мягких оболочек в потоке газа.

На рис. 6 приведено так называемое «ветрозашитное устройство» размерами десятки метров. Белые линии представляют собой сетку, изготовленную из капроновых лент. Вся площадь покрыта капроновой тканью с большой воздухопроницаемостью. Назначение – быстрое развертывание сооружения и защиты ответственных объектов от бокового ветра. Объект использовался также в целях мобильной радиолокации. Наша задача состояла в развитии теории развертывания полотна в потоке воздуха, его прочности и устойчивости.

Было изучено влияние на перегрузки и переходный процесс проницаемости и сильной деформативности изделия. Дан анализ влияния ортотропии ткани, числа и длин строп и т.д. Проницаемость ткани уменьшает перегрузки, повышает устойчивость формы. Модели испытывались в аэродинамической трубе.

В технике есть стремление создавать хорошо обтекаемые тела (крылья самолетов, ракеты, подводные и надводные объекты и т.д.) ввиду необходимости уменьшения сопротивления среды. Есть и стремление создавать объекты с наибольшим сопротивлением. К ним относятся парашюты.

Когда в соответствии с высокими постановлениями мы начали заниматься математическим моделированием раскрытия, динамики и прочности парашютов, знакомые говорили нам, что в этой теме может быть нового, ведь они существуют давно. Да, это было так в отношении спасательных парашютов в военной авиации. Но в наше время начали создаваться сложные тормозные парашюты, гидропарашюты, дозвуковые, сверхзвуковые, гиперзвуковые, космические в разреженной атмосфере, в атмосфере других планет и т.д.

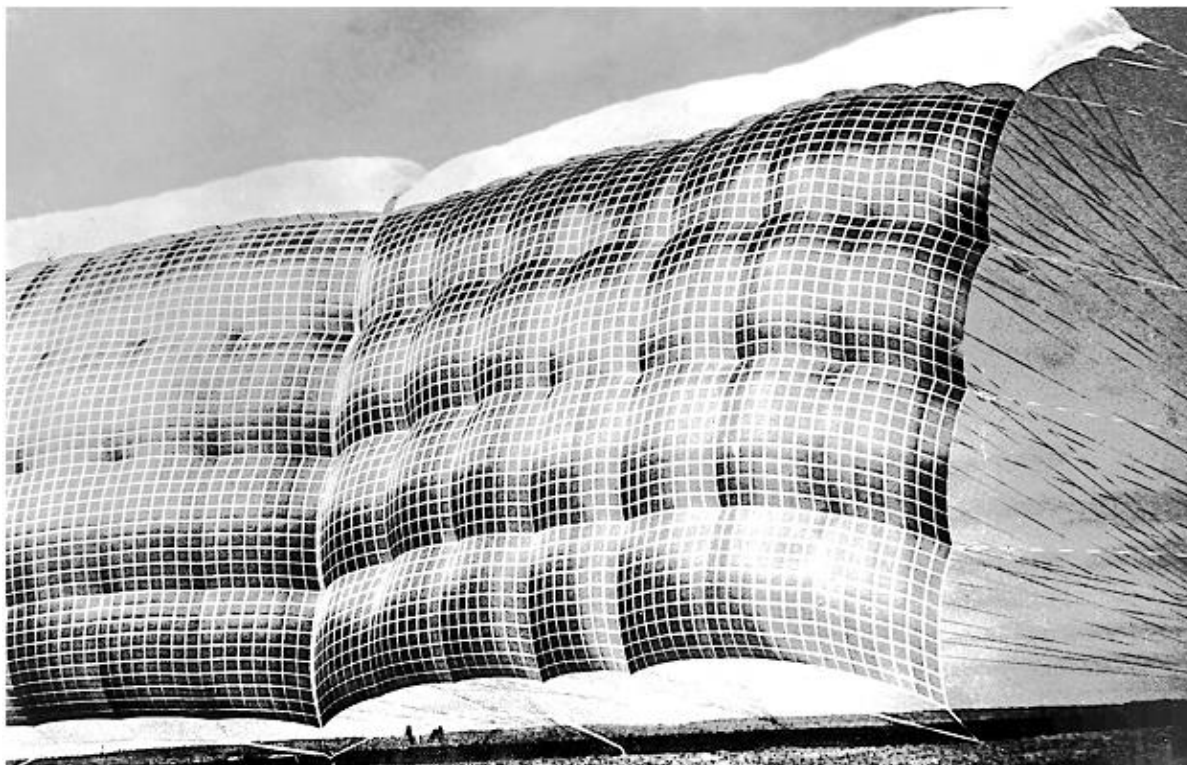


Рис. 6. Динамика мягких оболочек в потоке газа



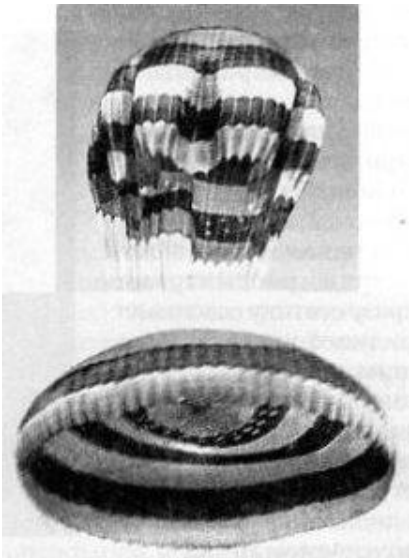


Рис. 7. Процесс раскрытия круглого парашюта

В этом деле революция произошла с применением капроновых тканей и лент. Удельная прочность их выше, чем у шелковых тканей, применявшихся до появления капрона. Есть и другие достоинства.

Всякое плохообтекаемое тело в потоке воздуха неустойчиво, происходят его колебания в направлении поперек потока. Устойчивость круглому парашюту придает полюсное отверстие, через которое истекает струя воздуха, и естественная воздухопроницаемость ткани (рис. 7). Но при этом сохраняется вращательная неустойчивость, которая приводит к резкому уменьшению сопротивления в результате схлопывания. От этих недостатков свободен крестообразный парашют (рис. 8).

В условиях «холодной войны» разрабатывались технологии занятия плацдармов в Западной Европе путем высадки десантов около жизненно важных мест. Ясно, что в таких местах аэродромов нет. Поэтому стали делать броски тяжелых грузов, техники с малых высот без посадки транспортных самолетов. Для вытягивания грузов использовались те же крестообразные парашюты (рис. 9). Впервые в реальных условиях эта технология использовалась при вводе наших войск в Афганистан.



Рис. 8. Испытание крестообразного парашюта



Рис. 9. Технология вытягивания тяжелых грузов из транспортных самолетов



Рис. 10.

Хотя я давно отошел от этой тематики, знаю, что такие парашюты применяются до сих пор. Две недели назад было сообщение о ночной высадке крупного десанта Ивановской десантной дивизии на острове Котельный, где нет аэродрома. Отправной базой служил аэродром Тикен на севере Якутии.

Фото (рис. 10) в штабе командующего воздушно-десантными войсками СССР генерала армии Сухорукова Дмитрия Семеновича привожу с тем, чтобы подчеркнуть, что было время, когда крупные военные специалисты, руководители предприятий, главные инженеры, главные конструкторы, руководители министерств, начальники главков их старались привлекать научные силы. А теперь президент республики говорит, что даже для него неизвестны состояние и планы предприятий, находящихся в республике, что это их коммерческая тайна.

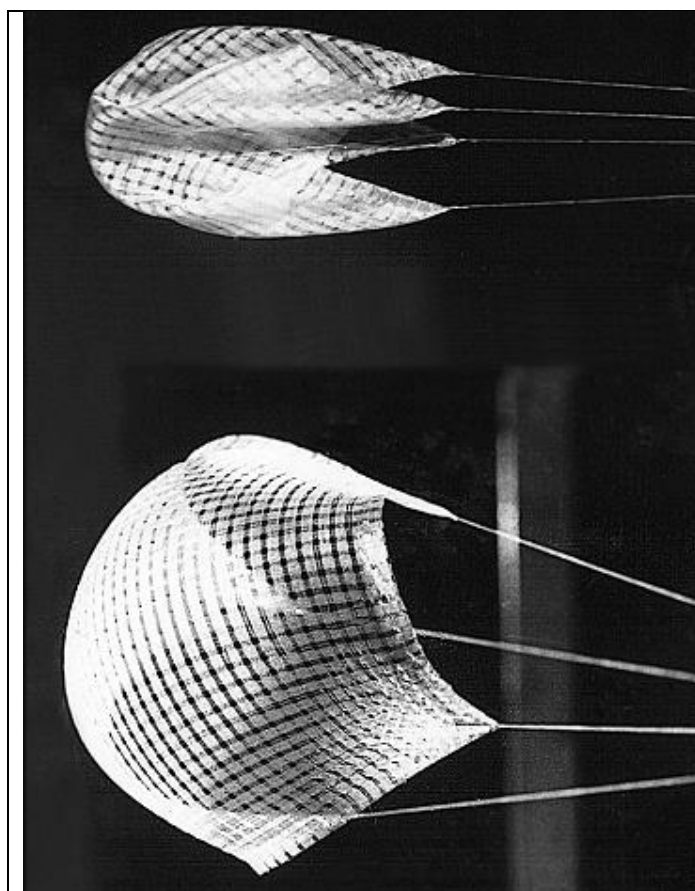


Рис. 11.

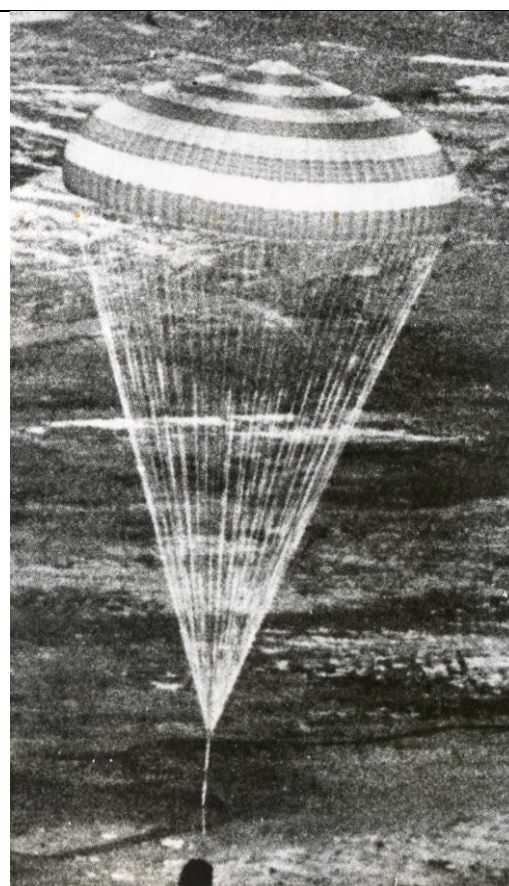


Рис. 12

Вообще, поведение мягкой проницаемой оболочки в потоке газа и жидкости – сложное явление. На рис. 11 показан переход с наполненной формы прямоугольного капронового полотнища, удерживаемого четырьмя стропами, к вытянутой форме. Такой переход происходит неожиданно и хлопком при превышении некоторых значений скорости и плотности (на разных высотах). Кроме того, это явление сильно зависит от размеров полотнища и строп. Уменьшение скорости обтекания в аэродинамической трубе приводит к переходу хлопком к наполненной форме. Мы не успели создать сколько-нибудь удовлетворительной теории, началась перестройка в стране, работы были прекращены.

Вся эта техника зиждется на математическом моделировании. Проведение физических экспериментов невозможно из-за больших размеров объектов и трудности создания потоков, подобных, например, в разреженной атмосфере, в атмосфере других планет, куда отправляются космические объекты.

На рис. 12 показана парашютная система при возвращении космического модуля на землю. Вся эта система в сложенном состоянии занимает примерно одну треть объема возвращаемого модуля. Есть своя математика как упаковать и спрессовать под многотонным прессом, чтобы при разворачивании не было трения отдельных участков купола между собой, приводящего к оплавлению капрона.

Запуск спутника и возвращение его на землю сопряжены с тысячами опасностей. При вводе в действие парашютной системы сначала выстреливается сравнительно небольшой вытяжной парашют, который вытягивает плотно упакованный основной парашют. Случались катастрофы в этот момент, которые сводили на нет весь результат работы с миллиардными затратами. Одна из них запомнилась людям, даже далеким от этих дел, тем, что погиб космонавт В.М. Комаров (первый полет в 1964 году завершился благополучно, погиб в 1967 году именно из-за парашютной системы).

Надо сказать, в начале космонавтики существовало стремление тормозить с помощью ракетных двигателей направлением струи газов вперед. Поэтому время было упущено для разработки парашютных систем.

Когда пришли к выводу, что лучше парашюта для торможения нет средств, за основу взяли парашют, который применялся для испытания водородной бомбы над островом Новая Земля (самой мощной, после испытания которой американцы согласились на мораторий для испытаний в атмосфере и на земле). А ведь условия функционирования парашюта при скоростях и высотах, когда груз сбрасывается с самолета, и в разреженной атмосфере Земли при гиперзвуковом движении модуля сильно отличаются. В первом случае имеет место обтекание препятствия воздухом, во втором случае нет обычного обтекания (молекулы воздуха не взаимодействуют друг с другом, а ударяют на поверхность тела как капли дождя, не обтекают препятствие).

Вообще, космонавтика в начале своего развития представляла собой мирное использование той техники, которая была создана в военных целях. Даже первые спутники имели размер водородной бомбы, размещаемой в головном отсеке межконтинентальной ракеты. Без развития этой техники не могли быть, например, навигация, интернет, сотовый телефон и т.д.

Вот несется к земле с космической скоростью обвятый пламенем модуль (слой за слоем горит и уносится потоком абляции, предотвращая передачу тепла во внутрь модуля).

Снова о цепочке опасностей. Начало торможения возвращаемого модуля начинается, как уже было сказано, с выстрела пиропатроном небольшого парашюта для вытягивания основного парашюта. Есть десятки факторов, в силу которых может не сработать весь механизм в этот момент. Опережение либо задержка на несколько секунд этого выстрела может привести к нераскрытию основного парашюта или приведет к большим перегрузкам при раскрытии с последующим вытягиванием в потоке (из-за быстрого изменения высоты и расчетной плотности атмосферы при гиперзвуковых скоростях модуля). Само это время может быть определено неудовлетворительно, т.к. система сложных нелинейных дифференциальных уравнений, содержащая много параметров, может быть недостаточно точной.

Для этого момента как нельзя подходят строки Роберта Рождественского

*«Не думай о секундах свысока ...  
Мгновение, мгновение, мгновение».*

Даже в условиях постоянной плотности воздуха правильно определенное начало торможения важно и при приземлении самолета.

«Мгновения спрессованы в года ...» говорит поэт. Действительно, труд и талант тысяч специалистов по техническим наукам, математике, механике, физике, рабочих бывают спрессованы в момент ввода в действие космической парашютной системы.

Я завершаю свой экскурс в прошлое. Несколько слов о нашем поколении, которое уходит. Мы, дети войны, выросли рано. Наше взросление пришлось на начало научно-технической революции, изменившей мир. Она наиболее сильно повлияла на военно-промышленный комплекс и во многом стимулировалась именно этим комплексом. Многие из нас, в том числе из присутствующих в этом зале, принимали участие, в той или иной мере трудились в этой сфере (А.А. Рыжов, Р.Н. Гимаев, А.Г. Гумеров и т.д.). наши коллеги, которых уже нет, внесли свой вклад. Это Р.Р. Мавлютов, К.С. Минскер, Г.А. Толстиков, Ю.Б. Монаков и другие.

Уважаемые коллеги!

Рассказанное мной – это уже история, но не только. Это поучительный опыт и поучительный пример. Он показывает, что при должной организации дела и в России могут создаваться передовая техника, наукоемкие технологии.

## Коллапс парового пузырька в воде

Аганин А.А., Хисматуллина Н.А.

Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН

email: aganin\_aa@imm.knc.ru

Известно, что коллапс паровых пузырьков представляет большой интерес, например, в связи с проблемами и полезными применениями кавитации. Так, разрушительный потенциал кавитации может приводить к эрозии гидрокрыльев, управляющих мембран и т.д. Вместе с тем, кавитация применяется для очистки твердых поверхностей от загрязнений, дробления камней в почках в литотрипсии и т.д. Разрушительный потенциал кавитации во многом определяется процессами испарения и конденсации на поверхности пузырька. Конденсация пара усиливает коллапс пузырьков, что приводит к формированию в жидкости расходящихся от пузырька ударно-волновых импульсов, способствующих усилению разрушительного потенциала кавитации.

Процессы испарения и конденсации обычно описываются соотношениями Герца–Кнудсена–Ленгмюра. В этих соотношениях массоперенос на межфазной поверхности регулируется коэффициентом аккомодации (испарения/конденсации)  $\alpha$ . Из литературы известно, что значения этого коэффициента для воды могут варьироваться от  $\sim 0.001$  до  $\sim 1$ . Вместе с тем, согласно недавним исследованиям методом молекулярной динамики, значения коэффициента  $\alpha$  имеют порядок 1. Меньшие значения могут быть обусловлены наличием в паре примесей неконденсируемых газов.

Учитывая указанные результаты, полученные методом молекулярной динамики, а также то, что коллапс парового пузырька в воде ранее рассматривался, главным образом, при значениях  $\alpha$  в промежутке от 0.001 до 0.2, в настоящей работе представляются результаты его изучения при значениях  $\alpha$  выше 0.2. Исследование проведено с применением математической модели, в которой динамика пара в пузырьке и окружающей жидкости описывается уравнениями газовой динамики. Принимаются во внимание теплопроводность обеих фаз, вязкость жидкости. Применяются широкодиапазонные уравнения состояния пара и жидкости.

Применяется подвижная расчетная сетка, которая перемещается согласно движению поверхности пузырька и внешней границы расчетной области в жидкости. Для разрешения тонких тепловых приграничных слоев в пузырьке и окружающей жидкости в окрестности поверхности пузырька с большими градиентами температуры ячейки сетки сгущаются к поверхности пузырька по геометрической прогрессии.

Показано, что в отличие от значений  $\alpha \leq 0.075$ , при которых давление в пузырьке при коллапсе остается близким к однородному, при значениях  $\alpha$ , выше 0.2, в пузырьке в ходе коллапса могут образовываться ударные волны, радиально сходящиеся к центру пузырька. Это представляет интерес с точки зрения достижения высоких давлений и температур в пузырьке.

## Методика расчета напряженно-деформированного состояния лопаток вентилятора ГТД при соударении с птицей

Аунг К.М., Лепешкин А.Р.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва

Повреждения элементов авиационной техники при столкновениях с птицами существенно снижают уровень безопасности полетов в гражданской и военной авиации, приводят к росту числа аварий и катастроф, увеличению затрат на эксплуатацию, связанных с необходимостью выполнения восстановительного ремонта поврежденного летательного аппарата. При таком столкновении высок риск деформации лопаток вентилятора и различных ступеней компрессора, так же возможен обрыв лопаток с повреждением газоздушного тракта и последующих ступеней, помпаж двигателя с последующим отказом [1-3]. Испытания и исследования по забросу птиц призваны решить задачи, относящиеся к проблеме птицестойкости деталей авиационных газотурбинных двигателей (ГТД): обосновать расчетную модель тела птицы, разрушающегося при ударе по твердой преграде, и обосновать применение методов компьютерного расчета для анализа соударения разрушающейся птицы с лопатками или другими твердыми преградами. Под твердыми понимаются преграды (детали), которые при ударе деформируются существенно слабее, чем птицы.

Известны многие универсальные программные комплексы (Nastran, ANSYS, LS-DYNA и др.) конечно-элементного анализа конструкций и многофазных систем, имеющих возможности расчета нестационарных динамических и переходных процессов, которые могут использоваться для расчета птицестойкости. Наличие в таких пакетах обширных банков данных по моделям материалов и методам вычислений, а также развитых компьютерных средств введения исходной информации и наглядного представления результатов расчета делает эти комплексы удобными для практического применения. Возникает актуальная задача соединения полученных пользователями более или менее достоверных экспериментальных характеристик тела птицы с имеющимися в программных пакетах или специальной литературе моделями материалов и расчетными процедурами многофазных систем. Необходимо принять модель птицы как мягкого разрушающегося при ударе тела, и другие вопросы, относящиеся к компьютерному моделированию ударного взаимодействия птиц с твердыми поверхностями деталей. Наличие в теле птицы большого количества жидкости приводит к тому, что усредненная по объему тела плотность мало отличается от плотности воды и это можно использовать в расчетном моделировании. Процесс соударения птицы или ее имитатора с преградой рассматривается как единичный удар из начального ненагруженного состояния движущейся птицы, позволяющий описать ее разрушение и разлет фрагментов. Низкая прочность тела птицы как единого целого, по сравнению с прочностью деталей двигателя, приводит к тому, что тело птицы в расчетах на удар можно считать полностью разрушающимся, точнее полностью распадающимся на отдельные части. Результаты расчетов могут быть распространены на расчеты вращающегося колеса вентилятора ГТД, когда птица последовательно разрезается лопатками на отдельные части, которые до удара продолжают начальное движение. Возможные дальнейшие столкновения останков птицы и фрагментов лопаток при этом обычно рассчитываются по тем же моделям, что и удар целой птицы.

Для учета значительного изменения геометрии птицы и лопатки вентилятора при их повреждениях от соударения и тем более при разрушениях целесообразно использовать бессеточные методы расчета. Из разных подходов к построению таких моделей наиболее успешным оказался метод сглаженных частиц, особенно его вариант, относящийся к задачам гидродинамики, который получил несколько условное название метода сглаженных частиц гидродинамики SPH (smooth particles hydrodynamics). Развитие этого метода показало, что он применим не только к гидродинамике, но и к другим проблемам, в том числе к задачам соударения и разрушения твердых деформируемых тел [4].

В данной работе в разработанной методике расчета используются метод SPH для модели птицы и конечно-элементное моделирование процесса удара птицы с лопатками вентилятора ГТД в программном комплексе LS DYNA. В указанной методике учитывается процесс удара птицы по вращающимся лопаткам рабочего колеса вентилятора ГТД. Методика учитывает следующие условия вращения рабочего колеса, которые влияют на птицестойкость лопаток: относительная скорость удара птицы по лопатке и ее направление меняются в зависимости от окружной скорости колеса и ее отношения к осевой скорости попадания птицы; натяжение пера лопатки центробежными силами повышает ее жесткость, особенно в верхних сечениях, что приводит к уменьшению как максимальных прогибов во время удара, так и остаточных прогибов; компоненты напряжений от центробежных сил алгебраически суммируются с динамическими напряжениями от удара, что влияет на уровень максимальных напряжений и на появление трещин в наиболее напряженных зонах пера лопатки; после появления трещины центробежные силы способствуют отрыву фрагментов пера лопатки, траектории оторвавшихся в этот момент кусков отличаются от траекторий кусков, оторвавшихся при ударе без вращения; при попадании во вращающееся рабочее колесо птица взаимодействует с несколькими последовательно стоящими

лопатками, захватывая область колеса, превосходящую собственные размеры птицы. Кроме того, в данной методике выполняются принципы учета в общем расчетном алгоритме удара контактной задачи в виде меняющихся граничных условий. Учет изменений условий удара осуществляется на каждом расчетном шаге путем последовательных приближений в конечно-элементном анализе.

С использованием разработанной методики получены следующие результаты расчета. Предварительные результаты статического расчета распределения механических напряжений от центробежных сил перед ударом показывают, что верхняя часть и почти вся область у входной кромки лопатки вентилятора ГТД статически мало нагружены. При принятом в расчете направлении удара с учетом отношения скоростей птицы и колеса вентилятора тело птицы вначале разрезается входной кромкой лопатки почти пополам. Под давлением действующей на корыто пера соответствующей половины тела птицы очень тонкий верхний конец пера лопатки резко отгибается в сторону спинки, и тогда вся верхняя часть корыта пера подвергается давлению обеих половин птицы, что приводит к сильному деформированию верхней части пера у входной кромки. В дальнейшем надорванный уголок под действием центробежных сил отрывается от лопатки.

Далее сравниваются результаты расчета при ударе птицы по вращающейся и невращающейся лопатке вентилятора. В результате удара все перо невращающейся лопатки изогнулось гораздо сильнее, чем при вращении, и область высоких напряжений распространилась до корневой области лопатки. Это связано с тем, что после удара под действием сил упругости лопатка несколько распрямилась, но общие деформации пера остались значительными. При сравнении видно, что натяжение центробежными силами тонкой верхней части вращающейся лопатки препятствует ее значительному деформированию. Максимальные суммарные напряжения от центробежных сил и удара больше, чем только от удара. Значительная пластичность материала лопатки и податливость верхней половины пера привели к сильному различию деформаций и последствий удара по исследуемой вращающейся и невращающейся лопатке. Но даже в этом случае расчеты подтвердили прочность нижней части лопатки. На рис. 1 представлены результаты расчета – напряженно-деформированного состояния лопаток вращающегося колеса вентилятора ГТД при соударении с птицей. На рис. 1 также видны фрагменты птицы и отгибы кромок лопаток после удара птицы. При сравнении расчетно-экспериментальных результатов исследований и испытаний на птицестойкость колеса вентилятора ГТД получено, что количество поврежденных лопаток в расчете и эксперименте совпало.

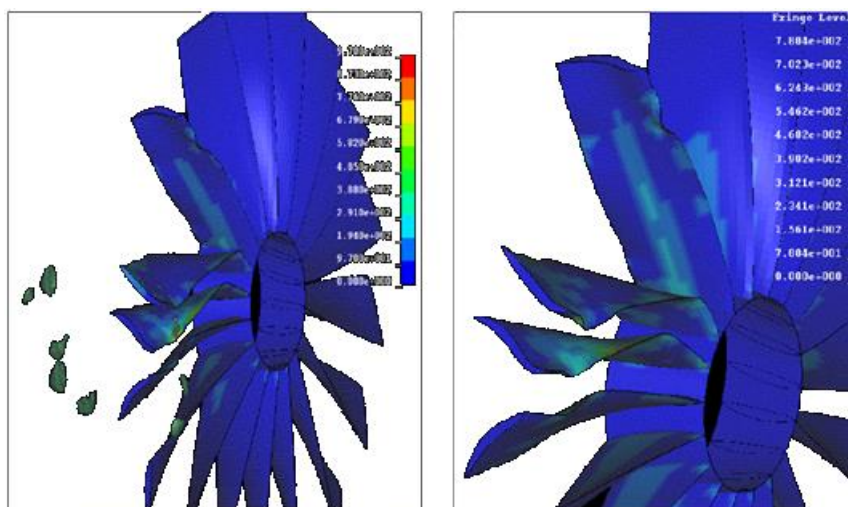


Рис. 1. Напряженно-деформированное состояние лопаток вентилятора при соударении с птицей

## Список литературы

- [1] Лепешкин А.Р., Ильинская О.И., Маликов С.Б. Динамика и прочность авиационных газотурбинных двигателей. М.: Изд-во МАИ, 2020. – 100 с.
- [2] Lepeshkin A. The blade releasing method for test of engine casing containment // ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE). Сер. "ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2013". 2013. С. 63749.
- [3] Shorr B.F., Serebriakov N.N., Melnikova G.V. et al. Computational and experimental study of bird failure at different speeds of collision with a flexible plate // The International Conference on Aviation Motors (ICAM 2020). Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1891. 012050.
- [4] Блажевич Ю.В., Иванов В.Д., Петров Ю.Б. и др. Моделирование высокоскоростного соударения методом гладких частиц // Математическое моделирование. 1999. № 1. С. 88-100.

## К моделированию условий существования искусственных водоемов на природных территориях

Багбеков Р.К., Богданов А.Н., Фельдшеров А.В., Шахназаров А.А.

НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва

В настоящее время этап перехода от инвентаризации природы к управлению землепользованием считается уже пройденным [1]. В этой связи одним из актуальных направлений прикладной механики природных процессов становится поиск методов решения проблем предшествующего неадекватного природопользования, их катастрофических последствий, ставших широко распространенным бедствием. Одним из существенных проявлений современного экологического кризиса является истощение пресных вод во многих земледельческих регионах.

В условиях современных реалий монетизации научно-исследовательских работ и их результатов требуется уже не только теоретический вывод из проведенного исследования, а значимый практический результат от его внедрения. В природопользовании особо важное значение приобретает именно рациональное использование природных ресурсов. Одним из вариантов обустройства долговременных водоаккумулирующих и водосберегающих бассейнов в полевых условиях является создание водонепроницаемых слоев на дне и боковых поверхностях имеющегося природного или искусственно созданного водоема, препятствующих потерям воды от ее просачивания через границы водоема в грунт. Этот способ является перспективным и более предпочтительным, поскольку другие известные способы использования для водозадержания искусственных пленок, природных пород и т.п. недолговечны, уязвимы к механическим повреждениям, недешевы.

Полимерно-минеральные материалы (далее – ПММ) создаются в НИИ механики МГУ уже несколько десятилетий [2]. Давая этим материалам общую характеристику, важно отметить их уникальность. По своему составу созданные ПММ есть твердое взаимодействующее с водой вещество, с присущими только ему свойствами – оно не горит, не имеет токсичных свойств, не подвергается разложению микроорганизмами. Его основу составляют глинообразный минерал и органический полимер, во взаимодействии начинающие играть роли, приводящие к проявлению у образующейся смеси гидронепроницаемых свойств, необходимых для ее использования в гидроизоляционных целях, для которых она была создана.

Математическое моделирование процессов фильтрации в природных грунтах достаточно сложно, требует больших временных затрат и дополнительной валидации и верификации полученных сведений в эксперименте. В целях проведенного исследования в моделирование было полностью сведено к разработке физической модели, после чего заменено натурным экспериментом, осуществление которого вполне выполнимо в обычных лабораторных условиях на имеющейся в НИИ механики МГУ экспериментальной базе. В специальную герметизированную колбу с регулируемым давлением засыпался грунт, на который укладывался водонепроницаемый слой из смеси ПММ с нижерасположенным грунтом в различных пропорциях ПММ / грунт. Давление плавно изменялось до величин, соответствующих давлению на глубине водоема от 1 до 57 м. В процессе эксперимента контролировалось просачивание воды через нижний слив колбы. Отсутствие просачивания свидетельствовало о надежном сохранении водонепроницаемым слоем своих гидрофобных свойств.

Создание математической модели, позволившей бы выполнить необходимые оценки параметров гидроизолирующего слоя и полностью заменить натурный эксперимент – вопрос будущего.

### Список литературы

- [1] Розанов Б. Г. Основы учения об окружающей среде: Учеб. пособие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 376 с.
- [2] Цатурян А. К., Шахназаров А. А. Лаборатории механики природных процессов и биомеханики. /Институт механики 60 лет. Под редакцией профессора Г.А. Любимова. КДУ, Университетская книга Москва, 2019. 290 с.



## Краткий обзор авторских исследований в области динамики многофазных систем

Болотнова Р.Х.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Доклад посвящен обзору основных результатов моей научно-исследовательской деятельности.

В процессе обучения на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова по специальности механика (с 1973 года) университетская среда предоставила возможность получать знания высочайшего уровня, которые преподавали нам выдающиеся ученые и профессора.

Обучение в университете послужило хорошим стимулом для определения привлекательного направления в моей дальнейшей научной деятельности.

После окончания МГУ в 1978 году трудовая деятельность началась в Отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР. Под руководством доктора физ.-мат. наук Наиля Хатыповича Ахмадеева проводились исследования динамики ударных волн в неоднородных упругопластических средах с фазовыми переходами и разрушением. Были созданы математические модели уплотняющейся пористой упругопластической среды, порошковой среды с химическими превращениями и повреждаемой среды для описания нестационарных движений ударных волн с анизотропным характером процесса динамического разрушения хрупкого и вязкого типов [1]–[6].

При изучении методов защиты объектов от откольного разрушения с помощью слоистых материалов, было предложено проведение предварительного акустического анализа. Для чего была разработана и реализована методика определения импедансов, линейных размеров слоев и их последовательности для пористых и многослойных мишеней, следующих из условия ограничения растягивающих напряжений в слоях и отсутствия наложения волн растяжения для снижения риска откольного разрушения. В результате численного моделирования ударного нагружения пластин, состоящих из 6 слоев с уменьшающимися жесткостями, подобранными так, чтобы импульсы растяжения, отраженные от контактных границ, формировались из условия отсутствия между ними временных пауз, и имели бы амплитуду, меньшую порогового уровня разрушения, удалось добиться снижения амплитуды импульса растяжения в три раза.

На базе модели уплотняющейся пористой среды решена задача ударного нагружения железной пластины с использованием тыльных пористых слоев. При прохождении импульса сжатия в тыльный пористый слой обнаружен режим непрерывного отражения в виде импульса растяжения от уплотняющейся пористой среды.

Продолжая исследования в области ударно-волновых технологий, были решены ряд задач, связанных с теоретическими основами создания новых материалов методами порошковой металлургии.

С использованием разработанной двухфазной модели порошковой среды с учетом химических превращений исследованы особенности процесса синтеза сульфида олова в результате экзотермической реакции в процессе ударно-волнового воздействия на порошковую стехиометрическую смесь олова и серы, помещенную в ампулу сохранения. В рамках акустического анализа и численного подхода показано, что в условиях выбранных опытах с жесткой ампулой сохранения, содержащей ячейку с исследуемой смесью, имеет место неоднородное нагружение смеси. В опытах при использовании мягкой ампулы сохранения происходит однородное воздействие, что является наиболее эффективным приемом в процессе ударно-волнового синтеза.

Модель повреждаемой упругопластической среды, обобщенная на двумерный случай, описывающая нестационарное движение неоднородных ударных волн с учетом анизотропии разрушения хрупкого и вязкого типов с помощью тензора повреждений, позволила исследовать особенности волновых процессов с учетом влияния краевых эффектов и двумерной кинетики на процесс динамического разрушения.

С 1999 года дальнейшая научная деятельность в Институте механики УФИЦ РАН была посвящена разработке методов построения аналитических широкодиапазонных уравнений состояния жидкости и газа. Эти исследования были связаны с задачами, поставленными академиком РАН Робертом Искандеровичем Нигматулиным, по изучению условий для достижения сверхвысоких давлений и температур в режиме коллапса паровых и газовых пузырьков в результате интенсивных акустических воздействий [7] – [12].

Под его руководством были получены уравнения состояния воды, ацетона, бензола и тетрадекана и их дейтерированных аналогов. Уравнения описывают газовую и жидкую фазы при интенсивных газогидродинамических процессах с учетом испарения и конденсации, учитывают диссоциацию и ионизацию, и которые успешно применяются различными научными коллективами при исследовании динамики ударных волн в газо-парожидкостных системах, а также для анализа состояния вещества в области суперсжатий.

Начиная с 2011 года в сотрудничестве со своими ученицами – Агишевой Ульяной Олеговной, Коробчинской Валерией Александровной и Гайнуллиной Элиной Фанилевной, успешно защитившими диссертации кандидата физ.-мат. наук, проводятся исследования, посвященные теоретическому анализу

динамических нестационарных процессов в пенных структурах и вскипающих газо- парожидкостных смесях в режимах взрывного истечения на основе разработанных двухфазных моделей газожидкостной смеси с применением новых подходов и методов численного моделирования [13] – [17]:

– Изучаются процессы взаимодействия мощного воздушного сферического ударно-волнового импульса с защитным барьером из водной пены с учетом явлений синерезиса. Исследуется динамика слабой ударной волны в водной пене на основе двухфазной упруго-вязко-пластической модели водной пены, описывающей ее поведение под воздействием ударных волн, не разрушающих пенную структуру. Важность и необходимость решения задач, касающихся применения водных пен в качестве демпфирующих преград от ударного воздействия, связаны с обеспечением эффективной безопасности в условиях чрезвычайных ситуаций.

– Рассматриваются различные режимы формирования расширяющейся струи флюида, истекающей из сосуда высокого давления через тонкое сопло, сопровождающиеся образованием вихревых зон и периодических пульсаций давления внутри струи. При формировании струи водного флюида сверхкритических параметров состояния анализируется образование всячего скачка уплотнения с образованием диска Маха. Анализ динамики таких струй необходим при решении проблем безопасности современного энергетического оборудования с целью предупреждения аварийных ситуаций.

– Исследуется эволюция вскипания струи жидкого азота в области криогенных температур и вакуумной атмосферы при различных начальных степенях перегрева, что чрезвычайно актуально при конструировании двигателей, работающих в условиях космического пространства.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему учителю, академику РАН Нигматулину Роберту Искандеровичу за его неоценимый вклад в мое научное развитие. Автор приносит благодарность безвременно ушедшему от нас доктору физ.-мат. наук Наилу Хатыповичу Ахмадеву, под руководством которого начиналось становление автора как профессионального исследователя.

## Список литературы

- [1]. Ахмадеев Н.Х., Болотнова Р.Х. Распространение волн напряжений в слоистых средах при ударном нагружении (акустическое приближение) // ПМТФ. 1985. № 1. С. 125–133.
- [2]. Ахмадеев Н.Х., Ахмадеев Р.Х., Болотнова Р.Х. О демпфирующих свойствах пористых прокладок при ударном сжатии и отколе // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11, № 12. С. 709–713.
- [3]. Ахмадеев Н.Х., Болотнова Р.Х. Влияние жесткости лицевого слоя на снижение растягивающих напряжений в двухслойном композите // Механика композитных материалов. 1986. № 4. С. 744–746.
- [4]. Ахмадеев Н.Х., Болотнова Р.Х. Моделирование реакции синтеза в порошковой смеси олова и серы, инициируемой ударным нагружением // Хим. физика. 1996. Т. 15, № 6. С. 102–112.
- [5]. Ахмадеев Р.Н., Болотнова Р.Х. и др. О химических превращениях в ударных волнах на примере образования сульфида олова // Журнал неорганической химии. 1998. Т. 43, № 8. С. 1299–1307.
- [6]. Динамика ударных волн в неоднородных средах с разрушением и химическими превращениями / Р.Х. Болотнова. – Москва: РУСАЙНС, 2023. –172 с.
- [7]. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano thermonuclear fusion / Nigmatulin R., Akhatov I., Topolnikov A., Bolotnova R., et. al. // Physics of Fluids. 2005. V.17, N 10. P.107106., 31 p.
- [8]. Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния органических жидкостей на примере ацетона // Доклады РАН 2007. Т. 415, № 5. С. 617 – 621.
- [9]. Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Метод построения // ТВТ. 2008. № 2. С. 206 – 218.
- [10]. Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Результаты расчетов // ТВТ. 2008. № 3. С. 362 – 373.
- [11]. Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТВТ. 2011. Т. 49. № 2. С. 310–313.
- [12]. Нигматулин Р. И., Болотнова Р. Х. Широкодиапазонные уравнения состояния бензола и тетрадекана в упрощенной форме // ТВТ. 2017. Т. 55, № 2, С. 206–215.
- [13]. Агишева У.О., Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Коробчинская В.А. Особенности вихреобразования при воздействии импульса давления на газовую область, ограниченную пенным слоем // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 47–56.
- [14]. Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование динамики ударного воздействия на водные пены с учетом вязкоупругих свойств и явлений синерезиса // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 5. С. 28–32.
- [15]. Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование влияния диссипативных свойств водной пены на динамику ударных волн // ПМТФ. 2020. № 4. С.15–21.
- [16]. Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Моделирование динамики струи при истечении через тонкое сопло водного флюида, находящегося в сверхкритическом состоянии // Т и А. 2022. Т. 29, № 3. С. 361–370.
- [17]. Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование процесса истечения жидкого азота через коническое сопло в вакуумную камеру // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49, № 24. С. 46–49.

# Развитие современных методов исследования задач аэроупругости летательных аппаратов

Веденеев В.В.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Явление флаттера, то есть динамической неустойчивости упругой конструкции в потоке воздуха, встречается в различных аэроупругих системах. Наиболее известный вид флаттера — флаттер крыла самолёта, экспериментально обнаруженный и теоретически изученный в начале XX века. С развитием авиации флаттер возникал и до сих пор возникает и в других элементах летательных аппаратов, где он исследован менее детально в силу сложностей как математических постановок задач, так и экспериментальных исследований.

В докладе проводится обзор работ коллектива НИИ механики МГУ, выполненных под руководством автора, в области флаттера панелей обшивки летательных аппаратов, флаттера рулей и корпусов сверхзвуковых БПЛА, флаттера лопаток компрессоров газотурбинных двигателей, флаттера воздушного винта и флаттера лопастей винта вертолета.

## 1 Панельный флаттер

Флаттер панелей обшивки возник на первых сверхзвуковых летательных аппаратах — немецких ракетах V-2. Этой задаче посвящена масса работ [1, 2, 3, 4], в которых предполагалось течение с большой сверхзвуковой скоростью, что позволяло использовать поршневую теорию для описания нестационарного поля давления. Гораздо позже было теоретически открыт и экспериментально подтверждён [5] другой вид панельного флаттера — одномодовый флаттер — который возникает при малых сверхзвуковых скоростях, где поршневая теория неприменима.

В докладе обсуждаются границы области флаттера прямоугольных и искривлённых панелей, рассчитанные в рамках линейной теории; развитие нелинейных флаттерных колебаний и возможные конфигурации предельных циклов; исследование влияния пограничного слоя на поверхности панели на её аэроупругую устойчивость; развитие флаттера при переходных режимах полёта и возможность управления предельными циклами колебаний [6, 7, 8, 9].

## 2 Флаттер корпуса и оперения БПЛА

Флаттер беспилотных летательных аппаратов при больших сверхзвуковых скоростях является одной из малоизученных проблем, стоящих перед их разработчиками. Современные методы расчета аэроупругой устойчивости либо позволяют решать упрощенные варианты реальных задач (например, без учета физико-химических явлений и реальной геометрии внешних обводов), либо требуют большой вычислительной мощности. Была разработана методика расчета флаттера летательного аппарата с использованием стандартного инженерного программного обеспечения и дополнительных разработанных программных модулей. Дано обоснование необходимости уточнения существующих методик расчета аэроупругости летательных аппаратов с учетом реальной геометрии конструкции и с возможностью учета физико-химических процессов, происходящих в воздухе при движении тел с большой скоростью. Разработаны теоретические положения расчета аэроупругой устойчивости с учетом этих факторов и приведены три примера расчета аэроупругой устойчивости модельных объектов, в том числе корпусных и рулевых форм флаттера, валидированных экспериментальными данными [10].

### 3 Флаттер лопаток компрессоров газотурбинных двигателей и энергетических установок

Флаттер лопаток является одной из основных проблем, стоящей перед конструкторами современных высоконапорных компрессоров авиационных двигателей и газовых турбин. Как правило, для прогнозирования и отстройки флаттера в практике российского авиадвигателестроения используется статистический метод [11], основанный на эмпирических данных многочисленных ранее проведенных испытаний. Однако, для современных лопаток новых типов результаты не могут быть достоверно предсказаны этим методом. В цикле работ [12, 13, 14] на основе энергетического метода разработана методика и программное обеспечение для расчёта флаттера лопаток, валидированная на 7 различных объектах, по которым есть экспериментальные данные испытаний на флаттер. В частности, впервые в российском авиадвигателестроении проведена отстройка от флаттера лопатки 1 ступени компрессора низкого давления на основе анализа зон подвода энергии к лопатке, полученных численным моделированием без промежуточных испытаний.

### 4 Флаттер лопастей винта вертолѐта и воздушного винта

Флаттер лопастей должен быть исключѐн на всех режимах работы винта вертолѐта и воздушного винта [15, 16]. В отечественном вертолетостроении применяются различные расчетные методы для исследования флаттера лопастей. При этом для одних методов необходимо уточнение используемых аэродинамических моделей, основанных на теории вихревой линии и требующих предварительных экспериментальных данных, а для других — усложнения упругих моделей, основанных на двухступенной модели лопасти, неприменимой к современным гибким лопастям. Описывается разработанная методика расчёта, математическая модель и программное обеспечение, учитывающие нестационарность обтекания лопастей, возможность возникновения флаттера по высшим модам, влияние упругого взаимодействия лопастей через систему тяг и валов [17].

### Список литературы

- [1] Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г. Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. 1963. М.: ВИНТИ, 1965. С. 34-90.
- [2] Dowell E.H. Aeroelasticity of plates and shells. Kluwer Academic Pub., 1974. 160 p.
- [3] Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 67-122.
- [4] Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
- [5] Vasily V. Vedeneev, Sergey V. Guvernyuk, Alexander F. Zubkov, Mikhail E. Kolotnikov. Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow // Journal of fluids and structures. 2010. Vol. 26. P. 764-779.
- [6] Anastasia Shishaeva, Vasily Vedeneev, Andrey Aksenov, Gennady Sushko. Transonic Panel Flutter in Accelerating or Decelerating Flow Conditions // AIAA Journal. 2018. Vol. 56. № 6. P. 997-1010.
- [7] Vsevolod Bondarev, Vasily Vedeneev. Influence of the viscous boundary layer perturbations on single-mode panel flutter at finite Reynolds numbers // Journal of fluid mechanics. 2018. Vol. 852. P. 578-601.
- [8] Anastasia Shishaeva, Andrey Aksenov, Vasily Vedeneev. The effect of external perturbations on nonlinear panel flutter at low supersonic speed // Journal of fluid and structures. 2022. Vol. 111. 103570.
- [9] F. A. Abdukhakimov, V. V. Vedeneev. Effect of yaw angle on flutter of rectangular plates at low supersonic speeds // AIAA Journal. 2022. Vol. 60. No. 7. P. 4256-4266.
- [10] Ф. А. Абдухакимов, А. В. Быков, В. В. Веденеев, Л. Р. Гареев, В. А. Нестеров. Исследование аэроупругих явлений корпуса и тонкостенных конструкций беспилотных ЛА при больших сверхзвуковых скоростях // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 4. С. 70-80.

- [11] Хориков А.А. Прогнозирование и диагностика флаттера лопаток осевых компрессоров авиационных ГТД. М.: ЦИАМ, Труды №1311. 2002. 352 с.
- [12] Vasily V. Vedeneev, Mikhail Kolotnikov, Pavel Makarov. Experimental validation of numerical blade flutter prediction// Journal of propulsion and power. 2015. Vol. 31. No. 5. P. 1281-1291.
- [13] Ф. А. Абдухакимов, В. В. Веденеев, М. Е. Колотников, П. В. Макаров. Численное исследование влияния конструктивных параметров на прогнозирование флаттера лопаток// Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2019. № 2. С. 17-26.
- [14] Макаров П.В., Колотников М.Е., Веденеев В.В., Абдухакимов Ф.А. Комплексный анализ динамического поведения лопаток компрессора на этапе проектирования// Авиационные двигатели. № 3 (20), 2023. С. 49-66.
- [15] Миль М.Л., Некрасов А.В., Браверман А.С., Гродно Л.Н., Лейканд М.А. Расчет и проектирование. Том 2. М.: Машиностроение. 1967. 424 с.
- [16] Peretz P. Friedmann, Rotary-Wing Aeroelasticity: Current Status and Future Trends// AIAA Journal. 2010. V. 42(10). P. 1953-1972.
- [17] Abduhakimov F., Bondarev V., Dadunashvili S., Konovalov A., Vedeneev V. Advanced coupled aeroelastic analysis of helicopter rotor system // 45th European Rotorcraft Forum 2019 (ERF). 2019. V. 2. P. 787-800.

## Акустические волны на границе раздела водонасыщенных и гидратонасыщенных песчаных пород горизонтальной и вертикальной поляризации

Галиакбарова Э.В.<sup>1</sup>, Каримова Г.Р.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа,

<sup>2</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Природные газогидраты образуются при высоких давлениях и низких температурах, большая часть которых сосредоточена в водоемах мирового океана. Газогидраты метана являются перспективным источником энергии углеводородного сырья, поэтому построение математических моделей акустических волн на границе раздела водонасыщенных и гидратонасыщенных пород позволит более детально развить теоретические основы освоения подобных залежей и определять масштабы таких пластов [1, 2]. В работе [3] предложена карта возможных режимов разложения гидратов в природных пластах.

По лабораторным исследованиям акустических особенностей газогидратных пород [4] рассматривалась задача распространения плоской гармонической волны вертикальной (рис. 1 а) и горизонтальной (рис. 2 б) поляризации на границе раздела между пористой средой, насыщенной гидратом метана, и пористой средой, насыщенной водой [5]. Полагается, что источник возбуждения поверхностной волны находится достаточно далеко от плоскости раздела, насыщенные пористые среды приняты упругим изотропным телом. Математическая модель включает волновые уравнения для потенциалов скоростей (векторных и скалярных), с учетом компонент векторов смещения и напряжения частиц среды, для граничных сред записаны условия непрерывности смещений и напряжений.

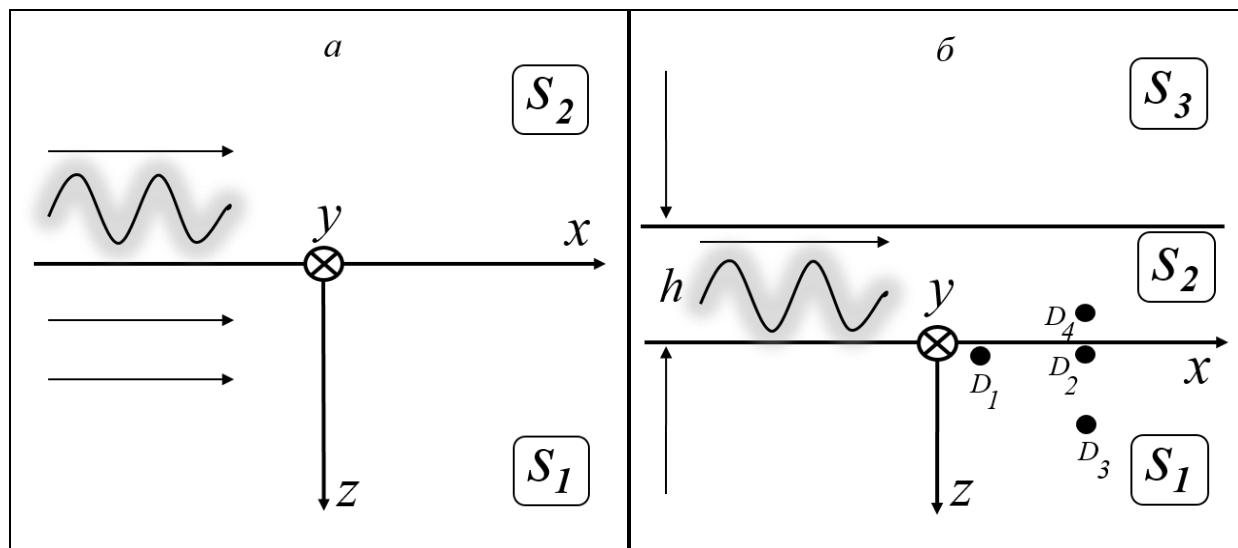


Рис. 1. Схемы распространения волны вертикальной (а) и горизонтальной (б) поляризации

По лабораторным данным [4] проведен аналитический и численный анализ дисперсионных уравнений. Для волн вертикальной поляризации выделены случаи, когда получаются тривиальные решения ( $C=0$ ) для скорости поверхностных волн и классические решения для скорости волны Стоунли. При распространении поперечной волны горизонтальной поляризации между пористой средой, насыщенной гидратом и слоем пористой среды толщины  $h$ , насыщенным водой, в таком случае получено, что волна может локализоваться в слое водонасыщенного песка. Построена динамика импульсного сигнала с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье при длине волны превосходящей толщину слоя в 8 раз. Предлагается определять наличие гидрата в насыщенном песке на дне водоемов по глубине проникания и изменению скорости.

## Список литературы

- [1] Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Каримова Г.Р. «Динамика волн Стоунли на границе «вода – насыщенный водой или газогидратом песок»» // Инженерно-физический журнал. 2022. Т. 95. № 4. С. 869-875.
- [2] Galiakbarova E.V., Karimova G.R., Rafikova G.R. Dynamics of Sonic Wave under Reflection and Transmission at the Interface of Water and Sand Saturated with Water or Gas Hydrate // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No. 5. Pp. 1621–1628.
- [3] Шагапов В. Ш., Сыртланов В.Р., Галиакбарова Э. В. Анализ возможных режимов разложения газовых гидратов в природных пластах // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 1997. – №. 6. – С. 101.
- [4] Дучков А.Д., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Дробчик А.Н. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лед или гидраты метана и тетрагидрофурана // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 1. С. 94-99.
- [5] Галиакбарова Э.В., Каримова Г.Р. Поверхностные акустические волны на границе двух пористых сред, насыщенных гидратом метана и водой (льдом) // Прикладная механика и техническая физика. 2024. DOI 10.15372/PMTF202315419.

# Взаимодействие волны давления с пузырьковой областью

Галимзянов М.Н., Агишева У.О.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

## Введение

Проблема создания гидроакустических аналогов лазерных систем заключается в фокусировке энергии волн в жидкости. Эти системы способны поглощать и увеличивать амплитуду внешнего воздействия, а затем переизлучать его с возможной концентрацией энергии в определенном направлении [1]. В исследованиях также рассматривается анализ фокусировки энергии волн в пузырьковых средах. Например, в работе [2] изучается динамика распространения импульсных сигналов в жидкости с пузырьковой завесой конечных размеров. Показано, что в зависимости от временной протяженности начального импульса внутри завесы может происходить увеличение амплитуды давления выше, чем у исходного сигнала. В работе [3] были проведены численные исследования процесса «накачки» сферического пузырькового кластера и формирования в нем башнеобразного импульса давления в рамках модели Иорданского, Когарко, Виингардена (ИКВ). Экспериментально показано, что изменение объемной концентрации газовой фазы позволяет регулировать координату фокусировки волны. Кроме того, амплитуда волны, излучаемой кластером в жидкость, может превышать амплитуду волны, вызывающей возбуждение кластера, на 1–2 порядка. Результаты численного моделирования ударной волны с пузырьковым кластером в форме полого цилиндра в жидкости и возникновения направленного излучения в жидкость представлены в работе [4].

Работа [5] посвящена экспериментальному изучению взаимодействия плоской ударной волны с сферическим пузырьковым кластером в жидкости. В результате исследования было обнаружено, что такое взаимодействие приводит к образованию уединенной волны давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду ударной волны. Установлено, что структура этой уединенной волны зависит не только от параметров кластера и амплитуды ударной волны, но также от соотношения диаметров кластера и рабочего участка. В работе [6] проведено экспериментальное исследование эволюции и структуры ударной волны умеренной амплитуды в жидкости с пузырьковыми кластерами. Полученные данные о скорости и структуре таких ударных волн были сравнены с теоретическими моделями. Экспериментально показано, что для волн небольшой амплитуды уравнение Буссинеска хорошо описывает структуру переднего фронта осциллирующей ударной волны. Кроме того, обнаружено, что резонансное взаимодействие пузырьковых кластеров в волне может привести к увеличению амплитуды осцилляций в ударной волне

## Основные уравнения

Запишем систему макроскопических уравнений, которая используется для решения подобных задач, в приближении цилиндрической симметрии. В эту систему входят уравнения сохранения масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках [8].

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{v_r}{r} + \rho_i \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \quad (i = l, g), \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{v_r}{r} + n \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0, \\
 \rho \frac{dv_r}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial r} &= 0, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial z} = 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad w = \frac{da}{dt}, \\
 \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \alpha_l + \alpha_g &= 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \quad \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l.
 \end{aligned} \tag{1}$$



Здесь использованы следующие обозначения:  $\alpha_i$  – объемные содержания фаз,  $v_r$  и  $v_z$  – радиальная и осевая составляющая скорости,  $a$  – радиус пузырьков,  $p$  – давления фаз,  $\rho_{i0}$  – истинные плотности фаз,  $\gamma$  – показатель адиабаты для газа,  $q$  – интенсивность теплообмена,  $n$  – число пузырьков в единице объема,  $w$  – радиальная скорость пузырьков. Нижними индексами  $i = l, g$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

Согласно исследованиям из [9], скорость движения границы пузырьков  $w$  бралась, как сумма двух составляющих  $w = w_R + w_A$ .  $w_R$  определяется из уравнения Рейля–Ламба, а составляющая  $w_A$  бралась из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса  $a$  в несущей жидкости в акустическом приближении

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_l \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0}, \quad w_A = \frac{p_g - p_l}{\rho_l^0 C_l \alpha_g^{1/3}},$$

где  $\nu_l$  – вязкость жидкости,  $C_l$  – скорость звука в «чистой» жидкости.

Тепловой поток  $q$  для расчета нелинейных волн принято задавать приближенным конечным соотношением [8]

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3, \quad \text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}.$$

где  $T_0 = \text{const}$  – температура жидкости,  $c_g$  и  $\lambda_g$  – теплоемкость и теплопроводность газа,  $\text{Nu}$  и  $\text{Pe}$  – числа Нуссельта и Пекле.

Здесь стоит отметить, что из этой математической модели в частном случае при  $\alpha_{g0} = 0$  следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство в свою очередь позволяет использовать сквозные методы расчета.

## Заключение

Исследована динамика волн типа «ступенька» в канал с водой, содержащей соосный пузырьковый кластер в виде сферы, полого и сплошного цилиндра. Полюй цилиндр рассматривался в двух случаях: соприкасающийся с боковой поверхностью канала и расположенный на оси канала без соприкосновений. На основе численных расчетов установлены следующие закономерности:

- взаимодействие волны типа «ступенька» со сферическим пузырьковым кластером в жидкости приводит к генерации уединенной волны давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду ударной волны. Уменьшение радиуса пузырьков и объемного содержания газа приводит к увеличению амплитуды уединенной волны из-за увеличения акустической жесткости пузырькового кластера;

- в случае кластера сферической формы, прилегающего к торцевой поверхности канала, воздействие на торцевую стенку с наибольшей амплитудой волны происходит в случае кластера с радиусом равным половине радиуса канала. Данное воздействие может в десятки раз превышать случай отсутствия пузырьковой кластера;

- в случае кластера в форме полого цилиндра не соприкасающегося с боковой поверхностью существует предельное значение ширины слоя «чистой» жидкости, окружающий пузырьковый кластер, увеличение которого не приводит к увеличению максимального значения амплитуды давления на оси трубы. Для рассмотренных расчетов это значение составило  $R_c = 0.3$  м;

- сравнение пузырьковых областей в виде полого и сплошного цилиндров показало, что взаимодействие импульса со сплошным цилиндром приводит к формированию волны с амплитудой, в разы превышающий случай взаимодействия с пузырьковым кластером в виде полого цилиндра;

- для рассмотренных случаев проанализировано влияние протяженности пузырьковых областей и начального объемного содержания на динамику волны внутри пузырьковой области и в канале.

Данные исследования дополняют результаты, полученные в ранних работа авторов [10, 11, 12].

## Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности №075-00570-24-01 ("Гидрогазодинамика многофазных, термовязких и микродисперсных сред").

## Список литературы

- [1] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. С. 435.
- [2] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа, 2002, № 2, С. 139–147. DOI: 10.1023/A:1015818602291
- [3] Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Лазарева Г.Г. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Доклады академии наук, 2001, Т. 381, № 6, С. 773–776. DOI: 10.1134/1.1433529
- [4] Кедринский В.К., Вшивков В.А., Дудникова Г.И., Шокин Ю.И., Лазарева Г.Г. Фокусировка осциллирующей ударной волны, излученной тороидальным облаком пузырьков // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2004, Т. 125, № 6, С. 1302–1310. DOI: 10.1134/1.1777626
- [5] Донцов В.Е. Взаимодействие ударной волны со сферическим газожидкостным кластером // Прикладная математика и технифеская физика, 2004, Т. 45, № 1, С. 3–11. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17249170>
- [6] Донцов В.Е. Распространение волн давления в газожидкостной среде кластерной структуры // Прикладная математика и технифеская физика, 2005, Т. 46, № 3, С. 50–60. DOI: 10.1007/s10808-005-0084-7
- [7] Шагапов, В.Ш. Динамика гетерогенных сред при наличии физико-химических превращений // Дисс... д-ра физ.-мат. наук. 1987.
- [8] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука, 1987. С. 464.
- [9] Шагапов, В.Ш., Вахитова Н.К. Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакции в газовой фазе // Физика горения и взрыва, 1989, № 6, С. 14–22. [https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE\\_ID=135857](https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE_ID=135857)
- [10] Галимзянов М.Н. Динамика импульсного сигнала в цилиндрическом канале с жидкостью, содержащем сферический пузырьковый кластер // Вестник Башкирского университета, 2022, Т. 27, № 2, С. 275–286. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.2.5
- [11] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Агишева У.О. О фокусировке волн давления в тороидальном пузырьковом кластере // Вестник Башкирского университета, 2022, Т. 27, № 1, С. 9–17. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.1.2
- [12] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Взаимодействие волны давления в цилиндрическом канале со сферическим пузырьковым кластером // Прикладная механика и техническая физика, 2023, Т. 64, № 2, С. 96–104. DOI: 10.15372/PMTF202215182

## Эволюция ударных волн в насыпной среде из песка при увеличении водосодержания

Р.Ф. Гизатуллин<sup>1</sup>, А. Ф. Мухаметзянов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

<sup>2</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа, Россия

Ударная труба состоит из камеры высокого давления (КВД) и камеры низкого давления (КНД), разделенных тонкой диафрагмой на две части. [1]. В наших экспериментах использовалась ударная труба с пьезоэлектрическими датчиками, регистрирующими импульсы давления в КНД и тензометрическим датчиком, который регистрирует уровень давления разрыва в КВД (рис.1).

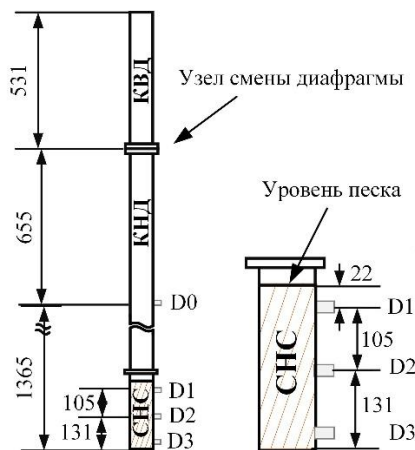


Рис. 1. Ударная труба и расположение датчиков.

Нагнетание воздуха в КВД до давления 60 кПа приводит к разрыву диафрагмы, в нашем случае из кальки, разделяющей КВД и КНД. После разрыва диафрагмы в трубе формируется ударная волна. Эпюра ее давления регистрируется датчиком D0. Волна распространяется вдоль по трубе до столкновения с препятствием, далее отражается, малая доля проходит в препятствие.

В работе изучаются ударно-волновые свойства насыпной среды из песка, поры которого насыщены водой. Водогазонасыщенная среда помещается в секцию насыпных сред (СНС). Эксперимент проводился для песка с влажностью в диапазоне от 0 до 85%. Нулевая влажность соответствует насыпкам, высушенным в вакуумном шкафу. При наполнении мы добивались одинаковой пористости за счет утряски и частичной трамбовки. Пористость во всех экспериментах составила 40,5 %, соответственно высота насыпной среды находилась на одном и том же уровне. Амплитуда ударной волны определяется давлением разрыва диафрагмы. Давление разрыва  $\Delta p_0$  в экспериментах составляла  $38 \pm 4$  кПа.

Рассмотрим эпюры давления датчиков D1, D2 и D3, расположенных под поверхностью песчаной насыпки на глубине 22 мм, 127 мм и 158 мм соответственно (рис.2). Первый импульс назовем «основным», а переотраженный импульс «зондирующим» [2]. По изменению условий прохождения, формирования основного и зондирующего импульсов, их поглощению и генерации колебательных процессов по мере увеличения водонасыщенности можно условно выделить 6 диапазонов.

В сухом песке после воздействия основного импульса, на зондирующем импульсе, формируются пики (D1 и D2), амплитуды, которых превышают амплитуду основного импульса (рис.2 А). Этот процесс происходит потому, что первый импульс изменил структуру песка и произошла перегруппировка песчинок. Для объяснения формирования пика в работе [2] предложена физическая модель. Под давлением импульса сжатия насыпная среда сжимается пока есть импульс избыточного давления. После прохождения импульса происходит разгрузка, верхний слой насыпки после сжатия релаксирует, «расширяясь» в течение 13 мс. При прохождении импульса переотраженной волны через «разрыхленный» слой частицы песка ускоряются, к моменту завершения импульса «натякаются» на менее возмущенный слой, их торможение приводит к образованию пика давления на фоне импульса.

При уровне водонасыщенности от 0 до 4% (1-й диапазон) основной импульс на всех датчиках проходит до дна. Четко наблюдается пик на заднем фронте зондирующего импульса. При 4% влажности на нижнем датчике (D3) появляются осцилляции (волновые пачки). Таким образом, даже небольшое количество влаги – 2%, «скрепляет» насыпную среду. О чем свидетельствует уменьшение пика зондирующего импульса.

При уровне водонасыщенности 6% ударная волна не доходит до нижнего датчика, энергия импульса переформируется в высокочастотные колебания. Зондирующий импульс сглаживается, пик практически исчезает (D1). По мере распространения импульс преобразуется в волновой пакет в виде цуга. При 10% до нижнего датчика импульс доходит только в виде пульсаций. (рис.2 В) Таким образом, диапазон водонасыщенности от 6 до 12 % (2-й диапазон) характеризуется тем, что пик зондирующего импульса исчезает и появляются осцилляции на уровне датчика D2.

Диапазон водонасыщенности от 15 до 25 % (3-й диапазон) (рис.2 С) характеризуется формированием пика зондирующего импульса иной природы и появлением на датчиках D2 и D3 колебательных пачек и гармонических колебаний на всем диапазоне между основным, переотраженным и дважды переотраженным импульсами.

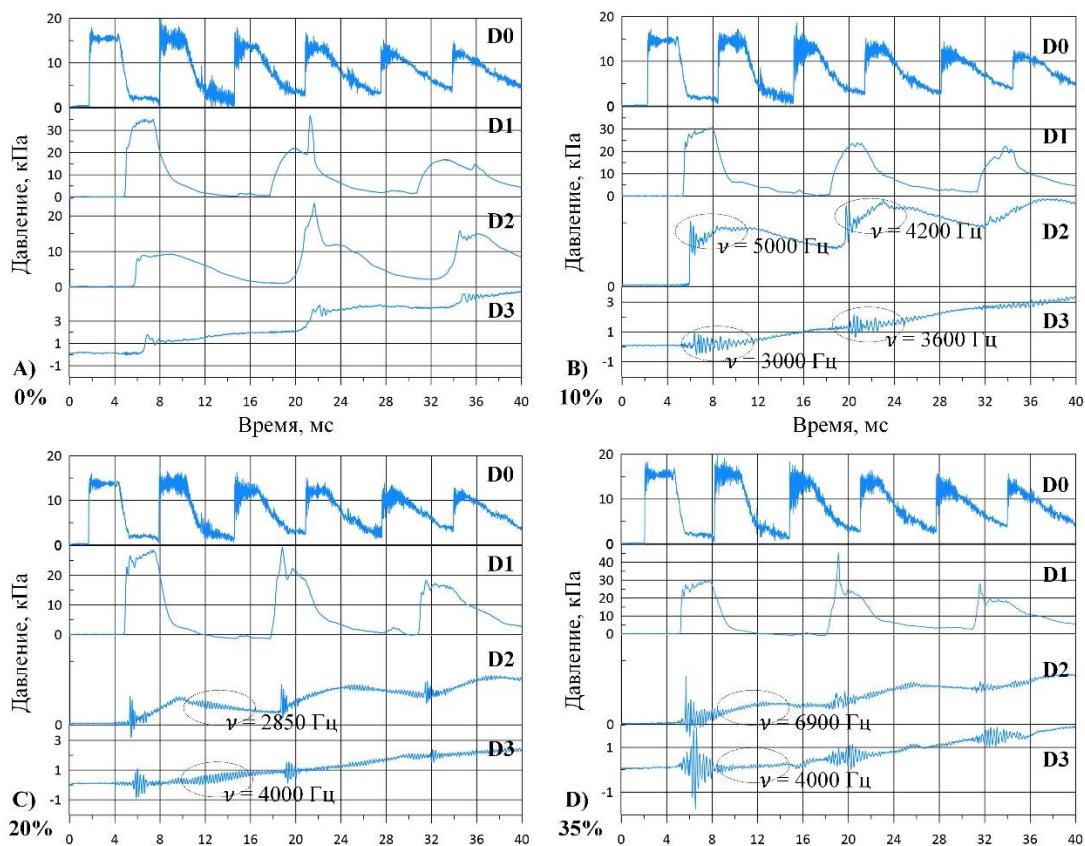


Рис. 2. Эпюры давления ударной волны в песке на датчиках D0 – D3 при водонасыщенности 0 – 25%: А) 0%; В) 10%; С) 20%; D) 35%.

Для диапазона 30-45% (4-й диапазон) характерно постепенное увеличение амплитуды пика зондирующего импульса (D1). При водонасыщенности 35 % амплитуда зондирующего почти вдвое превышает амплитуду основного импульса (рис.2 D). На датчиках D2 и D3 сигнал представлен в виде волновой пачки. Зондирующий импульс на этих датчиках практически не проявляется (рис.3 А).

При влажности 50 - 70% (5-й диапазон) на датчике D2 снова, как и при влажности 0-25%, появляется «ступенька» (рис.3 В). Высокочастотные осцилляции несколько сглаживаются. До дна секции (датчик D3) импульсы доходят только в виде цуга (волновой пачки). Таким образом, можно сказать, что улучшилась акустическая проводимость среды.

При уровне водонасыщенности 75 % и более (6-й диапазон) картина кардинально меняется (рис.3 С). На датчиках D1 и D2 импульсы полностью сглаживаются, высокочастотные колебания исчезают. Мы видим, что в этом диапазоне влагосодержания, импульсы четко проходят до дна секции насыпных сред. То есть насыпная среда стала акустически прозрачной. Если сравнить эпюры давления при 75% и 85% на датчиках D1-D3, можно сказать сигнал при более высокой водонасыщенности проходит намного лучше, так как амплитуда давления как основного, так и зондирующего импульса при 85% значительно выше (рис.3 D).

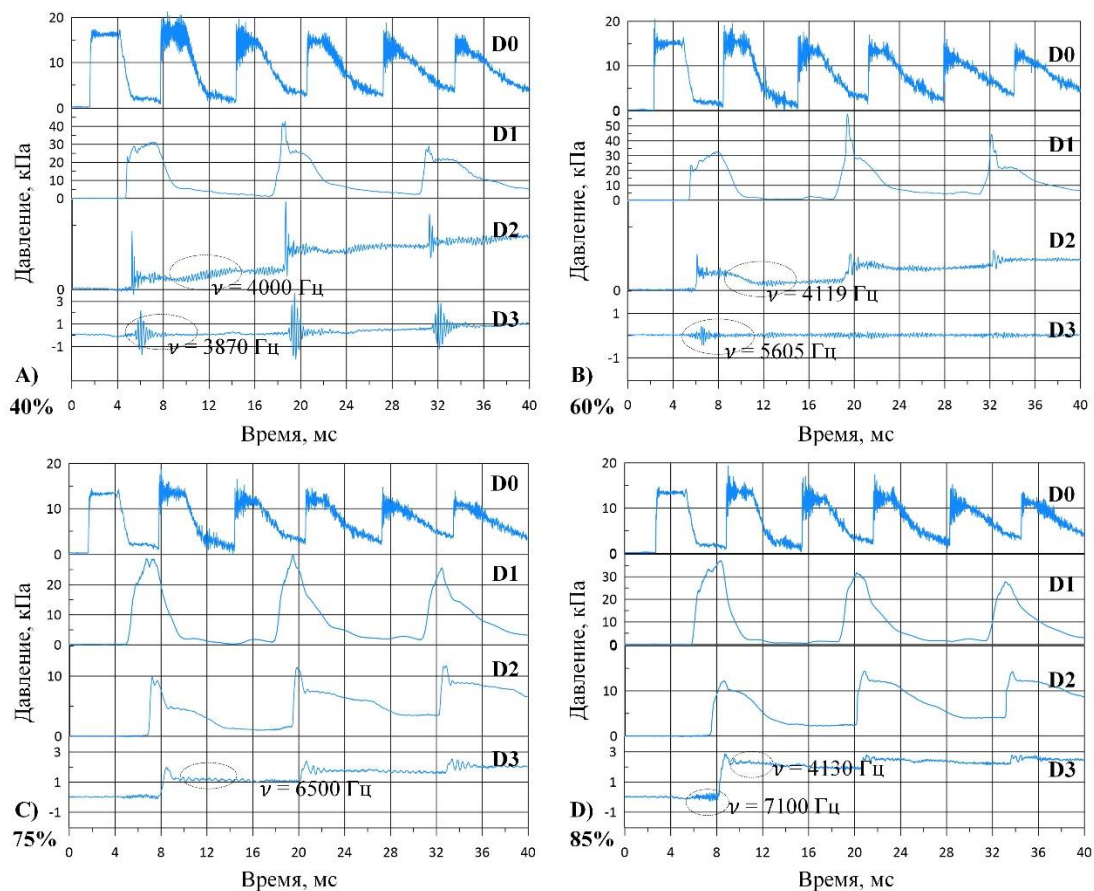


Рис. 3. Эпюры давления ударной волны в песке на датчиках D0 – D3 при водонасыщенности 40 – 85%:

А) 40%; В) 60%; С) 75%; D) 85%.

#### Закключение.

1) В сухом песке при прохождении зондирующего импульса происходит формирование пика на глубине 2 см от поверхности, а на глубине 12,7 см амплитуда пика превосходит амплитуду основного импульса более чем в 2 раза.

2) Амплитуда формирующегося пика давления (датчик D1) при прохождении зондирующего импульса по мере увеличения водонасыщенности растет и, при влажности выше 12 процентов, превышает амплитуду основного импульса. При влажности 45% - превышает вдвое. При дальнейшем увеличении водонасыщенности амплитуды основного и зондирующего импульсов постепенно выравниваются.

3) По мере увеличения влажности, падающий и зондирующий импульс возбуждают осцилляции на уровне датчиков D3 и D4

4) При водосодержании 75% и выше, среда становится «акустически прозрачной».

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00274, <https://rscf.ru/project/24-11-00274/>

## Список литературы

1. Зельдович Б., Райзер Ю. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – Рипол Классик, 2013.
2. Ахметов А.Т., Гималудинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48. № 1. С. 23-26.

## Динамика волн в открытом канале при наличии пузырьковой зоны

Гималтдинов И.К., Столповский М.В., Родионов А.С., Насыров А.А.

ФГБОУ ВО Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

Наличие в жидкости газа в виде распределенных по объему пузырьков кардинально меняет ее акустические свойства [1-3] – происходит аномальное снижение скорости малых возмущений и усиление диссипативных свойств. Это позволяет использовать пузырьковые экраны как для гашения ударно волновых воздействий, так и их усиления [4-7]. Особенности отражения и преломления на границе воды и воды с пузырьками при прямом и косом падении акустической волны изучались в работах [8-10].

Данная работа посвящена численному исследованию динамики импульсов давления отраженных от границ пузырьковой завесы, когда на нижней границе расчетной области для волн поставлены условия как на жесткой стенке, а верхняя граница является абсолютно мягкой границей.

Пусть в канале, который заполнен жидкостью находится пузырьковая завеса с газовыми пузырьками одинакового радиуса, расположенную в исходном состоянии между двумя плоскостями с координатами  $x_{01}$  и  $x_{02}$  ( $x_{02} - x_{01} = l_0$  толщина завесы), рис. 1. Будем полагать, что нижняя граница  $y=0$  канала является жесткой границей, а верхняя граница  $y=L_y$  абсолютно мягкой [11]. В момент времени  $t=0$  начинается воздействие граничного давления на границе  $x=0$ . Требуется определить волновое движение в канале при  $t>0$ .

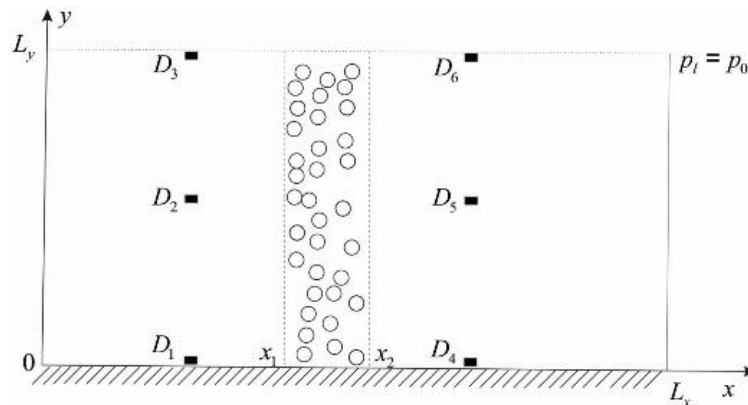


Рис.1. Схематическое изображение расчетной области.  $D_1$ – $D_6$  – датчики давления.

Для описания волнового движения, принимая общие допущения для пузырьковых жидкостей, принята система уравнений из [7]

Иницирующее возмущение давления на границе пузырьковой жидкости ( $x=0$ ) задается в виде колоколообразного импульса. На границе  $y=0$  расчетной области приняты условия как на жесткой стенке, т.е. равенство нулю нормальной компоненты скорости, а на границе  $y=L_y$  постоянно поддерживается постоянное

значение давления равно начальному  $p_0$ , что соответствует свободной границе. На границе  $x = L_x$  задается неотражающее граничное условие на основе импедансного соотношения [12].

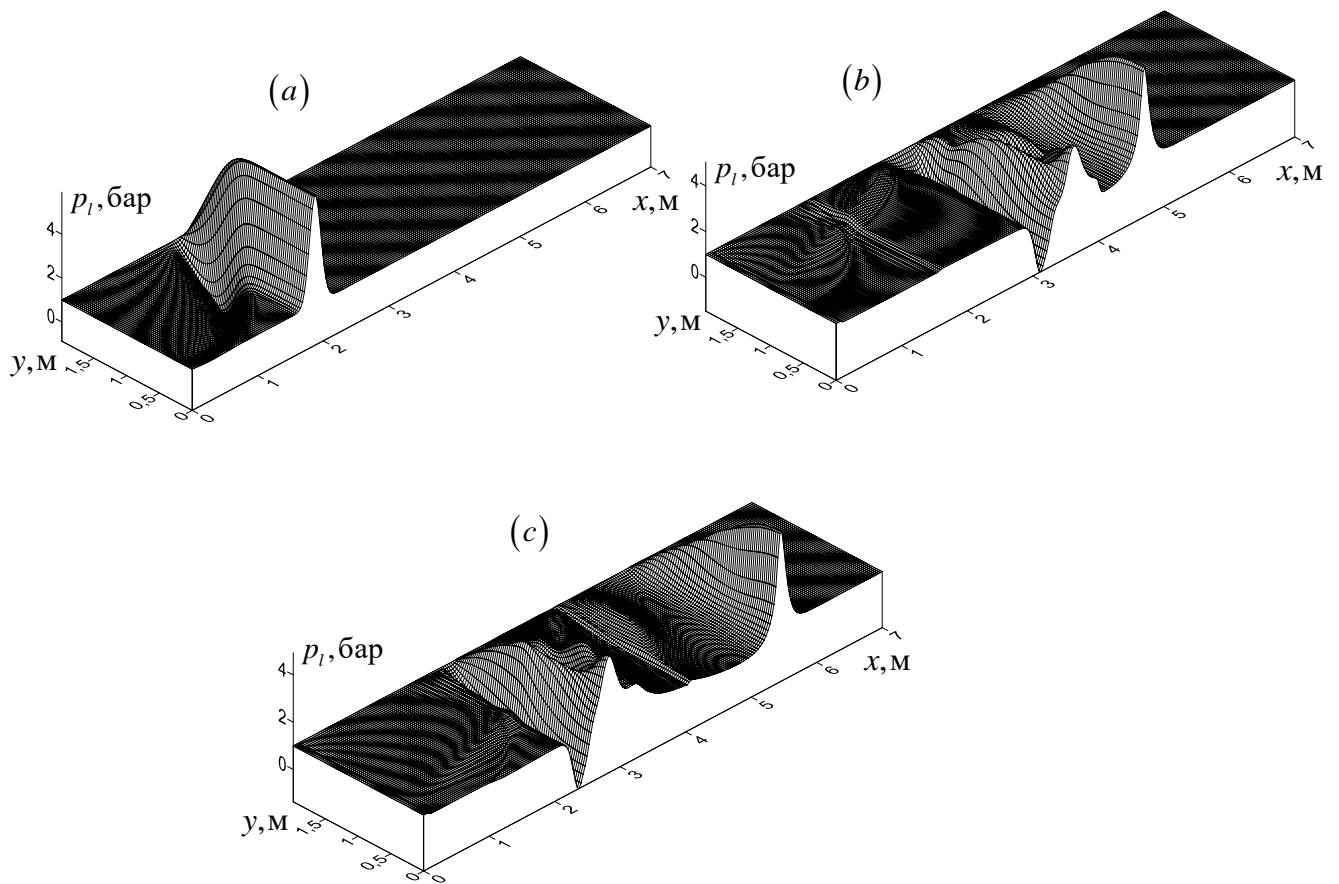


Рис. 2. Эпюры давления в моменты 1.5 мс (а), 3.5 мс (b), 4.0 мс (с). Параметры расчета: жидкость вода, газ-воздух  $\alpha_{g0}=0.001$ ,  $a=1.25$  мм,  $x_1=4.0$  м,  $x_2=4.1$  м,  $\Delta p_{l0}=0.5$  МПа,  $\rho_{l0}^0=1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu_l=10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $C_l=1500$  м/с,  $\rho_{g0}^0=1.29$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_g=1005$  Дж/кг\*К,  $\lambda_g=0.026$  Вт/м\*К,  $T_0 = 300$  К,  $p_0=0.1$  МПа.

На рис. 2 представлены эпюры давления, когда в области заполненной водой есть пузырьковая зона, рис. 1. Под действием граничного давления в канале формируется колоколообразный импульс давления амплитудой 5 бар, распространяющийся по направлению оси  $Ox$  (рис. 2. (a)). Вместе с основным импульсом амплитудой 5 бар, за ним распространяется волна разрежения, связанная с влиянием границы  $y = L_y$ .

При взаимодействии импульса с пузырьковой завесой происходит его частичное отражение и прохождение через завесу. Для импульса падающего со стороны жидкости на границу  $x=x_1$  эта граница эквивалентна свободной границе т.е. отражение от этой границы происходит с инверсией фазы, а для импульса, падающего со стороны пузырьковой жидкости граница  $x=x_2$  эквивалентна жесткой стенке [11], (рис.2, b, c).

В результате исследований установлено:

- динамика импульса в открытом канале сопровождается волной разрежения из-за влияния свободной границы;
- существует предельное расстояние, на котором импульс полностью угасает из-за влияния свободной границы.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ на тему «Разработка и создание малотоннажных продуктов и реагентов (ингибиторы коррозии и солеотложения, антиоксиданты, биоциды, присадки и др.) для процессов нефтегазохимии и очистки водных сред от загрязнений, замещающих импортные вещества и материалы. Теоретические и экспериментальные подходы (FEUR –2023–0006)».

## Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1., 2 М.: Наука, 1987.386 с.
- [2] Кедринский В. К. Гидродинамика взрыва : Эксперимент и модели / Валерий Кириллович Кедринский; Рос. акад. наук. Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики им. М.А. Лаврентьева. - Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. - 434 с. : ил. ;
- [3] Губайдуллин А. А. Волны в газожидкостных системах: Монография. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2008. 184 с.
- [4] Гималтдинов И.К., Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш. Эволюция волн давления в жидкости, содержащей зону жидкости с пузырьками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2001. № 3. С. 133.
- [5] Агишева, У. О., Галимзянов, М. Н. Волны давления в трубе, заполненной жидкостью, содержащей пузырьковую зону в виде цилиндра // Многофазные системы. – 2023. – Т. 18, № 3. – С. 207-209. – DOI 10.21662/mfs2023.3.059. – EDN IWGZRI.
- [6] Галимзянов, М. Н. Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме тора // Многофазные системы. – 2021. – Т. 16, № 3-4. – С. 112-120. – DOI 10.21662/mfs2021.3.015. – EDN KJOCAC.
- [7] Галимзянов, М. Н., Гималтдинов И. К., Шагапов В. Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. – 2002. – № 2. – С. 139-147. – DOI 10.1023/A:1015818602291. – EDN YUEMRR.
- [8] Shagapov V.Sh., Gimaltdinov I.K., Khabeev N.S., Bailey S.S. Acoustic waves in a liquid with a bubble screen // Shock Waves. 2003. V. 13. No 1. P. 49–56. 13.
- [9] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 40–48.
- [10] Губайдуллин, Д. А. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды / Д. А. Губайдуллин, Ю. В. Федоров // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64, № 2. – С. 162-173. – DOI 10.7868/S0320791918020053. – EDN YSOOQV.
- [11] Исакович М.А. Общая акустика. Учебное пособие. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1973. 502 с.
- [12] Ильгамов М.А. Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: Физматлит, 2003. 240 с.



## Условия левитации капли над гладкой поверхностью за счет избыточного давления при парообразовании

Демин В.А., Демин Ф.В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

Изучение физических процессов, связанных с поведением капельных объектов, имеет колоссально большое прикладное значение. Особенно часто приходится иметь дело с капельными системами в теплофизике [1]. Процессы горения различных видов топлива (включая многофазные), работа систем охлаждения, физико-химические процессы перемешивания и, наоборот, разделения смесей на компоненты: в каждой из этих областей, так или иначе, приходится сталкиваться с капельными системами. Ансамбли капель образуются при искусственном диспергировании жидкости. Также их появление практически всегда сопутствует процессам кипения. В этом случае капли могут появляться в результате гидродинамической неустойчивости больших объемов жидкости и их разрушения на многочисленные фрагменты.

Пусть рассматривается капля жидкости, лежащая на твердой поверхности. По мере приближения к критической точке, когда парообразование на границе раздела становится достаточно интенсивным, между каплей и подложкой пороговым образом появляется тонкий слой пара, который приводит к возникновению подъемной силы (рис. 1). Наличие стационарной прослойки пара между каплей и подложкой связано с тем, что нагрев капли становится настолько сильным, что этот пар не успевает покинуть пространство из под капли. Избыточное давление за счет пара поддерживает каплю в состоянии левитации. В результате того, что капля отрывается от подложки, происходит кризис теплопередачи, т.к. слой пара обладает значительно меньшей теплопроводностью, нежели жидкость. Этот эффект называется в литературе кризисом кипения.

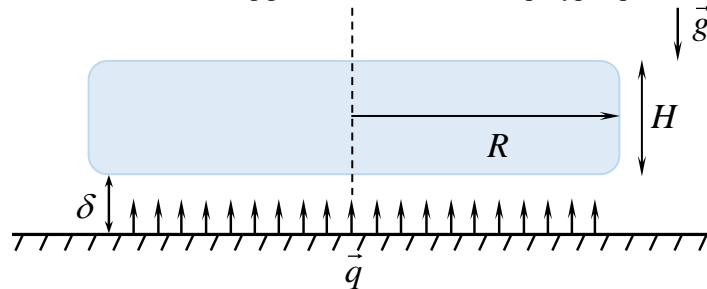


Рис. 1. Левитация капли за счет избыточного давления пара под ней;  $R$  – радиус капли,  $H$  – высота,  $\delta$  – высота, на которой парит капля,  $q$  – тепловой поток

Проведем описание состояния, когда капля за счет парообразования находится в подвешенном положении над гладкой поверхностью [2,3]. Рассчитаем общее давление под каплей, которое состоит из двух частей: парциальных давлений воздуха  $p_0$  и пара  $p'$ . Условие равновесия, проистекающее из равенства сил тяжести и избыточного давления, имеет вид:

$$mg = \frac{4}{3} \pi abc \rho_w g = p' \pi R^2. \quad (1)$$

Здесь объем капли вычисляется как для двухосного эллипсоида. В этом случае полуоси  $a = b = R$ , а  $2c = H$ ,  $\rho_w$  – плотность воды. В результате получаем давление пара под каплей, уравнивающее силу тяжести:

$$p' = \frac{2}{3} H \rho_w g. \quad (2)$$

Теперь получим выражение для высоты  $\delta$ , на которой находится капля. Испарение с поверхности жидкости определяется формулой для плотности потока пара  $J$ , известной как закон Герца – Кнудсена. По определению плотность потока – это масса вещества, переносимая через единицу площади за единицу времени:

$$J = \frac{1}{S} \frac{dm}{dt}. \quad (3)$$

Здесь  $dm$  – это масса, переносимая через поверхность нижней части капли площадью  $S$  за время  $dt$ . В стационарных условиях количество пара, рождающееся в процессе испарения на нижней поверхности капли, и выходящее из под нее за единицу времени, должны быть равны. Выход пара происходит через боковую поверхность площадью  $2\pi R\delta$ , где  $\delta$  – высота этого ободка, а  $2\pi R$  – его длина. Скорость представим себе как расход некоторого флюида в результате просачивания пара через воздух как пористую среду под действием сформировавшегося

гося градиента давления. Иными словами, будем использовать закон Дарси, чтобы связать скорость истечения пара с градиентом давления. Значение динамической вязкости можно оценить с хорошей степенью точности из законов молекулярно-кинетической теории. Пусть для простоты при выходе пара из под капли у вектора скорости имеется только одна радиальная компонента. Тогда закон Дарси для радиальной компоненты скорости дает

$$v_r = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (4)$$

Здесь  $\kappa$  – проницаемость воздуха,  $\eta$  – динамическая вязкость пара. Домножим это равенство слева и справа на площадь ободка

$$2\pi R\delta \frac{dr}{dt} = -2\pi R\delta \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (5)$$

Слева имеем объем газа проходящий через боковую границу цилиндра высотой  $\delta$  за единицу времени. Отбросим знак минус в правой части равенства (5) и далее это соотношение будем рассматривать в контексте сравнения модулей входящих туда величин. Умножим левую и правую часть на плотность пара

$$\rho_v \frac{dV}{dt} = 2\pi R\delta \rho_v \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (6)$$

В результате получим выражение для переноса массы пара за единицу времени

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi R\delta \rho_v \frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в определение (3) получим равенство

$$J = \frac{2\pi\kappa R\delta \rho_v}{\eta S} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (8)$$

Как известно, поток пара с поверхности жидкости зависит однозначно от ее температуры и описывается законом Герца – Кнудсена. А именно, в нашем случае  $J$  – это параметр задачи, являющийся функцией температуры и зависящий также от характеристик сред: испаряющейся жидкости и окружающего газа. Отсюда можно выразить искомую высоту на которой будет парить капля:

$$\delta = \frac{J\eta S}{2\pi\kappa R\rho_v} \frac{\partial p'}{\partial r}. \quad (9)$$

Производная  $\partial p'/\partial r$  вычисляется на поверхности ободка и для нее можно сделать оценку снизу как  $p'/R$ . Принимая во внимание, что площадь соприкосновения капли с подложкой равна  $S = \pi R^2$ , окончательно с учетом (2) получаем:

$$\delta = \frac{J\eta R^2}{2\kappa\rho_v p'} = \frac{3J\eta R^2}{4\kappa\rho_v H\rho_w g}. \quad (10)$$

Вполне закономерно толщина паровой прослойки  $\delta$  пропорциональна плотности потока пара  $J$  и обратно пропорциональна толщине капли  $H$ .

Формула (9) и ее упрощенный вариант (10) не позволяют напрямую вычислить искомую величину  $\delta$ . Дело в том, что плотность потока пара с поверхности жидкости сильно зависит от плотности несущего газа, в который происходит испарение, и концентрации пара в приповерхностном слое. В том числе распределение паров воды под каплей зависит от высоты, на которой капля находится.

В результате имеется фильтрация водяного пара через несущий газ, роль которого играет воздух. Будем предполагать, что в рассматриваемых условиях помимо диффузионного присутствует дополнительный конвективный механизм переноса. Общее уравнение транспорта примеси и несущего газа как сплошной среды с учетом этого фактора записывается в виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)C = D\Delta C, \quad (11)$$

где  $\vec{V}$  – макроскопическая (массовая) скорость физически малого элемента газа,  $C$  – массовая концентрация. Вычислив распределение концентрации водяного пара, несложно восстановить поле давления [4].

Как уже отмечалось ранее, система самосогласована в том смысле, что чем сильнее парообразование, тем выше капля должна находиться и это должно отражаться на распределении давления. Однако это в свою очередь должно иметь ответное влияние на процесс испарения. Иными словами, в системе имеется обратная связь. Проведем итерационную задачу, которая включает следующие этапы: 1) задание  $\delta$  (начальной высоты); 2) вычисление методом конечных разностей поля давления под каплей; 3) вычисление плотности потока  $J$  с поверхности капли и производной от давления на открытой границе расчетной области; 4) определение нового значения  $\delta$  для имеющихся  $J$  и  $\partial p'/\partial r$ . А именно, фактически находятся корни неявной функциональной зависимости

$$f(\delta) = \frac{J\eta S}{2\pi\kappa R\rho_{\text{п}} \frac{\partial p'}{\partial r}} - \delta. \quad (12)$$

В нашем случае нет необходимости во временной оптимизации процедуры, поэтому корни вычисляются простейшим и надежным методом половинного деления.

Расчет поля давления (второй этап) производится на основе эволюционного уравнения при выставленных граничных условиях. Численное моделирование производится методом конечных разностей в соответствии с явной схемой [5]. Стационарный режим испарения находится методом установления. Использовалась разностная схема первого порядка точности по времени с шагом “вперед”. Диффузионное слагаемое в уравнение расписывалось в соответствии с формулами второго порядка точности. Конвективное (квадратичное по градиенту давления) слагаемое аппроксимировалось конечными разностями первого порядка точности “против потока”. Шаг по времени подбирался из соображений устойчивости численной схемы в соответствии с оценочной формулой [5] (критерий Куранта). Количество узлов по радиальной и аксиальной координатам выбирался равным  $N_1 = 141$ ,  $N_2 = 35$ .

### Результаты численного моделирования и обсуждение

Расчеты показывают, что установление давления под каплей происходит за время порядка 0.1 мс. За это же время имеет место выход на стационарный режим испарения, интенсивность которого характеризуется плотностью потока пара (рис. 2).

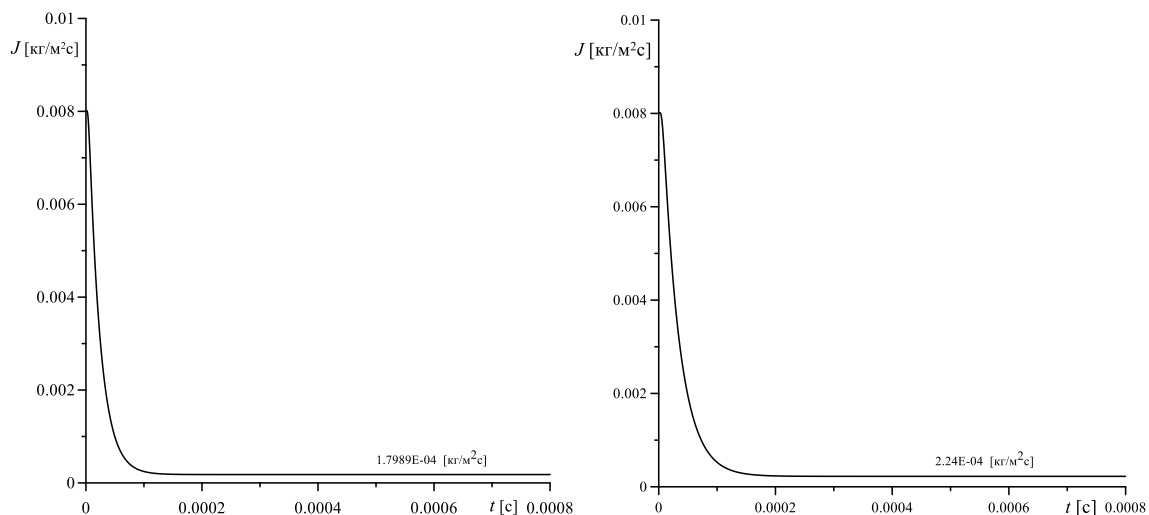


Рис. 2. Плотность потока пара для разных значений параметра  $D_c$ ;  
слева –  $0.53 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{Па}\cdot\text{с}$ , справа –  $0.63 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{Па}\cdot\text{с}$

Результаты численного моделирования получены для следующих значений параметров: радиус капли  $R = 1.36 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , коэффициент диффузии  $D = 4.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Расчет дает высоту, на которой должна находиться капля  $\delta = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ . Характерное распределение давления пара под каплей представлено на рис. 3.

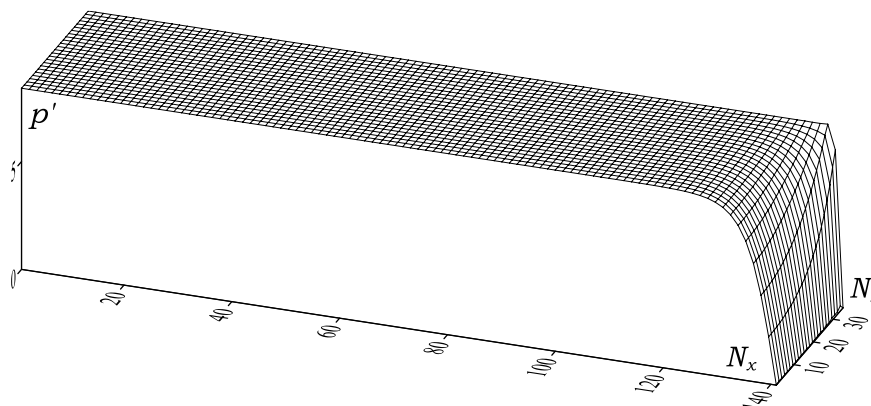


Рис. 3. Поле давления под каплей для  $D_c = 0.53 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{Па}\cdot\text{с}$

Как видно из рис. 3 пар занимает практически равномерно все пространство под каплей. И давление резко понижается до атмосферного только на выходе из под капли. С другой стороны, необходимо отметить, что хотя визуально это незаметно, но, тем не менее, имеется количественная разница в давлении строго под каплей и на подложке. Как и должно быть на поверхности капли давление чуть больше, чем вблизи подложки.

В заключение заметим, что представленная физико-математическая модель справедлива для испарения капли чуть ниже точки кипения. Взрывное парообразование в результате фазового перехода первого рода остается за рамками рассматриваемой модели.

### Список литературы

- [1] Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. – 416 с.
- [2] Ajaev V.S., Kabov O.A. Levitation and self-organization of droplets // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2021.53:203-25. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-030620-094158>.
- [3] Vakarelski I.U., Patankar N.A., Marston J.O., Chan D.Y.C., Thoroddsen S.T. Stabilization of Leidenfrost- vapour layer by textured superhydrophobic surfaces // *Nature*. 2012.489:274-77.
- [4] Демин В.А., Демина Т.В., Марышев Б.С. Физико-математическая модель переноса газообразного кремния в ходе высокотемпературного силицирования углеродных композитных материалов // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2022. № 3, с. 48-55.
- [5] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. – 616 с.

## Теоретическое исследование переноса паров кремния при производстве углеродных композиционных материалов

<sup>1,2</sup>Демин В.А., <sup>1,3</sup>Демина Т.В.

<sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

<sup>3</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Теоретическое описание процессов переноса в газах в условиях высокого и низкого вакуума требует разных подходов. В первом случае для этого требуется применение методов статистической физики, во втором – применимы уравнения механики сплошных сред. Однако, в промежуточной области, соответствующей условиям среднего вакуума, когда число Кнудсена имеет значение порядка 0.1 – 0.01, возникает сложная ситуация, когда ни тот ни другой подходы не дают хороших результатов при их строгом применении. Одно из таких парадоксальных явлений имеет место в ходе реализации технологического процесса высокотемпературного парофазного силицирования пористых углеродных матриц. Ранее в [1] для теоретического описания процесса переноса паров кремния в рабочем пространстве реторты использовалась так называемая диффузионная модель. Оценки показывают, что в рассматриваемых условиях коэффициент диффузии имеет огромную величину:  $D = 0.7 \text{ м}^2/\text{с}$ . В результате долгое время считалось, что классическая диффузия является главным механизмом переноса паров кремния в среде инертного несущего газа. В качестве одного из главных выводов диффузионная модель предсказывала чрезвычайно низкий поток кремния в пористую матрицу, что явно не соответствовало опыту.

В работе [2] на основе сплошносредного подхода получено новое нелинейное уравнение переноса, отличающееся от классического уравнения диффузии дополнительным нелинейным слагаемым типа квадрата градиента концентрации. Это уравнение выводится из полной системы уравнений гидродинамики и имеет вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_c (\nabla C)^2 = D \Delta C, \quad (1)$$

где  $C$  – массовая концентрация кремния, а  $D_c$  – размерный параметр задачи, характеризующий наличие дополнительного конвективного переноса в среде. Этот параметр имеет такую же размерность как и коэффициент диффузии ( $\text{м}^2/\text{с}$ ). Он выражается через материальные параметры среды следующим образом:

$$D_c = \frac{\kappa R T \rho_{\text{к}}}{\eta \mu_{\text{к}}}. \quad (2)$$

Здесь  $T$  – абсолютная температура,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\kappa$  – проницаемость аргона,  $\eta$  – динамическая вязкость газообразного кремния,  $\mu_{\text{к}}$  – молярная масса кремния,  $\rho_{\text{к}}$  – плотность паров кремния.

В одномерной стационарной постановке уравнение (1) имеет точные аналитические решения, описывающие системы с плоской и с цилиндрической симметрией. Эти модельные системы отражают практические важные конфигурации, востребованные на производстве. Оба решения имеют характер логарифмических зависимостей и демонстрируют значительно более интенсивный массоперенос паров кремния в среде аргона в условиях среднего вакуума нежели диффузионная модель. Также, уравнение (1) хорошо программируется как в двумерном, так и трехмерном случаях. Граничные условия к этому уравнению ставятся вполне обоснованно и представляют собой классические условия типа Дирихле на зеркале расплава и на поверхности образца, а также условие Неймана на твердых непроницаемых стенках реторты. Пример задачи в трехмерной постановке приведен на рис. 1. Описание динамики перераспределения паров кремния в реторте от зеркала расплава к изделию производилось на основе уравнения (1) численно методом конечных разностей [3].

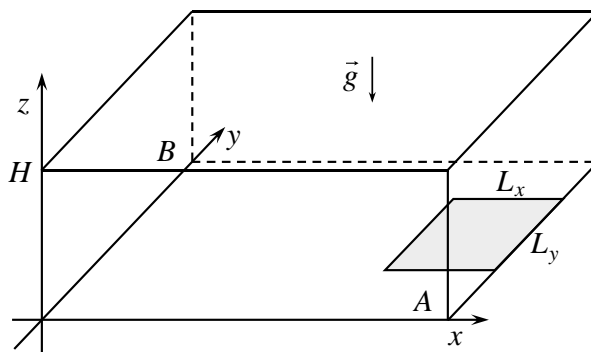


Рис. 1. Реторта в форме прямоугольного параллелепипеда. Серая область – зеркало расплава. Вертикальная граница слева – поверхность образца

В ходе расчетов использовался авторский программный продукт, реализованный на языке программирования Фортран-90. Рабочие размеры области составляли:  $A = B = 0.6$  м,  $H = 0.4$  м. Расчеты производились на равномерной прямоугольной сетке с числом узлов по осям  $N_x = N_y = 101$ ,  $N_z = 51$ . Под зеркало расплава выделялось число узлов  $n_x = n_y = 21$ . Оценка параметра конвективного переноса (2) на основе известных табличных данных дает  $D_c = 52$  м<sup>2</sup>/с. Пусть в условиях среднего вакуума парциальные давления паров кремния и несущего газа (аргона) равны соответственно  $p_k = 10$  Па и  $p_a = 100$  Па. Это соответствует массовой концентрации кремния на зеркале расплава  $C_s = 0.08$ . На поверхности образца предполагается полное поглощение пара, поэтому принимается, что на левой вертикальной границе при  $x = 0$  концентрация равна нулю  $C = 0$ . Также, расчеты были выполнены для предельного случая  $D_c = 0$ , который соответствует классическому уравнению диффузии. Расчетные поля концентрации паров кремния, соответствующие стационарным режимам массопереноса, представлены на рис. 2.

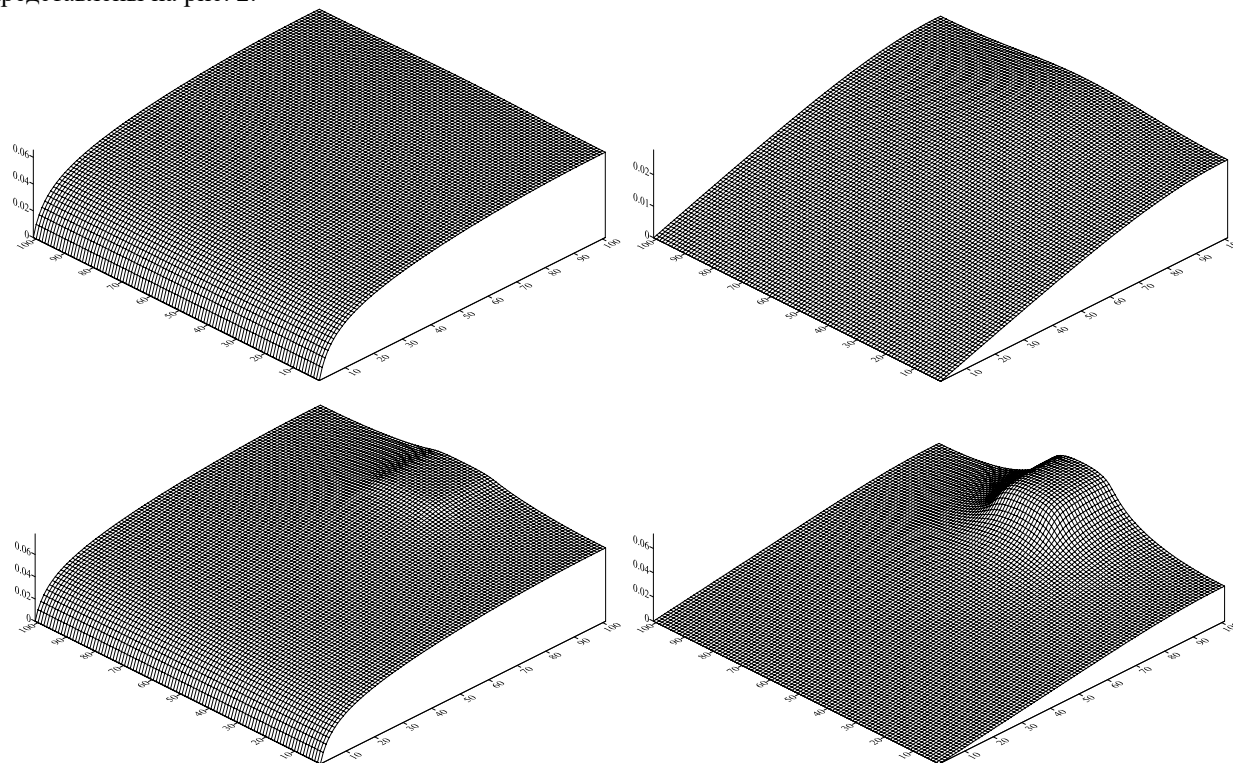


Рис. 2. Слева – результат расчета согласно уравнению (1); справа – согласно классическому уравнению диффузии

Верху представлены сечения полей концентрации на высоте  $h = 23.3$  см, внизу изображены поля вблизи дна на высоте  $h = 0.8$  см. Численное моделирование показывает, что учет конвективного механизма переноса значительно видоизменяет структуру полей концентрации на любой высоте внутри реторты. Из рис. 2 видно, что в противоположность диффузионной модели, модифицированное уравнение переноса паров кремния (1) вследствие условия полного поглощения на изделии предсказывает практически полное заполнение реторты парами кремния за исключением тонкой области вблизи образца. Выпуклость поля концентрации создает более высокий градиент на поверхности изделия, что приводит к значительному увеличению потока массы через границу раздела внутрь пористого материала. Таким образом, предлагаемая новая физико-математическая модель позволяет объяснить интенсивный массоперенос кремния в образец, что подтверждается экспериментально.

## Список литературы

- [1] Кулик В.И., Кулик А.В., Рамм М.С., Демин С.Е. Разработка модели и численное исследование процессов получения композитов с SiC матрицей методом парофазного силицирования // IV Межд. конф. “Функциональные наноматериалы и высокочистые вещества”. Сб. матер. конф., М.: ИМЕТ РАН, Суздаль, 2012, с. 240-242.
- [2] Демин В.А., Демина Т.В., Марышев Б.С. Физико-математическая модель переноса газообразного кремния в ходе высокотемпературного силицирования углеродных композитных материалов // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3, с. 48-55.
- [3] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. – 616 с.

## О переносе продуктов реакции протонного обмена в расплаве бензойной кислоты

Демин В.А., Петухов М.И.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

В работе рассматривается расплав бензойной кислоты, контактирующий с кристаллом ниобата лития, с поверхности которого имеется постоянный поток продуктов реакции протонного обмена. Наводороживание кристалла приводит к появлению в расплаве отрицательных бензоат-ионов и положительных ионов лития. Приводятся результаты аналитического и численного решения одномерных уравнений переноса, описывающих диффузию, электромиграцию и рекомбинацию указанных продуктов реакции. Показано, что при учете электромиграционного механизма, ионы каждого типа формируют стационарные пограничные слои. Отличие в их размерах определяется отношением подвижностей ионов. Увеличение размеров рассматриваемой области приводит к тому, что толщины слоев растут и достигают предельных значений, отвечающих реалистичным значениям параметров.

Технология наводороживания кристаллов ниобата или танталата лития известна на протяжении достаточно большого времени [1]. Использование данной технологии на производстве стало причиной большого числа ее модификаций [2], позволяющих контролировать толщину слоя, обогащенного протонами, скорость протонного обмена, фазовую диаграмму полученного образца и пр. Однако, несмотря на регулярность получаемых результатов, по-прежнему остается множество фундаментальных вопросов, связанных с физикой и химией процессов, имеющих место при протонном обмене.

Физико-математическая модель, описывающая поведение бензоат-ионов и ионов лития в расплаве бензойной кислоты, была предложена в [3,4]. В основе данной модели лежат уравнения в приближении сплошной среды. В частности, в модель входят уравнения переноса и электростатики, которые играют основную роль в формировании пограничного слоя. Задача о распределении ионов в области вблизи кристалла может быть решена в одномерном случае, поэтому указанные уравнения принимают следующий вид:

$$\varepsilon_0 \varepsilon \varphi'' = e(n_- - n_+), \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} = D_{\pm} n_{\pm}'' \pm k_{\pm} (n_{\pm}' \varphi' + n_{\pm} \varphi'') - k_R n_+ n_-. \quad (2)$$

Здесь  $n_{\pm}$ ,  $\varphi$  – поля концентрации положительных и отрицательных ионов и электрического потенциала. Параметры  $D_{\pm}$ ,  $k_{\pm}$  и  $k_R$  обозначают коэффициенты диффузии, подвижности и коэффициент рекомбинации ионов. Константы  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon$  и  $e$  – электрическая постоянная, диэлектрическая проницаемость бензойной кислоты и заряд электрона. Штрихом обозначается производная по координате  $x$ . Соответствующая ось направлена от поверхности кристалла вглубь расплава.

Межфазная граница служит точкой отсчета для определения электрического потенциала. Помимо этого, на ней моделируется постоянный поток вещества в расплав:

$$x = 0: \quad n_{\pm}' = -\frac{J}{D_{\pm}}, \quad \varphi = 0, \quad (3)$$

где  $J$  – плотность потока ионов.

На удалении от границы раздела ставятся условия, отвечающие непроницаемой стенке реактора, в котором проводится протонный обмен и отсутствию поля на границе раздела:

$$x = h: \quad n_{\pm}' = 0, \quad \varphi' = 0. \quad (4)$$

Соответственно,  $h$  – размер реактора.

Использование данных граничных условий согласуется с общей электронейтральностью системы:

$$\int_0^h n_+ dx = \int_0^h n_- dx. \quad (5)$$

Краевую задачу (1) – (5) имеет аналитическое решение в стационарной постановке в случае пренебрежения влиянием электромиграционного механизма на перенос ионов. Метод многих масштабов дает следующие профили концентрации:

$$n_+ = \frac{Jh}{D_+} \left( \frac{a}{A} + bD \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{D}} \frac{x}{hA}\right) \right), \quad n_- = \frac{Jh}{D_+} b \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{D}} \frac{x}{hA}\right), \quad (6)$$

где

$$a = A^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-D}, \quad b = \left( \frac{A}{(1-D)D^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad D = \frac{D_-}{D_+}, \quad A = \frac{D_+^2}{h^3 k_R J}.$$

Использование решения (6) позволяет оценить толщину пограничного слоя, формируемого бензоат-ионами:

$$\delta = \frac{5h^{\frac{1}{4}}}{\left( \frac{k_R J}{D_-} \left( \frac{1}{D_-} - \frac{1}{D_+} \right) \right)^{\frac{1}{4}}}. \quad (7)$$

Для проверки полученного соотношения полная система уравнений (1) – (2) решалась численно. В программной реализации использовалась явная конечно-разностная схема со сгущением узлов в области, близкой к межфазной границе, таким образом, чтобы на пограничный слой, образованный бензоат-ионами всегда приходилось примерно 100 узлов. Уравнение Пуассона (1) решалось с использованием схемы Либмана. В ходе расчетов использовался следующий набор параметров:  $D_+ = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $D_- = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $k_+ = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сВ}$ ,  $k_- = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{сВ}$ ,  $k_R = 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $J = 10^{18} \text{ с}^{-1}\text{м}^{-2}$ .

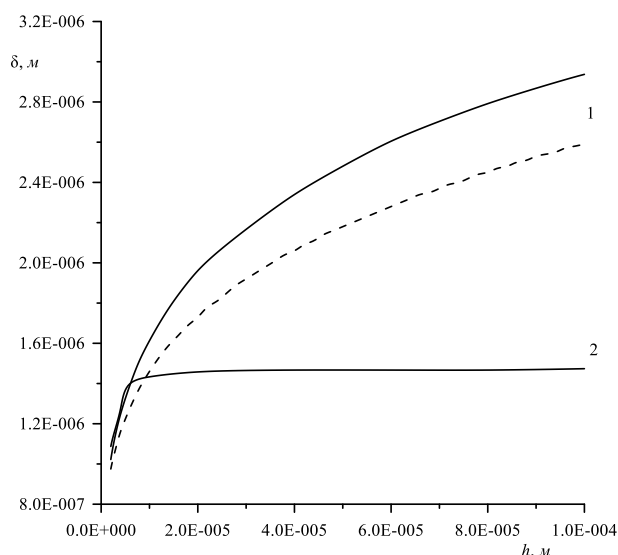


Рис. 1. Толщина пограничного слоя бензоат-ионов при  $\varepsilon = 10$ : 1 – без учета электромиграции (штриховая линия – аналитическое решение (7), сплошная линия – численное решение); 2 – численное решение с учетом электромиграции.

Результаты решения (рис. 1) показывают, что в случае, когда  $k_{\pm} = 0$ , пограничный слой бензоат-ионов растет по степенному закону (7) с ростом размеров реактора. В свою очередь, учет электромиграции позволяет электрическому полю, созданному за счет разности концентраций, оказать обратное влияние на распределения ионов. В результате толщина пограничного слоя бензоат-ионов достигает постоянного значения  $1.5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ . При достаточном размере расчетной области профиль концентрации ионов лития начинает обладать теми же характеристиками, что и профиль бензоат-ионов, т.е. в нем также прослеживаются черты пограничного слоя, толщина которого на порядок больше и составляет  $1.6 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-20277

## Список литературы

- [1] Jackel J.L., Rice C.E., Veselka J.J. Proton exchange for high-index waveguides in  $\text{LiNbO}_3$ , Appl. Phys. Lett. 41, 607-608, 1982
- [2] M.Kuneva, Optical waveguides obtained via proton exchange technology in  $\text{LiNbO}_3$  and  $\text{LiTaO}_3$  – a short review, International Journal of Scientific Research in Science and Technology, 2, 40–50, 2016
- [3] Demin V.A., Petukhov M.I., Ponomarev R.S. An ionic boundary layer near the lithium niobate surface in the proton exchange process. Surface engineering and applied electrochemistry, 59, 3, 321-328, 2023
- [4] Demin V.A., Petukhov M.I., Ponomarev R.S., Kuneva M. Dynamics of the Proton Exchange Process in Benzoic Acid Interacting with Lithium Niobate Crystals. Langmuir, 39, 10855-10862, 2023



## Влияние всесторонней изотермическойковки и криогенной прокатки на структуру и механические свойства алюминиевого сплава 1570с

Р.Р. Загитов, О.Ш. Ситдииков, Е.В. Автократова, С.В. Крымский,  
В.В. Терешкин, О.Э. Латыпова, М.В. Маркушев

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия

Среди термически неупрочняемых алюминиевых сплавов сплав 1570С (Al-5,0Mg-0,18Mn-0,2Sc-0,08Zr-0,01Fe-0,01Si, вес. %) является одним из наиболее прочных, и одновременно обладающих высокой коррозионной стойкостью и хорошей свариваемостью. Однако низкая технологическая пластичность затрудняет широкое его промышленное использование, особенно для изготовления изделий холодной штамповкой и прокаткой. Предыдущие исследования авторов [1] показали, что интенсивная пластическая деформация сплава, приводящая к измельчению зерен до ультрамелких размеров, способствует повышению его пластичности при температурах близких к комнатной, и одновременному улучшению комплекса механических свойств, регистрируемых в условиях статического и динамического нагружений.

Цель работы - оценить потенциал деформации ультрамелкозернистого сплава в условиях пониженных (криогенных) температур и возможность получения листовых полуфабрикатов с уникальными служебными свойствами.

Слиток сплава был гомогенизирован при 360°C в течение 6 часов и подвергнут всесторонней изотермической ковке (ВИК) при температуре 325°C с истинной степенью деформации  $\epsilon=12$ , а также последующей криопробатке при температуре жидкого азота (-196°C) со степенями обжатия до 90%. Качественный и количественный анализ структуры сплава проводили с использованием стандартных методов оптической металлографии, растровой электронной микроскопии, включая EBSD-анализ, просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) и рентгеноструктурного анализа. Параметры статической прочности определяли по результатам растяжения при комнатной температуре образцов с размерами рабочей части 3 мм на машине Instron 598.

Гомогенизированный слиток имел крупнозернистую структуру со средним размером зерна около 25 мкм, в которой были равномерно распределены дисперсоиды - когерентные выделения  $Al_3(Sc,Zr)$  размером около 20 нм. Проведение ВИК привело к формированию достаточно однородной (ультра)мелкозернистой структуры, с объемными долями (ультра)мелких зерен около 80% и высокоугловых границ почти 85%, а также с размерами зерна и субзерна около 2,3 и 1,9 мкм, соответственно (рис.1). Кроме того, плотность дислокаций в такой структуре составила  $5 \times 10^{12} \text{ м}^{-2}$ , а размер областей когерентного рассеяния - 0,7 мкм. При этом, как и в гомогенизированном слитке, дисперсоиды преимущественно были когерентны матрице и равномерно распределены по объему материала.

Сплав после ВИК показал повышенную трещиностойкость, что позволило успешно его прокатать без образования трещин в криогенных изотермических условиях практически до 90%. Повышенной прокатываемости, прежде всего, способствовало измельчение зерен при ковке, а также измельчение дроблением/фрагментацией и пространственное перераспределение избыточных фаз. Одновременно с формированием «новых» межкристаллитных границ отмечали выравнивание состава твердого раствора по магнию, особенно в приграничных областях «старых» границ.

Криопробатка привела к формированию сильнодеформированной структуры, которая характеризовалась плотностью дислокаций до  $10^{15} \text{ м}^{-2}$  и размером областей когерентного рассеяния около 15 нм. При этом она оставалась (ультра)мелкозернистой (рис. 2), несмотря на увеличение долевого размера зерна в плоскости прокатки до 3,5 мкм и на порядок уменьшения их толщины. Последнее было вызвано изменением формы зерен - их «раскатыванием в блин» при прокатке. Основными процессами, ответственными за структурные изменения, были фрагментация зерен и полигонизация, приводившие к уменьшению доли высокоугловых границ до 30% и размера субзерна до 0,3 мкм.

Механические свойства сплава приведены в таблице 1. По полученным данным видно, что ВИК не привела к значительному изменению прочностных свойств сплава, но при этом наблюдалось значительное увеличение значение относительного удлинения. Слабое изменение прочностных свойств при ВИК связано с ростом частиц и дисперсоидов, которое вело к снижению твердорастворного твердения, что нивелировало эффект измельчения зерна. Повышение значения относительного удлинения происходило из-за образования в сплаве ультрамелкозернистой структуры с измельченными и более однородно распределенными в матрице

частицами избыточных фаз, а также дисперсоидами. В свою очередь образование такой структуры позволило прокатывать сплав при комнатной и криогенной температурах. Криопротатка привела к двукратному увеличению прочностных параметров за счет формирования в зернах субструктуры с высокой плотностью дислокаций. Хотя сильное упрочнение сплава сопровождалось снижением пластичности в четыре раза, но абсолютный уровень удлинений остался высоким, причем существенно выше, чем в термоупрочняемых высокопрочных сплавах типа В96ц.

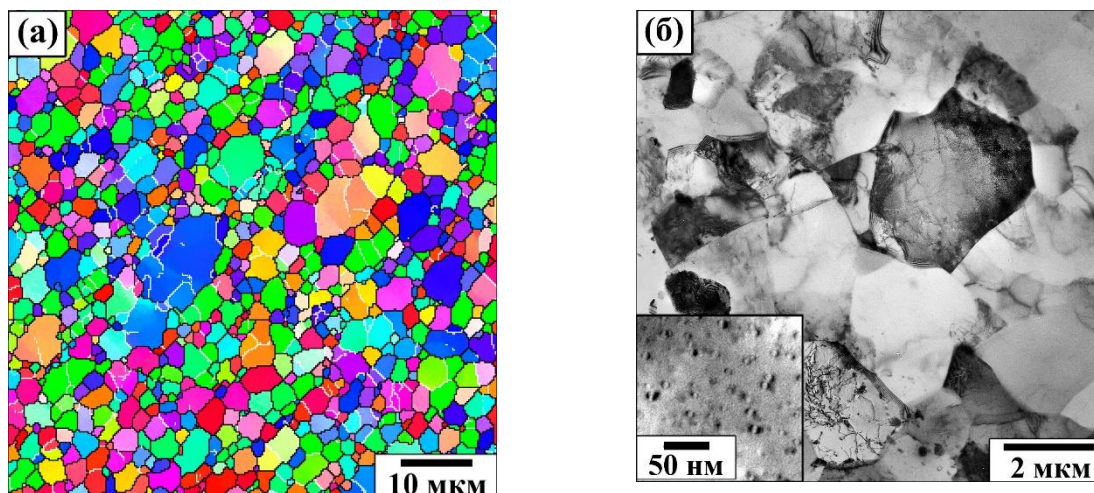


Рис. 1. Микроструктура сплава после ВИК: (а) EBSD, (б) ПЭМ.

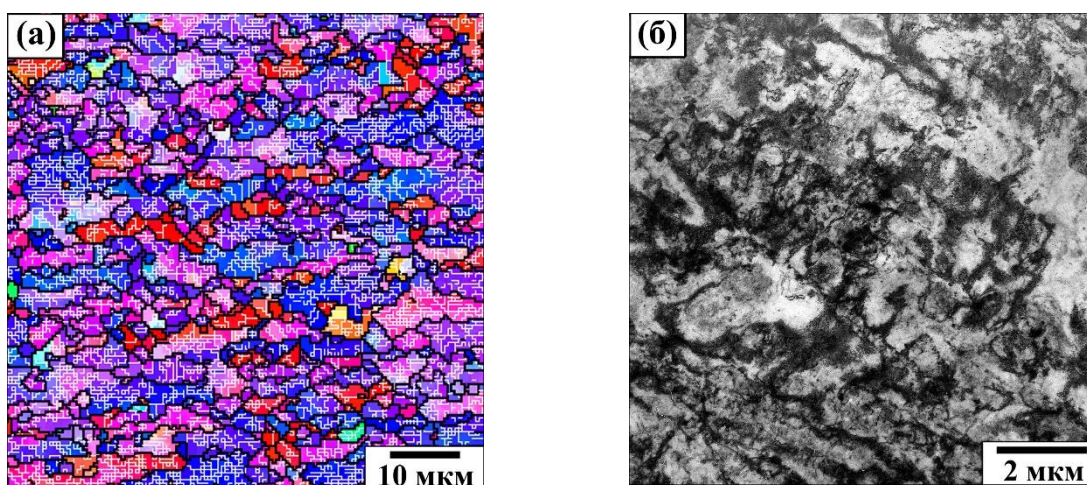


Рис. 2. Микроструктура сплава после криогенной прокатки с обжатием 90%: (а) EBSD, (б) ПЭМ.

Таблица 1 – Механические свойства сплавов

Состояние	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ , %	Источник
Гомогенизированный слиток	$245 \pm 10$	$355 \pm 10$	$26 \pm 2$	[1]
ВИК	$235 \pm 5$	$365 \pm 5$	$37 \pm 2$	
ВИК + прокатка при $-196^\circ\text{C}$ , 90%	$590 \pm 5$	$620 \pm 5$	$9 \pm 1$	-
В96цТ1 (штамповка толщиной до 50 мм)	600	640	5	[2]

Как результат, сплава 1570С демонстрировал уникальный баланс параметров статической прочности - пределы текучести и прочности около 590 и 620 МПа соответственно, при пластичности около 9%.

Сделан вывод о том, что термомеханическая обработка, основанная на сочетании всесторонней изотермическойковки при высоких температурах и последующей криопрокатки, является высокоэффективным методом получения (ультра)мелкозернистых листов из термически неупрочняемых Al-Mg сплавов типа 1570 с уникальными механическими свойствами.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00702 <https://rscf.ru/project/23-19-00702>. Работы проводились на базе Центра коллективного пользования ИМСП РАН «Структурные и физико-механические исследования материалов».*

## Список литературы

- [1] Avtokratova E. The processing route towards outstanding performance of the severely deformed Al–Mg–Mn–Sc–Zr alloy / E. Avtokratova, O. Sitdikov, M. Markushev, M. Linderov, D. Merson, A. Vinogradov – DOI 10.1016/j.msea.2021.140818 // Mater. Sci. Eng. A – 2021. – Vol. 806, 140818.
- [2] Алюминиевые сплавы (Состав, свойства, технология, применение) справочник / В. М. Белецкий, Г. А. Кривов ; под общ. ред. И. Н. Фридляндера // Киев : Коминтех, 2005. – 365 с.

# Исследование напряженно-деформированного состояния всплывшего участка газопровода на болоте, балластированного железобетонными утяжелителями

Зарипов Р.М.<sup>1</sup>, Масалимов Р.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,

<sup>2</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет Уфа

## Введение

Трубопроводы, проложенные на болотах и заболоченной местности, пересекающие различные водные преграды (реки, водохранилища, подводные морские переходы) и в карстовой зоне [1-5], деформируясь с водонасыщенным грунтом, подвергаются обводнению. Несмотря на балластировку трубопроводов железобетонными утяжелителями, закрепление их в грунте анкерными устройствами и замену гладких труб обетонированными трубами при сооружении и капитальном ремонте при их эксплуатации происходит всплытие труб. Всплывшие участки газопровода на болоте, балластированные железобетонными утяжелителями, квалифицируются как «поврежденные» и выводятся из эксплуатации [1,2]. Целью исследований является установление влияния на всплытие газопровода на болоте веса утяжелителей, изменение величин физико-механических характеристик грунта за счет его обводнения, и параметров эксплуатации газопровода.

## 1. Постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии всплывшего участка газопровода на болоте, балластированного утяжелителями и ее решение методом конечных элементов в перемещениях

Профиль трассы рассматриваемого участка газопровода на болоте, балластированного утяжелителями, состоит из затопленной подводной части, в которой на трубу установлены железобетонные утяжелители и прилегающих к ней подземных частей, где труба находится в траншее, засыпанная грунтом при сооружении газопровода. Моделирование НДС (напряженно-деформированного состояния) рассчитываемого участка газопровода осуществляется одномерной стержневой системой, состоящей из полых стержней трубчатого сечения и узлов их сопряжения [3,5]. Их количество задается в зависимости от профиля трассы газопровода и условий его эксплуатации.

НДС стержневого элемента описывают нелинейные кинематические и физические зависимости, нелинейные дифференциальные уравнения равновесия [3,5], которые учитывают условия нагружения в затопленной части и прилегающих к ней подземных частях, в которых труба совместно деформируется с грунтом, а также воздействие внутреннего давления и температурных напряжений, которое вызывает дополнительный изгиб трубопровода [3-5,6]. Далее, вышеупомянутые кинематические и физические зависимости, нелинейные дифференциальные уравнения равновесия преобразуются в нормальную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. В каждом узле сопряжения стержневых элементов составляются уравнения равновесия с учетом действия веса утяжелителей в болотной воде и граничных условий, поставленных в начале конце рассчитываемого участка газопровода. Эти уравнения равновесия преобразуются в системы алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются компоненты обобщенных перемещений узлов [3,5,7]. Используя решения преобразованной системы алгебраических уравнений, составляется система дифференциальных уравнений для стержневых элементов. Решение этих систем методом ортогональной прогонки Годунова определяет компоненты вектора обобщенных усилий и перемещений в узловых точках, полученных разбиением на части отрезка интегрирования, длины стержневого элемента. Поскольку решение системы дифференциальных уравнений осуществляется для всех стержней, поэтому полученные решения будут представлять полную картину деформирования газопровода на болоте, балластированного утяжелителями.

## 2. Составление базы данных расчета

В затопленной части выбирается тип утяжелителей, их количество и расстояния между ними задаются в зависимости от выталкивающей силы воды, которая в свою очередь, зависит от концентрации молей в болотистой воде [1]. В прилегающих подземных частях по информации, которая содержится в проектно-исполнительской документации трассы газопровода, для каждого стержневого элемента вводятся значения следующих физико-механических характеристик грунтов и трубы: модулю деформации грунта-засыпки (

$E_{gr.zas}$ ); удельному весу грунта (скелета) засыпки, соответственно ( $\gamma_{gr.zas}, \gamma_{yd.zas}$ ); углу внутреннего трения и сцеплению, соответственно ( $\phi_{gr}, c_{gr}$ ); модулю деформации и коэффициенту Пуассона грунта-основания, соответственно ( $E_{gr.osn}, \mu_{gr.osn}$ ); обобщенному коэффициенту касательного сопротивления и несущей способности грунта основания, соответственно ( $c_{xo}, R_{gr.osn}$ ); категории участка; наружному диаметру и толщине стенки трубы, соответственно ( $D_H, \delta$ ); пределу текучести и пределу прочности стали трубы, соответственно ( $R_2^H, R_1^H$ ); глубине заложения от верха засыпки до нижней образующей трубы и от верха засыпки до уровня воды, соответственно ( $h_x, h_y$ ) [1, 3-5].

### 3. Анализ напряженно-деформированного состояния участка газопровода на болоте, балластированного утяжелителями и установление основных причин его всплытия

1. Анализ напряженно-деформированного состояния участка газопровода на болоте, балластированного утяжелителями, показал, что причиной его всплытия являются: воздействие температурных напряжений; неравномерное неодинаковое проседание трубы в грунт на подземных частях, находящиеся слева и справа от размытой оголенной балластированной части; уменьшение веса утяжелителей в воде, за счет роста величины выталкивающей силы воды вследствие увеличения удельного веса воды, зависящего от концентрации растворенных молей в воде. Найдены критические значения параметров эксплуатации, при достижении которых изменяется форма изгиба трубы, предшествующей ее всплытию.

2. Расчеты напряженно-деформированного состояния участка газопровода на болоте, балластированного железобетонными утяжелителями, по инженерным формулам, в которых воздействие последних на трубу задается распределенной внешней поверхностной нагрузкой, дают удовлетворительные результаты только для случая, когда имеет место равномерная одинаковая осадка трубы в грунт в прилегающих подземных частях. В этом случае начальный этап выпучивания трубы со стрелой изгиба, направленной вверх, которое соответствует первому этапу всплытия трубы, определяется параметрами эксплуатации газопровода.

В случае, когда имеет место неравномерная неодинаковая осадка трубы в грунте на прилегающих подземных частях, то результаты расчета по инженерным формулам указывают на выпучивание трубы со стрелой изгиба, направленной вверх, независимо от параметров эксплуатации. В этом случае расчет по инженерным формулам дает некорректное решение задачи.

3. Установленные в данной статье основные причины, которые обуславливают всплытие балластированных магистральных трубопроводов в условиях болот и обводненной местности (изменении грунтовых условий и уменьшение веса утяжелителей, за счет роста величины выталкивающей силы воды, вследствие увеличения удельного веса воды с растворенными в ней молями) сложно устранить в сложно-геологических условиях их эксплуатации. Поэтому более перспективным является широко применяемые в последние годы технологии, в которых балластированные трубы при сооружении и капитальном ремонте заменяются обетонированными трубами. Как было указано в работе [5], имелись случаи всплытия обетонированных труб на подводных переходах морского газопровода через Байдарацкую губу на Ямале. Поэтому в дальнейшем необходимо выполнить исследования, посвященные на выявление причин возможного всплытия обетонированных труб, применяемых в технологии сооружения на болоте, в зависимости от сложно-геологических условий эксплуатации газопроводов.

### Список литературы

- [1] Типовые расчеты при проектировании, строительстве и ремонте газонефтепроводов: Учеб. пособие / Л.И. Быков, Ф.М. Мустафин, С.К. Рафиков и др. / СПб: Недра, 2011. – 748 с.
- [2] Васильев Г.Г., Горяинов Ю.А., Саксаганский А.И. Достоинства и недостатки современных подходов к балластировке подводных переходов // НГС. – 2012. – №1. – С. 30–37.
- [3] Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б. Использование компенсаторов в подводном участке морского газопровода для предотвращения его всплытия // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2023. – Т. 334. – № 2. – С. 196–205.
- [4] Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие / А.Б. Айнбиндер, А.Г. Камерштейн / М.: Недра, 1982. – 341 с.
- [5] Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния подводного морского газопровода с учетом разжижения грунта и параметров эксплуатации // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 152–166.
- [6] Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода. Физика. Технические науки // ДАН. – 2022. – Т. 504. – С. 12–16.
- [7] Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев / М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.

# Технология универсального метода измерения потенциального содержания углеводородной жидкости в газовой среде. Обзор методов и проблем.

Ильин П.В.

ФГБУН «Институт прикладной механики» РАН, г. Москва, Россия

Предложен новый практический метод измерения потенциального содержания углеводородной жидкости (алканы  $C_nH_{2n+2}$ ) в природном газе на основе запатентованного оптического метода регистрации появления углеводородной пленки на охлаждаемой поверхности. Преимущество метода состоит в значительном улучшении массогабаритных, экономических, метрологических параметров, а также ускорении процесса измерения.

Суть метода состоит в том, что в замкнутом объеме на охлаждаемой поверхности конденсируется углеводородная пленка. Оптическая система регистрации пленки на основе эффекта Брюстера позволяет измерять ее толщину и далее вычислять количество углеводородной жидкости способной конденсироваться при данных термобарических условиях. Метод надежно работает при выпадении относительно легких углеводородов (до  $C_8H_{18}$ ), однако более тяжелые углеводороды выпадают локально, поэтому возникает высокая погрешность измерения толщины пленки.

В данной работе рассматривается проблематика и возможные пути ее решения, для дальнейших научных и практических изысканий.

## Список источников

1. Нефтехимия и нефтепереработка. Учебник для ВУЗов. Магеррамов А.М., Ахмедова Р.А., Ахмедова Н.Ф. Баку: Издательство «Баку Университети», 2009, 660 с.
2. Поверхностное натяжение предельных углеводородов  
Назиев Я.М., Гасанов Г.Т., Назиев Д.Я., Гасанов В.Г.  
Азербайджанский Технический Университет, Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия, УДК 532.612
3. Химическая технология, 1991, No 3, с.28-34.  
О. В. Калашников Институт газа АН Украины, г. Киев

## Билинейный режим течения в пласте с конечной трещиной авто-ГРП

Ильясов А.М.<sup>1</sup>, Киреев В.Н.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ООО «РН-БашНИПИнефть»

<sup>2</sup> Уфимский университет науки и технологий

На добывающих скважинах для повышения нефтеотдачи низкопроницаемых нефтяных коллекторов создают технологические трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Для того чтобы эти трещины не смыкались под действием нормальных сжимающих напряжений они закрепляются твёрдым гранулированным материалом – проппантом. С другой стороны, на нагнетательных скважинах, вводимых для поддержания высокого пластового давления в истощённых коллекторах, из-за высоких давлений нагнетания жидкости образуются разрывы породы – техногенные трещины авто-ГРП. Часто трещины авто-ГРП достигают добывающих скважин. Со временем эти разрывы породы промываются нагнетаемыми фильтрационными потоками и вследствие эрозии трансформируются в незакрепленные проппантом трещины с некоторым характерным раскрытием. Таким образом, в коллекторе образуется система скважина-трещина-скважина-пласт, в которой возникает билинейный поток, представляющий одномерное течение в трещине авто-ГРП и перпендикулярное трещине фильтрационное течение в коллекторе с прямолинейными траекториями частиц.

Впервые билинейный поток в бесконечном пласте в закреплённой проппантом трещине ГРП бесконечной длины был, вероятно, аналитически изучен в работе [1]. В настоящей работе рассматривается постановка задачи о билинейном течении в бесконечном в одном направлении коллекторе с не закреплённой проппантом трещиной авто-ГРП конечной длины и постоянной ширины.

Пусть в бесконечном однородном пласте с проницаемостью  $k$  работают нагнетательная и добывающая скважины, на которых поддерживаются различные постоянные давления  $p_1$  и  $p_2$ . Расстояние между скважинами  $L$ . Предположим, что скважины соединены техногенной трещиной авто-ГРП постоянной толщины  $w$  (Рис. 1). Пласт и трещина заполнены одной и той же несжимаемой ньютоновской жидкостью с плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$ .

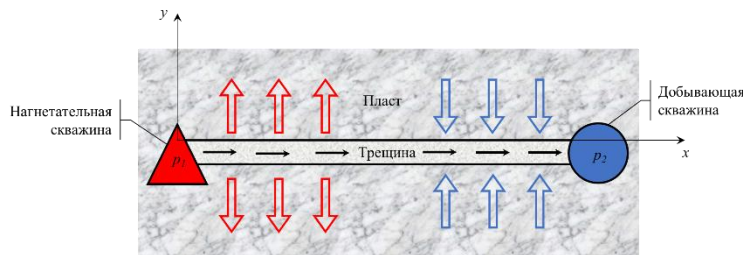


Рис. 1. Схема к постановке задачи

В безразмерном виде линеаризованная математическая модель нестационарного билинейного течения в сопряжённой системе конечная трещина/бесконечный пласт состоит из уравнения пьезопроводности, описывающего давление  $\bar{p}$ , в пласте

$$\frac{\partial \bar{p}_r}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{p}_r}{\partial y^2}, \quad (1)$$

и уравнений сохранения массы и количества движения в гидравлическом приближении, описывающих течение жидкости в трещине авто-ГРП с учетом проницаемости стенок трещины

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = A \frac{\partial \bar{p}_r}{\partial y} \Big|_{\bar{y}=0}, \quad (2)$$

$$0 = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - B \bar{v}, \quad (3)$$

где  $\bar{v}$  – скорость течения жидкости в трещине,  $\bar{p}$  – давление в трещине.

Безразмерные параметры  $A$  и  $B$  в уравнениях (2) и (3) вычисляются по формулам:

$$A = \frac{2k p_*}{\mu w v_*}, \quad B = \frac{12\mu(1-m)t_*}{\rho w^2},$$

где  $t_* = \frac{L^2}{\chi}$ ,  $v_* = \frac{t_* p_*}{\rho L}$ ,  $p_* = p_1 - p_2$  – характерные время, скорость и давление, соответственно,  $m$  – пористость (просветность) стенки трещины,  $\chi$  – коэффициент пьезопроводности пласта.

В начальный момент времени жидкость в трещине покоится, а давление в трещине и пласте равно пластовому давлению

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0 \quad (4)$$

На стенке трещины выполняется динамическое граничное условие непрерывности давления:

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{t}), \quad (5)$$

Граничные условия на скважинах:

$$\bar{p}_1(0, \bar{t}) = \frac{P_1 - P_k}{p_*}, \quad \bar{p}_2(1, \bar{t}) = \frac{P_2 - P_k}{p_*}, \quad (6)$$

где  $p_k$  – пластовое давление.

На бесконечности потребуем равенства давления в коллекторе пластовому давлению:

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} \bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = 0, \quad (7)$$

Применяя к системе уравнений (1)-(7) преобразование Лапласа [2] по безразмерному времени получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для изображений, которая решается аналитически. Для нахождения оригиналов полученных изображений используется теорема обращения Меллина [2] и после проведения довольно громоздких выкладок следует решения для пластового давления, а также давления и скорости течения в трещине:

$$\bar{p}_r(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2\bar{x} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left( \frac{\bar{p}_1(Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho) - Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho) - Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho, \quad (8)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{p}_r(\bar{x}, 0, \bar{t}) = \bar{p}_1(1 - \bar{x}) + \bar{p}_2\bar{x} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left( \frac{\bar{p}_1(Z_1(\bar{x}, 0, \rho) - Z_2(\bar{x}, 0, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3(\bar{x}, 0, \rho) - Z_4(\bar{x}, 0, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho, \quad (9)$$

$$\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = -\frac{1}{B} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{B} \left\{ \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\bar{t}}}{\rho} \left( \frac{\bar{p}_1(Z_1'(\bar{x}, 0, \rho) - Z_2'(\bar{x}, 0, \rho)) + \bar{p}_2(Z_3'(\bar{x}, 0, \rho) - Z_4'(\bar{x}, 0, \rho))}{1 - 2e^{2\alpha} \cos 2\alpha + e^{4\alpha}} \right) d\rho \right\}, \quad (10)$$

где параметр  $\alpha = \sqrt{AB} \frac{\sqrt[4]{\rho}}{\sqrt{2}} \geq 0$ , а функции  $Z_1, Z_2, Z_3$  и  $Z_4$  определяются формулами

$$\begin{aligned} Z_1(\bar{x}, \bar{y}, \rho) &= e^{\alpha\bar{x}} \left[ e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} + \alpha(2 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} - \alpha\bar{x}) \right], \\ Z_2(\bar{x}, \bar{y}, \rho) &= e^{\alpha(2-\bar{x})} \left[ e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} + \alpha\bar{x}) - \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} - \alpha(2 - \bar{x})) \right], \\ Z_3(\bar{x}, \bar{y}, \rho) &= e^{\alpha(1-\bar{x})} \left[ e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} + \alpha(1 + \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} - \alpha(1 - \bar{x})) \right], \\ Z_4(\bar{x}, \bar{y}, \rho) &= e^{\alpha(1+\bar{x})} \left[ e^{2\alpha} \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} + \alpha(1 - \bar{x})) - \sin(\sqrt{\rho}\bar{y} - \alpha(1 + \bar{x})) \right], \end{aligned}$$

В (10) штрих наверху обозначает производную по безразмерной пространственной координате  $\bar{x}$ .

По полученным аналитическим решениям (8)-(10) были построены двумерные распределения давления в пласте, давления и скорости в трещине в различные моменты времени. Результаты расчетов показаны на рис. 2-4. При проведении расчетов в качестве жидкости бралась вода с плотностью  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и вязкостью  $\mu = 0,001$  Па·с. Пористость пласта равна  $m = 0,1$ . Проницаемости пород варьировались от 1 мД до 100 мД. Длина трещины равна  $L = 200$  м. Ширина трещины  $w$  варьировалась от  $5 \cdot 10^{-5}$  м до  $1,5 \cdot 10^{-4}$  м. Пластовое давление  $p_k = 250$  атм, давление на скважинах  $p_1 = 350$  атм,  $p_2 = 150$  атм.

На рис. 2 показано изменение давления по длине трещины для трёх моментов времени  $t = 1, 24$  и  $72$  ч при различных проницаемостях пласта и ширине трещины  $w = 10^{-4}$  м. Видно, что чем выше проницаемость пласта, тем выше градиент давления около скважин и, тем более пологий профиль давления в середине трещины. Это является следствием большей скорости утечки жидкости через стенки трещины. Со временем профиль давления в трещине деформируется, уменьшая свою кривизну. Для слабопроницаемых пластов профиль давления в трещине стремится к линейному профилю.

На рис. 3 показано изменение скорости течения по длине трещины для трещин различной ширины и проницаемости пласта  $k = 1$  мД. Видно, что чем меньше ширина трещины, тем ниже скорость течения в трещине из-за большего вязкого трения (гидравлического сопротивления) в этом случае. Максимальные скорости также со временем уменьшаются вследствие утечек жидкости в пласт.

На рис. 4 показаны изолинии нестационарного двухмерного поля давления в пласте для тех же моментов времени, что и на предыдущих рисунках для различных проницаемостей пласта и ширине трещины равной  $w = 10^{-4}$  м. Видно, что с увеличением проницаемости пласта  $k$  наклон изолиний к оси абсцисс уменьшается, изолинии искривляются, а области невозмущенного состояния пласта сокращаются.



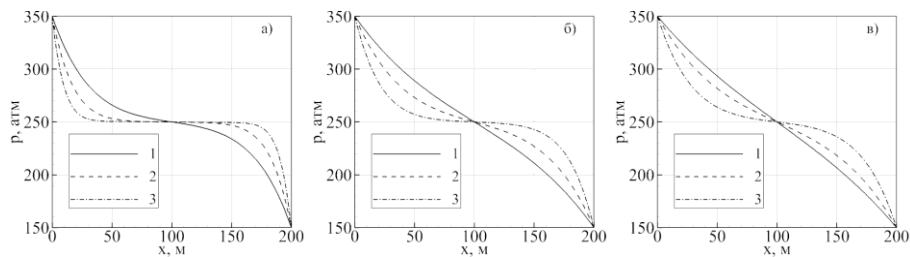


Рис. 2. Изменение давления в трещине в моменты времени (а–в) –  $t = 1, 24$  и  $72$  ч для различных проницаемостей пласта  $k$ . Ширина трещины равна  $w = 10^{-4}$  м: 1-3 –  $k = 1, 10, 100$  мД.

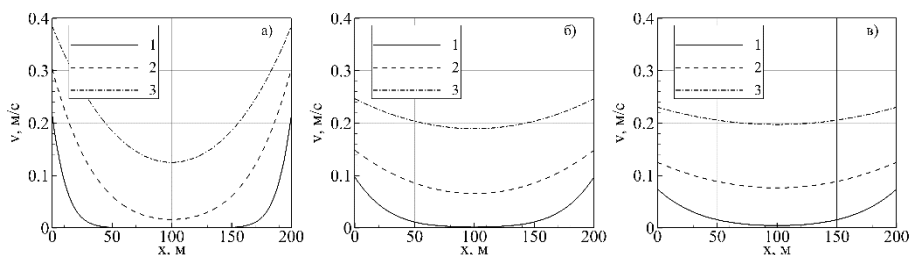


Рис. 3. Изменение скорости в трещине в моменты времени (а–в) –  $t = 1, 24$  и  $72$  ч для различных значений ширины трещины  $w$ . Проницаемость пласта равна  $k = 1$  мД: 1-3 –  $w = 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 1,5 \cdot 10^{-4}$  м.

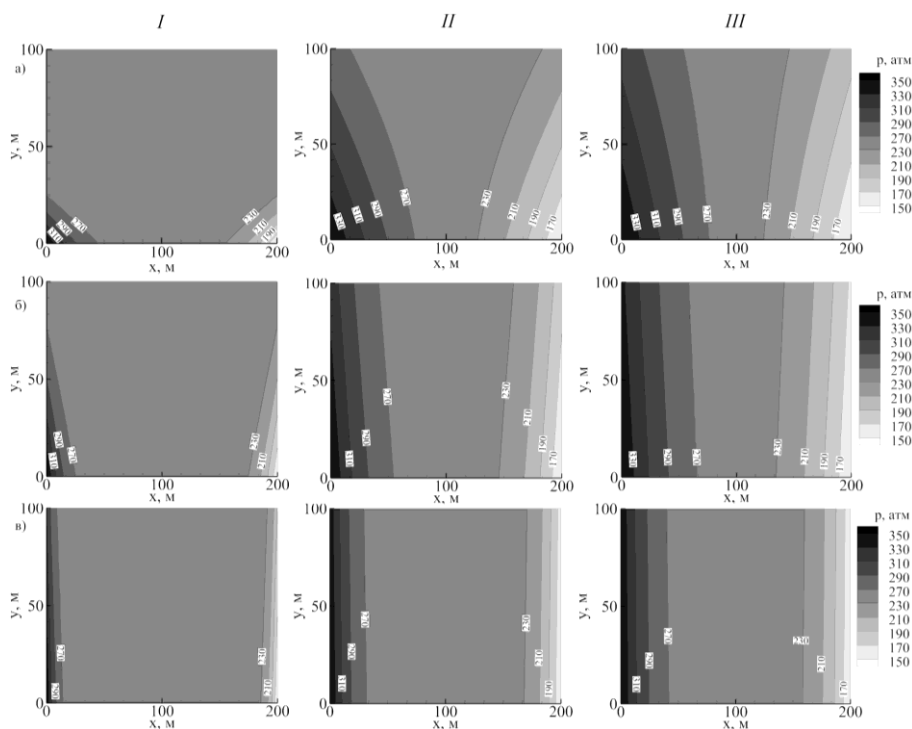


Рис. 4. Распространение давления в пласте в моменты (I–III) –  $t = 1, 24$  и  $72$  ч. Ширина трещины равна  $w = 10^{-4}$  м: (а–в) –  $k = 1, 10, 100$  мД.

Представлена модель билинейного нестационарного течения в системе трещина конечной длины/водонасыщенный линейно-упругий пласт бесконечной протяженности. Получены аналитические решение для нестационарных полей давления в пласте и трещине, а также скорости течения в трещине при заданных постоянных давлениях на нагнетательной и добывающей скважине. Для некоторых характерных параметров построены графики решений. Полученные решения позволяют определять времена существования билинейного потока в реальных пластах конечных размеров.

## Список литературы

- [1] Cinco-Ley H., Samaniego V.F. Transient Pressure Analysis for fractured wells // J. Petrol. Technol. 1981. V. 33. № 9. P. 1749-1766.
- [2] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.

# Моделирование перемешивания жидкости в микропробирках

Исламов А.И.\*, Набиуллина К.Р.\*, Михайленко К.И.\*\*

\*Уфимский университет науки и технологий, Уфа

\*\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

## 1. Введение

ПЦР (Полимеразная цепная реакция) — это самый распространённый метод увеличения объёма нуклеиновых кислот. ПЦР широко используется в молекулярной биологии для увеличения количества ДНК в образцах и проведения генетических анализов (секвенирования генома). Этап ускорения играет ключевую роль в процессе ПЦР, поскольку определяет начальные условия для последующей амплификации ДНК. Понимание и оптимизация этого этапа имеет большое значение для достижения точных и надёжных результатов.

В связи с необходимостью оптимизации процесса диагностики ДНК большое внимание уделяется сокращению продолжительности ПЦР. Существует несколько способов ускорения ПЦР. Наиболее широко используемым методом является проведение конвективной ПЦР. В этом случае изменение температуры в реакционной смеси достигается за счёт перемещения реакционного содержимого под действием тепловой конвекции. Движение жидкости осуществляется за счёт температурного градиента, возникающего из-за нагрева и (или) охлаждения некоторых точек микропробирки, в которой осуществляется ПЦР [1].

Исследование проблем ускорения полимеразной цепной реакции (ПЦР) остаётся актуальным и важным даже при наличии уже разработанных средств и методов. Экспериментальные проверки требуют больших трудозатрат, в связи с чем появляется необходимость в предварительном моделировании и проведение расчётов для дальнейших исследований.

В представленной работе на основе вычислительного моделирования рассматривается предположение, что помимо температурного градиента существенное влияние на время проведения ПЦР может оказывать также и угол наклона микропробирки, то есть изменение геометрии области конвекции относительно вертикали.

## 2. Математическая модель

Причиной возникновения тепловой конвекции является зависимость плотности жидкости или газа от температуры. При описании конвекции в несжимаемой жидкости наиболее популярной моделью является уравнение тепловой конвекции на основе коэффициента плавучести полученного в приближении Буссинеска, (уравнение Буссинеска) [2].

В потоках, сопровождающихся теплопередачей, свойства жидкости обычно зависят от температуры. Вариации могут быть небольшими, но все же быть причиной движения жидкости. Если изменение плотности невелико, то плотность можно рассматривать как постоянную в нестационарном и конвективном членах и рассматривать её как переменную только в поле внешних сил (гравитационном члене).

Математическая модель динамики несжимаемой вязкой жидкости в этом случае запишется в виде следующей системы:

— уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

— уравнение сохранения импульсов

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - \rho \mathbf{g}) + \nabla \cdot (2\nu_{eff} \boldsymbol{\tau}),$$

здесь  $\mathbf{u}$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $\rho_0$  — плотность жидкости при нормальных условиях (базовая плотность);  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения свободного падения;  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор скорости деформации;  $\nu_{eff}$  — коэффициент кинематической вязкости, включающий в себя в том числе турбулентную вязкость; плотность  $\rho$  в гравитационном члене вычисляется как линейная функция температуры

$$\rho \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

где  $\beta$  — коэффициент температурного расширения;  $T_0$  — значение температуры для нормальных условий, при которых плотность жидкости имеет значение  $\rho_0$ ; температура  $T$  вычисляется из уравнения теплопроводности с учётом конвекции

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T) = \nabla \cdot (\kappa \nabla T),$$

при этом диффузным членом с коэффициентом теплопроводности  $\kappa$  можно пренебречь.

### 3. Конечно-объёмная сетка и граничные условия

Нами моделируется конвекция в микропробирке, описываемой следующими параметрами: диаметр пробирки 4 мм, радиус закругления дна 1 мм, высота пробирки без учёта дна 7 мм; общая высота — 8 мм.

В качестве инструмента для решения поставленной задачи выбран пакет прикладных программ OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation). Это открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред [3]. Стандартная версия пакета OpenFOAM поставляется с многочисленными программами-решателями, утилитами и библиотеками. Кроме программ-решателей в состав пакета входят множество утилит, позволяющих генерировать и конвертировать расчётную сетку, задавать значения полей и многие другие.

При разработке конечно-объёмной сетки для вычислительного моделирования поставленной задачи авторы придерживались принципов, изложенных в [4]. Это значит, что построенная сетка должна быть по возможности ортогонализированной (то есть, углы между гранями конечных объёмов должны стремиться к  $90^\circ$ ) и равномерной. Такой подход позволяет снизить вычислительную погрешность и, одновременно, ускорить вычисления за счёт возможности использовать больший шаг по времени.

Для рассматриваемой задачи в текущей постановке достаточным является решатель `buoyantBoussinesqPimpleFoam`. Указанный решатель предназначен для моделирования переходных процессов в несжимаемых потоках при учёте плавучести, описываемой в приближении Буссинеска. То есть описывает плавучесть как линейное изменение плотности жидкости при изменении температуры на основе эталонного значения температуры. Решатель особенно точен и эффективен, когда изменения плотности по сравнению с эталонной плотностью невелики.

Граничные условия для рассматриваемой задачи заданы в достаточно простом виде. По всем границам принято наличие твёрдой стенки, что означает применение граничного условия прилипания: нулевое значение для вектора скорости и нулевой градиент давления. Для температуры выделены две диагонально расположенные граничные области в нижней и верхней частях пробирки, в которых температура задаётся как величина с постоянным значением: область нагрева при  $T_{hot}=400$  К и область охлаждения с температурой  $T_{cold}=280$  К. На остальных границах для температуры задан нулевой градиент.

### 4. Результаты и обсуждение

Проведена серия вычислительных экспериментов с использованием описанных выше решателя, конечно-объёмной сетки и граничных условий. В качестве начальных условий в каждом расчёте использовалась неподвижная жидкость при постоянной температуре  $T_0=300$  К. Расчёты сделаны при разных направлениях вектора ускорения свободного падения (угол наклона микропробирки) от  $0^\circ$  (ось пробирки вертикальна) до  $90^\circ$  (ось пробирки горизонтальна). При этом поворот микропробирки осуществляется таким образом, что зона нагрева располагается внизу закругления острого конца пробирки, а зона охлаждения — наверху противоположного конца.

Результаты моделирования продемонстрированы на Рис. 1–2.

На Рис. 1 показаны линии тока для вертикально размещённой микропробирки (Рис. 1(а)) и при наклоне в  $70^\circ$ , когда скорость циркуляции жидкости максимальна (Рис. 1(б)). На рисунке цвет линий характеризует температуру жидкости, а длина — скорость.

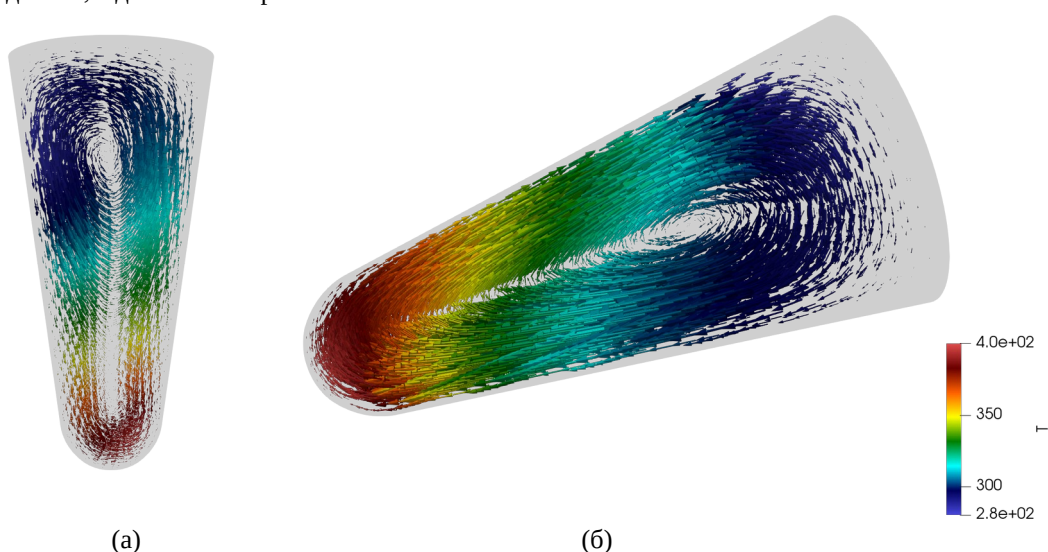


Рис.1. Визуализация линий тока для случаев когда пробирка не наклонена (а) и в наклонном положении с углом наклона  $70^\circ$  (б)

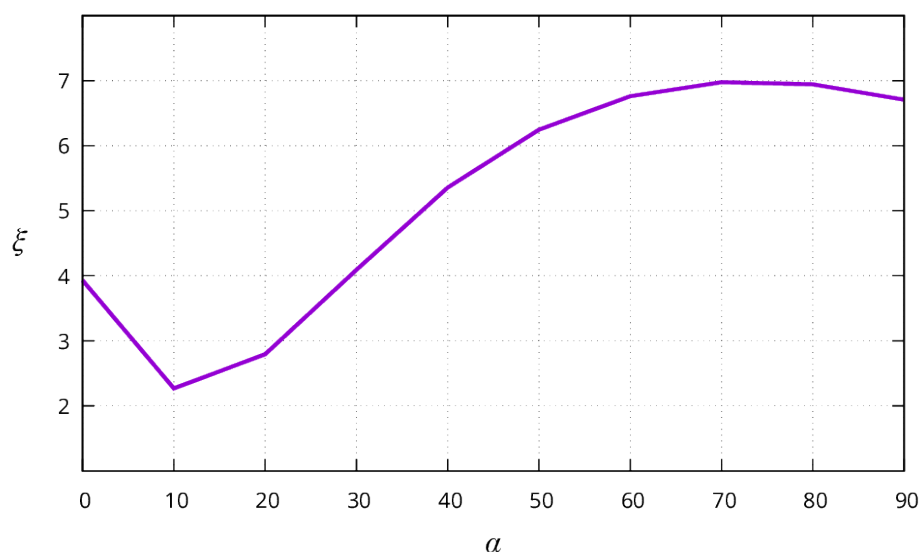


Рис. 2. Зависимость уровня перемешивания от угла наклона пробирки

Для анализа интенсивности перемешивания жидкости, важного для задачи ускорения ПЦР, нами введено понятие коэффициента перемешивания  $\xi$ . Данный коэффициент рассчитывается из результатов моделирования как сумма произведений объёма и значения модуля скорости для всех конечных объёмов расчётной области. На Рис. 2. представлена зависимость  $\xi(\alpha)$ , то есть коэффициента перемешивания от угла наклона микропробирки.

Можно видеть, что для рассматриваемого типа пробирки наилучший результат наблюдается для больших углов наклона  $\alpha \in [60, 80]$ . Следует отметить, что такой результат согласуется с экспериментальными данными, полученными в [1].

## 5. Заключение

Была рассмотрена трёхмерная модель микропробирки в условиях вынужденной температурной конвекции. Произведены расчёты с использованием встроенного решателя и проведена оценка качества перемешивания в зависимости от угла наклона пробирки.

По результатам исследования было выявлено существенное влияние угла наклона на результаты, что говорит нам о том, что предположение, выдвинутое в начале статьи, было верным. Развитие данной работы предполагает дальнейшее сравнение с реальными экспериментальными данными и доработку модели с добавлением уравнений химических реакций.

## Список литературы

- [1] Garafutdinov R.R., Chemeris D.A., Sakhabutdinova A.R., Moiseev K.V., Urmancheev S.F., Mikhaylenko C.I., Privalov L.Yu., Chemeris A.V. Convective polymerase chain reaction in standard microtubes // *Analytical Biochemistry*. 2022. V. 641. 114565.
- [2] Boussinesq J. *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*. Vol. 1. Gauthier-Villars. 1897. 64 p.
- [3] OPENFOAM® <https://openfoam.org/> (дата обращения 10.04.2024).
- [4] Mikhaylenko C.I. Building a finite-difference mesh and selecting a turbulence model for numerical simulations of a vortex tube in OpenFOAM software // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 167. 012021.

## Математическое моделирование процесса гидратообразования на поверхности пузырьков для случаев глубоководных разливов

Кильдибаева С.Р., Харисов Э.И.

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак

Для случаев глубоководной разработки нефтегазовых месторождений в шельфе возникает высокая вероятность разлива углеводородов. Миграция углеводородов происходит в три этапа: струя, шлейф и капельно-пузырьковый режим. На первом этапе преобладает начальный импульс потока, на втором этапе преобладает удельный импульс силы плавучести, на третьем этапе миграция капель и пузырьков происходит в виде капельно-пузырькового облака, которое движется под действием сил сдвигового течения и плавучести. Рассмотрим основные уравнения, описывающие миграцию капель нефти, пузырьков (газовых, композитных или гидратных), процессы образования и разложения газогидратов на поверхности пузырьков. Рассмотрим основные уравнения, описывающие миграцию пузырька, который может быть газовым, композитным (газовое ядро и гидратная оболочка) и гидратным. Отметим, что миграция пузырька на этапе струи и шлейфа происходит в контрольном объеме согласно методу ИЛМКО [1].

Запишем уравнения сохранения массы для композитного пузырька [2]:

$$\frac{dm_{gh}}{dt} = 4\pi a_{gh}^2 j_w, \quad m_{gh} = m_g + m_h, \quad (1)$$

где  $m_g = \frac{4}{3}\pi a_g^3 \rho_g$  и  $m_h = \frac{4}{3}\pi(a_{gh}^3 - a_g^3)\rho_h$  – масса газа и гидрата в композитном пузырьке,  $a_g$  – радиус газового ядра,  $j_w$  – интенсивность потребления воды при образовании гидратной оболочки, отнесенная на единицу площади пузырька. Интенсивность потребления воды  $j_w$  связанная с интенсивностью гидратообразования  $j_h$ , которая будет рассмотрена в следующем пункте.

Общая масса газа в композитном пузырьке:

$$m_g + m_h G = m_{g0}, \quad m_{g0} = \frac{4}{3}\pi a_{g0}^3 \rho_{g0}, \quad (2)$$

где  $m_{g0}$  – масса газа в композитном пузырьке в начальный момент времени,  $a_{g0}$  – начальный радиус газового пузырька,  $\rho_{g0}$  – начальная плотность газового пузырька.

Согласно (1) и (2) радиусы газового ядра и композитного пузырька:

$$a_g^3 = \frac{(a_{g0}^3 \rho_{g0} - a_{gh}^3 \rho_h G)}{(\rho_g - \rho_h G)}, \quad \frac{da_{gh}}{dt} = \frac{j_w}{(1-G)} \left( \frac{1}{\rho_h} - \frac{G}{\rho_{g0}} \right) \quad (3)$$

Для распределения давления в воде по высоте примем гидростатический закон:

$$p = p_a + \rho_w g (h_u - z), \quad (4)$$

где  $h_u$  – начальная глубина истечения углеводородов,  $p_a$  – атмосферное давление,  $z$  – координата композитного пузырька.

Уравнение импульсов для композитного пузырька:

$$\frac{d(w_b (m_{gh} + \mu_{gh}))}{dt} = f_A - f_T - f_C, \quad (5)$$

где  $m_{gh} = \frac{4}{3}\pi(a_{gh}^3 - a_g^3)\rho_h + \frac{4}{3}\pi a_g^3 \rho_g$  – масса пузырька,  $\mu_{gh} = \frac{2}{3}\pi a_{gh}^3 \rho_w$  – присоединенная масса,  $f_A = \frac{4}{3}\pi a_{gh}^3 \rho_w g$  – сила Архимеда,  $f_T = \frac{4}{3}\pi((a_{gh}^3 - a_g^3)\rho_h + a_g^3 \rho_g)g$  – сила тяжести,  $f_C = \xi_b \pi a_{gh}^2 \frac{\rho_w w_b^2}{2}$  – сила сопротивления.

Коэффициент гидродинамического сопротивления  $\xi$  и число Рейнольдса  $Re_{gh}$  запишем в следующем виде [3]:

$$\xi_b = \frac{12}{Re_b} (1 + 0.0811 Re_b^{0.879}), \quad Re_b = \frac{a_{gh} \rho_w w_b}{\mu_w}.$$

Скорости миграции композитного пузырька  $w_b$ , определим из (5) с учетом (1).

Предельные схемы образования гидрата на поверхности пузырьков описаны в работе [1]. Процесс гидратообразования продолжается до тех пор, пока внутри газового пузырька достаточно газа, необходимого для формирования гидратной оболочки. Также необходимым условием гидратообразования является соблюдение условий стабильного существования гидрата согласно фазовой диаграмме. На рисунке 1а представлена зависимость массы образовавшегося гидрата от вертикальной координаты. Из рисунка видим, что до глубины  $z=1255.41$  м масса образовавшегося гидрата растет, затем фиксируется, так как образование гидрата останавливается. Далее, когда условия стабильного существования гидрата нарушаются, происходит процесс разложения гидратной частицы и масса убывает. Полное завершение разложения гидрата происходит на глубине  $z= 226.29$  м. На рисунке 1б представлена динамика изменения радиуса гидратного пузырька на стадии разложения гидрата.

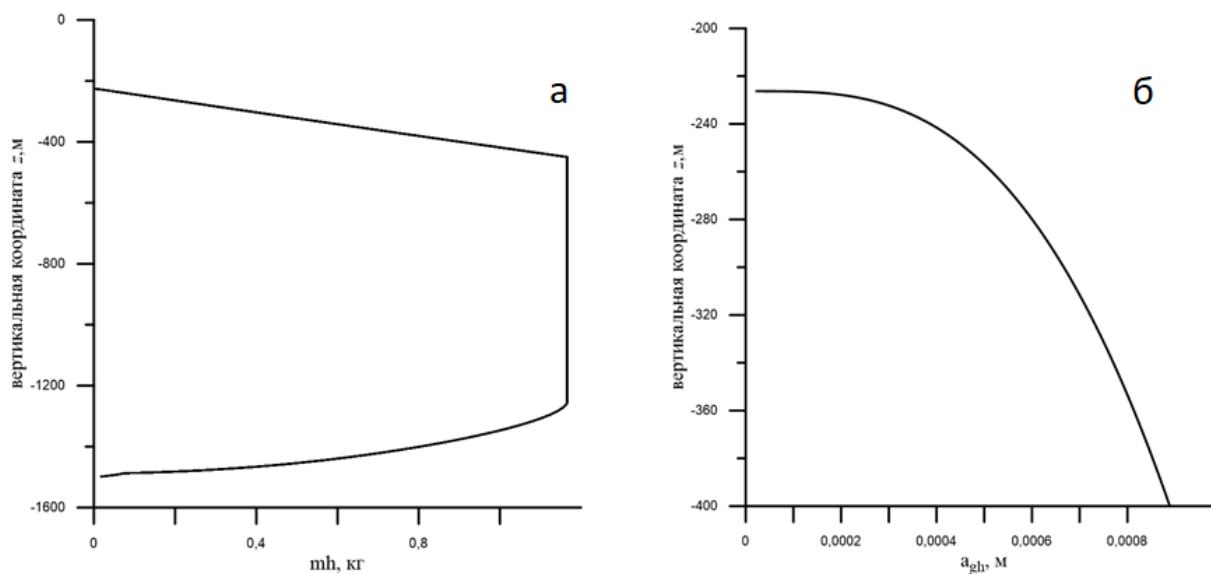


Рис.1. Зависимость массы образовавшегося гидрата (а) и радиуса гидратного пузырька (б) от вертикальной координаты.

## Список литературы

- [1] Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 1 (109). С. 79-88.
- [2] Шагапов В. Ш., Тазетдинов Б.И. Образование и разложение газогидратных включений при миграции в воде // Теплофизика и аэромеханика. 2014.Т. 21. № 3. С. 355-364.
- [3] Кутепов А. М. Полянин А.Д., Запрянов З.Д., Вязьмин А.В., Казенин Д.А.М. Химическая гидродинамика. Квантум, 1996. 336 с.

## Влияние температуры деформации на термическое расширение сплава Ni-Mn-Ga в области мартенситного превращения

Кирилук К.К.<sup>1</sup>, Нагимов М.И.<sup>2</sup>, Галеев Р.М.<sup>2</sup>, Мусабилов И.И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа

<sup>2</sup> Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г. Уфа

В сплавах, называемых сплавами Гейслера, в области комнатных температур протекает мартенситное превращение, в интервале которого наблюдаются такие эффекты как ферромагнитный эффект памяти формы [2] и магнитокалорический эффект [[1]]. Благодаря этим эффектам сплавы относят к классу функциональных материалов. Но также данные соединения обладают некоторыми недостатками, например, при циклическом протекании мартенситного превращения образцы подвержены разрушению. В различных сплавах и металлах повышение механических свойств достигается с помощью деформационно-термической обработки материала. Наибольшую значимость из них имеет метод всесторонней изотермическойковки, который позволяет добиться формирования однородности требуемой микроструктуры в заготовке. Ранее было показано, что формирование микроструктуры типа «ожерелье» в системе сплавов Ni-Mn-Ga-Si позволяет существенно повысить усталостную прочность материала [[3]].

В рамках данной работы проводится исследование влиянияковки на микроструктуру и дилатационные свойства Ni-Mn-Ga. Кроме формирования специфической микроструктуры необходимо сформировать анизотропию свойств в области мартенситного превращения, что важно к примеру, для ферромагнитного эффекта памяти формы. Анизотропия в свою очередь определяется наличием внутренних напряжений преимущественной ориентации. С этой целью на последнем этапековки температура деформации была существенно снижена с 700°C до 500°C.

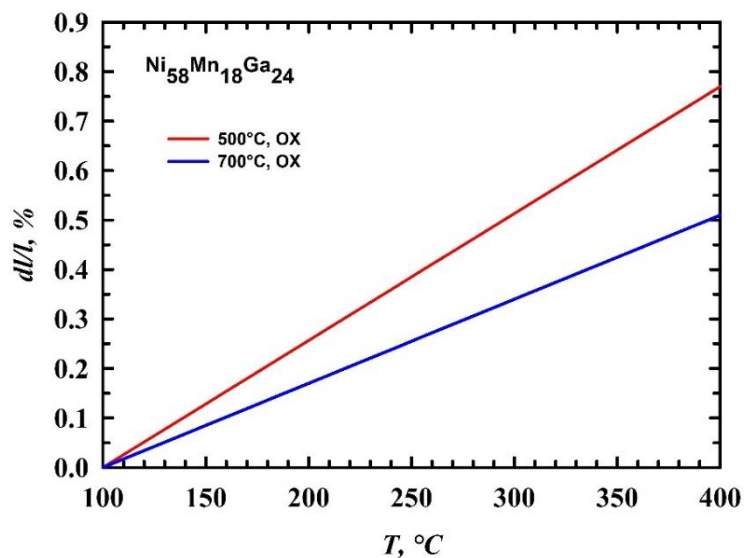


Рис. 1. Кривые термического расширения для кованого образца сплава  $\text{Ni}_{58}\text{Mn}_{18}\text{Ga}_{24}$ ; Измерения выполнены в области мартенситного превращения при нагреве образцов.

Как видно из рис.1, во всем интервале нагрева наблюдается только ангармоническое удлинение образца. Это должно свидетельствовать о формировании структуры в процессе мартенситного превращения с полностью изотропной ориентацией мартенситных двойников.

В работе показано, что образцы, вырезанные в направлении последней осадки послековки при 700°C и 500°C в области протекания мартенситного превращения, демонстрируют только ангармоническое изменение геометрических размеров. Скачкообразное изменение длины образцов не наблюдается. Возможное объяснение данного эффекта заключается в том, что после снятия нагрузки на деформируемую при 700°C или 500°C заготовку,

процессы возврата значительно снижают уровень плотности дефектов и, следовательно, уровень внутренних напряжений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПСМ РАН.

## Список литературы

- [1] Chulist R., Pagounis E., Czaja P., Schell N., Brokmeier H.-G. The example of texture influence in stress analysis - *Adv. Eng. Mater.*, 2021. V. 23, P. 2100131.
- [2] Koshkidko Yu.S., et al. Magnetocaloric effect and magnetic phase diagram of Ni-Mn-Ga Heusler alloy in steady and pulsed magnetic fields. *J. Alloys and Comp.*, 2022. V. 904, P. 164051.
- [3] Musabirov I.I., et al. Influence of Multi-Axial Isothermal Forging on the Stability of Martensitic Transformation in a Heusler Ni-Mn-Ga Alloy. *Trans. Indian. Inst. Met*, 2021. V. 74, P. 2481-2489.



## Численное моделирование управляемого движения дискообразного глайдера в стратифицированной жидкости

Коваль К.А, Сухоруков А.Л.

АО «ЦКБ МТ «Рубин», Санкт-Петербург

Одной из важнейших сфер применения современных средств робототехники является сбор актуальной информации о состоянии морской среды в режиме реального времени. Для этих целей активно используются автономные необитаемые подводные аппараты (АНПА), среди которых можно выделить глайдеры, способные перемещаться за счет многократного изменения избыточной плавучести. Преимуществами использования глайдеров являются энергетическая эффективность и низкое акустическое излучение.

При выполнении ряда задач может быть целесообразным применение глайдеров дискообразной формы [1] (рисунок 1). Такие АНПА способны одинаково маневрировать в любом направлении, благодаря чему становится возможным сложное маневрирование, недоступное при использовании глайдера классической компоновки (рисунок 2).



Рисунок 1 – Глайдер дискообразной формы



Рисунок 2 – Глайдер классической компоновки

Система погружения-всплытия дискообразного глайдера (рисунок 3), за счет которой он совершает маневрирование, состоит из четырех гидроцилиндров, способных принимать или удалять забортную воду, тем самым изменяется значение равнодействующей силы избыточной плавучести и точка ее приложения.

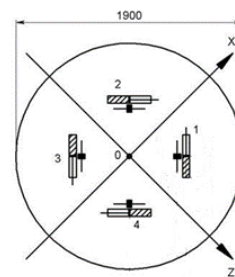


Рисунок 3 – Общий вид и схема системы управления движением глайдера

Наиболее простым и характерным для дискообразного глайдера является маневрирование в вертикальной плоскости. С учетом того, что реальные акватории, как правило, характеризуются пространственной неоднородностью среды по глубине, введем простейшую модель стратификации – резкий скачок плотности:

$$\rho_w(y) = \begin{cases} \rho_1, & y > y_{\Delta\rho}; \\ \rho_1 + \Delta\rho, & y \leq y_{\Delta\rho}. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho_1$  – плотность верхнего слоя жидкости;  $\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$  – плотность нижнего слоя;  $y_{\Delta\rho}$  – вертикальная координата скачка плотности в неподвижной системе координат, начало которой совпадает с положением геометрического центра АНПА в начальный момент времени.

Таким образом, можно записать уравнения движения рассматриваемого АНПА [2, 3]:

$$\begin{aligned}
m(1+k_{11})\frac{dv_{x1}}{dt} &= c_{x1}(\alpha)\frac{\rho_w(y)v_0^2}{2}V^{\frac{2}{3}} + m(1+k_{22})v_{y1}\omega_{z1} + p\sin\psi + [\rho_w(y) - \rho_1] \cdot gV\sin\psi; \\
m(1+k_{22})\frac{dv_{y1}}{dt} &= c_{y1}(\alpha)\frac{\rho_w(y)v_0^2}{2}V^{\frac{2}{3}} + c_{y1}^{\omega_{z1}}\frac{\rho_w(y)v_0}{2}\omega_{z1}V - m(1+k_{11})v_{x1}\omega_{z1} + \\
&+ p\cos\psi + [\rho_w(y) - \rho_1] \cdot gV\cos\psi; \\
J_{0z1}(1+k_{66})\frac{d\omega_{z1}}{dt} &= m_{z1}(\alpha)\frac{\rho_w(y)v_0^2}{2}V + m_{z1}^{\omega_{z1}}\frac{\rho_w(y)v_0}{2}\omega_{z1}V^{\frac{4}{3}} - \rho_w(y)Vgh\sin\psi + \\
&+ (x_p\cos\psi - y_p\sin\psi) \cdot p;
\end{aligned}
\tag{2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_{z1}; \quad \alpha = -\arctg\frac{v_{y1}}{v_{x1}};$$

где  $m$  – масса АНПА;  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{66}$  – коэффициенты присоединенных масс корпуса АНПА;  $v_0$  – абсолютное значение величины скорости АНПА;  $v_{x1}$ ,  $v_{y1}$  – проекции вектора скорости на оси связанной с АНПА системы координат;  $\omega_{z1}$  – угловая скорость вращения глайдера;  $\alpha$ ,  $\psi$  – углы атаки и дифферента соответственно;  $V$  – водоизмещение глайдера;  $p$  – значение равнодействующей силы избыточной плавучести;  $x_p$ ,  $y_p$  – плечи равнодействующей силы избыточной плавучести.

Позиционные ( $c_{x1}$ ,  $c_{y1}$ ,  $m_{z1}$ ) и вращательные ( $m_{z1}^{\omega_{z1}}$ ) гидродинамические характеристики (ГДХ) глайдера рассчитывались на основе результатов вычислительного эксперимента. Силы и моменты, действующие на корпус АНПА со стороны потока, вычислялись при помощи численного интегрирования уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу, с использованием модели турбулентности  $k-\omega$  SST.

На основе решения системы уравнений (2) можно провести моделирование погружения глайдера в однородной жидкости и при наличии пикноклина ( $\Delta\rho = 5 \text{ кг/м}^3$ ). На рисунке 4 представлены траектории АНПА для обоих случаев. Можно отметить, что наличие скачка серьезно влияет на параметры движения, вплоть до невозможности совершить погружение имеющимися средствами управления плавучестью.

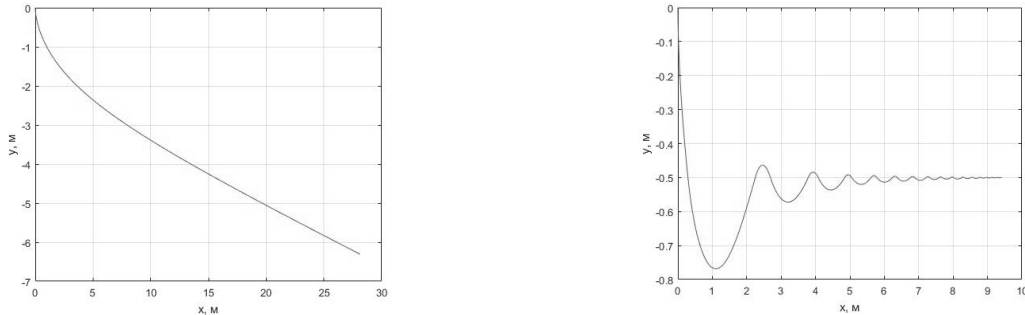


Рисунок 4 – Траектория дискообразного глайдера при погружении в однородной жидкости (слева) и при наличии скачка плотности  $\Delta\rho = 5 \text{ кг/м}^3$  (справа)

Значительный интерес представляет перемещение глайдера в заданном диапазоне глубин. Для реализации такого режима необходимо построить систему управления, позволяющую поочередно достигать целевой глубины  $\eta_0$  и основанную на управлении производительностью насосов, заполняющих и осушающих гидроцилиндры:

$$\begin{aligned}
\sigma &= A \cdot (\eta_0 - \eta) + B \cdot \int_0^t (\eta_0 - \eta) d\tau + C \cdot \dot{\eta} - p; \\
\dot{p} &= f(\sigma) = \begin{cases} 0, & |\sigma| \leq 1; \\ a \cdot (|\sigma| - 1) \cdot \text{sign}(\sigma), & 1 < |\sigma| < 2.5; \\ b \cdot \text{sign}(\sigma), & |\sigma| \geq 2.5. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}$$

Оптимальные значения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$  могут быть либо вычислены, либо подобраны эмпирическим путем. Помимо представленного пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулятора управление движением может быть организовано при помощи адаптивного регулятора, который способен подстраиваться под случайные возмущения [4]. Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  зависят от технических характеристик конкретных насосов, используемых в конструкции АНПА. На рисунке 5 показана траектория

дискообразного глайдера при движении в диапазоне глубин от 2 до 5 м, а также соответствующая зависимость плавучести  $p$  от времени  $t$ .

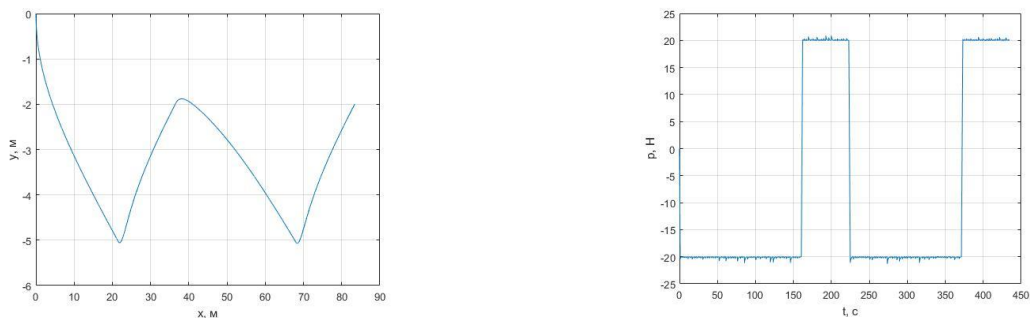


Рисунок 5 – Траектория глайдера и изменение плавучести

Не менее важным при моделировании движения в стратифицированной среде является учет изменения ГДХ подводного объекта при прохождении пикноклина [5]. Эта задача может быть решена при использовании подхода, предполагающего совместное интегрирование уравнений динамики вязкой жидкости и уравнений движения АНПА. Для моделирования скачка плотности использовался метод VOF (Volume of Fluid). На рисунке 6 представлено сравнение параметров движения глайдера при использовании классического (аппроксимация ГДХ в виде зависимостей от угла атаки  $\alpha$ ) и сопряженного (вычисление сил и моментов в процессе движения) подходов. Можно отметить, что учет изменения ГДХ при движении вблизи скачка плотности оказывает значительное влияние на параметры движения АНПА.

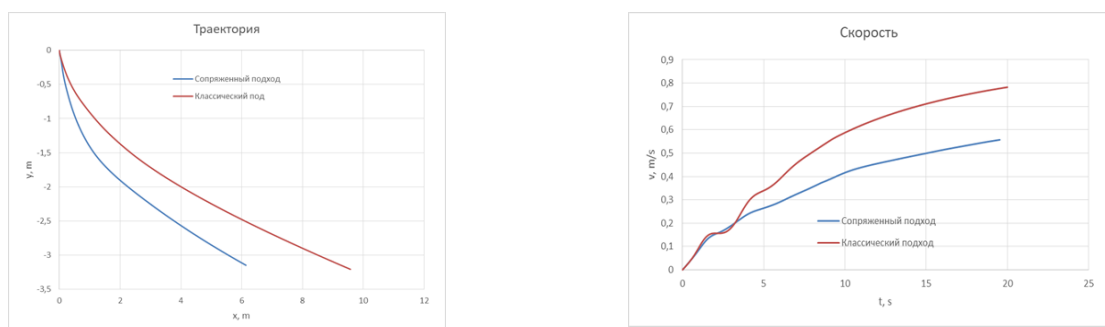


Рисунок 6 – Параметры движения глайдера при использовании классического и сопряженного подходов

Таким образом, в результате выполнения работы была предложена методология моделирования движения глайдера дискообразной формы в стратифицированной среде, а также общий вид системы управления, которая позволяет АНПА совершать маневрирование в заданном диапазоне глубин. Показана важность учета изменения ГДХ подводного объекта при движении вблизи пикноклина, а также возможность решения данной задачи на основе применения сопряженного подхода, предполагающего вычисление гидродинамических воздействий на АНПА в процессе движения.

## Список литературы

- [1] Koterayama W., Nakamura M., Ito Y., Yoshimura H. Autonomous Underwater Vehicle for Practical Use in Ocean Observations. Proceedings of the Tenth (2012) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. Vladivostok, Russia, October 3-5, 2012, pp. 170-175.
- [2] Пантов Е.Н. Основы теории движения подводных аппаратов / Е.Н. Пантов, Н.Н. Махин, Б.Б. Шереметов – Л.: Судостроение, 1973.
- [3] Рождественский В.В. Динамика подводной лодки / В.В. Рождественский – Т1. Л.: Судостроение, 1970.
- [4] Краснодубец, Л.А. Управление морскими буями-профилемерами как метод повышения репрезентативности термохалинных измерений. Синтез и моделирование системы управления / Л.А. Краснодубец, В.И. Забурдаев, В.В. Альчаков // Морской гидрофизический журнал. 2012. № 5, С. 70 – 82.
- [5] Гурьев Ю.В., Слуцкая М.З. Основные закономерности гидродинамического воздействия природных морских условий на подводные объекты. Спб., Научный журнал «Морские интеллектуальные технологии» № 2 том 1, 2020, с. 10-16.

# Эйлер–Эйлерова модель динамики дисперсной среды в нижней части лифт-реактора

Козлова А.Ю.\*, Михайленко К.И.\*\*

\*Уфимский университет науки и технологий, Уфа

\*\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

## 1. Введение

В современной химической промышленности многофазные реакторы с подвижным слоем гранулированных катализаторов широко применяются, несмотря на их сложные и недостаточно изученные гидродинамические характеристики. Особенно сложным является переход от лабораторных исследований к промышленному оборудованию, так как связан в том числе с проблемой масштабирования. В связи с этим достаточно часто возникает необходимость моделирования двухфазной дисперсной среды, чтобы лучше понять и оптимизировать процессы, связанные с обсуждаемыми системами [1, 2].

Вычислительная гидродинамика (CFD – Computational Fluid Dynamics) наиболее подходящий инженерный инструмент для прогнозирования потоков в различных типах устройств в промышленных масштабах. Следует отметить, что несмотря на то, что инструменты для моделирования однофазной среды широко доступны, исследование многофазных потоков все еще является сложным как с физической, так и с вычислительной точек зрения. Более того, экспериментальная проверка многофазных CFD-моделей все еще находится в зачаточном состоянии, поскольку и моделирование и эксперимент требуют много времени, в связи с чем надежные прогнозы поведения многофазных сред в крупномасштабном оборудовании получить нелегко [3].

## 2. Математическая модель

При моделировании многофазных процессов с участием дисперсной среды можно выделить два основных подхода. Модель Эйлера–Лагранжа (ЭЛ), когда уравнения динамики неразрывной фазы записываются в Эйлеровой системе отсчета, а частицы дисперсной фазы — в Лагранжевой системе отсчета. Модель Эйлера–Эйлера (ЭЭ) исходит из предположения, что каждая фаза может быть описана с использованием уравнений в Эйлеровом представлении. Преимущество ЭЛ подхода заключается в том, что мы можем отслеживать траекторию отдельных частиц, их взаимодействие, изменения размеров каждой частицы и т.д. Однако с другой стороны, такое моделирование требует значительных вычислительных ресурсов, тем больших, чем больший масштаб модели необходимо описывать. В случае ЭЭ системы, дисперсная фаза описывается на основе уравнений неразрывной среды с введенными дополнительными ограничениями. С одной стороны, такой подход в значительной степени упрощает вычислительный процесс [4], но при этом и ограничивает в возможностях моделирования изменений отдельных частиц в рамках дисперсной среды.

В представленной работе использована ЭЭ (континуальная) модель динамики двухфазных сред, где обе фазы рассматриваются как непрерывные, взаимопроникающие и описываются усредненными уравнениями сохранения. Процесс усреднения в контексте данного исследования вводит в рассмотрение фазовую переменную  $\alpha_k$ , которая представляет собой вероятностную характеристику присутствия определенной фазы в конкретный момент времени и пространственной точке [5].

Основные уравнения континуальной модели для несущей и дисперсной фаз могут быть представлены в следующем виде:

— уравнение неразрывности для несущей среды:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k U_k) = 0$$

— уравнение неразрывности для дисперсной среды:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot U_k \alpha_k \rho_k + \nabla \cdot (U_m \alpha_k \rho_k (1 - \alpha_k)) = 0$$

— уравнение импульсов (одинаково для обеих фаз):

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k U_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k U_k U_k) = -\nabla \cdot (\alpha_k \tau_k) - \alpha_k \nabla p + \alpha_k \rho_k g$$

$$\sum_k \alpha_k = 1.0 \quad \rho_m = \sum_k \alpha_k \rho_k \quad U_m = \frac{\sum_k \alpha_k \rho_k U_k}{\rho_m}$$

где  $\alpha_k$  — объемная доля каждой фазы;  $\rho_k$  — плотность  $k$ -той фазы;  $U_k$  — скорость фазы;  $\tau_k$  — тензор вязких напряжений;  $p$  — термодинамическое давление;  $g$  — ускорение свободного падения.

### 3. Двумерная сетка и граничные условия

В настоящей работе нижняя часть лифт-ректора описывается двумерной областью, моделирующей трубу длиной 2 м и диаметром 0.15 м, в которой может быть организован дополнительный подвод гранулированной среды из бокового наклонного патрубка.

В качестве инструмента для решения поставленной задачи выбран пакет прикладных программ OpenFOAM (Open Source Field Operation And Manipulation CFD ToolBox — пакет программ для операций и манипуляций с полями с открытым исходным кодом). OpenFOAM — свободно распространяемая открытая интегрируемая платформа вычислительной гидродинамики для операций с полями (скалярными, векторными и тензорными) [6, 7]. Хотя пакет OpenFOAM представляет собой библиотеку инструментов для дискретизации и решения произвольных систем уравнений в частных производных, он также имеет в своем составе и достаточно обширное множество решателей для относительно стандартных задач. Для рассматриваемой задачи в текущей постановке достаточным является решатель, для моделирования двухфазного потока в континуальном приближении twoPhaseEulerFoam. Указанный решатель для системы двух сжимаемых фаз, одна из которых является дисперсной. Обе фазы описываются с использованием уравнений сохранения Эйлера, представленных выше.

В текущей двумерной постановке конечно-объемной сетке, которая описывает область нижней части лифт-реактора, уделяется относительно небольшое внимание. Однако принципы ортогональности и равномерности конечных объемов, необходимые для снижения вычислительной погрешности [8], соблюдены при построении данной сетки.

В задаче приняты следующие граничные условия. Справа и слева — условия прилипания для воздуха и проскальзывания для гранулированной среды. На нижней границе заданы расход с постоянной скоростью для несущей среды и условие непротекания для гранулированной. На верхней границе задано условие протекания для обеих фаз.

### 4. Результаты

В проведенных вычислительных экспериментах, представленных ниже, каждом случае в начальный момент задано распределение концентрации гранулированных частиц  $\alpha = 0.3$  в нижней половине моделируемой области. Рассмотрены два случая. В первом подача воздуха осуществляется с постоянной скоростью 3 м/с, во втором — 5 м/с.

На Рис. 1 и 2 показано распределение концентрации гранулированной среды для обоих рассматриваемых постановок в одинаковые моменты времени.

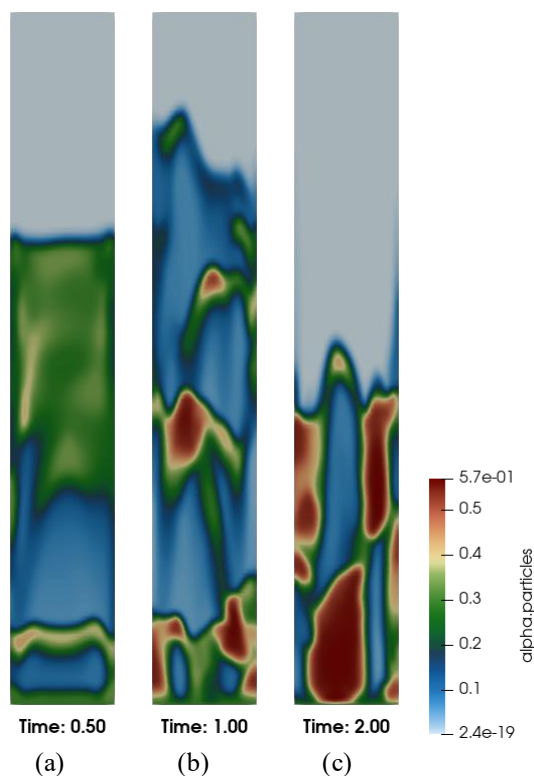


Рис. 1. Распределение концентрации гранулированных частиц в моменты времени (a) – 0.5 с, (b) – 1.0 с, (c) – 2.0 с при скорости подаваемого воздуха 3 м/с

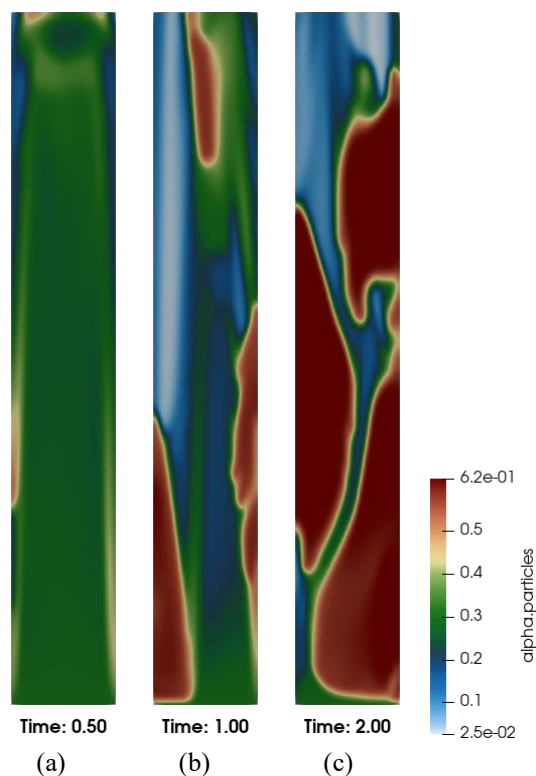


Рис. 2. Распределение концентрации гранулированных частиц в моменты времени (a) – 0.5 с, (b) – 1.0 с, (c) – 2.0 с при скорости подаваемого воздуха 5 м/с

Из Рис. 1. можно заключить, что при недостаточном расходе несущей фазы не возникает подъемного течения гранулированной среды и, как следует из распределения концентрации, возникает псевдооживленный слой.

Рис. 2. демонстрирует, что при достаточном расходе воздуха возникает искомое подъемное течение гранулированной среды. Однако следует отметить, что для штатной работы нижней части лифт-реактора при таком подъемном течении необходимо равномерное распределение (перемешивание) несущей фазы и гранулированной среды. В то же время, на Рис. 2 можно видеть расслоенное течение, подобное показанному в работе [1]. Таким образом, расчёт с использованием более сложной модели и подробной сетки не опровергает сделанные ранее выводы.

## 5. Заключение

В представленной работе рассмотрена двумерная модель нижней части лифт-реактора без подачи гранулированной среды через боковой ввод. Показано, что возможность подъема гранулированной среды и характер смешивания с потоком несущей фазы определяется, в частности, скоростью несущей фазы.

Проведено сравнение с ранее полученными результатами, показано качественное сходство с ними. Дальнейшее развитие данной работы предполагает исследования при наличии постоянной подачи гранулированной среды, а также трехмерной постановки модели исследуемого устройства.

## Список литературы

- [1] Михайленко К.И., Везиров Р.Р., Ахатов И.Ш., Урманчеев С.Ф. Численное моделирование течения мелкодисперсного катализатора в канале лифт-реактора // Нефтепереработка и нефтехимия. 1997. № 12. С. 17–20.
- [2] Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н., Ильясов А.М., Михайленко К.И. К исследованию гидродинамических особенностей процессов переработки нефти // Башкирский химический журнал. 2000. Т. 7, № 5. С. 66–72.
- [3] Brennen С.Е. Fundamentals of Multiphase Flows. Cambridge University Press. 2005. 410 p.
- [4] Михайленко, К.И., Валеева Ю.Р. Моделирование осаждения мелкодисперсной взвеси из воздуха при прохождении волн давления // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 3. С. 328–333.
- [5] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. В 2 ч. М.:Наука. 1987. 464 с., 360 с.
- [6] Нуриев А.Н., Зайцева О.Н., Камалутдинов А.М., Жучкова О.С. Введение в компьютерное моделирование гидродинамических процессов в программном комплексе OpenFOAM: учебное пособие. Казань: Издательство Казанского университета. 2022. 84 с.
- [7] OPENFOAM® <https://openfoam.org/> (дата обращения 10.04.2024)
- [8] Mikhaylenko С.І. Building a finite-difference mesh and selecting a turbulence model for numerical simulations of a vortex tube in OpenFOAM software // Journal of Physics: Conference Series. 2020. V. 167. 012021.

## Эволюция внутренней конвекции в системе слоёв воздуха и волокнистой тепловыделяющей пористой среды с изменением перепада температур на внешних границах

Колчанов Н.В., Колчанова Е.А., Сидоров А.С.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

В работе демонстрируются результаты эксперимента, в рамках которого исследовалось влияние на порог возникновения и структуру внутренней конвекции в двухслойной системе, состоящей из следующих слоёв: верхнего слоя воздуха и нижнего слоя волокнистой тепловыделяющей пористой среды. Образец пористой среды состоял из фотополимерного 3D-каркаса и тепловыделяющих волокон. Объёмная доля пор в образце составляла 80% от общего объёма образца. Тепловыделение в пористой среде генерировалось джоулевым разогревом при пропускании электрического тока по проводящей сердцевине волокон. На рис. 1 представлена схема экспериментальной установки. Возникновение конвекции регистрировалось при помощи тепловизора по искажению поля температуры на поверхности пористого образца. Контроль температуры верхней границы с прозрачным для инфракрасного излучения стеклом из ZnSe осуществлялся при помощи специальной системы термостатирования и одного из двух жидкостных криотермостатов. Второй криостат поддерживал температуру нижней медной границы системы.

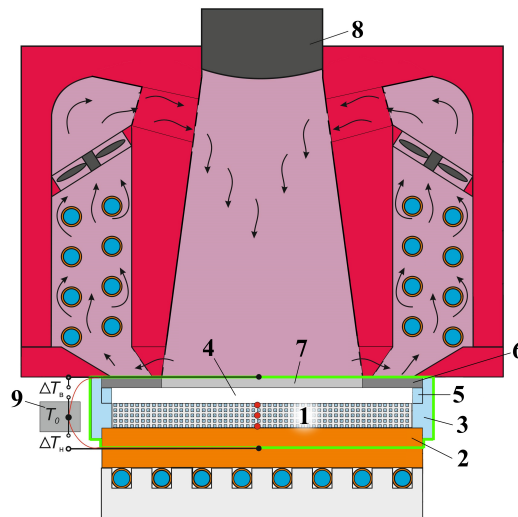


Рис. 1: Сечение экспериментальной установки для измерения поля температуры на поверхности пористой среды: 1 – слой волокнистой тепловыделяющей пористой среды; 2 – медная квадратная пластина, являющаяся нижней границей полости; 3 – боковое пространство, заполненное ватой; 4 – прослойка воздуха; 5 – угловая вставка для установки толщина воздушной прослойки 4; 6 – пластина из нержавеющей стали (AISI 304), являющаяся верхней границей полости; 7 – круглое стекло из селенида цинка (ZnSe); 8 – объектив тепловизора; 9 – совокупность дифференциальных медь-константановых термопар для измерения температур в различных точках внутри экспериментальной установки. Светло-зелёный контур выделяет рабочую полость с двухслойной системой.

Результаты эксперимента сравнивались с результатами численного моделирования. Численная модель Дарси в приближении Буссинеска [1, 2] содержала два безразмерных управляющих параметра, вычисляемых по следующим формулам:

$$Ra_I = g \left( \frac{\beta \rho c_p}{\nu} \right)_{air} \frac{Q K h_{pm}^3}{2 \kappa_{pm}^2}, \quad (1)$$

$$Ra_E = g \left( \frac{\beta \rho c_p}{\nu} \right)_{air} \frac{\Delta T K h_{pm}}{\kappa_{pm}}, \quad (2)$$

Здесь  $Ra_I$  и  $Ra_E$  — соответственно внутреннее и внешнее числа Рэлея;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho$  — плотность воздуха;  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения воздуха;  $c_p$  — удельная теплоёмкость воздуха при постоянном давлении;  $\nu$  — кинематическая вязкость воздуха;  $Q$  — объемная мощность тепловыделения;  $K$  — проницаемость пористой среды, определяемая по данным статьи [3];  $\Delta T$  — перепад температур на внешних границах двухслойной системы (считается положительным при подогреве снизу);  $\kappa_{pm}$  — теплопроводность пористой среды, насыщенной воздухом;  $h_{pm}$  — высота пористого слоя. Для исследуемого образца  $h_{pm} = 13.2$  мм,  $\kappa_{pm} = 0.043$  Вт/м/°С и  $K = 2.6 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>.

В результате анализа устойчивости механического равновесия воздух в двухслойной системе "воздух-пористая среда" была построена карта устойчивости (рис. 2) для трех значений толщины воздушной прослойки: 9.6, 8.5 и 8.0 мм. Кроме порога устойчивости по тепловизионным картинкам измерялась длина волны  $\lambda$ , через которую далее по формуле  $k = (2\pi h_{pm})/\lambda$  вычислялось безразмерное волновое число. Значения волнового числа для трёх толщин воздушного слоя в зависимости от внешнего числа Рэлея представлены на рис. 3. На рисунках видно, что результаты эксперимента хорошо согласуются с численными расчётами при  $Ra_I < 0.5$ . При  $Ra_I > 0.5$  на графике рис. 3 наблюдается резкое 10%-ое уменьшение волнового числа для  $h_{air} = 8.5$  мм. Для толщины  $h_{air} = 9.6$  мм это уменьшение носит плавный характер. При  $h_{air} = 8.0$  мм волновое число в исследуемой области  $Ra_I$  с учётом погрешности эксперимента не изменяется.

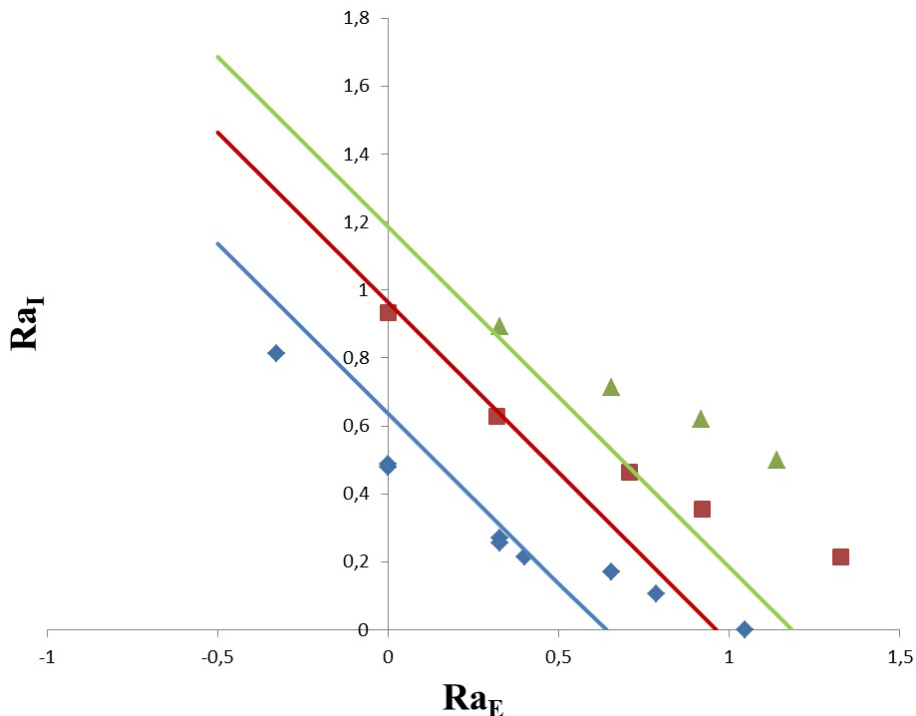


Рис. 2: Карта устойчивости механического равновесия воздуха для трёх толщин воздушной слоя  $h_{air}$ : синий цвет -  $h_{air} = 9.6$  мм; красный цвет -  $h_{air} = 8.5$  мм; зелёный цвет -  $h_{air} = 8.0$  мм. Точки — эксперимент. Сплошные линии — численное моделирование



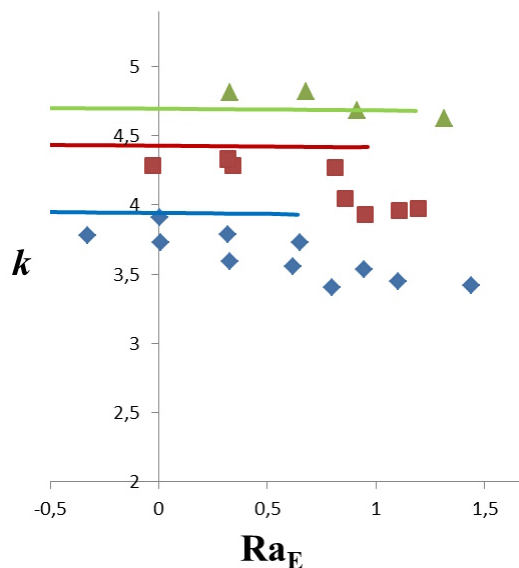


Рис. 3: Безразмерное волновое число при различных внешних числах Рэлея для трёх толщин воздушной слоя  $h_{air}$ : синий цвет -  $h_{air} = 9.6$  мм; красный цвет -  $h_{air} = 8.5$  мм; зелёный цвет -  $h_{air} = 8.0$  мм. Точки – эксперимент. Сплошные линии – численное моделирование

Зафиксированные резкие или плавные изменения волнового числа связаны с качественным перестроением структуры конвективных течений, наблюдаемых по полям температуры в надкритической области. С потерей устойчивости механического равновесия возникала одна из двух видов конвективных структур. С ростом внешнего числа Рэлея после описанного перехода по волновому числу возникала структура из конвективных валов, которые были строго ориентированы ортогонально тепловыделяющим волокнам. До перехода была другая конвективная структура из конвективных валов с независимой от пористого образца ориентацией. Данные численного моделирования расходятся с результатами эксперимента после наблюдаемого перехода по волновому числу, т.к. двумерная теоретическая модель не учитывает трёхмерный характер конвекции в двухслойной системе и анизотропность образца волокнистой пористой среды.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-71-10045, <https://rscf.ru/project/21-71-10045/>.

## Список литературы

- [1] Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. Switzerland: Springer, 2017.
- [2] Kolchanova E., Kolchanov N. Onset of internal convection in superposed air-porous layer with heat source depending on solid volume fraction: influence of different modeling // Acta Mechanica. 2022. V. 233. P. 1769–1788. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03204-8>
- [3] Kolchanova E.A., Kolchanov N.V., Sidorov A.S. Permeability measurements in experiments on convective heat transfer in a complex fibrous porous medium structured by a 3D photopolymer framework // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2023. V. 11, N. 1. P. 65–74. doi: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2023047663

## Критерии конвективной устойчивости течения примеси при разных углах наклона слоисто-неоднородной пористой среды со слабой закупоркой

Колчанова Е.А., Колчанов Н.В.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В работе рассматривается пористая среда, состоящая из двух подслоев разной проницаемости  $K_1$  и  $K_2$  (рис. 1). Среда ориентирована под произвольным углом  $\alpha$  к горизонтали, что в поле силы тяжести вызывает плоскопараллельное течение примеси, насыщающей поры. Примесь может адсорбироваться скелетом среды, вызывая частичную закупорку пор. На внешних непроницаемых границах среды имеется постоянный перепад концентрации. В таких условиях при определенном значении этого перепада течение теряет устойчивость и возникает концентрационная конвекция. Изучается совместное влияние разного коэффициента засорения пор и угла наклона двухслойной пористой среды на порог возбуждения конвекции в двухслойных конфигурациях трех типов: I с высокопроницаемым тонким верхним подслоем ( $\delta = 0.8$ ,  $K_2/K_1 = 40$ ), II с высокопроницаемым тонким нижним подслоем ( $\delta = 0.2$ ,  $K_2/K_1 = 0.035$ ) и III с подслоями одинаковой толщины ( $\delta = 0.5$ ,  $K_2/K_1 = 0.1$  или  $K_2/K_1 = 10$ ).

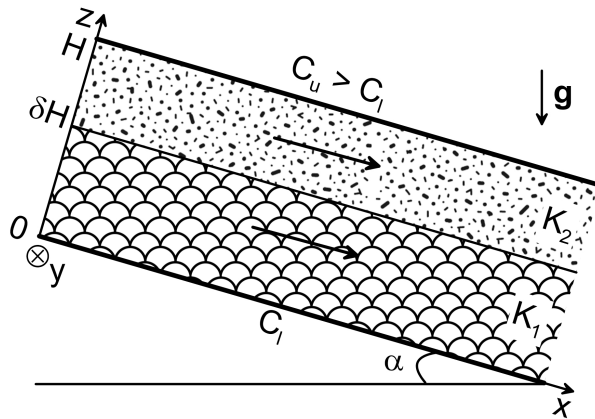


Рис. 1: Конфигурация двухслойной пористой среды, насыщенной примесью и ориентированной под углом  $\alpha$  к горизонтали при наличии перепада концентрации на внешних границах

Уравнения конвекции, записанные в приближении Буссинеска с применением модели Дарси [1, 2, 3] в каждом  $i$ -ом пористом подслое имеют вид:

$$\frac{\eta}{K(\phi_i)} \mathbf{U}_i = -\nabla P_i + \rho_f \beta_{CG} (C_i - C_l) (\mathbf{i} \sin \alpha - \gamma \cos \alpha), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U}_i = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i C_i + Q_i) + (\mathbf{U}_i \nabla) C_i = \operatorname{div} (D \phi_i \nabla C_i), \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = \bar{\alpha} \{ K_d (Q_0 - Q_i) C_i - Q_i \}, \quad (4)$$

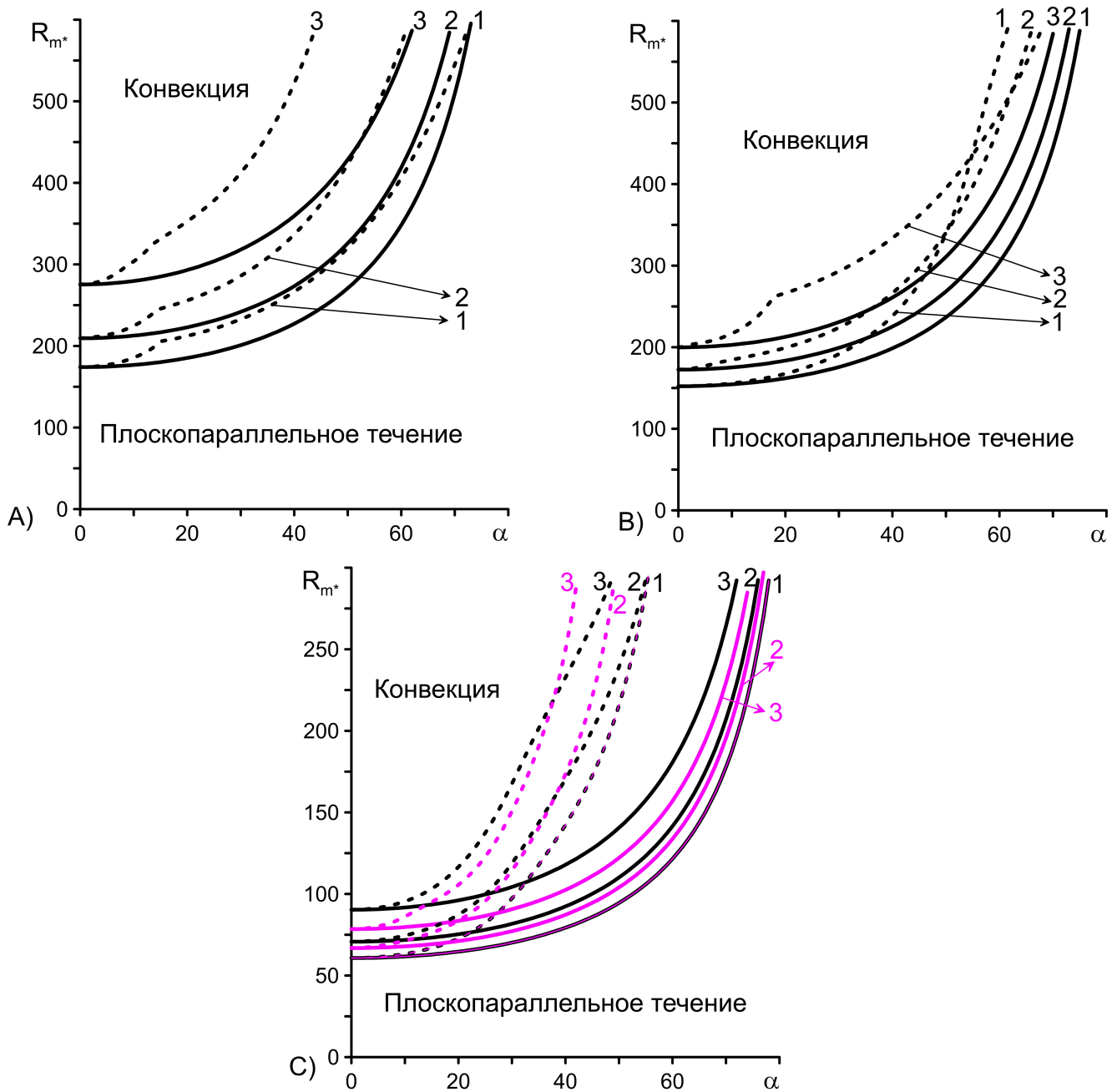


Рис. 2: Влияние коэффициента засорения  $\zeta$  на критическое концентрационное число Рейля-Дарси в системах: А) типа I; В) типа II; С) типа III (черные линии –  $K_2/K_1 = 10$ , фиолетовые линии –  $K_2/K_1 = 0.1$ ). Сплошные линии – границы устойчивости относительно продольных стационарных валов, штриховые линии – границы устойчивости относительно поперечных колебательных валов. Линии 1 –  $\zeta = 0$ ; 2 –  $\zeta = 0.1$ ; 3 –  $\zeta = 0.3$

с граничными условиями:

$$z = 0 : \quad C_1 = C_l, \quad U_{1z} = 0, \quad (5)$$

$$z = \delta H : \quad U_1 = U_2, \quad P_1 = P_2, \quad C_1 = C_2, \quad D\phi_1 \frac{\partial C_1}{\partial z} = D\phi_2 \frac{\partial C_2}{\partial z}, \quad (6)$$

$$z = H : \quad C_2 = C_u, \quad U_{2z} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $U$  — скорость фильтрации;  $P$  — давление без учета гидростатической добавки;  $C$  — объемная концентрация мобильной фазы (части примеси, которая движется вместе с течением несущей жидкости);  $Q$  — объемная концентрация немобильной фазы (части примеси, которая захватывается скелетом среды);  $D$  — коэффициент диффузии;  $g$  — ускорение свободного падения;  $i$  — орт оси  $x$ ;  $\gamma$  — орт оси  $z$ ;  $\eta$  — динамическая вязкость смеси;  $\rho = \rho_f \{1 + \beta_C (C - C_l)\}$  — плотность смеси;  $\rho_f$  — плотность несущей жидкости при  $C = C_l$ ;  $\beta_C$  — концентрационный коэффициент объемного расширения примеси;  $\bar{\alpha}$  — коэффициент переноса;  $K_d$  — коэффициент, пропорциональный отношению скоростей адсорбции и десорбции примеси;  $Q_0$  — максимально возможная концентрация немобильной фазы, которая может быть захвачена скелетом пористой среды [4]. Фильтрационные характеристики пористой среды: текущая пористость  $\phi = (\phi_0 - Q)$ , где  $\phi_0$  — исходная пористость незагрязненной среды, и проницаемость, которая зависит от пористости согласно формуле Кармана-Козени [3]:  $K(\phi) = \frac{D_p^2 \phi^3}{180(1-\phi)^2}$ , где  $D_p$  — средний размер неоднородности скелета среды.

Для решения уравнений (1)–(4) с граничными условиями (5)–(6) применяется линейная теория устойчивости. Получаются уравнения малых возмущений плоскопараллельного базового течения примеси, которое формируется вследствие наклона среды относительно горизонтали в поле силы тяжести. Далее численно, методом построения фундаментальной системы векторов частных решений исследуется совместное влияние коэффициента засорения пор  $\zeta$  и угла наклона среды  $\alpha$  на конвективную устойчивость этого базового течения в двухслойных пористых системах указанных трех типов. Анализируется смена характера конвективной неустойчивости и структуры длинноволновых и коротковолновых валов, возникающих на фоне данного течения при разных значениях  $\zeta$  и  $\alpha$ , в том числе для случая подслоев с сильно различающимися значениями проницаемостей  $K_1$  и  $K_2$ . Строятся зависимости критических параметров, которые являются критериями устойчивости базового течения относительно малых возмущений. Это концентрационное число Релея-Дарси  $R_{m*}$ , волновое число конвективных валов  $k_*$  и частота колебаний  $\omega_*$ . На рис. 2 показаны зависимости первого из этих критериев от  $\zeta$  и  $\alpha$  для всех трех типов двухслойных систем.

Рассматриваются возмущения базового течения двух видов:

1. Продольные валы с осями, параллельными оси  $x$  и вытянутыми в направлении базового течения. Эти валы являются спиральными возмущениями и содержат все три компоненты скорости фильтрации. Они возникают монотонным образом, приводя к стационарной конвекции.
2. Поперечные валы с осями, параллельными оси  $y$  и расположенными перпендикулярно базовому течению. Эти валы являются плоскими возмущениями. Они возникают колебательным образом, вызывая колебательную конвекцию.

В качестве основного вывода отметим, что увеличение угла наклона пористой системы относительно горизонтали и закупорка пор подавляет локальную и крупномасштабную конвекцию, как в виде продольных, так и в виде поперечных валиковых структур в системах всех трех типов. Базовое плоскопараллельное течение с ростом параметров  $\zeta$  и  $\alpha$  стабилизируется. Резкое изменение критического волнового числа, приводящее к смене вида неустойчивости — с локальной на крупномасштабную, — наблюдается в системах I и II с сильно отличающимися проницаемостями и тонкими высокопроницаемыми подслоями. В системе III с одинаковой толщиной подслоев волновое число меняется плавно с ростом  $\zeta$  и  $\alpha$ .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20125).

## Список литературы

- [1] Maryshev B.S., Khabin M.R., Evgrafova A.V. Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging // Journal of Porous Media. 2022. Vol. 26, No. 6. P. 31-53.
- [2] Kolchanova E.A., Kolchanov N.V. Onset of solutal convection in layered sorbing porous media with clogging // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 183, Part A. 122110.
- [3] Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. Switzerland: Springer, 2017.
- [4] Selim H.M., Amacher M.C. Reactivity and transport of heavy metals in soils. Boca Raton: CRC, 1997.

## Моделирование процесса истечения вскипающей воды через тонкое сопло

Коробчинская В.А.<sup>1,2</sup>, Гайнуллина Э.Ф.<sup>1,2</sup>, Файзуллина Э.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

<sup>2</sup>Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Исследования в области распыления жидкостей в перегретом состоянии представляют значительный теоретический и практический интерес ввиду их широкого применения в многочисленных технических приложениях. Для разработки новых методов распыления и модификации существующих, необходимо учитывать особенности механизма образования струй. Начальное состояние жидкости в камере высокого давления, размер выходного сопла непосредственно влияют на форму струи, ее устойчивость и дальность.

Экспериментальные исследования по критическому режиму истечения пароводяной смеси проводились в [1, 2]. В работе [2] изучалась динамика вскипания струи перегретой воды при истечении через короткий канал с диаметром  $d = 0.2$  мм при варьировании начальных параметров (температура, давление) на линии насыщения:  $T_s = 383\text{--}583$  К,  $p_s = 0.1\text{--}9.8$  МПа. В экспериментах [2] наблюдалась смена формы вскипающей струи от цилиндрической к ее полному раскрытию и выявлена неустойчивость в режиме полного развала.

Исследования по влиянию начального состояния воды в камере высокого давления с учетом интенсивности зародышеобразования на форму пароводяной струи на начальной стадии истечения анализировались в [3] с привлечением численного моделирования методом сквозного счета на подвижных лагранжевых сетках с применением модели вскипания, предложенной в [4].

В настоящей работе проведено численное исследование нестационарного процесса истечения вскипающей пароводяной смеси при разгерметизации камеры высокого давления через тонкое сопло в условиях экспериментальных данных [2] с использованием реалистичного широкодиапазонного уравнения состояния воды и пара [5], позволяющее получить более достоверные результаты.

Для решения поставленной задачи используется двухфазная модель в двухтемпературном, однодавленческом, двухскоростном приближении с учетом контактного теплообмена и неравновесных массообменных процессов испарения и конденсации [6].

Система дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса и энергии для двухфазной смеси в трехмерной декартовой системе координат:

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i \mathbf{v}_i) = J_{ij}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i \mathbf{v}_i)}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i) = -\alpha_i \nabla p + \text{div}(\alpha_i \boldsymbol{\tau}_i) + \mathbf{F}_{i,drag} + \mathbf{F}_{i,vm} + J_{ij} \mathbf{v}_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i E_i)}{\partial t} + \text{div}(\alpha_i \rho_i E_i \mathbf{v}_i) = -p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \text{div}(\alpha_i \mathbf{v}_i p) + \text{div}(\alpha_i \gamma_{i,eff} \nabla h_i) + K_{ht}(T_j - T_i) + l_s J_{ij}. \quad (3)$$

Сила присоединенных масс имеет вид:  $\mathbf{F}_{i,vm} = 0.5 \alpha_i \rho_g \left( \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} - \frac{d_j \mathbf{v}_j}{dt} \right)$ . Межфазное сопротивление описано

моделью Шиллера–Науманна:  $\mathbf{F}_{i,drag} = \frac{3}{4} \alpha_i C_D \frac{\rho_g}{d_{10}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|$ .

В уравнениях (1)–(3) использовались следующие обозначения:  $\rho_i$  – плотность,  $T_i$  – температура,  $\alpha_i$  – объемное содержание,  $\mathbf{v}_i$  – скорость,  $J_{ij}$  – скорость массообмена между  $i$ -й и  $j$ -й фазами,  $p$  – давление,  $\boldsymbol{\tau}_i = \mu_i (\nabla \mathbf{v}_i + \nabla \mathbf{v}_i^T) - \frac{2}{3} (\mu_i \text{div} \mathbf{v}_i) \mathbf{I}$  – тензор вязких напряжений,  $\mu_i$  – динамическая вязкость,  $E_i = e_i + K_i$  – полная энергия в виде суммы внутренней и кинетической энергий,  $\gamma_{i,eff}$  – эффективная температуропроводность,  $h_i$  – энтальпия,  $\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{v}_i + \alpha_g \mathbf{v}_g$  – скорость парожидкостной смеси,  $K_{ht} = \frac{\kappa_g}{d_{10}} \text{Nu}$  – коэффициент теплообмена,  $\kappa_g$  – теплопроводность газа,  $\text{Nu}$  – число Нуссельта,  $l_s$  – теплота парообразования/конденсации,  $d_{10}$  – диаметр каплей. Нижние индексы  $i, j = 1, 2$  – соответствуют жидкой ( $l$ ) и паровой фазам ( $g$ ) ( $i \neq j$ ).

Термодинамические свойства пароводяной системы описываются широкодиапазонным уравнением состояния в форме Ми–Грюнайзена, то есть в виде суммы холодной (верхний индекс  $p$ ) и тепловой (верхний индекс  $T$ ) составляющих для давления и внутренней энергии [5]:

$$p(\rho_i^0, T_i) = p^{(p)}(\rho_i^0) + p^{(T)}(\rho_i^0, T_i), \quad e(\rho_i^0, T_i) = e^{(p)}(\rho_i^0) + e^{(T)}(T_i) + e^{(ch)},$$

где упругие составляющие давления и внутренней энергии описываются потенциалом типа Борна – Майера:

$$p^{(p)}(\rho_i^0) = A \left( \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0} \right)^{-\beta+1} \exp \left[ b \left( 1 - \left( \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0} \right)^{-\beta} \right) \right] - K \left( \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0} \right)^{\xi+1}, \quad (4)$$

$$e^{(p)}(\rho_i^0) = \int_{\rho^{\circ}}^{\rho} \frac{p^{(p)}(\rho_i^0)}{(\rho_i^0)^2} d\rho_i^0 = \frac{A}{\beta \rho_{i0}^0 b} \exp \left[ b \left( 1 - \left( \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0} \right)^{-\beta} \right) \right] - \frac{K}{\xi \rho_{i0}^0} \left( \frac{\rho_i^0}{\rho_{i0}^0} \right)^{\xi} + e^{\circ}.$$

Здесь  $A$ ,  $K$ ,  $b$ ,  $\xi$ ,  $\beta$  – константы,  $\rho_{i0}^0$  – плотность каждой фазы при нормальных условиях,  $e^{\circ}$  – константа интегрирования для выполнения условия:  $e^{(p)}(\rho^{\circ}) = 0$ , когда  $p^{(p)}(\rho^{\circ}) = 0$ ,  $e^{(ch)}$  – величина, необходимая для согласования внутренних энергий фаз. Тепловые составляющие давления и внутренней энергии имеют вид:

$$p^{(T)}(\rho_i^0, T_i) = \Gamma(\rho_i^0) \rho_i^0 e^{(T)}(T_i), \quad e^{(T)}(T_i) = c_{v_i} T_i. \quad (5)$$

Скорость испарения  $J_{lg}$  в соответствии с [4], предполагается зависящей от числа  $n$  и радиуса  $a$  пузырьков, температуры насыщения  $T_s(p)$ , теплоты парообразования  $l_s(T)$ , коэффициента теплопроводности  $\lambda_l$  и числа Нуссельта  $Nu$ :

$$J_{lg} = 2\pi a n Nu \lambda_l (T - T_s(p)) / l_s(T). \quad (6)$$

Численное моделирование изучаемого процесса проводилось в пакете вычислительной гидродинамики [7] с использованием разработанного авторами решателя, моделирующего уравнения (1) – (6).

Для проверки достоверности разработанной пространственной модели вскипающей пароводяной смеси было проведено сравнение численных расчетов с результатами эксперимента [1], соответствующими начальной (быстрой) стадии внезапного истечения недогретой до параметров насыщения воды из трубы радиуса  $r = 0.0375$  м и длиной  $l = 4.1$  м при исходных давлении  $p_0 = 7$  МПа и температуре  $T_0 = 515$  К.

При моделировании экспериментов [2] в расчетах в камере высокого давления принимались следующие начальные температуры, соответствующие состоянию насыщения:  $T_{s1} = 433$  К,  $T_{s2} = 483$  К и  $T_{s3} = 573$  К. В результате расчетов получены распределения массовых скоростей пароводяного потока. Выявлено, что при невысокой степени перегрева струя сохраняет цилиндрический вид ( $T_{s1} = 433$  К). При увеличении температуры до 483 К усиливается интенсивность испарения и происходит смена формы струи на коническую. Для режима истечения с начальной температурой  $T_{s3} = 573$  К наблюдается трансформация струи, приводящая с течением времени к ее разрушению.

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

## Список литературы

- [1] Edwards A.R., O' Brien T.P. Studies of phenomena connected with the depressurization of water reactors // J. Br. Nucl. Energ. Soc. 1970. Vol. 9, No. 2. Pp. 125–135.
- [2] Бусов К.А., Мажейко Н.А., Скоков В.Н. Вскипание струи перегретой воды при истечении через канал малого диаметра // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 48, вып. 24. С. 8–10.
- [3] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Пространственное моделирование процесса формирования струи вскипающей воды при истечении из тонкого сопла // Т и А. 2017. Т. 24, № 5. С. 783–794.
- [4] Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // Т и А. 2012. Т. 19, № 6. С. 719–730.
- [5] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТВТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.
- [6] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. М.: Наука, 1987. С. 464.
- [7] OpenFOAM. The Open source computational fluid dynamics (CFD) toolbox [Electronic source]. <http://www.openfoam.com>.

## Оценка ограниченности предела текучести грунта при высоких давлениях в задачах проникания

Линник Е.Ю.

(НИИ Механики, ННГУ им Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород)

В задачах проникания зависимость предела текучести от давления является нелинейной и в общем случае представляется двухзвенной ломаной с учетом разброса данных и ошибок. Первое звено ломаной реализуется при малых давлениях и соответствует условию пластичности Мора-Кулона. При больших давлениях максимальное значение предела текучести ограничено условием Треска.

Ранее получены формулы [1] для определения диапазона скоростей расширения полости, в котором применимо простое решение для среды с условием пластичности Треска. В данной работе рассматривается проблема решения высокоскоростного проникания жестких тел в мягкие грунты на основе аналитического решения задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности Мора-Кулона-Треска.

В качестве контактного давления при взаимодействии ударника с сопротивляющейся средой принимается напряжения на границе полости, расширяющейся с постоянной скоростью из точки в бесконечной среде. В качестве скорости расширения полости принимается проекция вектора скорости движения ударника на нормаль к элементу поверхности тела. Данный подход соответствует модели локального взаимодействия, что характерно при решении задач удара и проникания. Динамическая сжимаемость грунтовых сред характеризуется ударной адиабатой Гюгония в виде линейного соотношения. Ранее установлено [2], что решение задач удара и проникания мягких грунтовых сред в мягкие грунты адекватно описывается моделью локального взаимодействия. Согласно модели напряжение определяется трехчленной зависимостью от скорости проникания жесткого ударника в грунтовую среду.

Задача оценки предела текучести осуществлялась численно при этом варьировались значения предела текучести в диапазоне 20-50 МПа. Скорость проникания конического ударника изменялась в диапазоне скоростей 150-400 м/с. При этом напряжение, необходимое для расширения полости со скоростью, близкой к нулю (критическое напряжение) определялось в результате численного решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с применением метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. В этом случае критическое давление равно 63.5 Мпа.

Установлено, что максимальная относительная погрешность аппроксимации нормального напряжения не превышает 2-3%, кроме того для сухого песчаного грунта продемонстрировано хорошее соответствие экспериментальным данным [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-29- 00103).

### Литература

1. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand International Journal of Impact Engineering. - 2018. - Vol. 122. - P. 197-208.
2. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи расширения сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны // Проблемы прочности и пластичности. - 2012. - Вып. 81. № 2. - С. 177-190.
3. Линник Е.Ю., Оценка контактных напряжений при внедрении ударника в прочный грунт// Проблемы прочности и пластичности - 2020. - Т.82.№1 - С.52-63.

## Construction of traveling wave type solutions for filtration equations in mathematical modeling of oil and gas production

**Litvinov Vladislav Lvovich**

Candidate of technical sciences, associate professor;

e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

Samara State Technical University

**Litvinova Kristina Vladislavovna**

student; e-mail: kristinalitvinova900@rambler.ru

Lomonosov Moscow State University

The work is devoted to the construction of self-similar solutions of the "travelling wave" type of the equations of two-component filtration of solutions, accompanied by phase transitions. A model is considered that is widely used to solve the problems of predicting the development of oil and gas reservoirs. Within this model, two-component isothermal filtration is described by a system of non-linear partial differential equations, the solutions of which are characterized by the presence of discontinuities in component concentrations. It is assumed that the pressure is continuous, because filtration rates are small enough and the pressure has time to be established. If no particular assumptions are made about the properties of fluids (Amago's law, incompressibility of fluids, etc.), then in this general case the nonlinear equations of two-component filtration cannot be reduced to hyperbolic, parabolic, and elliptic ones. The study of multicomponent filtration, accompanied by phase transitions, in the general formulation is possible only with the involvement of mathematical modeling methods.

A model of two-component filtration with phase transitions is considered, which is widely used to solve problems of predicting the development of oil and gas reservoirs [1] - [3]. It is assumed that the filtration rates are low, and the mass transfer occurs quite intensively, so that phase equilibrium has time to be established in each elementary volume. Depending on the temperature and pressure conditions, a two-component mixture can be either in a single-phase state or in a two-phase state. In the second case, we will conditionally consider the denser phase to be liquid and mark the quantities corresponding to it with the index L, and the less dense phase, the gas phase and mark it with the index G.

Nonlinear equations of two-component filtration demonstrate the properties of hyperbolic, parabolic and elliptic types of equations. The solutions of the system of equations describing filtration are characterized by the presence of strong and weak concentration discontinuities propagating at a finite speed. The task becomes more complicated if phase transitions are present. Unpredictable changes in composition and phase saturation are one of the problems in the development of "carbonated" oil and gas condensate deposits. Self-similar solutions are of great interest both for testing numerical algorithms [2] and for studying complex filtration flows. In underground hydrodynamics, self-similar solutions of filtration equations obtained for incompressible phases without phase transitions are well known. Such solutions are used to study the processes of oil displacement by water or compressed gas. However, phase compressibility often plays a significant role. In this work, no particular assumptions about the properties of fluids are made, i.e. fluids can be either compressible or incompressible, and phase transitions occur in the system.

### References

1. Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A., Samarskaya E.A., Tishkin V.F. Methods of mathematical modeling of the environment. - M : "Nauka", 2000, 254 p.
2. Koldoba E.V. Self-similar solutions of two-component filtering with phase transitions. Tez. report scientific conf. "Lomonosov Readings", Moscow State University, 2005, p. 118.
3. Brusilovsky A.I. Phase transformations in the development of oil and gas fields - "Grail", 2002





## Pseudocomponent method for modeling component-fraction composition of a fluid during oil and gas production

*V. L. Litvinov*, Ph.D., associate professor, Head of the department, Samara State Technical University  
*K. V. Litvinova*, student, Faculty of geology,  
Moscow State University named after M.V. Lomonosov

When designing oil and gas production processes, it is necessary to correctly model the component – fractional composition of the produced fluid. In modern hydrodynamic simulators, one of the main difficulties of modeling is to replace a large number of components in oil and natural gas with a much smaller number of pseudoparticles. In addition, it is necessary to describe the physicochemical properties of hypothetical oil and gas so that they describe phase transitions and filtration of a real fluid as accurately as possible. The paper proposes an automatic lambing scheme based on  $K$  – values. The error of the method is no more than 5%.

1. *Whitson C.H. and Torp S.B.* Evaluating Constant Volume Depletion Data. - JPT (March 1983), Trans., AIME, 275.
2. *Reid R.C., Prausnitz J.M. and Sherwood T.K.* The properties of Gases and Liquids, - 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1977.
3. *Yau-Kun Li, Long X. Nghiem, Alan Siu.* Phase behaviour computations for reservoir fluids: effect of pseudo-components on phase diagrams and simulation results. Petroleum Society of Canada. Journal of Canadian Petroleum Technology. 1985. 24 p.

## Механические свойства субмикроструктурного титанового сплава ВТ6, полученного всесторонней изотермической деформацией, перспективы его использования

Мальшева С.П.

Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа

Двухфазный титановый сплав ВТ6 широко используется в авиастроении из-за хорошего сочетания механических и технологических свойств. Снижение веса и габаритов изделий может быть достигнуто измельчением его микроструктуры до субмикроструктурного состояния (СМК) с размером зерен менее 1 мкм. Объемные заготовки с СМК структурой могут быть получены методами интенсивной пластической деформации [1].

Имеется множество работ по исследованию механических свойств титанового сплава ВТ6 с различным размером зерен. Известно, что прочность, твердость, сверхпластические свойства улучшаются с уменьшением размера зерна [1-3]. В то же время измельчение микроструктуры приводит к снижению пластичности, ударной вязкости и сопротивления распространения трещины из-за низкой способности таких материалов к деформационному упрочнению [3]. В настоящей работе рассмотрена микроструктура и механические характеристики в комплексе и установлены границы применимости титанового сплава ВТ6 в СМК состоянии. Этот вопрос интересен и актуален, поскольку титановый сплав ВТ6 с СМК структурой можно использовать в авиастроении для изготовления высокопрочных, облегченных узлов и конструкций, например, компрессорных лопаток авиационного двигателя, которые должны иметь улучшенные свойства. Кроме того, листы с СМК структурой возможно применять в качестве листов-наполнителей для полых лопатки газотурбинного двигателя в авиации [4]. Поэтому целью данной работы было изучить механические свойства сплава ВТ6 с субмикроструктурной структурой и сравнить их со свойствами этого материала в обычном состоянии.

В работе исследовали титановый сплав ВТ6 (6,5%Al; 5,1%V; 0,1%Fe; 0,03%Si; 0,02%C; 0,01%N) с температурой полиморфного превращения  $\alpha \rightarrow \beta$   $T_{\text{пт}}=980^\circ\text{C}$ . Субмикроструктурную микроструктуру в образцах сплава ВТ6 получали методом всестороннейковки с понижением температуры [1]. Температура последнего этапа деформации была  $630^\circ\text{C}$ , скорость деформации – около  $10^{-3} \text{ с}^{-1}$ . В результате были получены объемные образцы со средним размером зерен (фрагментов) 0,5 мкм. В образцах имеются значительные внутренние напряжения. Были исследованы механические свойства образцов из ВТ6 с СМК микроструктурой. Для сравнения механических характеристик сплава ВТ6 были взяты два типа микроструктур: упрочненная по стандартной технологии микроструктурная МК (с размером частиц  $\alpha$ -фазы 5 мкм) и субмикроструктурная (размер зерен  $\alpha$ -фазы 0,5  $\mu\text{m}$ ). Образцы обычного термически упрочненного микроструктурного титанового сплава ВТ6 были получены горячей прокаткой при температуре  $880^\circ\text{C}$  с последующим рекристаллизационным отжигом при температуре более  $840^\circ\text{C}$  в течение 2 ч.

В работе исследовали микротвердость поверхности образцов по Виккерсу, механические характеристики на растяжение при комнатной температуре, предел выносливости, испытания на ударную вязкость на образцах с U-образным концентратором (КСУ) и с наведенной усталостной трещиной (КСТ). Полученные значения механических свойств приведены в таблице 1.

Таблица 1. Механические свойства титанового сплава ВТ6 в различных состояниях.

Состояние	Микротвердость, МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\delta$ , %	$\psi$ , %	Ударная вязкость, МДж/м <sup>2</sup>			$\sigma_{0,1}(300)$ МПа	$\sigma_{-1}$ , МПа
						КСУ	КСВ	КСТ деформированный/отожженный		
МК (5 мкм)	3453	1050	960	18	42	0,45	0,41	0,24	700	580
СМК (0,6 мкм)	3779	1280	1171	10	60	0,37	0,18	0,08/0,15	850	693
СМК (0,15 мкм)	4050	1400	1280	7	56	-	-	-	-	-
МК+ИИ	4539	1139	971	8	31	-	-	-	-	640
СМК+ИИ	4875	1207	1154	7	50	-	-	-	-	720

Установлено, что при комнатной температуре сплав с СМК структурой демонстрирует значения прочности на 250 МПа выше по сравнению с МК состоянием (Табл. 1). Относительное удлинение в СМК

состоянии несколько ниже, чем в МК, но, с другой стороны относительное сужение СМК материала почти в 2 раза больше, чем МК сплава. Также сплав с СМК структурой показывает по сравнению с МК состоянием меньшую равномерную деформацию ( $\delta_p$ ), что свидетельствует о большей склонности к локализации деформации. Предел прочности и предел усталости СМК материала на 20-33% выше, чем у термоупрочненного сплава ВТ6. Микротвердость СМК сплава более чем на 300 МПа выше микротвердости МК состояния. Однако относительное удлинение при растяжении, ударная вязкость и характеристики трещиностойкости заметно снижаются с уменьшением размера зерен.

Сопrotивление усталостному разрушению также повышается при измельчении микроструктуры. Значение предела выносливости  $\sigma_0$  на базе  $N=2 \times 10^7$  циклов составило  $\sigma_0=683$  МПа для СМК состояния сплава ВТ6 и  $\sigma_0=586$  МПа для МК состояния сплава ВТ6.

Результаты ударных испытаний образцов сплава с СМК и МК микроструктурой также приведены в Таблице 1. Ударная вязкость ( $KCU$ ,  $KCV$ ,  $KCT$ ) образцов ВТ6 в СМК состоянии снижается, но по параметру  $KCU$  она остается в пределах требований технических условий к сплаву ВТ6 ( $KCU$  более 0,35). Наибольшее снижение наблюдается при введении в область надреза трещины ( $KCT=0,08$ ). Таким образом, когда трещина в образце уже имеется, и вся энергия затрачивается только на ее распространение, ударная вязкость СМК образца очень сильно уменьшается. Это связано с мелким размером зерен, когда трещине легко распространяться по большому количеству границ зерен. Вязкость разрушения СМК образца составляет  $30,5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ , что несколько ниже, чем известные значения для этого сплава ( $33-110 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ ). Увеличить область пластической деформации в вершине трещины и тем самым повысить работу, затрачиваемую на распространение трещины, можно путем отжига материала, который снимает внутренние напряжения, но не приводит к росту зерен. Как показал эксперимент, отжиг СМК сплава ВТ6 при температуре  $T=650^\circ\text{C}$  в течение 1 часа увеличивает  $KCT$  в 2 раза.

Известно, что преимущество СМК состояния титанового сплава ВТ6 в прочности сохраняется примерно до  $T=450^\circ\text{C}$  [3], после чего наблюдается интенсивное разупрочнение, что указывает на интенсивное протекание релаксационных процессов, при этом увеличиваются значения относительного удлинения, что свидетельствует о приближении к области температур сверхпластической деформации. Если сопротивление ползучести при  $T=250^\circ\text{C}$  в СМК и МК состоянии практически одинаково, то уже при  $T=350^\circ\text{C}$  предел ползучести МК состояния сплава ВТ6 в 2,5 раза выше, чем у СМК состояния сплава. Эти данные соответствуют верхней границе эксплуатационных температур, до которой в сплаве ВТ6 реализуется преимущество СМК состояния у сплава ВТ6.

Длительная прочность сплава ВТ6 с СМК структурой при температуре  $300^\circ\text{C}$  за время  $t=100$  часов выше ( $\sigma_{дл}(300) = 850 \text{ МПа}$ ), чем у образца с МК структурой ( $\sigma_{дл}(300) = 700 \text{ МПа}$ ), несмотря на полученные данные о заметном снижении предела ползучести в СМК состоянии при повышении температуры с  $250$  до  $350^\circ\text{C}$ . Относительные удлинения образцов этих двух состояний примерно одинаковы.

Отмеченные повышения прочности, твердости и выносливости свидетельствует о возможности увеличения ресурса высоконагруженных деталей из титановых сплавов, например, лопаток компрессора газотурбинного двигателя (ГТД).

В связи с этим, из титанового сплава ВТ6 с СМК структурой была изготовлена опытная партия лопаток ГТД штамповкой при  $T=650^\circ\text{C}$ , которая на  $250^\circ\text{C}$  ниже температуры штамповки этих лопаток из сплава ВТ6 по серийной технологии, применяемой на производстве [5]. Исследования микроструктуры и свойств полученных лопаток показали, что СМК структура в лопатках сохраняется, а их прочность на 20% выше прочности лопаток, выпускаемых по серийной технологии и имеющих более крупную структуру. Пластичность лопаток с СМК структурой также выше, а отжиг приводит к дополнительному повышению пластичности в 1,5 раза. Свойства лопаток, изготовленных из СМК сплава ВТ6, удовлетворяют требованиям соответствующего отраслевого стандарта, что позволяет рекомендовать данный материал к использованию для производства лопаток ГТД.

Дополнительное повышение характеристик прочности, износостойкости поверхности и увеличение срока службы изделия возможно достичь путем использования ионной имплантации (ИИ) поверхности изделия (Таблица 1). Поверхностную обработку лопаток проводили облучением ионами азота и аргона. Показано, что ИИ дополнительно увеличивает микротвердость сплава ВТ6 в СМК и МК состояниях. Микротвердость поверхности увеличилась более чем на 1000 МПа [6]. Прочность в МК состоянии с ИИ поверхностью увеличивается на 130 МПа, в СМК состоянии - уменьшилась 100 МПа, при снижении пластичности в обоих состояниях. Снижение характеристик прочности СМК сплава можно объяснить разупрочнением материала при его нагреве в процессе ионной обработки. Предел выносливости сплава ВТ6 в СМК состоянии составляет 600 МПа, а в СМК образцах после ИИ он снижается до 420 МПа, предел выносливости сплава ВТ6 в обычном состоянии составляет 430 МПа. Таким образом, ИИ может оказывать благоприятное воздействие на соотношение прочностных и пластических свойств СМК сплава, приводя к увеличению прочности и сохранению на высоком уровне пластичности по сравнению с МК состоянием, расширяя при этом интервал эксплуатационных температур.

Сочетание отмеченных выше механических характеристик в сплаве ВТ6 с СМК микроструктурой делает перспективным получение из них листов с СМК микроструктурой, которые можно использовать в авиастроении для изготовления высокопрочных, облегченных узлов и конструкций с использованием перспективной технологии сверхпластической формовки (СПФ) и диффузионной сварки (ДС). Эти технологии требуют использования высоких температур и использования дорогостоящего штампового инструмента, поэтому

использование титанового сплава с мелким зерном, снижающим температуру сверхпластичности очень перспективно.

Исследования механических свойств листа из сплава ВТ6 с СМК микроструктурой при температурах 650–900°C показали, что в исследованном интервале температур данный сплав обладает хорошими сверхпластическими свойствами, при этом не выявлено существенной анизотропии в механических свойствах листов, т.е. микроструктура листов достаточно благоприятна для сверхпластического формообразования. Вместе с тем, в листах с СМК структурой наблюдается снижение температуры проявления сверхпластической деформации на 200–250°C по сравнению со сплавом ВТ6 в обычном состоянии [3,9]. Показано, что микроструктура листов с СМК размером зерен стабильна для температур менее 750°C, а при нагреве выше 750°C в листе происходит интенсивный рост зерен.

Полученные результаты были успешно использованы для разработки и оптимизации процесса СПФ. В результате исследований установлено, что листы из титанового сплава ВТ6 с СМК микроструктурой в интервале температур 750–800°C проявляют хорошие сверхпластические свойства, что позволило изготовить из них методом СПФ/ДС трехслойные экспериментальные конструкции [8,10].

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМСП РАН № 122011900468-4, 122011900474-5 и 124022900008-6. Исследования выполнены на базе Центра коллективного пользования ИПСМ РАН.

## Список литературы

- [1] Мулюков Р.Р., Имаев Р.М., Назаров А.А. Сверхпластичность ультрамелкозернистых сплавов: Эксперимент, теория, технологии. М.: Наука, 2014. 284 с.
- [2] Mulyukov R.R., Imayev R.M., Nazarov. J. Mater. Sci. 43, 7257 (2008)
- [3] Zharebtsov S., Kudryavtsev E., Kostjuchenko S., Malysheva S., Salishchev G. Strength and ductility-related properties of ultrafine grained two-phase titanium alloy produced by warm multiaxial forging. Materials Science and Engineering A 536, 2012. P. 190-196.
- [4] Сафиуллин Р.В., Сафиуллин А.Р., Малышева С.П., Козлов А.Н., Берестов А.В., Галеев Р.М., Валиахметов О.Р. Исследование технологических свойств титанового сплава Ti-6Al-4V. Часть 1. Микроструктура и механические свойства. Письма о материалах, 2016. Т. 6 (4). С. 281-285.
- [5] Малышева С.П. Исследование микроструктуры и механических свойств компрессорных лопаток авиационного двигателя, изготовленных из титанового сплава с субмикроструктурной структурой. Письма о материалах, 2014. Т. 4. В.1. С. 49-51.
- [6] Сафин Э.В., Малышева С.П., Галеев Р.М., Беляева Д.В. Сравнительный анализ структурных состояний и повышенных механических свойств титанового сплава ВТ6. MATERIALS. TECHNOLOGIES. DESIGN, 2020. Т.2. №1(2). с.45-50.
- [7] Сафиуллин Р.В., Малышева С.П., Закирова А.А., Хазгалиев Р.Г., Алетдинов А. Микроструктура и механические свойства плоских образцов из титанового сплава ВТ6. Труды 63-й Международную конференцию "Актуальные проблемы прочности", Тольятти: Издательство ТГУ, 2021. с.281-282.
- [8] R.V. Safiullin, S.P. Malysheva, R.G. Khazhaliev, A.R. Safiullin, A.V. Berestov, E.A. Plaksina. Technological properties of sheet titanium alloys VT6. Письма о материалах. 2023. Т.13. №2. С.98-103
- [9] Жеребцов С.В., Галеев Р.М., Валиахметов О.Р., Малышева С.П., Салищев Г.А., Мышляев М.М.. Формирование субмикроструктурной структуры в титановых сплавах интенсивной пластической деформацией и их механические свойства. КШП, 1999. № 7. с. 17-22.
- [10] Сафиуллин Р.В., Галеев Р.М., Малышева С.П. «Влияние отжига на микроструктуру и сверхпластические характеристики листов из титанового сплава ВТ6» - В книге: XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. сборник тезисов докладов : в 4 т. Министерство науки и высшего образования РФ; Российская академия наук; Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. Санкт-Петербург, 2023. С. 1171-1173.

## Анализ собственных колебаний столба жидкости в скважине, сообщающейся с пластом

Мамаева З.З.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящее время добыча нефти - сложный и наукоемкий процесс, который непрерывно модернизируется и совершенствуется. Одной из актуальных проблем в нефтяной отрасли является снижение дебита большинства добывающих скважин и, как следствие, увеличение добычи трудноизвлекаемых запасов и необходимость проведения работ по обработке призабойной зоны с целью улучшения ее коллекторских характеристик, например, создание трещин гидравлического разрыва пласта (ГРП). Данные процессы требуют исследования состояния пластов и получения информации о геометрии трещины.

В данной работе представлен один из возможных методов исследования пластов и трещин ГРП, основанный на возбуждении собственных колебаний столба жидкости в скважине и анализе волновых характеристик колебаний. Построена математическая модель собственных колебаний столба жидкости в скважине, возникших вследствие гидроудара [1, 2]. Изучено влияние коллекторских характеристик пласта, наличия трещины на основные волновые характеристики колебаний. Показано, что в случае низкопроницаемых пластов (порядка миллиардари и меньше), после проведения ГРП может происходить двукратное снижение собственных частот колебаний. Проанализирована динамика колебаний давления на устье, в середине и на забое скважины.

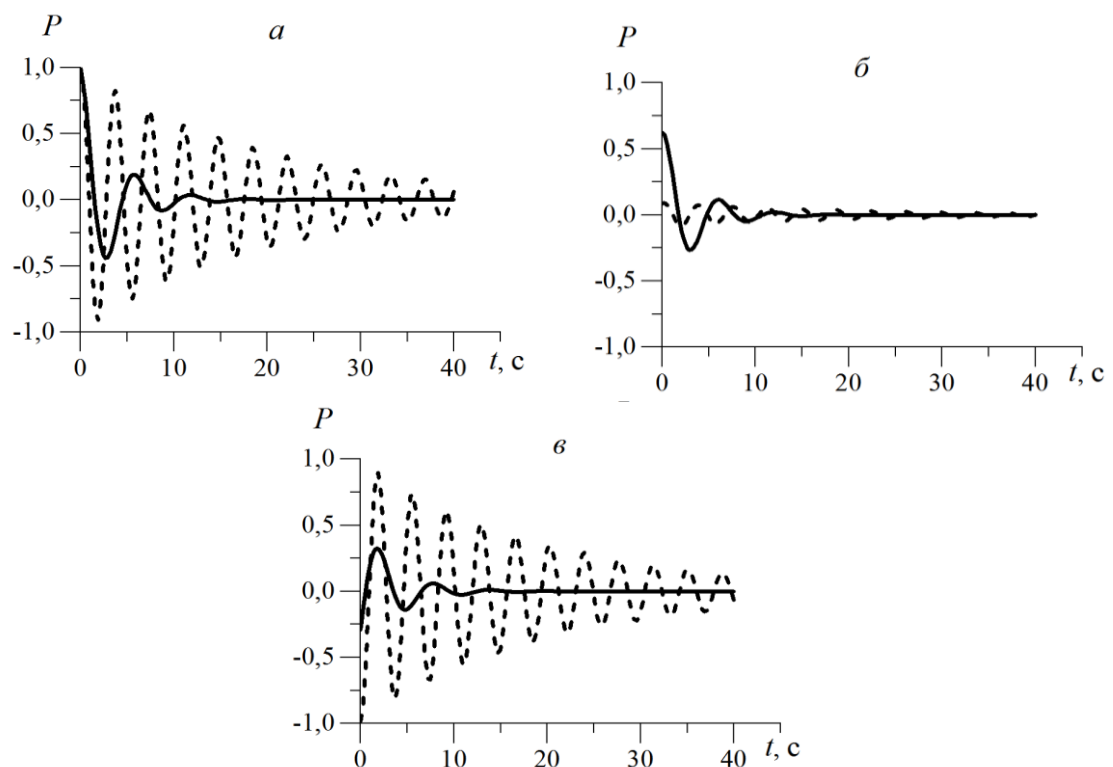


Рис. 1. Динамика давления в точках скважины 0 (а), 1300 (б) и 2600 м (в) при  $C_f = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3$  (сплошная линия), штриховая линия — случай отсутствия трещины ГРП

На рис. 1 показаны осциллограммы давления в различных точках скважины в пласте с проницаемостью  $k_p = 10^{-15} \text{ м}^2$ . Видно, что при наличии трещины ГРП в пласте с проводимостью  $C_f = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3$  происходит более интенсивное затухание колебаний давления во всех трех точках скважины, чем в случае ее отсутствия. Отметим, что при дальнейшем увеличении проводимости трещины происходит снижение коэффициента затухания колебаний давления в скважине. Причем предельно низкое значение

этого коэффициента означает появление вязкого трения вблизи стенок скважины. Более высокая амплитуда колебаний давления почти постоянной величины наблюдалась в точках  $z = 0$  и  $z = 2600$  м (на устье и забое скважины) в случае отсутствия трещины в пласте.

## Список литературы

- [1] Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // ПМТФ. 2020. Т.61, №4(362). С.5-14.
- [2] Ляпидевский В. Ю., Неверов В. В., Кривцов А. М. Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон.мат. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696.

## Моделирование колебаний расхода при течении аномально термовязкой жидкости

Мухутдинова А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В данной работе исследуется течение аномально термовязкой несжимаемой жидкости в кольцевом канале с постоянным перепадом давления  $\Delta p$ . Граничные условия на внутренней и внешней поверхностях канала испытывают скачкообразное изменение вдоль оси. В начале, в первой половине канала, задано граничное условие первого рода, а затем, во второй половине канала, задано условие конвективного теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (граничное условие третьего рода).

Введем цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой направлена вдоль оси цилиндров. Пусть жидкость течет в кольцевом канале длиной  $L$ , радиусы внутреннего цилиндра –  $r_0$ , внешнего –  $R > r_0$  (рис. 1). Будем считать канал сильно удлиненным ( $L \gg h$ ).

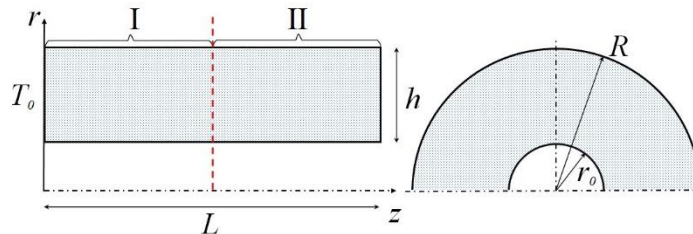


Рис. 1. Схема расчетной области

Математическая модель, состоящая из уравнения неразрывности, уравнений Навье – Стокса и уравнения для температуры [1], записана в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии в безразмерном виде и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu(T) \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(T) \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\mu(T)}{r^2} v_r \right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu(T) \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu(T) \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pe} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

где  $v_r$  и  $v_z$  — радиальная и осевая компоненты вектора скорости,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $Re$  и  $Pe$  — безразмерные числа Рейнольдса и Пекле.

Входящая в уравнения Навье–Стокса функция  $\mu = \mu(T)$  представляет собой температурную зависимость вязкости жидкости. В настоящей работе рассмотрена аномальная зависимость вязкости от температуры (т.е. вязкость жидкости зависит от температуры немонотонным образом) [2,3] следующего вида (рис. 2):

$$\mu(T) = \exp[-B(T - 0.5)^2],$$

где  $B > 0$  — параметр, описывающий характер изменения вязкости.

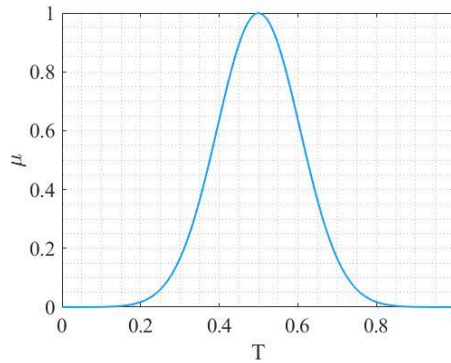


Рис. 2. Зависимость вязкости жидкости от температуры,  $B = 45$

Граничные условия на стенках канала для скоростей задаются условиями прилипания:

$$u_z|_{r=r_0/R} = u_z|_{r=1} = 0,$$

$$u_r|_{r=r_0/R} = u_r|_{r=1} = 0,$$

а для температуры:

при  $0 \leq z < \frac{1}{2}L$

$$T(r_0/R, z, t) = T(1, z, t) = 0,$$

при  $\frac{1}{2}L \leq z \leq L$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0/R} = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1} = -Nu \cdot T,$$

где  $Nu$  — безразмерное число Нуссельта.

Численное решение уравнений математической модели осуществлялось с использованием метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) [3], который был модифицирован для учета переменного коэффициента вязкости. Исходный компьютерный код был написан на языке программирования C++ в среде разработки Qt Creator.

Характер изменения расхода аномально термовязкой жидкости в зависимости от условий теплообмена во второй половине канала при  $h/r_0 = 0.1$  представлен на рис. 3. Из рисунка видно, что при изменении числа Нуссельта наблюдаются как незатухающие, так и затухающие колебания расхода. Это объясняется скачкообразным изменением теплообмена [4]. Во второй половине канала происходит охлаждение жидкости до температуры, соответствующей максимальной вязкости, что приводит к уменьшению расхода. Дальнейшее охлаждение жидкости приводит к уменьшению вязкости (рис.2) и увеличению расхода, затем процесс повторяется. С увеличением числа Нуссельта процесс повторяется, с уменьшающейся интенсивностью, что вызывает уменьшение амплитуды колебаний расхода. При дальнейшем увеличении числа  $Nu$  колебания перестают наблюдаться.



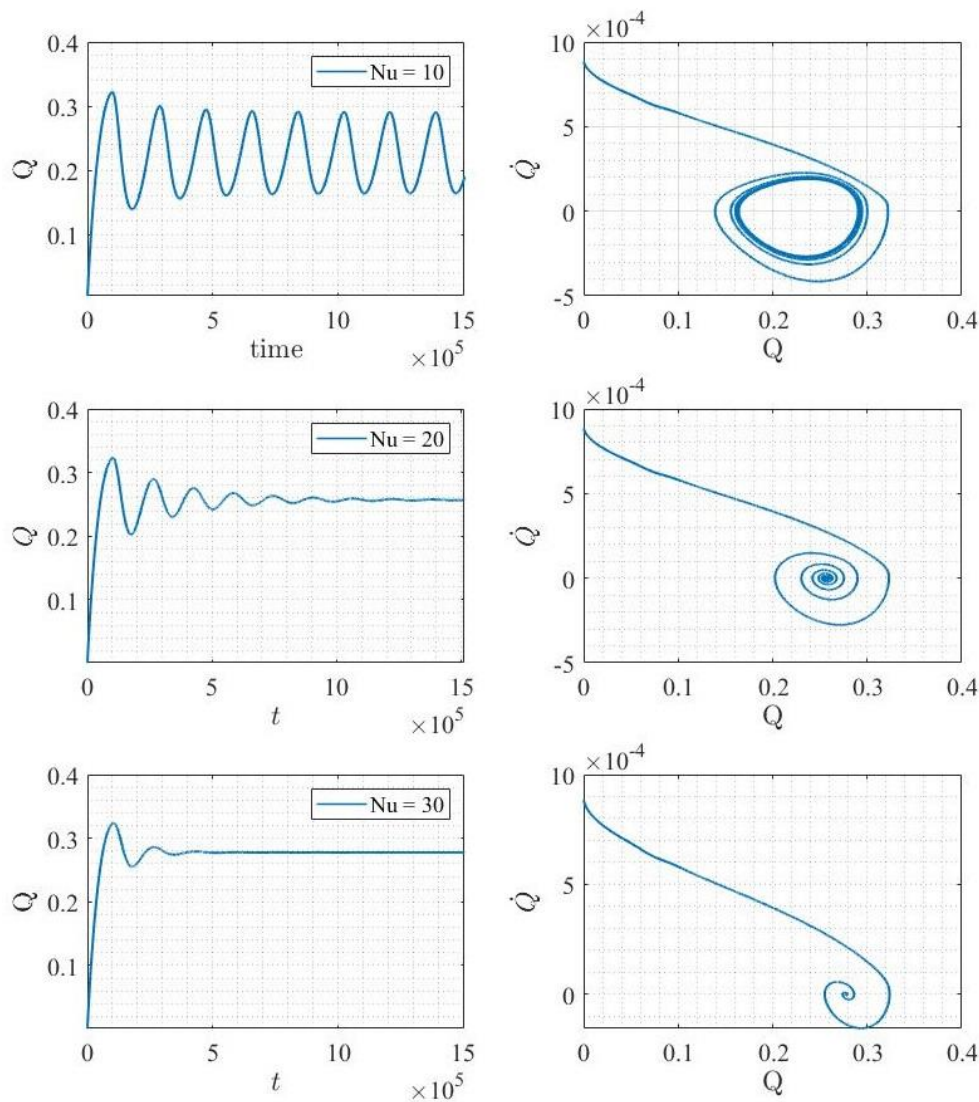


Рис. 3. Характер колебаний потока жидкости и фазовые портреты колебаний изменения расхода жидкости в зависимости от условий теплообмена

Фазовые портреты колебаний, представленные на рис. 3, описываются логарифмическими спиралями. Фазовые портреты затухающих колебаний сходятся к точке, называемой «устойчивый фокус», а незатухающие колебания образуют «предельный цикл».

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

## Список литературы

- [1] Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2 // М.: Физматлит. 1963. С. 728.
- [2] Урманчев С. Ф., Киреев В. Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // Доклады Академии наук. 2004. Т. 396. № 2. С. 204-207.
- [3] Патанкар С. В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости // М.: МЭИ, 1984. 145 с.
- [4] Киреев В.Н., Мухутдинова А.А., Урманчев С.Ф., Режимы автоколебаний при течении аномально термовязкой жидкости // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2024. Т.514.

# Investigation of the influence of the dependence of the gas heating on the geometric parameters of the heating element of the cold spraying technology

Mukhutdinova A.A.\*, Nizamova A.D.\*, Li W.\*\*

\*Mavlutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russian Federation

\*\*School of Materials Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

Currently, in mechanical engineering, in order to increase the service life of products, increased requirements are imposed on the materials used for the manufacture of parts and structures [1, 2, 3]. One of the promising directions is to improve the characteristics of materials by applying functional coatings, including increasing the corrosion resistance of the material, wear resistance and protection from mechanical damage, as well as providing the possibility of local repair of products without dismantling the structure [4]. At the same time, preference is given to technologies that do not have a negative impact on the applied surface. The technology of cold spraying (CS) is the most dynamically developing method for applying protective coatings and imparting various functional properties to materials [5, 6].

In the work of Wenya Li [7], an experiment was carried out and a 2D model of the entire process of cold spraying technology was constructed, however, numerical modeling of the gas heating element was not performed. Nitrogen is most often used as a working gas. Numerical simulation of the gas heating process will allow you to set the optimal parameters of the heated element to reduce the gas heating time, and, accordingly, optimize the process in the complex.

Nitrogen is an inert diatomic gas without color and odor, the chemical formula of the diatomic molecule  $N_2$ , molar mass 28.01 kg/kmol, the most common element on Earth. The nitrogen content in the atmospheric air is about 78.09% by volume. It is used in technological processes as an inert sealing medium, for example, for dry gas mechanical seals and sealing complexes, in the chemical industry for the synthesis of ammonia. Liquid nitrogen is used as a refrigerant in mechanical engineering for the assembly of non-removable tight joints (cooling of the covered part). Nitrogen is used in special technological processes for applying a thin layer of wear-resistant coating – titanium nitride on the surface of steel parts; in combination with silicon, it forms a wear-resistant promising ceramic material, silicon nitride  $Si_3N_4$  [8].

The working gas is nitrogen ( $N_2$ ), which is supplied to the tube at room temperature, 293–298 K (20–25 °C), and a pressure of 2 to 10 MPa. The tube walls are maintained at a constant temperature of 1273 K (1000 °C). The inner diameter of the tube is fixed and is 0.008 m, and the wall thickness is 0.002 m. The diameter, number of coils, and length of the tube are parameters that need to be determined for efficient gas heating.

This task was considered in the software product “Thermoviscous fluids: a hydrodynamic simulator for modeling flow in annular channels with heat exchange” [9].

The flow of incompressible nitrogen in a flat channel was considered. The channel diameter was fixed, and the channel length varied from 1 m to 50 m. The modeling environment used was the own software product “Thermoviscous fluids: a hydrodynamic simulator for modeling flow in annular channels with heat exchange”, which was adapted to solve this problem. Data: the inner diameter of the tube – 0.008 m; the length of the tube – from 1 m to 50 m; the pressure drop – 1 Pa; the initial temperature of the gas – 293 K; the temperature of the tube walls – 1273 K.

To solve the problem of the incompressible flow of nitrogen in a flat channel, the control volume method was chosen. This approach allows solving the Navier-Stokes equations with high accuracy, which is critical for obtaining reliable results.

The geometric dimensions of the tube, the properties of nitrogen, the boundary conditions for velocity and pressure at the inlet and outlet of the tube, and the temperature at the tube walls were used as input data for modeling.

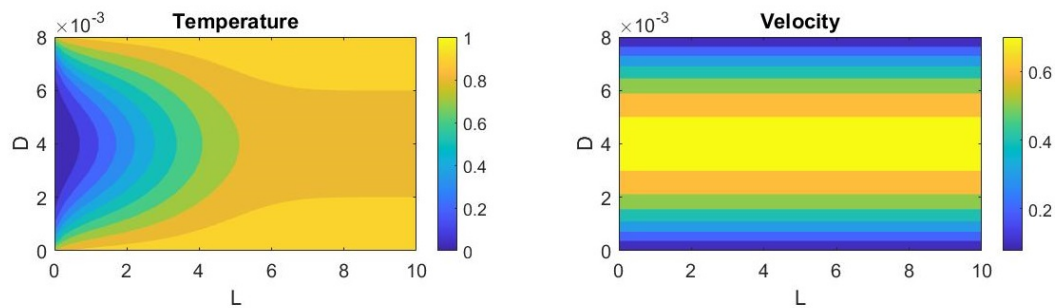


Figure 1: Distribution of temperature and velocity in the computational domain at  $d_p = 104$  Pa

Based on the calculations, the results for the distribution of velocity, pressure, and temperature along the length of the tube were obtained.

The study results showed Fig. 1 that as the channel length increases to 10 meters and the pressure drop to 104 Pa (equivalent to 0.1 atm), the nitrogen is heated closer to the middle of the channel. The maximum nitrogen velocity in the channel is 0.7 m/s.

The graph shows the distribution of temperature and velocity along the length of the channel in a dimensionless form. From the obtained results, it follows that the distribution of the nitrogen velocity along the length of the channel has a parabolic shape. The maximum velocity is reached in the middle of the channel and decreases to zero at the tube walls.

#### Acknowledgment

The research work was supported by the state budget funds for the state assignment 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

## References

- [1] Kozlov I.A., Leshev K.A., Nikiforov A.A., Demin S.A. Cold gas dynamic coating spraying (review) // Proceedings of VIAM. 2020. NO. 8 (90). P. 77–93. DOI: 10.18577/2307-6046-2020-0-8-77-93 (in Russian).
- [2] Kablov E.N. Innovative developments of FSUE "VIAM" of the State Research Center of the Russian Federation on the implementation of "Strategic directions for the development of materials and technologies for their processing for the period up to 2030" // Aviation materials and Technologies. 2015. No. 1 (34). P. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33 (in Russian).
- [3] Kablov E.N., Starcev O.V. Fundamental and applied studies of corrosion and aging of materials in climatic conditions (review) // Aviation materials and technologies. 2015. No. 4(37). P. 38–52. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-4-38-52 (in Russian).
- [4] Kablov E.N., Starcev O.V., Medvedev I.M. Review of foreign experience in corrosion research and corrosion protection products // Aviation Materials and Technologies. 2015. No. 2 (35). P. 76–87. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-2-76-87 (in Russian).
- [5] Kablov E.N., Nikiforov A.A., Demin S.A., Chesnokov D.V., Vinogradov S.S. Promising coatings for corrosion protection of carbon steels // Steel. 2016. No. 6. P. 70–81 (in Russian).
- [6] Vinogradov S.S., Nikiforov A.A., Demin S.A., Chesnokov D.V. Corrosion protection of carbon steels // Aviation materials and technologies. 2017. No. S. P. 242–63. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-S-242-263 (in Russian).
- [7] Wan W., Li W., Wu D., Qi Zh., Zhang Zh. New insights into the effects of powder injector inner diameter and overhang length on particle accelerating behavior in cold spray additive manufacturing by numerical simulation // Surface & Coatings Technology. 444. (2022). 128670.
- [8] Physical properties of nitrogen URL: <https://www.highexpert.ru/content/gases/nitrogen.html> (date of application: 05/09/2020) (in Russian).
- [9] Certificate of state registration of the computer program No. 2023669294 Russian Federation. Thermoviscous fluids: a hydrodynamic simulator for modeling flow in annular channels with heat exchange: No. 2023668718: application 12.09.2023: published 13.09.2023 / V.N. Kireev, A.A. Mukhutdinova, S.F. Urmancheev.

## Численный анализ рассеяния акустической волны на системе звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование акустического рассеяния на множестве препятствий малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, поскольку на явлении рассеяния основываются многие применения акустических волн, такие как гидролокация, зондирование атмосферы и океана, приборы неразрушающего контроля, создание позиционируемого 3D звука, управление звуковыми волнами, переносимыми водой с помощью мегаповерхностей, и организация микроструктуры в случайных средах.

В рамках данного исследования представлены результаты по изучению рассеяния сферической волны от монопольного источника излучения на системе звукопроницаемых сфер, расположенных в трехмерном пространстве. Основные цели работы: оценка чувствительности отклика системы на изменение исходных данных (радиуса сфер и декартовых координат их центров) при различных соотношениях физических параметров сферы и окружающей среды (плотность и скорость звука), а также определение параметров системы, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными.

Задача рассеяния звука на системе звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнений Гельмгольца для комплексных потенциалов  $\Psi(\mathbf{r})$  в произвольной точке  $\mathbf{r}$  вне сфер и  $\Psi_{\text{int}}^{(v)}$  внутри  $v$ -й сферы:

$$\nabla^2 \Psi + k_0^2 \Psi = 0, \quad \nabla^2 \Psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \Psi_{\text{int}}^{(v)} = 0$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия, сквозь которую проходит волна:

$$\left( \Psi(\mathbf{r}) - \Psi_{\text{int}}^{(v)} \right) \Big|_{r=a_v} = 0, \quad \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \Psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_v} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь  $k_0, k_v$  – волновые числа для внешней среды и среды внутри  $v$ -й сферы;  $a_v$  – радиус  $v$ -й сферы;  $\rho_0, \rho_v$  – плотности внешней среды и среды внутри  $v$ -й сферы;  $N$  – число сфер в конфигурации.

При решении данной задачи потенциал внешнего поля представляется в следующем виде:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где  $\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  – потенциал падающего поля;  $\Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  – потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда [1], соответствующему затуханию волны на бесконечности.

При решении задачи численная техника [2], разработанная для множества звуконепрозрачных сфер с произвольным акустическим импедансом на основе быстрого метода мультиполей, обобщена на случай звукопроницаемых сфер [3]. Выбор данной методики расчета обусловлен тем, что она позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах процессорного времени.

Проведена верификация обобщенной численной техники, которая показала, что результаты вычислительных экспериментов, представленных в настоящей работе, хорошо согласуются как с экспериментальными данными работы [4], так и с результатами расчетов других исследователей – для слоя капель воды в воздухе в пределах небольшой погрешности с аналогичными результатами для случая малых жестких сфер [2] и для случая звукопроницаемых сфер, центры которых расположены на одной оси, с расчетами по осесимметричному численному алгоритму [5].

На рис. 1 представлен пример расчета для следующей конфигурации. Сферы одного радиуса  $a_1$  расположены равномерно в плоскости  $Oyz$  в узлах  $y = 0, \pm 3a_1$  и  $z = 0, \pm 3a_1$ , то есть расстояние между центрами сфер по каждой оси равно  $\delta l_x = 0, \delta l_y = \delta l_z = 3a_1$  и общее число сфер –  $1 \times 3 \times 3 = 9$ . Основные физические параметры:  $\rho_0 = 1100 \text{ кг/м}^3$  и  $c_0 = 950 \text{ м/с}$  для внешней среды,  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $c_v = 1500 \text{ м/с}$  для среды внутри сфер, волновой радиус  $ka_1 = 1$ . Данные значения позволяют исследовать случай сильного взаимодействия в системе, где основные параметры внутренней и внешней сред сопоставимы. Монопольный источник излучения расположен на оси  $Ox$  в точке  $(10a_1, 0, 0)$ . Из рис. 1,  $a$  очевидно, что картина является симметричной

относительно осей  $Oy$  и  $Oz$ , поэтому на рис. 1, б представлены кривые только для IV четверти. На диаграмме видны зоны повышения (максимальное значение нормированного давления достигается в точках  $(0, \pm 4/3, \pm 4/3)$ ) и понижения (минимальное значение – в центре сфер  $(0, \pm 3, \pm 3)$ ) давления.

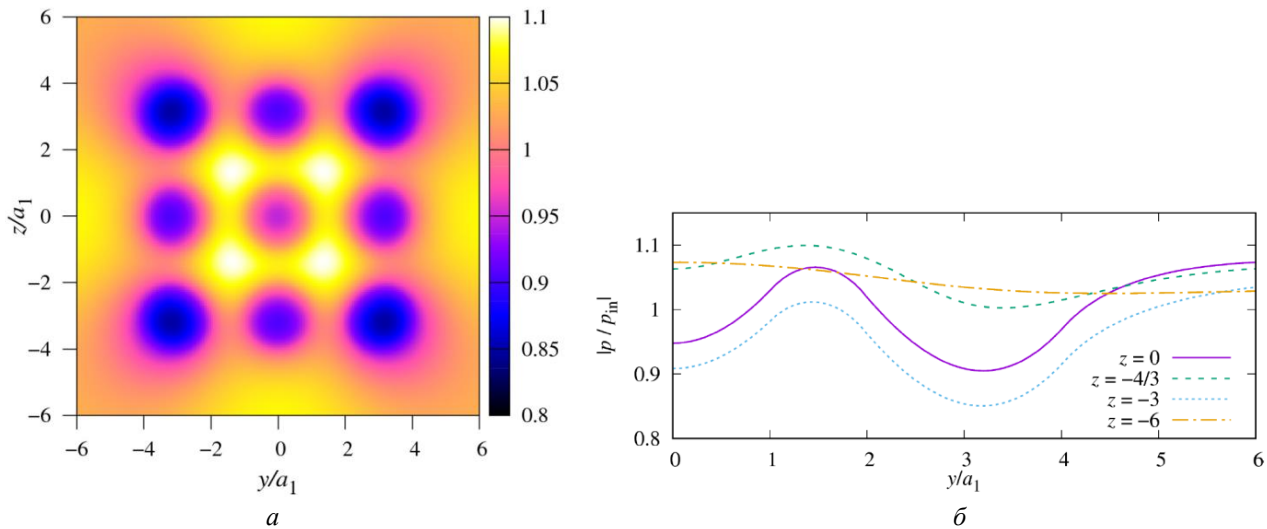


Рис. 1. Распределение модуля нормированного давления вокруг и внутри 9-ти сфер одного радиуса с центрами в узлах  $y = 0, \pm 3a_1$  и  $z = 0, \pm 3 a_1$  на плоскости  $Oyz$  при воздействии монополюсного источника излучения, расположенного на оси  $Ox$ : а – фазовая диаграмма в плоскости  $Oyz$ ; б – изменение вдоль оси  $Oy$  при фиксированных значениях  $z$ , приведенных на графике

Для анализа многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер впервые получена явная формула для основной характеристики данного явления — полного сечения рассеяния, учитывающая взаимодействие между сферами в системе [6]. Формула применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, и при произвольном внешнем воздействии в границах применимости алгоритмов, используемых для общего [3] или осесимметричного [5] случаев.

Показано, что в случае изменения на случайную малую величину только одного параметра – радиуса сфер – система, состоящая из капель и имеющая плоскую конфигурацию, наиболее чувствительна к изменению радиуса в случае, когда упругость вещества внутри капли меньше, чем у внешней среды, а при увеличении числа сфер в плотных конфигурация, – когда упругость вещества внутри капли много больше, чем у внешней среды.

При одновременном изменении радиуса сфер и их центров на некоторую малую случайную величину обнаружено, что система является чувствительной для всех рассмотренных случаев соотношений физических параметров для внешней среды и среды внутри сфер, а также двух типов конфигурации системы (плоской и объемной). Расчеты проводились для двух искомых функций: нормированного давления за системой сфер в точке, симметричной монополюсному источнику излучения, и для полного сечения рассеяния.

Для численного анализа эффектов многократного рассеяния проведены вычислительные эксперименты по определению полного сечения рассеяния на системах сфер, расположенных в двух различных конфигурациях, вид которых представлена на рис. 2 сверху (при  $N_y = N_z = 5$ ). Исследовались три различных случая отношений упругости жидкости внутри ( $\chi_{in} = \rho_v c_v^2$ ) и вне  $\chi_{out} = \rho_0 c_0^2$  сфер и плотностей внутренней и внешней сред:

–  $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ ,  $\rho_0/\rho_v \gg 1$  – в этом случае среды можно взять с физическими параметрами, соответствующими воде для внешней среды и воздуха для среды внутри сфер, т.е. проводить вычисления для системы воздушных пузырьков в воде;

–  $\chi_{out}/\chi_{in} \ll 1$ ,  $\rho_0/\rho_v \ll 1$  – соответствует случаю системы капель воды в воздухе;

–  $\chi_{out}/\chi_{in} \approx 1$ ,  $\rho_0/\rho_v \approx 1$  – соответствует, например, случаю системы капель дихлорэтана в воде.

Результаты расчетов для случаев  $N_y = N_z = 5$  и 7 представлены на рис. 2 (внизу) при расстоянии между центрами сфер вдоль каждой из координатных осей равно  $\delta l = a$  и расстоянием между монополюсным источником излучения и геометрическим центром системы сфер (в рассматриваемых случаях совпадающим с началом декартовой системы координат) равным  $10a$ .

В результате получено, что для воздушных пузырьков в воде существенным фактором является тип конфигурации системы; для капель воды в воздухе существенными являются как тип конфигурации, так и число сфер в ней; а для капель дихлорэтана в воде тип конфигурации и число сфер в ней являются несущественными факторами.

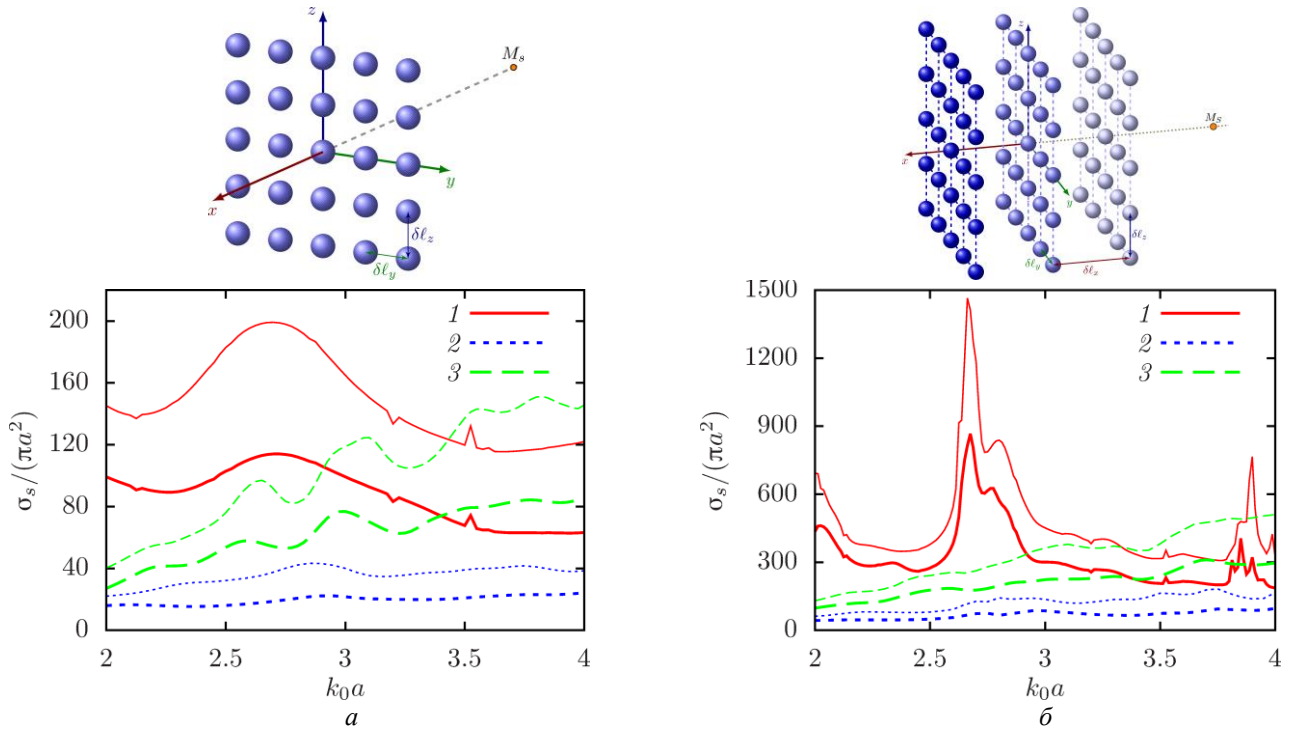


Рис. 2. Зависимость нормированного полного сечения рассеяния  $\sigma_s/(\pi a^2)$  от волнового радиуса  $k_0 a$  для равномерных регулярных конфигураций (представлены сверху) с числом сфер:  $a - N = 1 \times N_y \times N_z$  и  $b - N = 3 \times N_y \times N_z$ . Толстые линии –  $N_y = N_z = 5$ , тонкие линии –  $N_y = N_z = 7$ . Обозначения: 1 – воздушные пузырьки в воде; 2 – капли воды в воздухе; 3 – капли дихлорэтана в воде

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2.

## Список литературы

- [1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112. № 6. P. 2688–2701.
- [3] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36.
- [4] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. P. 3006–3017.
- [5] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2 (92). С. 93–101.
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 4. С. 383–398.

## Собственные колебания жидкости в вертикальной и горизонтальной скважинах

Насырова Д.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящее время при добыче нефти широко применяется технология гидроразрыва пласта (ГРП). В пласте создаются трещины, закрепляются пропантантами для предотвращения их смыкания. Трещины, которые возникают в результате применения технологии ГРП, увеличивают площадь, с которой можно извлечь нефть из добывающей скважины или расширяют поверхность закачки жидкости, если это нагнетающая скважина. Применение горизонтальных скважин с множественными трещинами ГРП позволяет повысить эффективность разработки низкопроницаемых пластов.

Рассмотрены собственные колебания столба жидкости в вертикальной нефтяной скважине при закрытой[1] и открытой верхней границе[2]. Колебания возникают при резком закрытии или открытии насосов скважины (гидроудар). Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются протяженностью столба жидкости, ее реологическими свойствами, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта. На основе математической модели, описывающей движение столба жидкости в скважине и фильтрацию в призабойной зоне, подверженной ГРП, получены решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Получили характеристическое уравнение для определения собственной частоты колебаний.

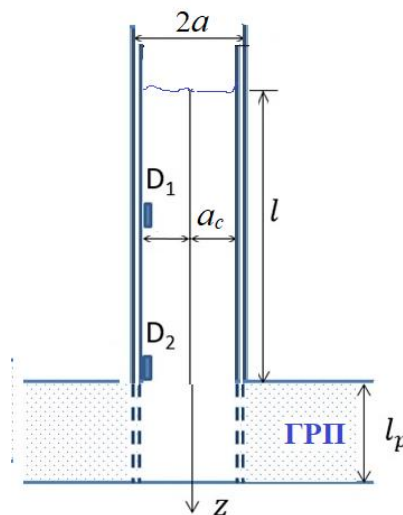


Рис. 1. Схема обсаженной скважины, сообщающейся с пластом.

Также рассматривается обсаженная горизонтальная скважина длиной  $l$ , которая сообщается с пластом посредством  $N$  радиальных трещин ГРП, расположенных равномерно вдоль скважины (Рис.2). В работе получено трансцендентное уравнение из которого определяются комплексные собственные частоты, по которым находят частота колебаний, коэффициент затухания, амплитуда колебаний и другие характеристики, описывающие собственные колебания жидкости в горизонтальной скважине с системой трещин, перпендикулярных стволу скважины. Построены графики зависимостей собственной частоты, коэффициента затухания и декремента затухания от проводимости трещины, проницаемости пласта и количества трещин на единицу длины. Из графиков сделаны выводы о том как влияют изменения ширины трещины, количества трещин и проницаемость пласта на собственные частоты.

## Сопротивление излучения кавитирующей жидкости

Неверов А.Н., Селиверстова О.В.

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва

Многочисленными исследованиями установлено, что сопротивление излучения при развитии в жидкости кавитации резко падает, а затем стабилизируется на уровне, в 3 – 10 раз меньшем сопротивления излучения некавитирующей жидкости [1-4].

При возникновении в жидкости ультразвуковой кавитации вблизи поверхности излучателя образуется зона, свойства которой отличны от свойств капельной жидкости [4, 5]. Свойствами этой зоны – акустического контакта между излучающей поверхностью и обычной жидкостью – определяется влияние кавитирующей жидкости на стержневой излучатель. Авторы настоящей работы пытаются объяснить наблюдаемую в эксперименте зависимость сопротивления излучения от амплитуды колебательной скорости излучателя особенностью прохождения звуковой волны через акустический контакт.

На поддержание кавитации тратится некоторая часть энергии первичного звука, т.е. звука, создаваемого излучателем. Кроме того, энергия первичного звука рассеивается при распространении звуковой волны, будем считать это рассеяние линейным и характеризовать эффективным коэффициентом поглощения  $\alpha$ . По этим причинам по мере удаления от поверхности излучателя будет ослабевать и первичный звук, и создаваемая им кавитация. Так будет продолжаться до тех пор, пока интенсивность звука не станет ниже некоторого порогового значения  $I_n$ .

Кавитационную область будем считать однородной и описывать ее коэффициентом  $\gamma = \frac{\rho c}{\rho_0 c_0}$ , где  $\rho$  и  $c$ ,  $\rho_0$  и  $c_0$  – плотность и скорость звука в кавитационной области и капельной жидкости соответственно. Остальные свойства жидкости вне кавитационной зоны такие же, как и свойства обычной жидкости.

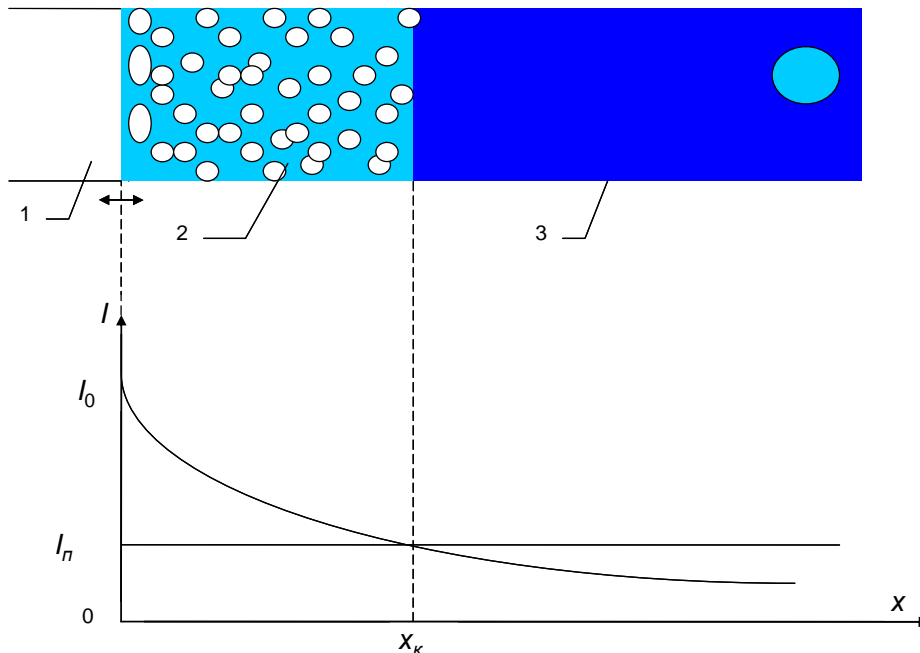


Рис. 1. Расчетная схема. 1 – излучатель; 2 – кавитационная область; 3 – капельная жидкость

При таких предположениях задача о сопротивлении излучения кавитирующей жидкости сводится к вычислению входного сопротивления слоя толщиной  $x_k$  и волновым сопротивлением  $\rho c$ , нагруженного обычной жидкостью (рис. 1). При этом предполагается, что звуковая волна при распространении через кавитационную область (граничную зону) остается плоской, т.е. выполняется условие  $x_k < \frac{R^2}{\lambda}$ , где  $R$  – характерный поперечный размер излучателя,  $\lambda$  – длина волны. Это сопротивление определится известным соотношением (временной фактор принимаем равным  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота колебаний,  $t$  – время):



$$Z = \rho_0 c_0 \frac{1 + iy \operatorname{tg} kx_k}{1 + iy^{-1} \operatorname{tg} kx_k}, \quad (1)$$

где  $kx_k$  – волновая длина кавитационной области,  $k$  – волновое число ультразвуковых колебаний в кавитационной области.

Для определения сопротивления излучения теперь осталось только вычислить эффективную протяженность кавитационной области  $x_k$ . Она зависит от амплитуды колебательной скорости излучающего торца либо от интенсивности излучаемой первичной звуковой волны.

Воспользуемся для определения  $x_k$  методикой, которую использовал Л.Д. Розенберг [6].

Пусть интенсивность звука у поверхности излучателя в сечении  $x = 0$  равна  $I_0$ . Кавитация возникает при  $I_0 \geq I_n$ , где  $I_n$  – пороговая интенсивность первичной звуковой волны.

Рядом исследователей наблюдался своеобразный кавитационный «гистерезис», который заключался в том, что кавитация прекращается при меньших значениях интенсивности  $I_{n1}$  и амплитуды звукового давления по сравнению с порогом возникновения  $I_n$  [3]. М.Г. Сиротюк объяснял этот эффект образованием в кавитационной области большого количества пузырьков [3], однако это объяснение вряд ли единственно. Мы будем считать в первом приближении, что  $I_n = I_{n1}$ .

Изменение интенсивности звуковой волны описывается уравнением:

$$-\frac{dI}{dx} = \frac{1}{T} \int_{I_n}^I E_1(I) \frac{dN(I)}{dI} dI + \alpha I, \quad (2)$$

где  $E_1(I)$  – энергия, затрачиваемая на образование одного кавитационного пузырька из зародыша,  $N(I)$  – функция, определяющая концентрацию стационарно кавитирующих пузырьков при интенсивности звука  $I$ ,  $T$  – период первичного звука,  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий линейное поглощение звука при его распространении через кавитационную область. Нелинейным поглощением звука пренебрегаем. От аналогичного уравнения, приведенного в [3] (уравнение (3а)), (2) отличается наличием слагаемого  $\alpha I$ .

Первый член правой части (2) определяет потери энергии на поддержание кавитации и может быть выражен через функцию потерь [3]:

$$C(I, I_n) = \frac{1}{T} \int_{I_n}^I E_1(I) \frac{dN(I)}{dI} dI = \begin{cases} A(I - I_n)^2 & \text{при } I > I_n \\ 0 & \text{при } I \leq I_n \end{cases} \quad (3)$$

где  $A$  – коэффициент пропорциональности. Поскольку  $C(I, I_n) = \frac{1}{T} \int_{I_n}^I E_1(I) \frac{dN(I)}{dI} dI$  [7], уравнение (2) запишется при  $I > I_n$  в виде:

$$-\frac{dJ}{\alpha dx} = \beta J^2 + J + 1, \quad (4)$$

где  $J = \frac{I}{I_n} - 1$ ,  $\beta = \frac{AI_n}{\alpha}$ . Вид решения зависит от знака дискриминанта правой части (3)  $1 - 4\beta$ .

1, При  $1 - 4\beta > 0$ ,  $\beta < 0,25$  (большие диссипативные потери)

$$\alpha x_k = \frac{1}{\sqrt{1-4\beta}} \ln \frac{J(1+\sqrt{1-4\beta})+4\beta}{J(1-\sqrt{1-4\beta})+4\beta}. \quad (5)$$

При малых  $J \ll \beta$

$$\alpha x_k \approx \frac{1}{\sqrt{1-4\beta}} \ln \left[ 1 + \frac{J}{2\beta} \right] \approx \frac{J}{2\beta} \quad (5a)$$

При больших  $J$

$$\alpha x_k \approx \frac{1}{\sqrt{1-4\beta}} \ln \left( 1 + \frac{2\sqrt{1-4\beta}}{1-\sqrt{1-4\beta}} \right) \quad (5b)$$

Если при этом еще и  $\beta \ll 1$

$$\alpha x_k \approx \ln \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right) \approx -\ln \beta \quad (5в)$$

2. При  $1 - 4\beta < 0, \beta > 0,25$  (энергия излучателя расходуется в основном на поддержание кавитации)

$$\alpha x_k = \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{J\sqrt{4\beta-1}}{J+2}, \quad (6)$$

При малых  $J$

$$\alpha x_k = \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{J\sqrt{4\beta-1}}{2} \approx \frac{J}{2}, \quad (6a)$$

При больших  $J$

$$\alpha x_k = \frac{1}{\sqrt{4\beta-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{4\beta-1}, \quad (6б)$$

При больших  $J$  и больших  $\beta$

$$\alpha x_k = \frac{\pi}{4\sqrt{\beta}}, \quad (6в)$$

Из выражений (5а) и (6а) видно, что при интенсивностях, незначительно превышающих порог кавитации (при малых  $J$ ), протяженность промежуточного слоя (кавитационной области) возрастает с ростом  $J$ , по этой причине сопротивление излучения падает.

При высоких интенсивностях первичного звука протяженность кавитационной области практически не зависит от нее (интенсивности), тогда, конечно же, и сопротивление излучения будет не зависеть от интенсивности.

Таким образом, предложенная модель качественно вполне удовлетворяет экспериментальным результатам [2-4, 8].

## Список литературы

- [1] Kikuchi, Y., Shimitsu H. On the variation of acoustic radiation resistance in water under ultrasonic cavitation Journal of Acoustical Society of America. 1959. v. 31. N 10. p. 1385-1386.
- [2] Розенберг Л.Д., Сиротюк М.Г. Об излучении звука при наличии кавитации. Акустический журнал. 1960. Т. VI. Вып. 4. С. 478-481.
- [3] Сиротюк М.Г. Акустическая кавитация. М.: Наука. 2008. 271 с.
- [4] Приходько В.М. Ультразвуковые технологии при производстве, эксплуатации и ремонте транспортной техники. М.: Издательство «Техполиграфцентр». 2003. 253 с.
- [5] Пешковский С.Л., Яковлев А.Д. Исследование кавитационной области. Акустический журнал. 1976. Т. XXII. Вып. 3. С. 422-426.
- [6] Розенберг Л.Д. Кавитационная область. Физика и техника мощного ультразвука: В 3 т. Под ред. Л.Д. Розенберга. Т. 2. Мощные ультразвуковые поля. М.: Наука, 1968. С. 221-266.
- [7] Akulichev V., Rosenberg L., Sirotyuk M. Certain relation dans le champ de la cavitation ultra-sonore. Proc. 5 Intern. Congr. Acoust. Liege. 1965. E 64.
- [8] Инструменты для ультразвуковой очистки: монография / В.Ф. Казанцев и др. М.: Техполиграфцентр. 2017. 181 с.

## Влияние температурной зависимости вязкости жидкости на устойчивость течения

Низамова А.Д.

ИМех УФИЦ РАН

В задаче гидродинамической устойчивости течений жидкостей в плоских каналах выполнено множество исследований, но, при их изучении воздействием фактора изменения температуры на смену режимов течений, как правило, пренебрегают [1,4,5,8]. Течения жидкостей возникают в различных отраслях промышленности при эксплуатации технических установок и устройств. Таким образом, проблема выявления особенностей различных режимов в этих случаях является актуальной. Для энергетической эффективности важным является ламинарный режим, а для учета эффективности теплопереноса - турбулентный.

Задача гидродинамической устойчивости течения жидкости в плоском канале сводится к обобщенному уравнению Орра-Зоммерфельда [2,3,6-8]. Задача о влиянии переменных теплофизических свойств на течение жидкостей в кольцевом канале при интенсивном теплообмене также рассмотрена в работах [9,10].

В настоящей работе рассмотрено течение несжимаемой жидкости в плоском и кольцевом каналах с заданным температурным полем. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе обобщенного уравнения спектральным методом разложения по полиномам Чебышева первого рода. Исследуется влияние учета зависимости вязкости жидкости от температуры и геометрии канала на спектральные характеристики и критические параметры уравнения гидродинамической устойчивости течения жидкости в плоском и кольцевом каналах.

Построены спектры собственных значений обобщенного уравнения (рис. 1). Собственные значения являются комплексным числом и определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости. На оси абсцисс расположена вещественная часть собственного значения  $c_r$ , а на оси ординат – мнимая  $c_i$ . Существование хотя бы одного собственного значения с положительной мнимой частью означает турбулентный режим течения при фиксированных параметрах числа Рейнольдса ( $Re$ ) и волновом числе ( $k$ ). Собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост для неустойчивых собственных значений или затухание с течением времени - для устойчивых.

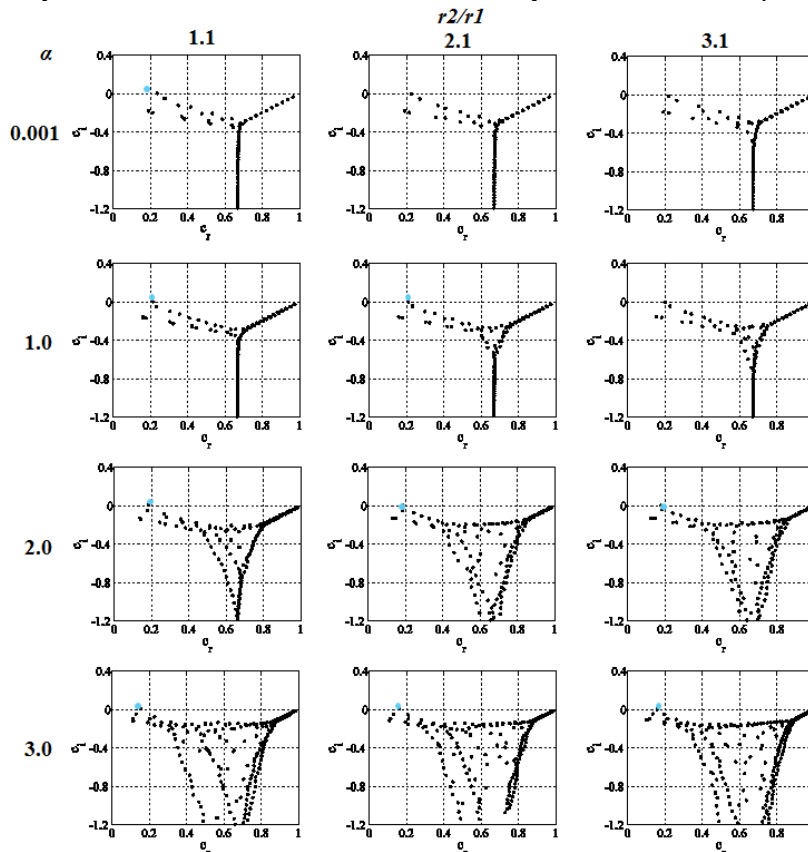


Рисунок 1 – Спектры собственных значений при  $Re = 10^4$ ,  $k = 1$

Показано, что структура спектров в значительной степени зависит как от свойств жидкости, определяемых показателем функциональной зависимости вязкости  $\alpha$ , так и от геометрии канала  $r_2 / r_1$  ( $r_2$  – внешний радиус,  $r_1$  – внутренний радиус кольцевого канала). Установлено, что при малых значениях параметра термовязкости и узком канале в случае кольцевого канала спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости в плоском канале, однако, при его увеличении число собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет ненулевые амплитуды возмущений поперечной скорости. Неустойчивые точки показаны на рис. 1 синим цветом.

Область устойчивости течения жидкости в зависимости от геометрии канала и параметра термовязкости построена на основании полученных спектров собственных значений и показана на рис. 2. По полученным результатам видно, что область устойчивости увеличивается с увеличением как параметра термовязкости, так и зазора ширины кольцевого канала.

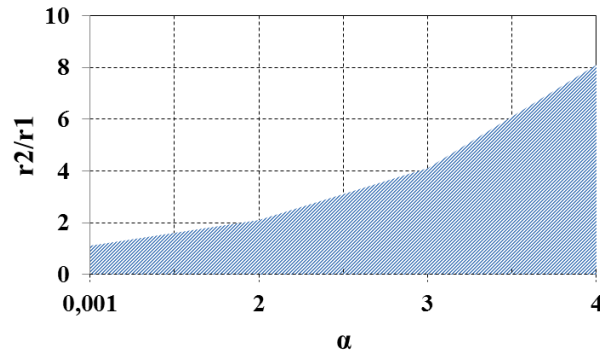


Рисунок 2 – Область устойчивости течения жидкости в зависимости от геометрии канала и параметра термовязкости

Зависимость критического числа Рейнольдса  $Re_{cr}$  от параметра зазора ширины кольцевого канала  $\xi = r_2 / r_1 - 1$  представлена на рис. 3. Первая точка линии, соответствующей  $\alpha = 0,001$ , имеет координаты (0,001; 5810). То есть при таком малом значении параметра термовязкости  $\alpha$  течение жидкости можно считать практически изотермическим. Кроме того, при столь же малом значении  $\xi = 0,001$  можно считать канал приближённо плоским. Очевидно, полученное значение критического числа Рейнольдса  $Re_{cr} = 5810$  достаточно близко к значению  $Re_{cr} = 5772$ , соответствующему классическому уравнению Орра-Зоммерфельда для плоского канала. При параметре  $\alpha = 1,5$ , течение термовязкой жидкости в неоднородном температурном поле проявляет свои особенности. В отличие от первого случая, в диапазоне  $0,001 \leq \xi \leq 3,0$  кривая изменения критического значения числа Рейнольдса имеет немонотонный характер. Вначале происходит его уменьшение, а затем, с увеличением разности радиусов кривизны стенок тенденция к росту критического числа Рейнольдса, что соответствует квазиизотермическому случаю. Таким образом, при течении термовязких жидкостей в кольцевом канале наблюдается зона снижения порога перехода к турбулентному течению.

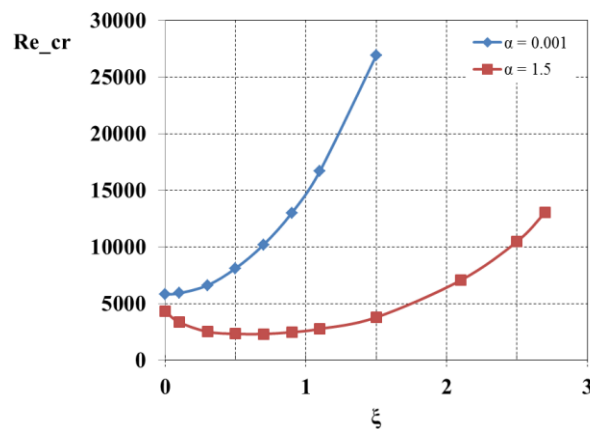


Рисунок 3 – Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра зазора ширины кольцевого канала

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию 124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

### Литература

1. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
2. Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, No 3. С. 454–459. DOI: 10.1134/S003282351903007X
3. Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58. URL: <http://mfs.uimech.org/mfs2019.1.007> DOI: 10.21662/mfs2019.1.007
4. Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, No 10. С. 1672–1691. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf229>
5. Шкаликов А.А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям спутника Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа 2002). Часть 3. СМФН. 2003. Т. 3. С. 89–112. <http://mi.mathnet.ru/cmfd17>
6. Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmantcheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 5, pp. 1778–1784. DOI: 10/1134/S1995080223050463
7. Nizamova, A.D., Murtazina, R.D., Kireev, V.N., Urmantcheev, S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 9, pp. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249
8. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech. 1971. V. 50. Pp. 689–703. DOI: 10.1017/S0022112071002842
9. Mukhutdinova A.A., Kireev V.N., Urmantcheev S.F. Influence of variable thermophysical properties on the flow of fluids in an annular channel under intensive heat exchange // St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2023. 16 (1.1). Pp. 269-274. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.161.145>
10. Kireev V.N., Mukhutdinova A.A., Urmantcheev S.F. Towards heat transfer critical conditions for flow of fluids with a nonmonotonic dependence of viscosity on the temperature in annular channel // Fluid Dynamics, 2023. Vol. 58, No. 7. Pp. 1310-1317.

# Моделирование многофазного несмешивающегося течения в пористой среде с помощью решеточного уравнения Больцмана

Новоселов К.В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Создание математической модели гидродинамического течения таких сложных систем, к которым относятся углеводородные флюиды, является достаточно трудной задачей. Одним из развивающихся методов моделирования задач гидродинамики является метод решеточного уравнения Больцмана (LBM), в котором для моделирования течения флюида в пористой среде решается дискретное кинетическое уравнение Больцмана.

Работа посвящена построению модели многофазного несмешивающегося течения в пористой среде. Течение моделировалось с помощью решеточного уравнения Больцмана с использованием метода цветного градиента [1-3]. Использовались двухмерная модель D2Q9 и трехмерная модель D3Q19. Рассматриваемая система представляла собой N несмешивающихся флюидов. В данной модели есть возможность задавать различные углы смачивания при взаимодействии флюида с материалом твердого скелета [2].

В тестовых расчетах проверено выполнение закона Лапласа, вычислено поверхностное натяжение при разных начальных параметрах. Была проведена проверка работоспособности задания различных значений углов смачивания. Выполнены расчеты разделения первоначально неоднородной смеси. Получены равновесные трехфазные конфигурации при различных равновесных межфазных углах. Также были проведены предварительные расчеты течения в модели пористой среды.

## Список литературы

- [1] D.H. Rothman, J.M. Keller. Immiscible Cellular-Automaton Fluids // Journal of Statistical Physics 52 (1988).
- [2] C.-Y. Zhang, H. Ding, P. Gao, and Y.-L. Wu. Diffuse interface simulation of ternary fluids in contact with solid // J. Comput. Phys. 309, 37 (2016).
- [3] Leclaire, S., Reggio, M., Trépanier, J.-Y. Progress and investigation on lattice Boltzmann modeling of multiple immiscible fluids or components with variable density and viscosity ratios. // J. Comput. Phys. 246 (2013)

# Растворы полимеров и их математические модели

В.В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
 Новосибирский государственный университет  
 Email: [pukhnachev@gmail.com](mailto:pukhnachev@gmail.com)

При добавлении в воду небольшого количества полимера вязкость и плотность раствора почти не изменяются, в отличие от его реологических свойств (В.А. Toms, 1948). Я.И. Войткунский, В.Б. Амфилохийев и В.А. Павловский (1970) предложили модель, описывающую движение водных растворов полимеров с учетом релаксационных свойств среды. Неизвестными функциями в этой модели являются поля скорости и давления жидкости. Модель также содержит два эмпирических параметра: время релаксации и релаксационную вязкость. Авторы исходили из варианта наследственной модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости с определяющим реологическим соотношением

$$P = -pI + 2\rho\nu D + 2\frac{\rho\kappa}{\theta} \int_{-\infty}^t \exp\left\{\frac{s-t}{\theta}\right\} \frac{d}{ds} D(s) ds.$$

Здесь  $P$  – тензор напряжений,  $D$  – тензор скоростей деформаций векторного поля  $\mathbf{v}$ ,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\rho$  – плотность,  $\theta$  – время релаксации,  $\kappa$  – нормализованный коэффициент релаксационной вязкости.

## Модель 1

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\theta} \int_{-\infty}^t \exp\left\{\frac{s-t}{\theta}\right\} \frac{d\Delta \mathbf{v}}{ds} ds, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

В.А. Павловский (1971) выполнил асимптотическое упрощение модели (1), используя малость параметра  $\theta$ .

## Модель 2

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{\kappa}{\theta} \frac{d\Delta \mathbf{v}}{dt}, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Вопросы существования и единственности решения начально-краевых задач для системы (2) были рассмотрены А.П. Осколковым (1973-1995) и А.В. Звягиным (2011, 2013).

Еще одна модификация модели движения слабых водных растворов полимеров – введение в закон поведения объективной производной тензора  $D$ ,

$$\frac{\tilde{d}D}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) D + DW - WD,$$

где  $W$  – антисимметричная часть тензора  $\nabla \mathbf{v}$  (R.S. Rivlin and J.L. Ericksen, 1955).

## Модель 3

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{2\kappa}{\rho} \text{Div} \left( \frac{\tilde{d}D}{dt} \right), \quad \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Корректность постановок краевых и начально-краевых задач для системы (3) изучалась в работах G.P. Galdi (1995), D. Cioranescu and V. Girault (1997), A. Tani and C. le Roux (2005).

Системы (2) и (3) допускают преобразования расширенной группы Галилея, порожденной операторами

$$X_0 = \partial_t, \quad X_{kl} = x_k \partial_{x_l} - x_l \partial_{x_k} + v_k \partial_{v_l} - v_l \partial_{v_k}; \quad k, l = 1, 2, 3; \quad k < l,$$

$$\Phi = \varphi \partial_p, \quad \Psi_k = \psi_k \partial_{x_k} + \dot{\psi}_k \partial_{v_k} - x_k \ddot{\psi}_k \partial_p; \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь  $\varphi(t)$  и  $\psi_k(t)$  – произвольные функции класса  $C^\infty$ . Наличие широкой группы симметрий позволяет строить инвариантные и частично инвариантные решения указанных систем. Ряд таких решений представлены в докладе. Они описывают нестационарные слоистые течения, стационарные течения в трубе эллиптического сечения, стационарные и нестационарные движения вблизи критической точки, заполнение сферической полости, движение, вызванное вращением плоскости, ограничивающей полупространство, которое занято раствором полимера (аналог решения Кармана). Отмечены качественные отличия этих решений от соответствующих решений уравнений Навье-Стокса, в которые переходят уравнения (2) и (3) при  $\kappa \rightarrow 0$ . В заключение доклада сформулированы уравнения пограничного слоя в растворе полимера, изучены их групповые свойства и указан ряд их точных решений. Среди них – аналог решения Блазиуса и решение, описывающее нестационарное движение вблизи критической точки (последнее не имеет аналогов в механике вязкой жидкости).



## Экспериментальное изучение реологии крови при различных скоростях деформации сдвига

Рахимов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящее время изучение клинических патологических процессов не обходится без определения показателей, характеризующих состояние микроциркуляторного русла и реологических показателей крови. Общепризнанным фактом является влияние реологических свойств крови на микроциркуляцию. Кровь – дисперсная среда, и её реология отличается от реологии ньютоновских жидкостей. При снижении скорости движения крови вязкость увеличивается [1]. Более двадцати лет назад был описан синдром гипервязкости крови. В дальнейшем он был обнаружен при сердечно-сосудистых заболеваниях, при многих формах рака, хронической обструктивной болезни легких и других хронических заболеваниях. Проявлением такой вязкости, в большинстве случаев, является агрегация «дисперсных частиц» – эритроцитов крови, приводящая к закупорке кровеносных капилляров, что является ничем иным как эффектом динамического запираания [2]. Динамическое запираание крови дает новое представление о возникновении инфарктов и инсультов и, наряду со знанием реологических особенностей крови, может лечь в основу новых методик для лечения этих и других сосудистых заболеваний. Многочисленные измерения реологических свойств крови показали значительный разброс значений для различных порций крови, взятых у здоровых и пациентов и обнаружили высокую степень аппроксимации степенной функцией Оствальда-де Вааля в диапазоне скоростей деформации 0,5–800 1/с. Аппроксимация уравнением Кэссона дает небольшое различие в диапазонах скоростей деформации менее 10 1/с. При движении дисперсии через ступенчатое сужение, как в случае эмульсии, так и крови обнаруживается асимметричная картина течения и поля скоростей вблизи входа и выхода в сужение [3]. Исследование гемореологических и гемодинамических показателей крови проводилось с нативной (цельной) кровью. Нативная кровь наполовину состоит из форменных элементов, основную долю которых составляют эритроциты (дискоциты), наличие которых и определяет реологические свойства крови [4]. При разведении крови физиологическим раствором отмечалось седиментация эритроцитов – образование монетных столбиков, однако при исследовании той же крови при разведении ее плазмой в соотношении 1:10 монетные столбики имели меньшую длину (агрегированные цепи), возможно обусловленные более физиологичными условиями плазмы. Гемореологические характеристики определялись по данным, полученным на прецизионном реометре HAAKE MARS III с измерительной системой двойной конус-пластина. Измерения проводились при температуре 37°C, которая соответствует физиологической температуре внутренней среды человека. Диапазон скоростей деформации сдвига задавали от 1 до 500 1/с (прямой ход) и обратно от 500 до 1 1/с (обратный ход). В некоторых случаях, измерения при обратном ходе отличались от измерений при прямом ходе, поэтому были проведены измерения зависимости напряжения сдвига от времени при постоянных скоростях деформации сдвига, равных 100 и 500 1/с. Вначале задавалось вращение при 100 1/с, затем продолжалось вращение при 500 1/с в течение 5 минут каждое (рис. 1).

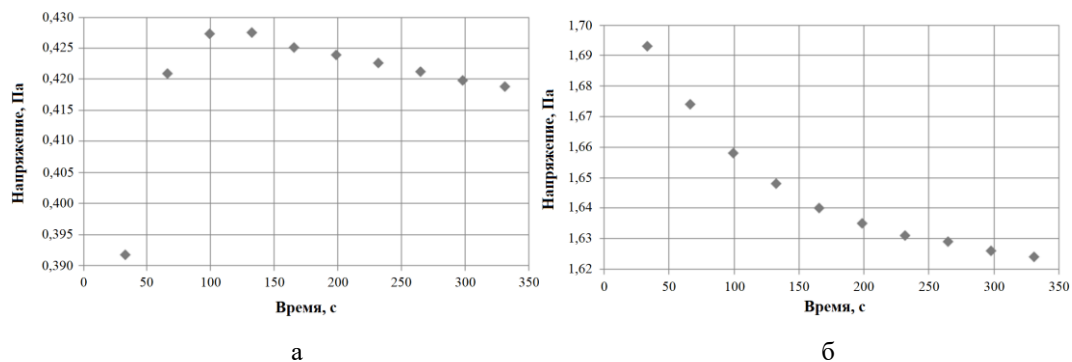


Рис. 1. Изменение от времени напряжения сдвига при постоянных скоростях деформации сдвига 100 (а) и 500 (б) 1/с

При 100 1/с обнаружались реопектические свойства, которые проявляются в течение первых 100 секунд, далее в течение 200 секунд изменения незначительны. При 500 1/с за 5 минут напряжение сдвига падает на 4%. При нашей схеме эксперимента при 500 1/с за 60 секунд изменения незначительны, составляют порядка 1%. При обратном ходе за счет изменения свойств дисперсий различия могут достигать 1-2%. При аппроксимации степенной функцией Оствальда-де Вааля параметры приведены в табл. 1.

Табл. 1. Значения измеренных эффективных вязкостей при скоростях деформации сдвига, равных 10 и 100 1/с и значения коэффициентов консистентности (k) и показателя неньютоновского поведения (n)

№ пациента	Эффективная вязкость (мПа·с)				Коэффициенты из формулы $\tau = k\dot{\gamma}^n$ (напряжение сдвига $\tau$ в мПа)			
	при 10 1/с		при 100 1/с		k прям.	k обр.	n прям.	n обр.
	прямой ход	обратный ход	прямой ход	обратный ход				
1	4,76	5,87	3,80	3,79	6,5	8,8	0,879	0,823
2	5,19	6,15	4,05	4,04	7,6	9,7	0,861	0,818
3	5,79	10,32	4,59	4,60	9,0	17,5	0,850	0,720
4	6,77	7,62	4,66	4,63	10,6	11,6	0,827	0,811
5	6,96	7,95	5,07	4,97	11,0	9,9	0,833	0,858
6	6,21	8,05	5,14	4,84	7,3	12,5	0,917	0,806
7	6,52	7,28	4,57	4,53	10,4	10,5	0,825	0,824
8	5,62	7,07	4,37	4,38	8,3	7,3	0,860	0,891
9	6,72	8,03	4,47	4,38	11,2	11,8	0,806	0,798
10	3,94	4,29	3,24	3,19	5,4	5,7	0,885	0,877
11	6,31	7,43	4,71	4,61	9,6	8,2	0,845	0,879
12	5,73	6,95	4,53	4,37	8,2	8,3	0,867	0,867
13	7,70	7,53	4,07	4,18	13,2	25,7	0,757	0,6301
14	6,18	7,32	4,41	4,44	10,1	10,1	0,821	0,830
15	5,50	6,99	4,51	4,44	8,7	8,6	0,850	0,862
16	5,52	6,25	4,10	4,07	9,1	9,3	0,825	0,825
17	4,40	6,11	4,21	3,98	4,8	9,1	0,957	0,827

В начале эксперимента эритроциты оседают, образуется прослойка плазмы, а при обратном ходе эритроциты в объеме перемешаны, поэтому при малых скоростях деформации вязкость для обратного хода выше. Для больших скоростей деформации, наоборот, вязкость прямого хода выше [4], что можно объяснить различной структуризацией эритроцитов при разных скоростях деформации, поскольку при больших скоростях деформации эритроциты выстраиваются в линию с прослойкой плазмы [1]. Различие эффективной вязкости после разных приложенных деформаций сдвига может, в дальнейшем, привести к выработке методики диагностики свойств крови у больных, предрасположенных к сердечно-сосудистым заболеваниям.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00403, <https://rscf.ru/project/24-21-00403/>.

## Список литературы

- [1] Рахимов А.А., Бурдюк Ю.В., Ахметов А.Т. Особенности течения крови в капиллярах при малых перепадах давления // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 3. <https://science-education.ru/ru/article/view?id=6375>
- [2] Рахимов А.А., Ахметов А.Т., Валиев А.А., Асадуллин Р.Р. Исследование эффекта динамического загираания эмульсий, содержащих твердые включения // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 118-126.
- [3] Ахметов А.Т., Валиев А.А., Рахимов А.А., Саметов С.П. Анизотропные свойства крови в сосуде со стенозом // Доклады академии наук. 2018. Том 483, № 2. С. 145-149.
- [4] Ахметов А.Т., Валиев А.А., Рахимов А.А., Саметов С.П., Хабибуллина Р.Р. Микрогидродинамика крови при стенозе сосудов // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, №2. С.210–217.

# Влияние давления и плотности окружающей среды на спектр частот колебаний прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по контуру

Сабитов К.Б., Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Следуя работам [1], [2] определяется спектр частот и формы изгибных колебаний прямоугольной пластины, которая помещена в жидкость или газ. Изучен вопрос о взаимном влиянии эффекта среднего давления и известного из литературы эффекта присоединенной массы жидкости на деформацию пластины. Получены формулы для вычисления частот колебаний прямоугольной пластины, находящейся в несжимаемой и сжимаемой жидкости.

Для описания колебаний тонкой прямоугольной пластины рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка [3]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

где  $E, \nu, \rho$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала,  $h$  – толщина пластины,  $w(x, y, t)$  – прогиб,  $x, y, t$  – координаты, время,  $q$  – поперечная распределенная нагрузка.

На нижнюю и верхнюю поверхность пластины действуют давления  $p_0+p_1$  и  $p_0+p_2$  жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Здесь  $p_0$  – давление сборки, в частности, атмосферное давление, действующее на все поверхности,  $p_1, p_2$  – избыточные давления. При определении нагрузки  $q$  исходим из предположения, что  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и  $p_1, p_2$  остаются постоянными при изгибе пластины.

**Несжимаемая среда.** Предполагаем, что области, занятые жидкостями, простираются неограниченно, опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении осей  $x$  и  $y$ . Возникающие в результате движения пластины давления на нижнюю и верхнюю поверхность обозначим через  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$ . Уравнения динамики несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости  $\phi(x, y, z, t)$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

По условию пластина по осям  $x$  и  $y$  опирается на опоры, расположенные на равных расстояниях  $a$  и  $b$  и допускает поворот. Это означает, что

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, |x| = a, 2a, \dots, w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, |y| = 0, b, 2b, \dots \quad (3)$$

Задаются условия на поверхностях контакта со средой:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = -\frac{h}{2}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = \frac{h}{2}. \quad (4)$$

На большом удалении от поверхности возмущения среды от пластины исчезают

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Аналогично [1] определяется распределенная сила

$$q = p_1 - p_2 + \frac{(2p_0 + p_1 + p_2)h}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 + \frac{(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)h}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

В результате решения системы уравнений (1), (2), (6) при условиях (3) - (5) и  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  находим спектр частот

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 \frac{1 + \alpha_{mn}}{1 + \mu_{mn}}, \quad (7)$$

где

$$\omega_{0mn}^2 = \frac{D\lambda_{mn}^4}{\rho h}, \quad \alpha_{mn} = \frac{(p_0 + p)h}{D\lambda_{mn}^2}, \quad \mu_{mn} = \frac{2\tilde{\rho}}{\rho h \lambda_{mn}}, \quad \lambda_{mn}^2 = \pi^2 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right], \quad m, n \in \mathbb{N}$$

и колебания пластины

$$w(x, y, t) = (C_{1mn} \cos \omega_{mn} t + C_{2mn} \sin \omega_{mn} t) v_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin(\omega_{mn} t + \psi_{mn}) v_{mn}(x, y), \quad (8)$$

$$A_{mn} = \sqrt{C_{1mn}^2 + C_{2mn}^2}, \quad \psi_{mn} = \arcsin \frac{C_{1mn}}{A_{mn}},$$

где

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b},$$

$C_{1mn}$  и  $C_{2mn}$  – произвольные постоянные. Нами установлены следующие утверждения.

**Утверждение 1.**

а. Если параметры  $\alpha_{mn}$  и  $\mu_{mn}$ , определяющие соответственно влияние давления и плотности окружающей среды, то при  $\alpha_{mn} \ll 1$ ,  $\mu_{mn} \ll 1$  или  $\alpha_{mn} = \mu_{mn}$  их влияние исчезает;

б.  $\alpha_{mn} > \mu_{mn}$  - преобладает повышающее частоту  $\omega_{mn}$  колебаний влияние давления среды;

в.  $\alpha_{mn} < \mu_{mn}$  - преобладает понижающее частоту  $\omega_{mn}$  колебаний влияние плотности среды.

**Утверждение 2.** Колебания однородной пластины в указанной среде при одинаковых избыточных давлениях  $p_1 = p_2 = p$  и  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  определяется по формуле (8), а частоты по формуле (7).

**Сжимаемая среда.** В случае сжимаемой среды вместо уравнений (2) имеем трехмерные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} - \frac{1}{c_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} = 0, \quad \bar{p}_i = -\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t}, \quad c_i^2 = \kappa_i \frac{p_i}{\rho_i}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

где  $c_i$  – скорость звука,  $\kappa_i$  – коэффициент адиабаты.

Аналогично вышеприведенному в результате решения системы уравнений (1), (9), (6) при условиях (3) - (5) и  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  находим спектр частот

$$\omega_{mn} = \omega_{0mn} \sqrt{x_{mn}}. \quad (10)$$

где  $x_{mn}$  - корень алгебраического уравнения

$$1 - x_{mn} + \alpha_{mn} = \frac{\mu_{mn} x_{mn}}{\sqrt{1 - \eta_{mn} x_{mn}}} = 0, \quad (11)$$

здесь

$$\mu_{mn} = \frac{2\tilde{\rho}}{\rho h \lambda_{mn}}, \quad \eta_{mn} = \frac{\omega_{0mn}^2}{c_i^2 \lambda_{mn}^2}, \quad \kappa_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 - \frac{\omega_{mn}^2}{c_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Показано, что уравнение (11) имеет решение, которое лежит между нулем и единицей. Установлены следующие утверждения.

**Утверждение 3.** Частоты в случае сжимаемой среды меньше, чем соответствующие частоты в несжимаемой среде.

**Утверждение 4.** С ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия и убывает для воздуха и углекислого газа. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний.

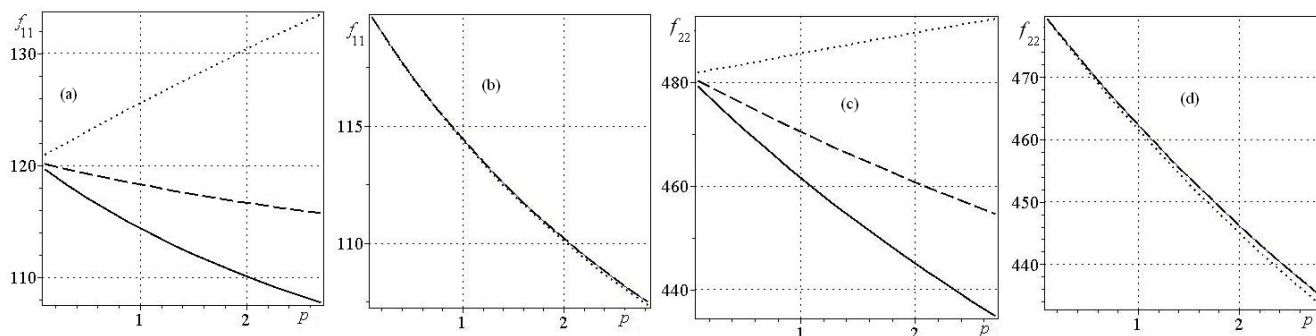


Рис. 1: Зависимости первой и второй частоты изгибных колебаний пластинки  $f_{11}$ ,  $f_{22}$  (Гц) от давления  $p$  (МПа): (а), (с) для разных газов:  $\tilde{\rho} = 0.1785$  (гелий), 1.2928 (воздух), 1.9768 (двуокись углерода)  $\text{кг/м}^3$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (b), (d) по формулам для несжимаемой (8) и сжимаемой (11) жидкостей для двуокиси углерода  $\tilde{\rho} = 1.9768 \text{ кг/м}^3$  (сплошная, пунктирная линии соответственно).

**Утверждение 5.** Колебания однородной пластины в указанной среде при одинаковых избыточных давлениях  $p_1 = p_2 = p$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = \tilde{\rho}$  определяются по формуле (8), а частоты по формуле (10).

При  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 0.001 \text{ м}$ ,  $a = 0.2 \text{ м}$ ,  $b = 0.2 \text{ м}$ ,  $\kappa_{1,2} = 1.4$ , атмосферном давлении  $p_a = 0.1 \text{ МПа}$ , плотности воздуха  $\rho_{1a} = 1.2928 \text{ кг/м}^3$ ,  $p = 2 \text{ МПа}$  численное решение уравнения (11) дает корень:  $x_{11} = 0.93948$ . Соответствующая частота равна  $f_{11} = 116.6 \text{ Гц}$ .

Ниже в таблице приводятся частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины  $f_{mn} = \omega_{mn}/2\pi$ . Из нее следует, что частоты, вычисленные по формулам для несжимаемой и сжимаемой сред отличаются незначительно, причем частоты по формуле для несжимаемой среды больше чем частоты по формуле для сжимаемой среды.

Таблица. Частоты изгибных колебаний прямоугольной пластины для разных  $m$ ,  $n$ , вычисленные по формулам (8) и (10) соответственно для несжимаемой и сжимаемой сред.

$m, n$	$f_{mn}$ , Hz, формула (7)	$f_{mn}$ , Hz, формула (10)
1, 1	116.7	116.6
2, 2	461.3	460.7
3, 3	1045.6	1043.3

На рис. 1, а, с приводятся зависимости первой и второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2, а, с видно, что с ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия и убывает для воздуха и углекислого газа. А с увеличением плотности газа происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний. На рис. 2, b, d приводятся зависимости первой и второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Из рис. 2, b, d видно, что частоты по модели несжимаемой жидкости выше частот по модели для сжимаемой жидкости, причем с ростом давления разность частот колебаний возрастает.

Работа проведена в порядке выполнения государственного задания (№0246-2023-0015).

## Список литературы

- [1] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. №3. С. 88 - 96. <https://doi.org/10.31857/S0572329922030084>.
- [2] Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Изв. вузов. Матем., 2021. №10. С. 60–70. EDN:RZSSHV. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>.
- [3] Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

## Определение эффективности потокоотклоняющих агентов методами микрофлюидики

Саметов С.П.<sup>1</sup>, Батыршин Э.С.<sup>1</sup>, Гарифуллин И.Ш.<sup>2</sup>, Таипов И.А.<sup>1</sup>, Имамутдинова А.А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ООО «РН-БашНИПИнефть», Уфа

<sup>2</sup>Уфимский университет науки и технологий, Уфа

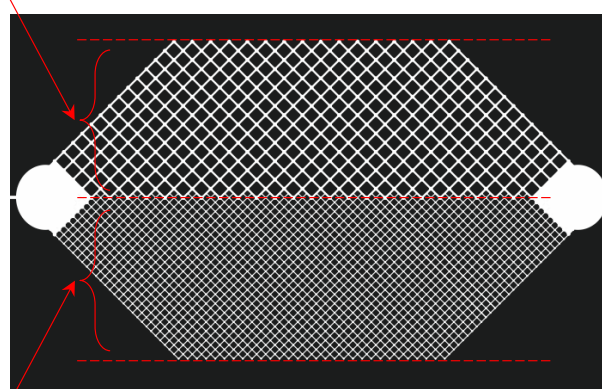
Нефтяной пласт представляют собой сложную многофазную систему, поведение которой на макроуровне зависит от физических явлений, происходящих на микроуровне, то есть на уровне отдельных пор. Для анализа и определения характеристик пористых сред в последнее время развиваются новые лабораторные методики, среди которых значительный вклад составляют микрофлюидные методы [1]. В них используются микрофлюидные чипы, которые в большинстве своем отображают двухмерную область миллиметрового размера участка горной породы [2]. Микрофлюидные чипы позволяют визуализировать динамику жидкостей, их взаимодействие друг с другом и твердой средой, которая в основном изготавливается из таких материалов как полимеры, стекло, кремний [3].

Микрофлюидные чипы являются удобным инструментом для исследований процессов добычи нефти из горных пород из-за схожего диапазона размера пор и микроканалов. Микрофлюидика обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционными методами лабораторных испытаний: стоимость, скорость исследования, малый расход образцов, контролируемая геометрия микромоделей и ее повторяемость – можно создавать двойников физических моделей горной породы. С помощью микрофлюидного подхода изучают в пористых средах влияние на динамику флюидов изменение смачиваемости, межфазного натяжения, коэффициента подвижности, стабилизации нагнетаемой жидкости, деградации, набухания, адсорбции, закупорки канала, эмульгирования, отклонение потоков, а также проводят тестирование различных реагентов.

В настоящей работе представлены результаты использования микрофлюидики для тестирования эффективности потокоотклоняющих агентов на примере обратной водоуглеводородной эмульсии на основе углеводородного реагента. Актуальность работы связана с исследованием особенностей фильтрации флюидов при повторной кислотной обработке пласта. Использование потокоотклонителя позволяет заблокировать высокопроницаемые участки пласта, в том числе образованные после первичной обработки кислотным раствором, для последующей кислотной обработки низкопроницаемых зон.

Исследовалось распределение потокоотклонителя в пористой среде с двойной проницаемостью. Микрофлюидный чип, содержал две расположенные параллельно пористые области, проницаемости которых различались на порядок (рис. 1). Геометрия порового пространства представляла собой поросетевую модель. Чип изготовлен фотолитографическим способом и выполнен из стекла. Эксперимент проведен при постоянном перепаде давления. В ходе эксперимента оценивались скорость распространения фронта и насыщенность использованных жидкостей: минерализованной вода, потокоотклонитель и условный кислотный раствор.

область с высокой проницаемостью  $k_1$



область с низкой проницаемостью  $k_2$

1 мм

Рис. 1. Схематическое изображение микроканалов микрофлюидного чипа

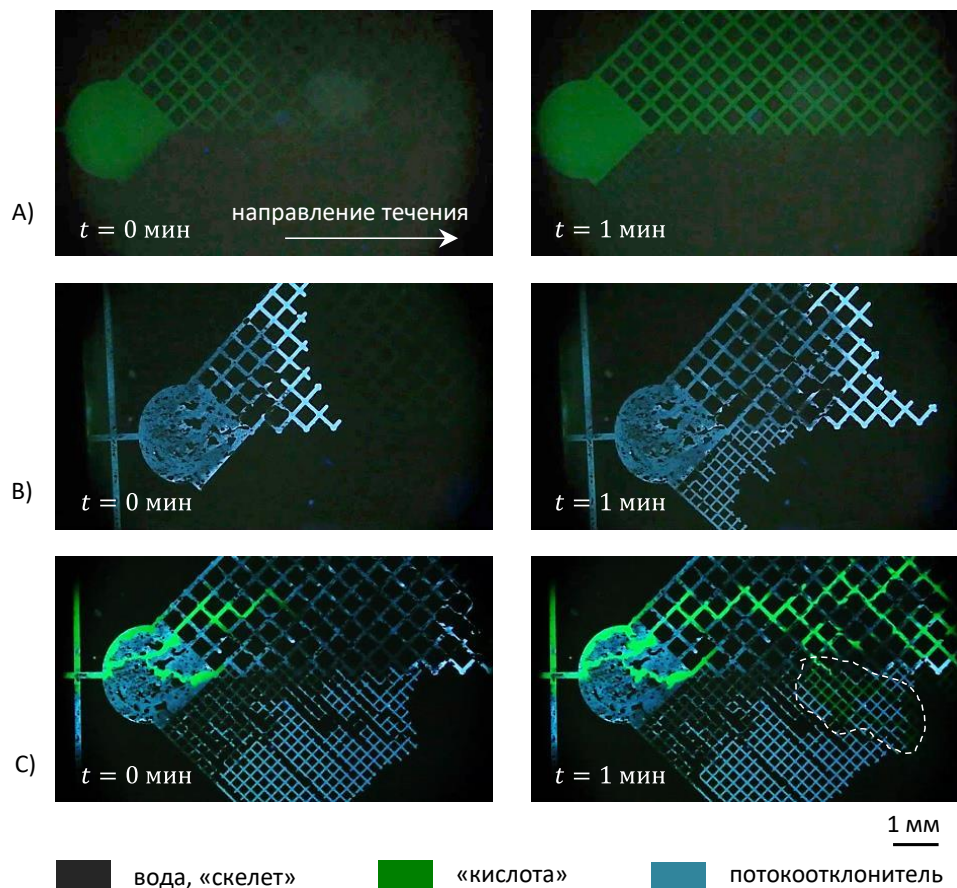


Рис. 2. Этапы закачки флюидов в виде последовательных кадров, отличающихся по времени: А) обработка «кислотой» до закачки потокоотклонителя; В) закачка потокоотклонителя; С) закачка «кислоты» после обработки потокоотклонителем

Показано распределение потоков в областях низкой и высокой проницаемости условного раствора кислоты до и после закачки потокоотклонителя, распределение потоков потокоотклонителя в зависимости от режима закачки, типа начальной насыщенности и смачиваемости (рис. 2).

## Список литературы

- [1] Питюк Ю. А. и др. Численное и экспериментальное исследование влияния смачиваемости и капиллярного числа на эффективность вытеснения нефти в модели порового дублета //Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т. 64. – №. 3. – С. 38-48.
- [2] Cao S. C., Jung J., Radonjic M. Application of microfluidic pore models for flow, transport, and reaction in geological porous media: From a single test bed to multifunction real-time analysis tool //Microsystem technologies. – 2019. – Т. 25. – С. 4035-4052.
- [3] Gerami A. et al. Microfluidics for porous systems: fabrication, microscopy and applications //Transport in Porous Media. – 2019. – Т. 130. – С. 277-304.

## Отражение и прохождение акустических волн из чистой жидкости в пузырьковую под прямым углом

Сафиуллин А.Р.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Из литературы известно, что физико-химические свойства жидкостей в метастабильном состоянии в основном определяются наличием в их составе различных включений, например газовых пузырьков или твердых частиц [1]. В данном случае рассмотрены особенности распространения звука на границе из пузырьковой жидкости, содержащей газовые зародыши, в чистую, при падении под прямым углом.

Пусть в жидкости, находящейся при температуре  $T_0$  и при давлении  $p_0$ , имеются сферические пузырьки радиусом  $a_0$ , которые содержат пар и нерастворимый в жидкой фазе газ. Объемное содержание пузырьков фиксировано  $\alpha_0$ . Рассмотрим прохождение двумерных акустических волн из чистой жидкости в пузырьковую под прямым углом. Схематично задача представлена на рисунке 1.

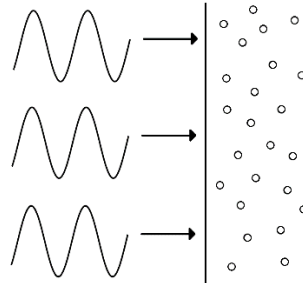


Рис.1. Схематическое изображение задачи

Для описания свойств акустических волн примем следующую систему уравнений, состоящую из приведенного закона сохранения массы, уравнений импульсов, уравнения Рэлея-Ламба, уравнения теплопроводности и диффузии [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_l^2} \frac{\partial p_l}{\partial t} + \rho_{l0}^0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 3\rho_{l0}^0 \frac{\alpha_0}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} &= 0, \\ \rho_{l0}^0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0, \quad \rho_{l0}^0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_l}{\partial y} &= 0, \\ \rho_{l0}^0 \alpha_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{\rho_{l0}^0 \nu_l^\mu}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} &= p_g - p_l + \frac{2\sigma}{a_0^2} a, \\ \rho_{l0}^0 c_g \frac{\partial T_g'}{\partial t} = \frac{\lambda_g}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_g r^2 \frac{\partial T_g'}{\partial r} \right) + \frac{\partial P_g}{\partial t}, \quad \frac{\partial k'}{\partial t} &= \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial k'}{\partial r}, \end{aligned}$$

где индексы  $i = l, v, a$  относятся к параметрам жидкости, пара и газа, а нижний индекс (0) соответствует начальному состоянию,  $u$  и  $v$  – скорости среды,  $a$  – радиус пузырьков,  $C_l$  – скорость звука в жидкости,  $\alpha_0$  – объемное содержание пузырьков,  $\nu_l^\mu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $D$  – коэффициент диффузии.

Для пузырьковой жидкости, описанной выше, определены коэффициенты преломления и отражения волны [3]:

$$S = 2 / \left( 1 + \frac{C_l K}{\omega} \right), \quad R = S - 1, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота возмущений,  $K$  – волновой вектор.

На основе данных уравнений проведены численные расчеты коэффициентов отражения и преломления. Результаты представлены на рисунке 2. Красный, синий и зеленый цвет линий соответствуют значения температур  $T_0 = 300, 353$  и  $373$  К. Сплошные линии обозначают модуль представляемого коэффициента, а штриховые – его аргумент, так как получаемое число является комплексным. Значения объемного содержания  $\alpha_0 = 10^{-3}$ , радиус пузырьков  $a_0 = 10^{-6}$  м.



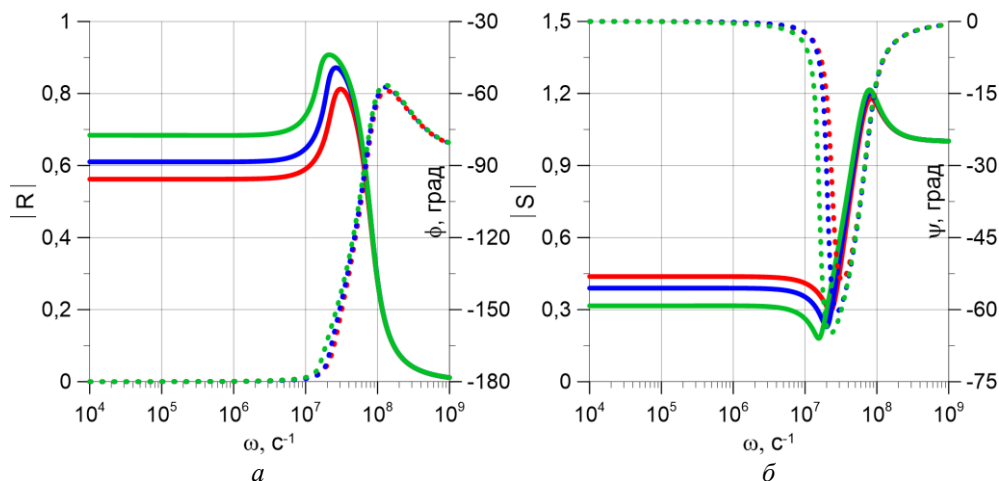


Рис.2. Модули и аргументы коэффициентов отражения (а) и преломления (б)

Для простоты понимания результатов, каждый график можно условно разделить на две части: до миннаэрттовой частоты  $\omega_R$  (собственная частота колебаний пузырьков) и после  $\omega_R$  [3]. До этой частоты графики отличаются, а после нее сливаются в один. Видно, что в низкочастотной области аргумент коэффициента отражения равен  $-180$  градусам, то есть отраженная волна распространяется в противофазе к поступающей. Модуль коэффициента отражения имеет достаточно высокое значение ( $|R| > 0.5$ ), а модуль коэффициента преломления довольно мал ( $|S| < 0.5$ ). То есть волна хорошо отражается и слабо проходит в пузырьковую жидкость. В высокочастотной области отраженная волна практически отсутствует ( $|R| \approx 0$ ) и волна проходит полностью ( $|S| \approx 1$ ). Это связано с тем, что частота среды становится выше частоты колебаний пузырьков. Заметно влияние температуры на кривые: чем выше температура, тем выше содержание пара в пузырьках, и значительнее их влияние на колебания среды. Количественно это выражается в следующей закономерности: с повышением температуры модуль коэффициента отражения увеличивается, а модуль коэффициента преломления уменьшается.

## Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. - М.: Наука, 1987, Т. 1, 2.
- [2] Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками / В. Ш. Шагапов, М. Н. Галимзянов, И. И. Вдовенко, Н. С. Хабеев // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, № 4. – С. 912-921.
- [3] Шагапов, В. Ш. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе "чистой" и пузырьковой жидкостей при прямом их падении / В. Ш. Шагапов, М. Н. Галимзянов, И. И. Вдовенко // Теплофизика высоких температур. – 2019. – Т. 57, № 2. – С. 284-290.

## Измерение температуры гидратного пласта с использованием Planar Laser Induced Fluorescence

Стрижак П.А.<sup>а</sup>, Шлегель Н.Е.<sup>а</sup>, Подгорная Е.Р.<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 634050, Томск, проспект Ленина,  
дом 30,  
e-mail: [pavelspa@tpu.ru](mailto:pavelspa@tpu.ru)

Задачи контроля и достоверного прогноза температуры ледовых агломератов с применением бесконтактных методов оптической регистрации стали особенно актуальными в связи с усилением внимания исследователей к освоению районов Крайнего Севера и Арктики. В частности, особую актуальность представляют технологические процессы с газовыми гидратами – сложными кристаллическими структурами, состоящими их газа (метан, этан, пропан, углекислый газ и др.), воды и льда. Свойства таких структур существенно зависят от температуры, поэтому важно контролировать температуру в разных сечениях таких структур при добыче газа из скважин, транспорте и хранении. Размещение чувствительных элементов в различных сечениях гидратных пластов способствует формированию дополнительных центров кристаллизации и снижению точности измерений температуры, давления и других технологических параметров. Процессы тепломассопереноса в газогидратных структурах протекают с высокой скоростью. В таких условиях необходимы бесконтактные системы регистрации технологических параметров для получения достоверной информации об основных протекающих процессах в трех фазах: газ, вода, лед.

По результатам выполненных исследований выделены основные ограничения PLIF метода при его использовании для измерения температуры ледяных агломератов:

- метод PLIF позволяет проводить удовлетворительные измерения при концентрации флуорофора в водном растворе около 5 мг/л. При меньших концентрациях интенсивность эмитированного Rhodamine В слишком мала и незначительно превышает фоновую интенсивность изображения. При больших концентрациях возникает явление чрезмерного поглощения падающего на ледовый агломерат лазерного света, что приводит к тому, что интенсивность эмитированного света многократно превышает интенсивность свечения самого образца;
- метод PLIF применим для определения температуры относительно небольших ледовых агломератов (объемом менее 6 мл);
- метод PLIF может быть достаточно эффективно использован для определения температуры ледового агломерата при температурах последнего выше  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- метод PLIF можно использовать для определения температуры ледового агломерата на глубине не более 20 мм.

## Аналитическая модель гравитационного осаждения дисперсной примеси в движущемся потоке

Тукмаков Д.А.

ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Одним из разделов современной механики жидкостей и газов является динамика неоднородных сред [1-16]. Помимо вопросов, связанных с аэродинамическими проблемами очищения газодисперсных сред [1,2] динамика неоднородных сред рассматривает также процессы движения частиц взвешенных в жидкостях. Необходимость исследования и моделирования диффузионных процессов дисперсных примесей в водотоках возникает по причине экологических проблем углубления русла рек. В работе [3] описана методика проведения расчета условных фоновых концентраций химических веществ в воде водных объектов вне зоны влияния на качество воды проектируемого или действующего выпуска сточных вод для установления нормативов допустимых сбросов сточных вод. В публикации [4] рассмотрены особенности задания коэффициентов Шези для русловых потоков. Дан анализ современных подходов к оценке коэффициентов Шези при грядовом режиме. Продемонстрировано, что данные коэффициенты очень существенно влияют на гидроморфологические параметры русловых потоков. В статье [5] показано влияние коэффициента турбулентной диффузии дисперсной примеси и формы частиц на точность прогнозирования распространения взвешенных примесей и их осаждения в водотоках. Предложена модель позволяющая более точно рассчитать толщину слоя наилка и площади загрязненного дна. В публикации [6] рассмотрена методика расчета скорости осаждения частиц в водной среде для моделирования динамики концентрации взвешенных веществ на примере проведения дноуглубительных работ и дампинга грунта. Выполнен обзор различных подходов к расчету динамики концентрации взвешенных веществ, определены основные входные параметры модели. Предложены модель горизонтального рассеивания загрязняющих веществ и методика расчета скорости осаждения частиц, в основу которой положены теоретические и эмпирические формулы. Путем сравнения результатов расчетов сделаны выводы об универсальности эмпирической формулы и возможности комбинации формулы Стокса в случае ламинарного и турбулентного режимов. В статье [7] проанализирована роль мелкодисперсных наносов техногенного происхождения в русловом процессе, рассматриваются особенности осаждения частиц различной плотности и формы, вопросы хлопьеобразования и консолидации осадков в придонной области потока, приводятся экспериментальные данные о величине сцепления между частицами, предложена зависимость для его расчета, определен класс наносов, для которых сцепление определяет критическую скорость размыва. На основе сопоставления процессов самоочищения речной воды и осаждения мелкодисперсных наносов показано, что седиментационные процессы играют важную роль в самоочищении речной воды. В работе [8] представлена усредненная двумерная численная модель для моделирования гидродинамики и переноса связных наносов в эстуарной системе реки. Модель описывает притоки, а также основной ствол эстуарной системы.

В данной работе представлены результаты теоретического исследования диффузии твердой примеси оценивается влияние различных методик расчетов чисел Шези и дисперсности частиц. Таким образом можно сделать вывод о том, что исследование диффузии твердых примесей в водотоках является актуальным для экологической безопасности гидротехнического строительства. При этом в различных исследованиях для моделирования диффузии твердых примесей применяются различные подходы в разработке моделей, как в выводе дифференциальных уравнений описывающих процесс, так и в определении параметров задающих гидродинамические свойства дисперсных примесей. В данной работе на основе математической модели трехмерной нестационарной диффузии методом разделения переменных получено аналитическое решение, с помощью которого исследуется влияние параметров математической модели и моделируемого объекта на процесс конвективной диффузии. Рассматривались различные формулы вычисления числа Шези, проводились расчеты для различных дисперсностей частиц.

Уравнение трехмерной нестационарной диффузии (1) имеет вид [9]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

Здесь  $C(t, x, y, z)$ ,  $q, u, v, w, D$  – концентрация, расход массы, скорости потока в пространственных направлениях, коэффициенты диффузии для соответствующих пространственных направлений. В данной работе водоток

предполагается прямолинейным, постоянной глубины  $H$ , со средней (по расходу) продольной скоростью  $U=\text{const}$ , поперечная и вертикальная скорости водотока считают равными нулю. Ось  $Ox$  направлена вдоль берега в сторону течения, ось  $Oy$  – поперек потока, ось  $Oz$  – вертикально вниз. Рассматривается малоинерционная примесь, у которой  $u=U$ ,  $v=0$ ,  $w=W$ , где  $W$  – скорость установившегося осаждения частиц [5], таким образом математическая модель будет иметь вид (2):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial C}{\partial x} - w \frac{\partial C}{\partial z} \quad (2)$$

С помощью подстановки [9], неоднородное уравнение (2) сводится к однородному уравнению (3):

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

Решение однородного уравнения (3) возможно представить в виде произведения функций (4):

$$C(x, y, z, t) = C_1(x, t) C_2(y, t) C_3(z, t) \quad (4)$$

Каждая из функций в выражении (5) удовлетворяет одномерному однородному уравнению диффузии :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_i^2} \quad (4^*)$$

по соответствующему пространственному направлению,  $i=1,2,3$ ,  $x = x_1, x_2=y, x_3=z$ . Рассмотрим метод разделения переменных [9,10,16] решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа применительно к уравнению (4\*). Предположим, что  $C_i(x_i, t) = X_i(x_i)T_i(t)$ . В таком случае уравнение (4\*) будет иметь вид:

$$X_i'(x_i)T_i(t) = \frac{D}{U} X_i(x_i)T_i''(t) \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде уравнения (5\*), (6), (6\*), (6\*\*):

$$\frac{T_i(t)}{DT_i(t)} = \frac{X_i''(x_i)}{X_i(x_i)} = -\lambda_{ik}^2 \quad (5^*)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = -D\lambda_{ik}^2 T_i, T_i = e^{-D\lambda_{ik}^2 t} \quad (6)$$

$$\frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} = -\lambda_{ik}^2 X_i(x_i) \quad (6^*)$$

$$X_i(x_i) = A_{ik} \cos \lambda_{ik} x_i + B_{ik} \sin \lambda_{ik} x_i \quad (6^{**})$$

Для функций  $C_i(x_i, t)$  зададим граничные условия (7) описывающие отсутствие притока массы дисперсной компоненты:

$$C_i'(0, t) = C_i'(L, t) = 0 \quad (7)$$

Из граничных условий получаем следующее выражение для слагаемых ряда Фурье  $X_{ik}(x_i, t)$ :

$$X_{ik}(x_i, t) = A_{ik} \cos \lambda_{ik} x_i, \lambda_{ik} = \frac{\pi k}{L_i}, k=1, 2, \dots, n_i \quad (8)$$

$$X_i(x_i, t) = \sum_k A_{ik} \cos \lambda_{ik} x_i \quad (8^*)$$

Таким образом решение уравнения (2) имеет вид (9):

$$C(x_1, x_2, x_3, t) = c_0 + \exp\left(\frac{ux_1}{2D} + \frac{wx_3}{2D} - \left(\sum_k e^{-D\lambda_{ik}^2 t} A_{ik} \cos \lambda_{ik} x_i\right)\right) - t(w^2 + u^2)/(4D) \prod_i \sqrt[3]{(1 - c_0/c_1)} \quad (9)$$

Здесь  $c_0$  и  $c_1$  это соответственно фоновая и максимальная концентрация дисперсной компоненты на поверхности канала,  $z=0$ . Коэффициенты  $A_{ik}$  определяются следующим образом:

$$A_{ik} = \frac{2}{L_i} \int_0^{L_i} f_{i0}(x_i) \cos \lambda_{ik} x_i dx_i \quad (10)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-21-00363 «Моделирование процесса осаждения капель двухфазной газокapпельной среды»

## Список литературы

- [1] Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003.
- [2] Тукмаков А.Л. Модель движения и осаждения заряженной газовой взвеси в электрическом поле // Инженерно-физический журнал. 2014. № 1. С. 35-44.
- [3] Геков В.Ф., Клименко О.А. Порядок проведения расчета условных фоновых концентраций химических веществ в воде водных объектов для установления нормативов допустимых сбросов сточных вод // Гидрохимический институт. 2019. 95 с.
- [4] Лепихин А.П., Богомолов А.В., Дальков М.П. Оценка коэффициента Шези: традиция и современное состояние // Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2012. № 3. С. 57-77.
- [5] Наумов В. А. Математическое моделирование распространения взвешенных примесей от точечного источника и их осаждения в водотоке // Известия КГТУ. 2017. № 44. С.46–58.
- [6] Студёнов И.И., Шилова Н.А. Расчет гидравлической крупности взвеси при моделировании динамики концентрации взвешенных веществ в приустьевых районах арктических морей на примере Белого моря // Научные исследования в Арктике. 2015. №3. С.40–47.
- [7] Суйкова Н.В., Брянская Ю.В., Боровков В.С. Свойства мелкодисперсных техногенных наночастиц и их влияние на русловую процесс и самоочищение речной воды // Водные ресурсы. 2012. № 2. С. 186-194.
- [8] Liu W.C., Hsu M.H., Kuo A.Y. // Marine Pollution Bulletin. 2002. Vol. 44. Is. 10. P. 1076-1088.
- [9] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [10] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство «Наука», 1977. 736 с.
- [11] Тукмаков Д.А. Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запылённую среду // Многофазные системы. 2019. №2. С. 125-131.
- [12] Тукмаков Д.А. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с электрически заряженной запылённой средой // Многофазные системы. 2020. Т. 15. № 1-2. С. 101.
- [13] Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики скоплений твердых частиц // Многофазные системы. 2023. Т.18. №3. С. 244–246.
- [14] Тукмаков Д.А. Трёхмерная нестационарная математическая модель загрязнения канала осаждающейся дисперсной примесью // Экологические системы и приборы. 2022. №11. С. 26-35.
- [15] Тукмаков Д.А. Исследование загрязнения водотока взвесью с помощью стационарной двухмерной математической модели // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. 2022. № 1 (45). С. 88-98.
- [16] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. 504 с.

## Математическая модель продольной трещины стержня для задач идентификации

Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа  
 Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Задачам идентификации трещин посвящено большое число работ [1-4]. Поперечные раскрытые трещины, как правило, моделируют условиями сопряжения пружины [2].

Рассматривается однородный изотропный прямоугольный стержень длиной  $L = 1$ , плотностью  $\rho$  и площадью поперечного сечения  $F$  с продольной прямоугольной трещиной, проходящий не по всей длине стержня, а от некоторой точки  $x_c$  до правого конца (см. рис. 1). Стержень состоит из двух частей, то участок без трещины обозначаем индексом  $m$ , а участок с трещиной с индексом  $p$ . Предполагается, что оси симметрии поперечного сечения этих участков стержня совпадают. Стержень имеет жесткое закрепление на левом конце. Рассматриваются следующие краевые условия на правом конце: свободное, упругое, жесткое.

Поперечное сечение стержня имеет высоту  $H$  и ширину  $B$ . Прямоугольная трещина имеет длину  $l = L - x_c$ , глубину  $h$  и ширину  $b$ .

Продольные колебания стержня с постоянным поперечным сечением описывается следующим уравнением [4, с. 146]:

$$EF \frac{d^2 U(x, t)}{dx^2} + \rho F \frac{d^2 U(x, t)}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где  $U = U(x, t)$  – продольное смещение,  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня.

Изгибные колебания стержня постоянного сечения относительно оси  $Oy$  и  $Oz$  описывается уравнением [4, с.152]:

$$EJ_y \frac{d^4 Y(x, t)}{dx^4} + \rho F \frac{d^2 Y(x, t)}{dt^2} = 0, \quad (2)$$

$$EJ_z \frac{d^4 Z(x, t)}{dx^4} + \rho F \frac{d^2 Z(x, t)}{dt^2} = 0, \quad (3)$$

где  $Y(x, t)$ ,  $Z(x, t)$  – поперечное смещение относительно оси  $Oy$  и  $Oz$  соответственно  
 $J_y$ ,  $J_z$  – моменты инерции поперечного сечения.

где  $u_m$ ,  $u_p$  – продольные смещения левее и правее точки  $x_c$ .

$$F_p = BH - bh, \quad F_m = BH, \quad P = \frac{F_p}{F_m}. \quad (4)$$

В точке начала надреза  $x_c$  применим условия сопряжения для участков стержня:

$$u_m(x_c) = u_p(x_c), \quad u'_m(x_c) = u'_p(x_c)P, \quad (5)$$

где  $P = \frac{F_p}{F_m}$ ,  $F_p = BH - bh$ ,  $F_m = BH$ .

Решение уравнения (1) ищем в виде  $U(x, t) = u(x)\cos\omega t$ . Тогда (1) сводится к следующему уравнению:

$$u'' + \lambda^2 u = 0, \quad (6)$$

где спектральный параметр  $\lambda^2 = \frac{\rho F \omega^2}{E}$ . Поскольку стержень слева и справа от точки  $x_c$  имеет разную форму поперечного сечения, то уравнения продольных колебаний слева и справа от точки  $x_c$  запишутся в следующей форме:

$$u''_m + \lambda^2 u_m = 0, \quad u''_p + \lambda^2 u_p = 0, \quad (7)$$

Общее решение уравнений (6) примем в виде

$$u_m = C_{m1} \cos \lambda x + C_{m2} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \quad u_p = C_{p1} \cos \lambda x + C_{p2} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}. \quad (8)$$

Подставим решения (8) в (5), (6) и получим следующую систему уравнений:

$$u_m(0) = C_{m1} \cdot 1 + C_{m2} \cdot 0 = C_{m1} = 0. \quad (9)$$

$$u'_p(1) = -\lambda C_{p1} \sin \lambda + C_{p2} \cos \lambda + k(C_{p1} \cos \lambda + C_{p2} \sin \lambda) = 0. \quad (10)$$

$$C_{m1} + C_{m2} \frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} - C_{p1} \cos \lambda x_c - C_{p2} \frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} = 0. \quad (11)$$

$$-\lambda C_{m1} + C_{m2} \cos \lambda x_c - P(-\lambda C_{p1} \sin \lambda x_c + C_{p2} \cos \lambda x_c) = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (9) следует  $C_{m1} = 0$ . Система уравнений (10)–(12) относительно неизвестных констант  $C_{p1}$ ,  $C_{p2}$ ,  $C_{m2}$  имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда равен нулю определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \sin \lambda + k \cos \lambda & \cos \lambda + \frac{k \sin \lambda}{\lambda} \\ \frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} & -\cos \lambda x_c & -\frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} \\ \cos \lambda x_c & P \lambda \sin \lambda x_c & -P \cos \lambda x_c \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Вычислив определитель (13) получим уравнение для нахождения собственных значений (собственных частот).

Найдем собственные частоты изгибных колебаний стержня, описываемых уравнениями (2) и (3).

Решение уравнения (2) ищем в виде  $Y(x, t) = y(x)\cos vt$ , где  $v$  - круговая частота. Тогда (2) сводится к следующему уравнению:

$$y^{(4)}(x) = s_y^4 y(x), \quad (14)$$

Условие сопряжения в точке  $x_c$  для участков стержня запишется так:

$$\begin{aligned} y_m(x_c) &= y_p(x_c), & y'_m(x_c) &= y'_p(x_c), \\ y''_m(x_c) &= \frac{J_{yp}}{J_{ym}} y''_p(x_c), & y'''_m(x_c) &= \frac{J_{yp}}{J_{ym}} y'''_p(x_c). \end{aligned} \quad (15)$$

Так как стержень заделан на левом конце и упруго закреплен на правом, то краевые условия, следующие:

$$y_m(0) = 0, \quad y'_m(0) = 0, \quad y''_p(1) = 0, \quad y'''_p(1) - k \cdot y_p(1) = 0. \quad (16)$$

Общее решение уравнений (2) примем в виде:

$$y_m = C_{11}y_{1m} + C_{12}y_{2m} + C_{13}y_{3m} + C_{14}y_{4m}, \quad y_p = C_{21}y_{1p} + C_{22}y_{2p} + C_{23}y_{3p} + C_{24}y_{4p}. \quad (17)$$

Где  $y_{1m} = \cos(d_1\lambda x)$ ,  $y_{2m} = \sin(d_1\lambda x)$ ,  $y_{3m} = \cosh(d_1\lambda x)$ ,  $y_{4m} = \sinh(d_1\lambda x)$ ,  $y_{1p} = \cos(d_2\lambda x)$ ,  $y_{2p} = \sin(d_2\lambda x)$ ,  $y_{3p} = \cosh(d_2\lambda x)$ ,  $y_{4p} = \sinh(d_2\lambda x)$ .

Подставив (17) в (15) – (16) получим систему. Данная система имеет нетривиальное решение относительно коэффициентов  $C_{ij}$  ( $i=1..2, j=1..4$ ) тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

Приравняв к нулю (18) получим частотное уравнение.

Частотное уравнение относительно горизонтальной оси  $Oz$  получается аналогично, разница заключается только в моментах инерции, где

$$J_{zp} = \frac{B^2 H^4 - 4h(H^2 - 1.5Hh + h^2)HhB + b^2 h^4}{12(HB - hb)}, \quad J_{zm} = \frac{BH^3}{12}. \quad (19)$$

Для решения задачи стержень с продольной трещиной моделируется в виде двух стержней, причем первый не имеет надреза, а второй имеет. В месте соединения используются условия сопряжения, в которых приравниваются колебания, углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Предложен метод решения, позволяющий однозначно определять искомые параметры трещины, где требуется найти первые собственные значения изгибных колебаний с разных осей и первое собственное значение продольных колебаний.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00420, <https://rscf.ru/project/23-21-00420/>

## Список литературы

- [1] Ахтямов А. М., Ильгамов М. А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152-162
- [2] Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beams // Journal of sound and vibrations. 1994. V. 172. P. 549–558.
- [3] Утяшев, И. М. Идентификация продольного надреза стержня по собственным частотам колебаний / И. М. Утяшев, А. Ф. Фатхелисламов // Russian Technological Journal. 2023. – Т. 11, № 2. – С. 92-99.
- [4] Болотин В. В. Вибрации в технике. Справочник. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.



## Определение упругих характеристик основания балки

Утяшев И.М., Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются обратная коэффициентная задача об определении упругих характеристик основания прямоугольной балки по собственным частотам изгибных колебаний. Балки на упругом основании широко применяются в современных инженерных конструкциях различного назначения. Например, шпалы железнодорожного пути, рельсы, ленточные фундаменты, а также различные виды трубопроводов. Существуют разные модели упругого основания. Наиболее широко применяется в расчетах модель «винклера» основания (гипотеза Винклера) [1], связывающая величины реакций с деформацией основания. В данной модели упругое основание рассматривается как система опирающихся на жесткое горизонтальное основание и не связанных между собой пружин, сжатие которых возрастает прямо пропорционально приложенной нагрузке.

Наиболее близкие к данной задаче работы рассмотрены в [2, 3]. В [2] решается задача о напряженно деформированном состоянии балки, находящейся в грунте с переменными свойствами по глубине. В [3] выведена формула определения коэффициента постели по деформации свободного конца сваи с помощью дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.

В настоящей работе требуется определить закон изменения упругости основания. Для решения поставленной задачи требуется установить зависимость собственных значений балки Эйлера-Бернулли от переменного коэффициента постели. Будем рассматривать случай, когда коэффициент постели моделируется многочленом второй степени  $k(x) = px^2 + qx + c$ . Тогда уравнение изгибных колебаний балки запишется в виде

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + k(x)u(x,t) + \rho F \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где  $u(x,t)$  – прогиб оси балки,  $\rho$  – ее плотность,  $F$  – площадь поперечного сечения  $EI = const$  – изгибная жесткость. При  $t = 0$  должны выполняться начальные условия

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x),$$

где  $f(x)$ ,  $g(x)$  – функции, определяющие начальное положение и скорость оси балки.

Граничные условия не зависят от того, связана балка с упругим основанием или нет. Они определяются условиями закрепления и нагруженности концов стержня. Поэтому краевые условия шарнирно-опертого закрепления могут быть перенесены на случай балок, связанных с упругим основанием:

$$x = 0: \quad u(0, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = 0;$$

$$x = L: \quad u(L, t) = 0, \quad EI \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0.$$

При замене  $u(x,t) = y(x) \cos(\omega t)$  поставленная выше задача сводится к следующей спектральной задаче

$$y^{(4)}(x) + (k_1(x) - \lambda^4)y(x) = 0, \tag{1}$$

$$U_1 = y(0) = 0, \quad U_2 = y''(0) = 0;$$

$$U_3 = y(L) = 0, \quad U_4 = y''(L) = 0. \tag{2}$$

где  $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EI}$ ,  $k_1(x) = \frac{k(x)}{EI}$ .

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = y(x, \lambda) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda) + C_3 y_3(x, \lambda) + C_4 y_4(x, \lambda). \tag{3}$$

Здесь,  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$ ,  $y_3(x, \lambda)$ ,  $y_4(x, \lambda)$  являются линейно независимыми решениями уравнения (1). Эти функции будем строить в виде ряда Маклорена по переменным  $x$  и  $\lambda$ .

Подставив общее решение (3) в краевые условия (2), получим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} y_3(1) & y_4(1) \\ y_3''(1) & y_4''(1) \end{vmatrix} = 0.$$

Данное выражение содержит в себе искомые величины коэффициента постели  $k(x) = px^2 + qx + c$ . Для восстановления трех неизвестных  $p$ ,  $q$ ,  $c$  требуется три собственных значения задачи (1)-(2). Численные эксперименты показали, что наименьшая погрешность достигается использованием собственных значений с наименьшим номером.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00420, <https://rscf.ru/project/23-21-00420/>

### Список литературы

- [1] Балки и плиты на упругом основании. Лекции с примерами расчета по специальному курсу строительной механики: учеб. пособие / А.Ю. Цвей. – М.: МАДИ, 2014. 96 с.
- [2] Масленников А.М., Улитин В.В. Балки на упругом основании с переменными параметрами // Строительство: Новые технологии – новое оборудование. 2017. № 1. С. 22-26.
- [3] Курбацкий Е.Н., Купчикова Н.В. Определение коэффициента постели по деформации свободного конца сваи с помощью дифференциальных уравнений в обобщенных функциях // Перспективы развития строительного комплекса. 2012. Т. 2. С. 47-49.

## Исследование волн давления в канале с пузырьковым кластером сферической формы

Фаттахов С.Р.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Работа посвящена моделированию двумерных волн в пузырьковой жидкости. Характеристики распространяющихся в жидкости волн до и после прохождения ими через пузырьковую область могут оказаться существенно различными. Эта особенность представляет значительный интерес как для теории, так и для практики. В частности, на практике следует учитывать, что амплитуда волн, проходящих через пузырьковую область, может как уменьшаться, так и увеличиваться. Это важно, например, при разработке и эксплуатации различных подводных объектов. Указанные особенности можно также целенаправленно использовать на практике, например, путем создания различных пузырьковых завес возле конструкций в жидкости для гашения падающих на них интенсивных волн и тем самым избегать разного рода разрушений. К настоящему времени одномерные волны в пузырьковой жидкости хорошо изучены [1–3] и на данный момент активно исследуются двумерные волны. Одной из интереснейших задач волновой динамики пузырьковой жидкости, в которой ярко проявляются многомерные эффекты, является взаимодействие ударной волны с пузырьковым кластером в жидкости.

Пусть в канале, заполненном жидкостью, находится прилегающая к одному из торцевых границ канала пузырьковая зона в форме сферы (Рис. 1). Рассмотрим двумерные волновые возмущения. Такая ситуация может реализоваться, например, при воздействии на систему граничным давлением ( $p = p^0(r, t)$  при  $z = z_0$ , где  $R_{cl}$  – характерный радиус пузырьковой области,  $R_c$  – радиус канала,  $L_c$  – длина канала,  $\Delta P_0$  – амплитуда волны давления).

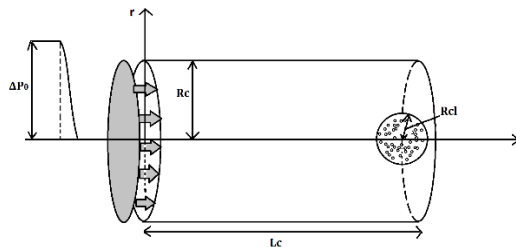


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области

Для описания движения пузырьковой жидкости при обычных для таких систем допущениях примем систему, состоящую из уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в односкоростном приближении [1]:

$$\frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (i = l, g), \quad \frac{dn}{dt} + n \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{dv}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial y} = 0, \quad \rho = \rho_g + \rho_l,$$

$$\frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma-1)}{a_0} q, \quad w = \frac{da}{dt}, \quad \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \rho_l = \rho_l^0 \alpha_l, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3,$$

где  $a$  – радиус пузырьков,  $p_i$  – давления фаз,  $q$  – интенсивность теплообмена,  $n$  – число пузырьков в единице объема,  $w$  – радиальная скорость пузырьков,  $\rho_i^0$  – истинные плотности фаз,  $\gamma$  – показатель адиабаты для газа,  $\alpha_i$  – объемные содержания фаз. Скорости  $u$  и  $v$  соответствуют движению по координатам  $x$  и  $y$ . Нижними индексами  $i=l, g$  отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

В данной работе исследовалось влияние начального импульса на величину максимального давления в случаи пузырьковых кластеров с разными характеристиками. У пузырьковой завесы варьировались радиус  $R_c$



## Изгиб однослойного графена под действием среднего давления

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работах [1], [2] рассматривается поперечное обтекание круговой цилиндрической оболочки плоским безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости с нелинейными граничными условиями. В [2] учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения. Анализируется влияние действия среднего давления. В [3] изучено влияние среднего избыточного давления на цилиндрический изгиб пластины.

Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена под действием среднего давления (рис. 1). Ставится задача определения формы, усилий и моментов в однослойном графене. Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена, для элемента которого запишем уравнения равновесия [4]

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} - \frac{Ph}{R} = 0, \quad (2)$$

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad (3)$$

где  $P$  - давление в окружающей среде. Изгибающий момент определяется

$$M = D \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right), \quad (4)$$

где  $R_N$  - радиус кривизны поперечного сечения однослойного графена в недеформированном начальном состоянии.

Из (1) с учетом (3) и (4) следует

$$T = T_0 - \frac{D}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right). \quad (5)$$

Уравнение (2) с учетом (3), (5) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} - \frac{Ph}{DR} - \left( \frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right) \frac{1}{R} = 0. \quad (6)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad x = \frac{x^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{a}, \quad t = \frac{Ta^2}{D}, \quad q = \frac{Qa^2}{D}, \quad m = \frac{Ma}{D}, \\ \alpha = a^2 \left( \frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right), \quad \beta = \frac{Pha^2}{D},$$

уравнение (6) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} - (\alpha + \beta)u = 0, \quad (7)$$

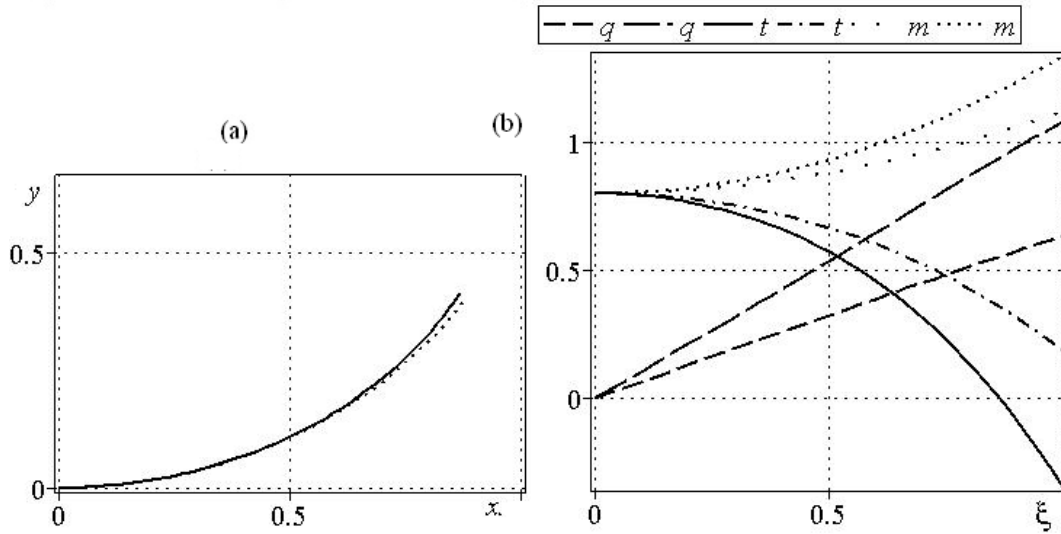


Рис. 1: Для параметров:  $m_0 = 0.8$ ,  $t_0 = 0.8$ . (a) Форма поперечного сечения графена для параметра  $\beta=0.5$  и 0 (сплошная и пунктирные линии соответственно). (b) Зависимости безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене от безразмерной дуговой абсциссы  $\xi$  для параметра  $\beta=0.5$  (сплошная, пунктирная, длинная штриховая линии соответственно) и  $\beta=0$  (штрих - пунктирная, спецпунктирная, штриховая линии соответственно).

Решение уравнения (7) с условиями при  $\xi = 0$ :  $u = m_0$ ,  $du/d\xi = 0$  выражается через эллиптический синус  $\text{sn}(\xi)$  и обратный эллиптический синус  $\text{arcsn}(\xi)$

$$u(\xi) = \frac{1}{m_0} \times \left\{ \sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2} \text{sn} \left[ \frac{1}{2} I m_0 \xi + \text{arcsn} \left( \frac{m_0}{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}, \frac{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}{m_0} \right), \frac{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}{m_0} \right] \right\}. \quad (8)$$

Производная  $du(\xi)/d\xi$  определяется через эллиптический косинус  $\text{cn}(\xi)$  и дельта амплитуду  $\text{dn}(\xi)$

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} I \sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2} \times \text{cn} \left[ \frac{1}{2} I m_0 \xi + \text{arcsn} \left( \frac{m_0}{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}, \frac{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}{m_0} \right), \frac{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}{m_0} \right] \times \text{dn} \left[ \frac{1}{2} I m_0 \xi + \text{arcsn} \left( \frac{m_0}{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}, \frac{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}{m_0} \right), \frac{\sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}}{m_0} \right]. \quad (9)$$

На рис. 1, а приводится форма поперечного сечения графена. Видно, что среднее давление уменьшает кривизну линии поперечного сечения графена. Распределение безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене приводится на рис. 1, б. Видно, что усилия натяжения меньше в точках удаленных от оси  $x$ .

Получены нелинейные уравнения изгиба однослойного графена. В рассматриваемом примере среднее давление приводит к увеличению усилий и моментов.

Если в точке  $O$  усилие натяжения равно нулю  $T_0 = 0$ , кривизна поперечного сечения  $k = 0$  также равна нулю, изгибающий момент  $m_0 = 0$ , поэтому

$$T = -\frac{D}{2} \frac{1}{R^2}. \quad (10)$$

Уравнение (2) с учетом (3) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} = 0. \quad (11)$$

Переходя к безразмерным переменным, запишем уравнение (11)

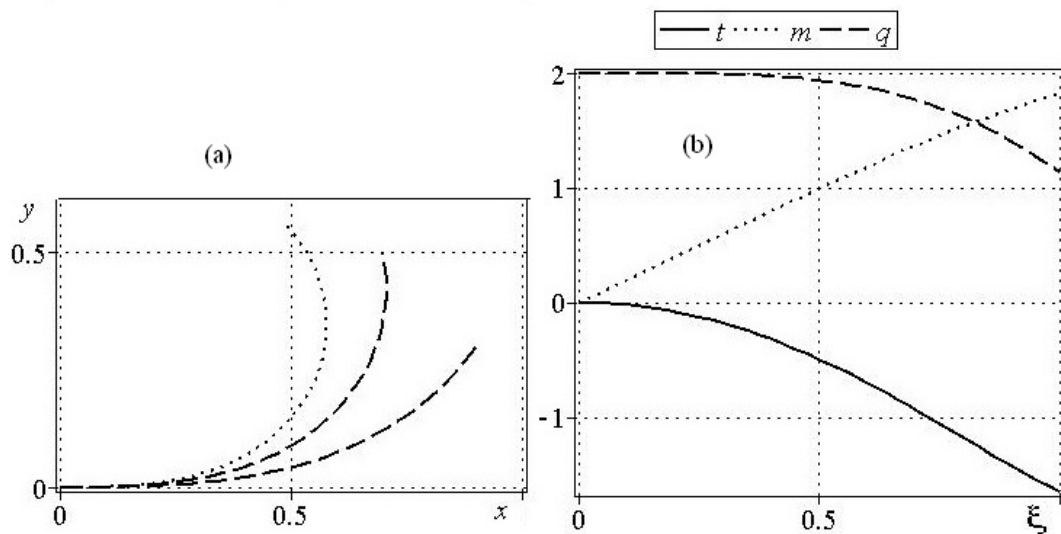


Рис. 2: Для параметров:  $m_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ . (а) Формы поперечного сечения графена при различных  $q_0 = 6; 4; 2$  (пунктирная, штриховая, сплошная линии, соответственно). (б) Зависимости безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$  в графене от безразмерной дуговой абсциссы  $\xi$   $q_0 = 2$ .

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} = 0, \quad (12)$$

Решение уравнения (12) с условиями при  $\xi = 0$ :  $u = 0$ ,  $du/d\xi = q_0$  выражается через эллиптический синус  $u(\xi) = \sqrt{2}\sqrt{q_0} \operatorname{sn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right)$ .

Безразмерные усилия и момент определяются

$$t = -\frac{u^2}{2}, \quad q = \frac{du}{d\xi} = q_0 \operatorname{cn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right) \cdot \operatorname{dn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right), \quad m = u,$$

где перерезывающая сила определяется через эллиптические косинус  $\operatorname{cn}$  и дельта амплитуду  $\operatorname{dn}$ . На рис. 2, а приводятся формы поперечного сечения пластинок при различных  $q_0$ . С увеличением  $q_0$  происходит увеличение прогибов однослойного графена. Распределение безразмерного усилия  $t$ , изгибающего момента  $m$ , перерезывающей силы  $q$ , в графене для  $q_0 = 2$  приводится на рис. 2, б. Видно, что усилия натяжения меньше в точках удаленных от оси  $x$ .

Работа проведена в порядке выполнения государственного задания (№0246-2023-0015).

Автор благодарит член – корреспондента РАН М.А. Ильгамов за постановку и обсуждение задачи.

## Список литературы

- [1] Хакимов А.Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. № 6. 1975. С. 147-151. DOI: 10.1007/BF01023279
- [2] Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2020. №2. С. 12-18. DOI: 10.31857/S0568528120020073
- [3] Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402-405. DOI: 10.7868/S086956521728009X
- [4] Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. Издательство Московского университета. 1969. 695 с.

## Визуализация затопленных нефтегазовых струй в пакетах 3D моделирования

Харисов Э.И.

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак

**Аннотация:** Исследование многофазных затопленных нефтегазовых струй может значительно снизить урон экологии водных ресурсов РФ. Визуализация математической модели также может способствовать более глубокому пониманию явления с различных аспектов, таких как температура, концентрация и вовлечение воды в нефтегазовый поток. Исследование показало, что трехмерная визуализация позволяет получить дополнительные возможности, по сравнению с обычными графиками. Дальнейшее исследование оптических свойств затопленной струи поможет сделать визуализацию не только в схематичном виде, но и в фотореалистичном, что поможет обнаружению утечек при плановых подводных осмотрах.

**Ключевые слова:** многофазные затопленные нефтегазовые струи, визуализация, Blender.

**Введение.** Техногенные катастрофы, связанные с нефтедобычей, приводят к ухудшению экологии в местонахождении производства, но особенно остро данная проблема стоит в месторождениях на морском шельфе. Авария при добыче может привести к большому выбросу смеси природного газа и нефти в толщу воды, которая стремится к поверхности, образуя турбулентный поток. Параллельно этому процессу может происходить гидратообразование – отверждение поверхности газового пузырька из-за низкой окружающей температуры и высокого давления. Такие потоки принято называть многофазной затопленной струей, численный расчет которых может значительно сократить ущерб окружающей среде. В исследованиях [1-4] была получена математическая модель, на основе которой была поставлена задача разработать программу визуализации данных в пакете 3D моделирования Blender. Полученные результаты можно использовать в качестве начальных значений для моделирования накопления углеводородов в специальных устройствах для ликвидации последствий аварий[5-7].

**Методы исследования.** В статье использовался вычислительный эксперимент как основной источник данных для визуализации. После создания трехмерной модели, происходило сравнение с графиками для подтверждения точности выполнения программ.

**Результаты исследований, их обсуждение.**

Математическая модель расчета траектории движения нефтегазовой струи основана на интегральном Лагранжевом методе контрольных объемов [2,4]. Модель учитывает такие физические факторы как температура, давление, скорость течения, расходы нефти и газа, возможность гидратообразования. В связи с тем, что модель может предоставить только числовые расчетные данные, необходимо создать визуализацию, которая происходит через построение графиков вдоль оси перпендикуляра к поверхности морского дна и выглядит как на рисунке 1.

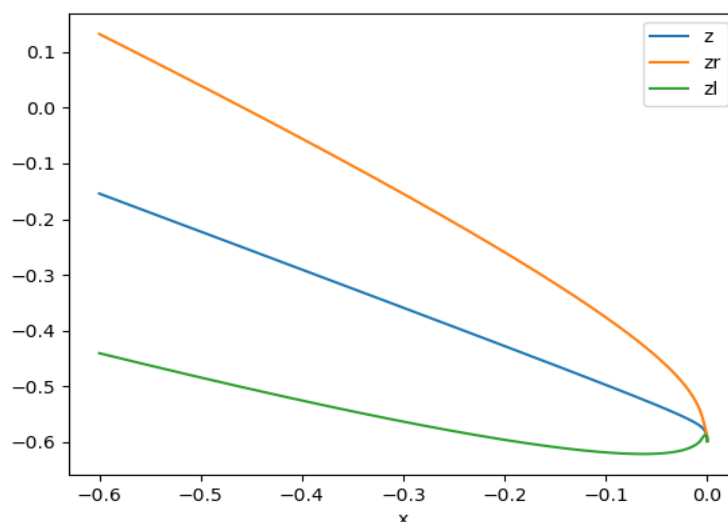


Рисунок 1.График, построенный для расчетных данных (z - центр струи, zl и zr - левые и правые границы соответственно)



Для решения проблемы визуализации данных предлагается программа, которая работает с полученными расчетными данными на языке программирования Python. Возможность использования библиотек и других паттернов проектирования, свойственных пакету трехмерного моделирования Blender, значительно упрощает разработку и обновление проекта. Программа реализует следующий функционал с помощью пользовательского интерфейса:

- загрузка данных в заданном формате;
- выбор типа визуализации (граничный, в котором учитываются только значения на границах многофазной затопленной струи, и по объему, в котором происходит визуализация пузырьков газа или нефти внутри объема струи);
- выбор типа данных для цветовой информации.

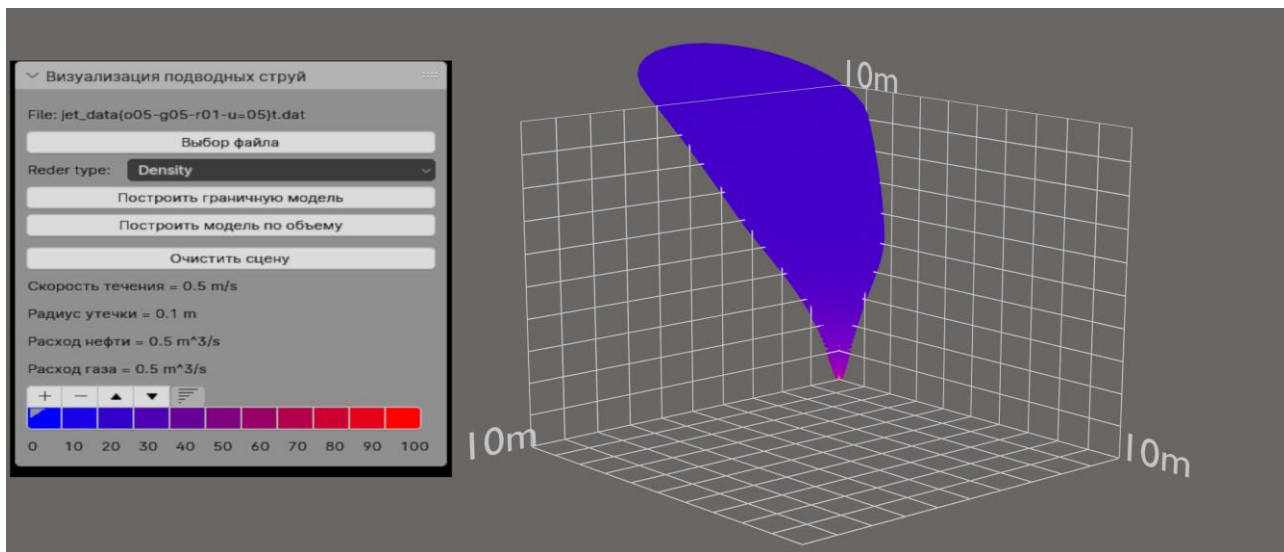


Рисунок 2. Интерфейс пользователя (слева) и пример работы программы (справа).

Для интерпретации температуры происходит окрашивание визуализированных данных по шкале от синего до красного цвета в соответствии с температурой в конкретной точке струи. Для интерпретации концентрации используется цветовая шкала от черного до зеленого цвета в соответствии с концентрацией нефти, газа, гидрата или воды.

Подтверждение точности построенной трехмерной модели происходило путем сравнения с графиками, полученными на основе эксперимента [8,9].

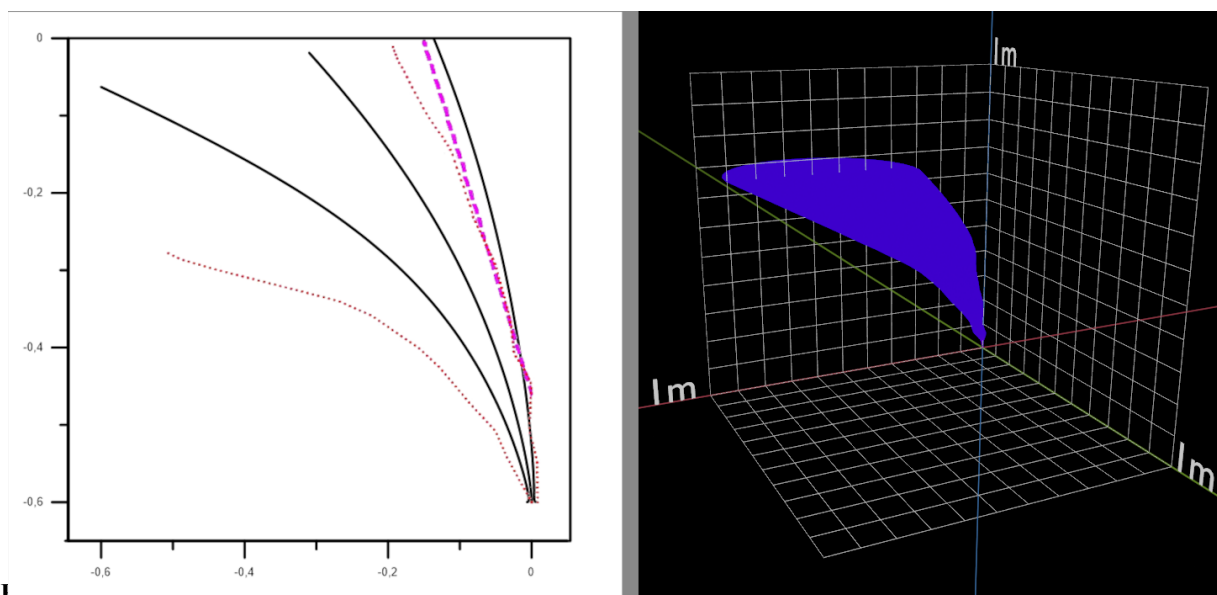


Рисунок 1. Сравнение экспериментальной информации с трехмерной визуализацией. Цветовая шкала показывает различные свойства затопленной нефтегазовой струи по отношению ко внешней среде.

Схематическое изображение границ затопленной струи можно рассматривать как трехмерный аналог графиков, обычно получаемых на основе экспериментальных данных. Дальнейшая работа над программой будет сфокусирована на визуализации гидратообразования, а также на фотореалистичном изображении потока нефти и газа в толще воды.

#### Библиографический список

- [1] Кильдибаева С.Р., Гималтдинов И.К. Математическая модель затопленной струи с учетом влияния 3d течения окружающей воды // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2019. – Т. 12, № 1. – С. 137-143.
- [2] Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования // Теплофизика и аэромеханика. – 2018. – Т. 25, № 1. – С. 79-88.
- [3] Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р., Ахмадеева Р.З. Расчет теплофизических и кинетических параметров затопленной струи // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 11-7. – С. 1323-1327.
- [4] Кильдибаева С.Р., Гималтдинов И.К. Эволюция нефтегазовой струи, истекающей через разрыв магистрального нефтепровода (газопровода), расположенного на дне водоема // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2020. – Т. 331, № 5. – С. 193-200.
- [5] Уразов Р.Р., Чиглинцев И.А., Насыров А.А. Образование склеротических отложений гидрата в трубе для отбора газа из купола-сепаратора // Инженерно-физический журнал. – 2017. – Т. 90, № 5. – С. 1223-1231.
- [6] Насыров А.А. Моделирование процесса наполнения "купола-сепаратора", предназначенного для ликвидации нефтегазовых выбросов в зоне морского дна // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2015. – № 2-1 (62). – С. 41-45.
- [7] Гималтдинов И.К., Кильдибаева С.Р. К теории накопления углеводородов в куполе, применяемом для ликвидации техногенного разлива на дне океана // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, № 1. – С. 260-265.
- [8] Chen F., Yapa D. Modeling gas separation from a bent deepwater oil and gas jet/plume // J. of Marine Systems. – 2004. – №45. – С. 189 – 203.
- [9] Socolofsky S.A., Adams E.E. Multi-phase plumes in uniform and stratified crossflow // J. Hydraul.. - 2002. - №40. - С. 661-672.

# Численное исследование взаимодействия ударной волны с засыпкой частиц с использованием модели Баера-Нунциато

П.А. Чупров<sup>а</sup>, П.С. Уткин<sup>б</sup>

а) Институт автоматизации проектирования РАН, Вторая Брестская 19/18, Москва 123056, Россия

б) Harbin Institute of Technology, Xida 92, Nangang, Harbin, Heilongjiang 150001, China

Пылевой взрыв – одна из самых опасных ситуаций, которые могут возникнуть при работе с химически активными порошками. Важную роль в динамике пылевого взрыва имеет распространяющаяся перед волной горения ударная волна (УВ). При взаимодействии УВ со слоем частиц происходит два эффекта: диспергирование частиц над поверхностью слоя, которое напрямую влияет на параметры волны горения, и деформация, промятие слоя как целого. Первое явление является хорошо изученным как на практике, так и численно, в то же время волновые процессы в самом слое получили недостаточно внимания и не были столь тщательно исследованы, хотя изменение формы поверхности слоя вследствие сложной волновой динамики в нём может оказывать влияние на параметры волны горения.

Численное исследование задачи проводилось при помощи модели Баера-Нунциато, зарекомендовавшей себя лучшим образом при решении самых разнообразных задач многофазных сред, в том числе и неравновесных. Модель обладает широчайшей областью гиперболичности, что положительно сказывается на качестве численного решения и общей робастности алгоритма. Авторский вариант метода HLLC был использован для численного решения этой системы, и показал возможность получения результатов, более точно соотносящихся с данными натуральных экспериментов, нежели результаты, полученные другими авторами. Также, в модели были реализованы механизмы учёта компактирования и релаксации давления для более точного моделирования механики процесса.

В результате численных экспериментов впервые было предложено объяснение зависимости геометрических характеристик деформированного слоя, а именно углов промятия  $\varphi$  и компактирования  $\psi$  (см Рис 1) в слое от числа Маха проходящей волны. В экспериментах было обнаружено, что с увеличением числа  $M$  слой проминается всё сильнее, то есть угол  $\varphi$  увеличивается, а в то же время волна компактирования проникает в слой на всё меньшую толщину, то есть угол  $\psi$  уменьшается. Численные эксперименты свидетельствуют о том, что существенное влияние на формирование волновой структуры в слое имеет так называемая «пробка» - область уплотнённых частиц перед волной сжатия. Эта «пробка» препятствует проникновению сжатого газа внутрь слоя частиц, ограничивая тем самым зону уплотнения. Доля частиц в «пробке» увеличивается с увеличением числа  $M$ , тем самым увеличивая её останавливающий эффект и уменьшая угол  $\psi$ .

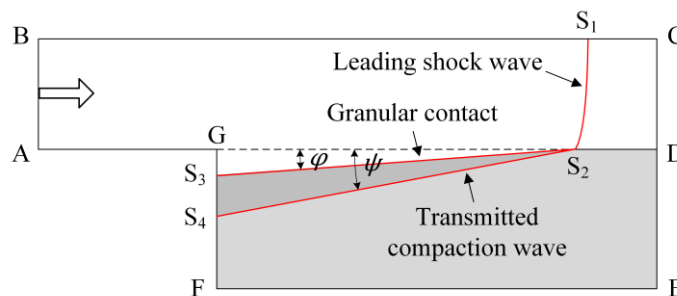


Рисунок 1 Схематичное изображение волновой картины

## Литература

1. P. Utkin, P. Chuprov. Numerical simulation of shock wave propagation over a dense particle layer using the Baer- Nunziato model. *Physics of Fluids*. V. 35, № 11. P. 113313. 2023.
2. Chuprov, P.A., Fortova, S.V. & Utkin, P.S. Numerical Investigation of the Interaction between a Shock Wave and Aqueous Foam with Compaction. *J. Appl. Ind. Math.* 17, 272–280 (2023).

## Влияние присоединенной массы на пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами

Шакирьянов М.М., Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Трубопроводы широко применяются в оборудовании энергетики, нефтехимии, в аэрокосмической технике и во многих других машинах и аппаратах. Основная функция трубопроводов – транспортировка жидких и газообразных сплошных сред. Особенность их эксплуатации состоит в том, что они испытывают кроме силы веса динамические растягивающую, сжимающую и изгибающую нагрузки, давление сред на обе поверхности.

В настоящей работе изучено влияние присоединенной массы газожидкостной среды кольцевой структурной формы течения на пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами.

Постановка задачи следующая. Труба прикреплена к опорам с помощью идеальных сферических шарниров. Расстояние между концевыми сечениями трубопровода – неизменное. Учитываются взаимодействия внутреннего давления и кривизны осевой линии, продольной и поперечной деформаций трубы. Предполагается, что транспортируемая среда в поперечном сечении имеет кольцевую форму течения: газовая фаза кругового сечения движется внутри жидкой круговой цилиндрической фазы, контактирующей с внутренней поверхностью трубопровода. При этом скоростной напор, по сравнению с постоянным внутренним давлением в трубе, считается малым. Также пренебрегается действиями сил трения потока и продольных сил инерции трубы. Кроме того, малыми предполагаются деформации, которые могут вывести ось трубы из плоскости изгиба. В начальном положении трубопровод, изогнутый силами гравитации и внутреннего давления, находится в покое. В определенный момент времени опоры начинают совершать горизонтальные поступательные вибрационные движения. Далее с этого момента времени происходят установившиеся пространственные колебания трубопровода. С ускорением движения из-за течения транспортируемой жидкости в поперечном направлении происходит изменение давления на внутренней поверхности трубы, обуславливающее эффект ее присоединенной массы.

Как и в работе [1], для исследования этих пространственных колебаний с учетом влияния присоединенной массы используется изгибно-вращательная модель. Модель рассматривает пространственные колебания трубы как совокупность относительных изгибных перемещений в одной плоскости, переносных угловых поворотов плоскости изгиба и поступательных движений опор. Далее с принятием аппроксимирующей функции прогиба и применением метода Бубнова-Галеркина решение задачи сводится к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Выражение присоединенной массы транспортируемой среды определяется по [2, 3]. Система дифференциальных уравнений, описывающая колебания трубы, решается численно методом Рунге-Кутты. Получено аналитическое решение линеаризованных уравнений движения трубы..

Числовые расчеты проводились для конкретных значений стальной, титановой и композитной труб. Из результатов вычислений можно отметить следующие выводы.

Построены графические зависимости отношений собственных частот изгибных и угловых колебаний, полученные с учетом и без учета перетекания частиц жидкости в поперечных сечениях труб от объемного содержания газовой и относительной плотности жидкой фазы транспортируемой среды. С увеличением плотности жидкой фазы транспортируемой среды отношения частот увеличиваются, а с увеличением объемного содержания газовой фазы – сначала увеличиваются, достигают максимума и далее уменьшаются до единицы.

Показано, что при одном и том же внутреннем давлении собственные частоты изгибных колебаний с учетом перетекания частиц жидкой фазы в поперечных сечениях трубы выше, чем собственные частоты без учета этого эффекта. Для стальной трубы они отличаются приблизительно на 4-5%, для титановой – 6-7%, для трубы из стекловолокна – 10-12%. При этом собственные частоты угловых колебаний труб практически остаются неизменными.

Установлено, что с увеличением внутреннего давления происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стальной, титановой и композитной труб. В этом случае собственные частоты угловых колебаний труб увеличиваются.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00106, <https://rscf.ru/project/24-21-00106/>

## Список литературы

- [1] Утяшев И.М., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами // Изв. РАН. МТТ. 2023. № 4. С. 38-52.
- [2] Шакирьянов М.М, Юлмухаметов А.А. Внешняя и внутренняя присоединенные массы трубопровода // Известия Уфимского научного центра РАН. 2020. № 3. С. 12-16.
- [3] Шакирьянов М.М, Юлмухаметов А.А. Определение внешней и внутренней присоединенной массы трубопровода // Многофазные системы. 2020. № 1-2. С. 123.

## Численный расчет устойчивости массива с жидкофазными включениями

Шиповский И.Е., Трофимов В.А.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем комплексного освоения недр им. академика Н.В. Мельникова Российской академии наук, Москва

Решение задач механики горной инженерии при проведении работ в дисперсных геологических средах в случае присутствия в массивах породы включений жидкой или пульпообразной фазы является важным направлением в математическом моделировании процессов технологии добычи и транспортировки сырья при разработке полезных ископаемых. Развитие выработочного пространства и размещение тяжелого оборудования или иных инженерных сооружений на дневной поверхности может привести к масштабным деформациям вплоть до катастрофического обрушения, связанного как со сползанием откосов, так и с провалом над выработкой [1].

Напряженно-деформированное состояние массива определяется численно компьютерным методом сглаженных частиц (SPH) [1-3].

В численном анализе использовалась двумерная модель, включающая области с различными прочностными и фазовыми характеристиками. Рассчитанные результаты показывают структурные сдвиги и пиковые ускорения грунта при техногенных воздействиях. Кроме того, динамический отклик массива был дополнительно исследован путем анализа сейсмической энергии Гильберта.

Отметим, что при численном моделировании масштабного обрушения на начальном этапе формируется типичная картина сдвига в виде крупных блоков породы, характерных для инженерных методов расчета устойчивости, в которых рассматривается силовое равновесие отдельных блоков, задаваемых, однако априори. При дальнейшем деформировании происходит хаотичное разрушение блоков на мелкие фрагменты, осыпавшиеся по вновь формирующимся разломам.

Использованный метод позволяет установить взаимосвязь между действующими на дневной поверхности нагрузками и деформационно-прочностными свойствами пород массива в его критическом состоянии для конкретного строения массива и имеющимися в его толще включениями и пустотами.

Деформационные процессы описываются системой уравнений механики сплошной среды, которая включает уравнения неразрывности, движения и энергии [1, 2, 3].

Замыкают систему уравнений определяющие соотношения, которые конкретизируют поведение среды, задавая связи между тензорами напряжений и деформаций. Для описания процессов деформации горных пород за пределом упругости используются различные модификации модели пластичности. В частности, соотношения модифицированной модели Друккера-Прагера. Пластической деформацией считается любая неупругая деформация независимо от ее природы. Напряженное состояние среды определяется согласно закону Гука.

Замкнутая система квазилинейных дифференциальных уравнений модели в частных производных с заданными начальными и граничными условиями полностью определяют краевую задачу, которая решается численно с использованием метода сглаженных частиц [1]. Выбор данного метода определяется его консервативностью и хорошей устойчивостью при решении задач геомеханики, и тем, что включает в себя все необходимые алгоритмы учета разрушения при нагружении.

Использованный метод позволяет установить взаимосвязь между нагрузкой на поверхность отвала и деформационно-прочностными свойствами пород в его критическом состоянии для конкретного строения отвала и приложенной нагрузки. Тем самым определяются допустимые границы функционирования технологической схемы работ на отвале. Рисунок 1 показывает расчет изменения во времени состояния массива отвала хвостового и шламохранилища с пульпообразным включением при расположении на поверхности тяжелого оборудования или инженерных сооружений

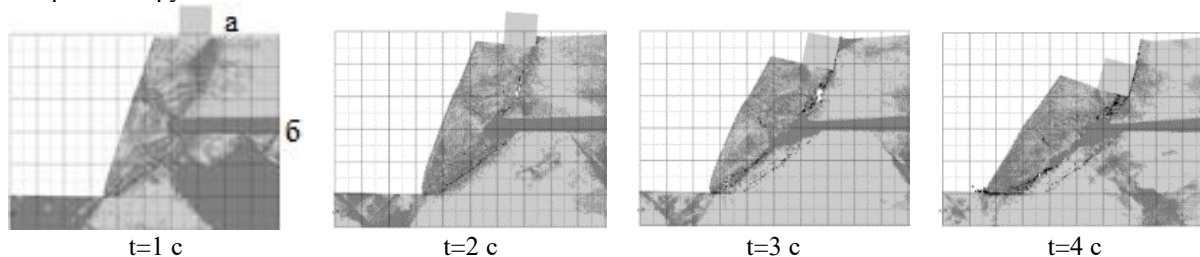


Рис. 1. Расчет развитие разрушения откоса отвала  
 а – технологическое оборудование массой; б – область, занятая пульпообразной жидкой массой.

Проведенные расчеты позволяют уверенно констатировать тот факт, что наличие пульпообразных включений в массиве отвала существенно снижает его несущую способность вне зависимости от расположения включения, и дают возможность количественно оценить ослабление массива.

Рассмотрение процесса обрушения карстообразной полости в толще дна водоема позволяет оценить параметры волнообразования

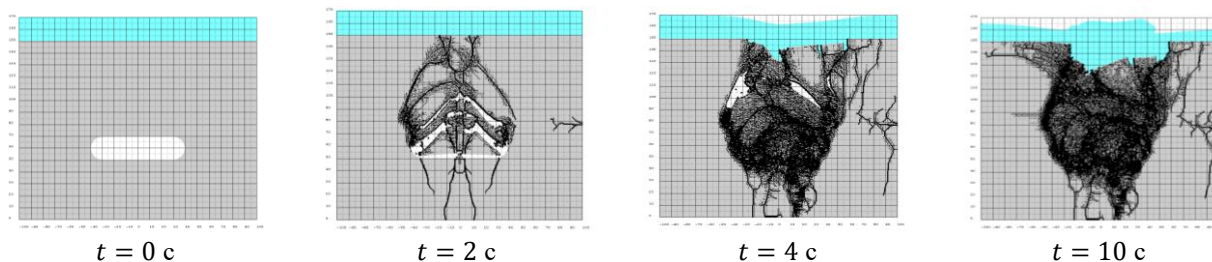


Рис. 2. Рассчитанные картины обрушения свода карстовой пещеры под дном водоема с волнообразованием на водной поверхности.

На рис. 2 показаны в последовательные моменты времени рассчитанные изменения в условиях силы тяжести состояния свода карстовой пещеры. Здесь хорошо видно, что блоковое разрушение породы массива приводит к обрушению кровли и схлопыванию полости пещеры. Эти процессы вызывают существенное волнообразование на поверхности водоема. Высота волны достигает значений порядка 10 м.

Таким образом, можно сделать вывод, что используемый метод сглаженных частиц позволяет выполнять прямое моделирование развития деформаций и разрушений горной массы с жидкими включениями и дают возможность количественно оценить ослабление массива и характеристики волнообразования.

## Список литературы

- [1] Захаров В.Н., Малинникова О.Н., Трофимов В.А., Шиповский И.Е. Моделирование влияния пульпообразных масс в толще отвала на динамику развития оползневых зон // Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. Т. 1 2020. С. 359-378
- [2] Trofimov V.A., Shipovskii I.E., Malinnikova O.N, Wen-Jie Xu, Numerical Ap-proach to Computer Simulation of Landslid Events, // AIP Conference Proceedings of the International Conference on Advanced Materials with Hierarchical Structure for New Technologies and Reliable Structures, 2019, Tomsk, Russia, p. 020329-1 - 020329-8.
- [3] Малинникова О.Н., Трофимов В.А., Шиповский И.Е. Моделирование влияния мультифазных включений в толще отвала на устойчивость откосов // Материалы VII Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения». Уфа, 2020. С.63.

# Мезоскопическое моделирование многофазных многокомпонентных течений

Юношева Е.В.

Новосибирский государственный университет

Исследование течения, которое возникает при подаче в породу жидкости или газа, важно для повышения процессов нефтеотдачи. Один из способов изучения таких течений – проведение лабораторных экспериментов над образцом керна. Однако высокая стоимость и длительность таких экспериментов ограничивают их практичность, требуя модернизации. Поэтому создание цифрового аналога выглядит экономичным решением, с помощью которого можно будет быстрее получать результаты и проводить большее количество экспериментов над образцом керна. Так как многофазные течения с обменом компонентами исследованы достаточно слабо, разрабатываемая численная модель позволит лучше понять их свойства и закономерности.

Работа посвящена исследованию двухфазного течения в пористой среде. Течение моделировалось с помощью метода решеточного уравнения Больцмана. Выбор данного метода обусловлен простотой его распараллеливания (в силу того, что метод явный), возможностью задания сколько угодно сложной геометрии канала, отсутствием необходимости отслеживать межфазную границу.

Использовались двумерная модель D2Q9 и трехмерная модель D3Q19. Для описания разделения фаз многокомпонентного флюида применялся метод псевдопотенциала с общим уравнением состояния Пенга-Робинсона [1]. Рассматриваемая система представляла собой смесь углеводородов. Реализовано двухфазное трехкомпонентное течение в 3D. При моделировании учитывалось взаимодействие флюида с материалом пористого скелета и задавались разные значения коэффициента смачивания на стенках и на материале скелета.

Для получения более корректных значений вязкости мы перешли в модель с многими временами релаксации [3] и реализовали вязкость, зависящую от компонентного состава смеси [2]. Метод с многими временами релаксации более устойчив, потому что поддерживает больший диапазон задания времен релаксации. А от времени релаксации зависит вязкость. Следовательно, получаем больший диапазон задания вязкости.

Так же был реализован алгоритм редуцирования многокомпонентной системы до нескольких псевдокомпонент [4]. Это нужно для того, чтобы ускорить процесс вычислений.

## Список литературы

- [1] Cheng Peng, Luis F. Ayala, Orlando M. Ayala. A thermodynamically consistent pseudo-potential lattice Boltzmann model for multi-component, multiphase, partially miscible mixtures // Journal of Computational Physics. – 2021. – V. 429
- [2] d'Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P., Luo, L.-S. Multi-time relaxation lattice Boltzmann model in three dimensions (2001). Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 360, 437–451
- [3] Lohrenz, J., Bray, B. G., Clark, C. R. Calculating Viscosities of Reservoir Fluids From Their Compositions. Journal of Petroleum Technology, (1964), 16(10), 1171–1176. doi:10.2118/915-pa
- [4] Попов С.Б. Композиционное профилирование по глубине в газо-нефтяных месторождениях // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 61. 30 с. doi:10.20948/prepr-2017-61



## Математическое моделирование задачи структурных флюидов фильтрации в трехпластовых пористых средах

Каюмов Ш., Зиядуллаева Ш.С, Бекчанов Ш.Э., Хусанов Э.

Ташкентский государственный технический университет

**Аннотация.** Статья рассматривается математической модель задачи нелинейной фильтрации в трехпластовых связанных системах.

Разработан вычислительный алгоритм решения и апробирован на тестовых данных. Предполагается что данную модель можно использовать для конкретных месторождениях флюидов.

Изучения фильтрации в многослойных пористых средах, имеет определенную историю, и они в основном посвящены к процессам движение ньютоновских флюидов для однофазных, и многофазных случаях в одно-пластовых и многопластовых средах. Естественная пористая среда, представляются как многослойные структуры и моделировать их можно различными способами. Когда строятся математические модели этих сред, сначала изучает на наличие гидродинамической связи между слоями или если их нет то их считает несвязанными (изолированными) пластами. Существует различные методы моделирование, предполагающие проницаемости и пористости этих слоев по отношению к другим слоям, резко различными и как следствие, движения флюидов в них происходит по различными направлениями [1,2]. В данной работе рассмотрен многослойный (в частности трехслойный) пласт состоящей из хорошо проницаемого (область  $D_2$ ) соседствующей (снизу и сверху) плохо проницаемыми пластами (область  $D_1$  и  $D_3$ ). При этом области  $D_2$  содержит в себе структурированный или аномально структурированный флюид. При фильтрации этих флюидов в пласте образуется три зоны: зона ползучести, зона аномальности и зоны сильных подвижностей с подвижными границами между ними. Верхний ( $D_1$ ) и нижний ( $D_3$ ) область заполнено флюидами имеющие нелинейные вязкопластические характеристики, основанной на криволинейной аппроксимации функциональной связи между градиентом давления и скоростью фильтрации [3,4].

Математическая модель этой физической задачи следующие: необходимо найти непрерывные функции  $U_i(x, z, t)$  ( $i=1,3$ ) и  $U_2(x, t)$ , а также границы подвижных зон  $R_1(x, t)$  и  $R_2(x, t)$  а также границы возмущений  $G_1(z, t)$  и  $G_3(z, t)$  из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_e (|\nabla U_2|, \beta_e) \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) + A_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - A_2 \frac{\partial U_3}{\partial z} \Big|_{z=h_2} = \\ = M_e \frac{\partial U_2}{\partial z}, \quad x \in D_2, \quad z \in (h_1; h_2), \quad t > 0, \quad e = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A_{2\gamma-1} (|\nabla U_{2\gamma-1}|, \beta_\tau) \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z} \right) = M_{2\gamma-1} \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial t}, \quad z \in (D_1; D_3); \quad \gamma = \overline{1,2}, \quad r = \overline{1,2} \quad t > 0. \quad (2)$$

с начальными

$$\begin{aligned} U_2(x, 0) = U_0(x), \quad U_{2\gamma-1}(x, z, 0) = U_0(x, z), \\ R_1(x, 0) = R_2(x, 0) = G_1(z, 0) = G_3(z, 0) = C_0, \quad (\gamma = \overline{1,2}) \end{aligned} \quad (3)$$

и граничными

$$a_1 \Phi_1 (|\nabla U_2|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0} + b_1 U_2(x, t) \Big|_{x=x_0} = \psi_0(t), \quad a_2 \Phi_3 (|\nabla U_2|, \beta_3) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \psi_1(t), \quad (4)$$

$$a_0 A_1 (|\nabla U_1|, \beta_1) \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad a_3 A_3 (|\nabla U_3|, \beta_3) \frac{\partial U_3}{\partial z} \Big|_{z=H_3} = 0 \quad (5)$$

а также условиями на границах различных зоны, а также на возмущенных границах:

$$\Phi_1 (|\nabla U_2|, \beta_1) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_1-0} = \Phi_2 (|\nabla U_2|, \beta_2) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_1+0}, \quad U_2(x, t) \Big|_{x=R_1-0} = U_2(x, t) \Big|_{x=R_1+0}, \quad (6)$$

$$\Phi_2(|\nabla U_2|, \beta_2) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_2-0} = \Phi_3(|\nabla U_2|, \beta_3) \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=R_2+0}, \quad U_2(x, t) \Big|_{x=R_2-0} = U_2(x, t) \Big|_{x=R_2+0}, \quad (7)$$

$$A_{2\gamma-1}(|\nabla U_{2\gamma-1}|, \beta_{2\gamma-1}) \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z} \Big|_{z=G_{2\gamma-1}-0} = A_{2\gamma-1}(|\nabla U_{2\gamma-1}|, \beta_{2\gamma-1}) \frac{\partial U_{2\gamma-1}}{\partial z} \Big|_{z=G_{2\gamma-1}+0} \quad (8)$$

$$U_{2\gamma-1}(z, t) \Big|_{z=G_{2\gamma-1}-0} = U_{2\gamma-1}(z, t) \Big|_{z=G_{2\gamma-1}+0} \quad (9)$$

В задаче (1) - (9) параметры те же как в [1,5,6] и функции имеет вид:

$$\Phi_e(|\nabla U_2|, \beta_e) = \{k_2 / \mu_2 (1 - \beta_2 \gamma_0 / |\nabla U_2|), \quad x \in (x_0; R_1 - 0);$$

$$(k_2 \cdot |\nabla U_2|) / (\mu_2 (\beta_2 + |\nabla U_2|)), \quad x \in (R_1 + 0; R_2 - 0); \quad k_3 / \mu_3, \quad x \in (R_2 + 0; L)\}, \quad e = \overline{1, 2}$$

$$A_{2\gamma-1}(|\nabla U_{2\gamma-1}|, \beta_{2\gamma-1}) = \{K_{2\gamma-1} / \mu_{2\gamma-1} (1 - \beta_{2\gamma-1} \bar{\gamma}_0 / |\nabla U_{2\gamma-1}|); \quad z \in (h_e; G_e - 0);$$

$$K_{2\gamma-1} / \mu_{2\gamma-1} |\nabla U_{2\gamma-1}| / (\beta_{2\gamma-1} + |\nabla U_{2\gamma-1}|); \quad z \in (G_e + 0; H_e)\}, \quad e = \overline{1, 2}$$

$$a_1 = \{1; 0\}, \quad b_1 = \{0; 1\}. \quad |a_1| + |b_1| \neq 0, \quad a_2, a_3 \text{ константы.}$$

Задача (1) – (9) нелинейно. Для построения вычислительных алгоритмов решения задачи (1) – (9) проводится сначала линеаризация по нелинейным коэффициентом дифференциальных уравнений.

Применяя метод прямых по переменному  $t(t_k = k\tau)$  получим систему дифференциальных уравнений для фиксированных значений временного слоя  $t_k$ .

Далее вводится поток и задаче примет потоковой краевой задачей. Проводится интегрировании этой системы по переменному  $x$  и  $z$  на интервалах  $[x_i; x_{i+1}], [z_i; z_{i+1}]$ .

Полученная разностно – сеточная задача решается потоковым вариантом сеточной прогонки [6-9].

Ввиду того что в начале при  $t_1 = \tau$ , величины перетока из  $D_1$  и  $D_3$  в область  $D_2$  неизвестно то принимаем его как нулевыми и далее решается задача в области  $D_2$ . После перераспределение давления среднего пласта решается задачи в  $D_1$  и  $D_3$ . Дальнейшем при каждом  $t_k$  величины перетоков уточняется. Алгоритм задачи апробирован на тестовых данных. Ниже проводится частичный фрагмент численного решения.

В таблице приведена давления в области  $D_2$  и величины перетока из  $D_1$  в  $D_2$  при различных законах фильтрации.

Расчеты проведена для данных:

$$\Delta x = 0,02; \Delta t = 0,3; k_2 = 1, k_1 = k_3 = 0,001, h = 1, u_0 = 1, x_0 = 0, q_0 = 0,0868, \beta = 10^{-3}.$$

Таблица

t \ закон	Дарси	Аномальный	Гипербола	Хеер-Хефнера
0,01	0,9812	0,9782	0,9794	0,9789
0,1	0,9803	0,9144	0,9195	0,9211
0,2	0,8916	0,8697	0,8769	0,8802
0,5	0,7806	0,6368	0,7606	0,7582
0,7	0,7212	0,5964	0,7203	0,5963

t	Переток жидкости			
0,01	0,1554	0,1031	0,1074	0,1145
0,1	0,2584	0,2513	0,2572	0,2595
0,2	0,2763	0,2676	0,2725	0,2748
0,5	0,2765	0,2692	0,2748	0,2775
0,7	0,2765	0,2692	0,2749	0,2775

Анализ данного фиксированного момента процесса фильтрации показывает применимости математические модели к определению параметров разработки трехслойного пласта.

Результаты позволяют сделать вывод что предложенные модели и алгоритмы можно использовать при определение технологических показателей разработки многослойных месторождений флюидов.

## Список литературы

- [1] Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К. Упругий режим в одно пластовых и многопластовых системах. М. «Недра». 1972. 321 с.
- [2] Каюмов Ш., Марданов А.П., Хайтов Т.О., Каюмов А.Б. Математического моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механике». Воронеж. 2020, с. 934-942.
- [3] Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B. Multiparameter mathematical models of the problem of problem of filtration of unstructured and structured fluids. E3S. Web of conferences 264. 01030(2021) <https://doi.org/10.1051/t3s/conf/2021/26401030>.
- [4] Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B. Construction of two – dimensional multiparameter mathematical models of the problem of the theory on nonlinear filtration of fluids. International conference on Actual problems of applied mechanics – APAM – 2021. AIP conf.prec. 2637, 040002 (2022); <https://doi.org/10.1063/5/0119121>. Published: oct 20.2022.
- [5] Филиппов А.И., Зеленова М.А., Некорректность задачи о поле давлений в слоисто неоднородной пласте при заданной отборе. Материалы международной научной конференции “ Современные проблемы математики и физики”. Стерлитимак. 2021 г. ст 163-171.
- [6] Каюмов Ш., Бекчанов Ш.Э., Зиядуллаева Ш.С. О фильтрации структурированных флюидов в гидродинамически связанных многослойных пластах. Материалы республиканской научной конференции “Современные проблемы анализа”. 2-3 июня г.Карши., 2023 г.,с.301-303.
- [7] Qayumov Sh., Arzikulov G., Bekchanov Sh., Ziyadullayeva Sh. A multiparameter mathematical model for the problem of nonlinear filtration of fluids in two-layer media. APITECH-V-2023. Journal of Physics: Conference Series 2697 (2024) 012042, doi: 10.1088/1742-6596/2697/1/012042. Pp 1-6.
- [8] Каюмов Ш. Математическое моделирование задач теории фильтрации со свободными границами. Ташкент, 2017 г.-274 с.
- [9] Samarski A.A. The theory of Difference shemes/A.A.Samarski-New York-Basel. Marcel Dekker. Inc, 2001. – 761 p.

## Содержание

<b>Ильгамов М.А.</b> Краткий обзор некоторых исследований и разработок в механике .....	5
<b>Аганин А.А., Хисматуллина Н.А.</b> Коллапс парового пузырька в воде .....	13
<b>Аунг К.М., Лепешкин А.Р.</b> Методика расчета напряженно-деформированного состояния лопаток вентилятора ГТД при соударении с птицей .....	14
<b>Багбеков Р.К., Богданов А.Н., Фельдшеров А.В., Шахназаров А.А.</b> К моделированию условий существования искусственных водоемов на природных территориях ....	16
<b>Болотнова Р.Х.</b> Краткий обзор авторских исследований в области динамики многофазных систем .....	17
<b>Веденеев В.В.</b> Развитие современных методов исследования задач аэроупругости летательных аппаратов .....	19
<b>Галиакбарова Э.В., Каримова Г.Р.</b> Акустические волны на границе раздела водонасыщенных и гидратонасыщенных песчаных пород горизонтальной и вертикальной поляризации .....	22
<b>Галимзянов М.Н., Агишева У.О.</b> Взаимодействие волны давления с пузырьковой областью .....	24
<b>Гизатуллин Р.Ф., Мухаметзянов А.Ф.</b> Эволюция ударных волн в насыпной среде из песка при увеличении водосодержания .....	27
<b>Гималтдинов И.К., Столповский М.В., Родионов А.С., Насыров А.А.</b> Динамика волн в открытом канале при наличии пузырьковой зоны .....	30
<b>Демин В.А., Демин Ф.В.</b> Условия левитации капли над гладкой поверхностью за счет избыточного давления при парообразовании .....	33
<b>Демин В.А., Демина Т.В.</b> Теоретическое исследование переноса паров кремния при производстве углеродных композиционных материалов .....	37
<b>Демин В.А., Петухов М.И.</b> О переносе продуктов реакции протонного обмена в расплаве бензойной кислоты .....	39
<b>Загитов Р.Р., Ситдииков О.Ш., Автократова Е.В., Крымский С.В., Терешкин В.В., Латыпова О.Э., Маркушев М.В.</b> Влияние всесторонней изотермическойковки и криогенной прокатки на структуру и механические свойства алюминиевого сплава 1570с .....	41

**Зарипов Р.М., Масалимов Р.Б.**

Исследование напряженно-деформированного состояния всплывшего участка газопровода на болоте, балластированного железобетонными утяжелителями ..... 44

**Ильин П.В.**

Технология универсального метода измерения потенциального содержания углеводородной жидкости в газовой среде. Обзор методов и проблем ..... 46

**Ильясов А.М., Киреев В.Н.**

Билинейный режим течения в пласте с конечной трещиной авто-ГРП ..... 47

**Исламов А.И., Набиуллина К.Р., Михайленко К.И.**

Моделирование перемешивания жидкости в микропробирках ..... 50

**Кильдибаева С.Р., Харисов Э.И.**

Математическое моделирование процесса гидратообразования на поверхности пузырьков для случаев глубоководных разливов ..... 53

**Кирилюк К.К., Нагимов М.И., Галеев Р.М., Мусабилов И.И.**

Влияние температуры деформации на термическое расширение сплава Ni-Mn-Ga в области мартенситного превращения ..... 55

**Коваль К.А., Сухоруков А.Л.**

Численное моделирование управляемого движения дискообразного глайдера в стратифицированной жидкости ..... 57

**Козлова А.Ю., Михайленко К.И.**

Эйлер–Эйлера модель динамики дисперсной среды в нижней части лифт-реактора ..... 60

**Колчанов Н.В., Колчанова Е.А., Сидоров А.С.**

Эволюция внутренней конвекции в системе слоёв воздуха и волокнистой тепловыделяющей пористой среды с изменением перепада температур на внешних границах ..... 63

**Колчанова Е.А., Колчанов Н.В.**

Критерии конвективной устойчивости течения примеси при разных углах наклона слоисто-неоднородной пористой среды со слабой закупоркой ..... 66

**Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф., Файзуллина Э.А.**

Моделирование процесса истечения вскипающей воды через тонкое сопло ..... 69

**Линник Е.Ю.**

Оценка ограниченности предела текучести грунта при высоких давлениях в задачах проникания ... 71

**Litvinov V.L., Litvinova K.V.**

Construction of traveling wave type solutions for filtration equations in mathematical modeling of oil and gas production ..... 72

**Litvinov V.L., Litvinova K.V.**

Pseudocomponent method for modeling component-fraction composition of a fluid during oil and gas production ..... 73

**Мальшева С.П.**

Механические свойства субмикроструктурного титанового сплава ВТ6, полученного всесторонней изотермической деформацией, перспективы его использования ..... 74

<b>Мамаева З.З.</b> Анализ собственных колебаний столба жидкости в скважине, сообщающейся с пластом.....	77
<b>Мухутдинова А.А.</b> Моделирование колебаний расхода при течении аномально термовязкой жидкости.....	79
<b>Mukhutdinova A.A., Nizamova A.D., Li W.</b> Investigation of the influence of the dependence of the gas heating on the geometric parameters of the heating element of the cold spraying technology .....	82
<b>Насибуллаева Э.Ш.</b> Численный анализ рассеяния акустической волны на системе звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве .....	84
<b>Насырова Д.А.</b> Собственные колебания жидкости в вертикальной и горизонтальной скважинах .....	87
<b>Неверов А.Н., Селиверстова О.В.</b> Сопrotивление излучения кавитирующей жидкости .....	88
<b>Низамова А.Д.</b> Влияние температурной зависимости вязкости жидкости на устойчивость течения .....	91
<b>Новоселов К.В.</b> Моделирование многофазного несмешивающегося течения в пористой среде с помощью решеточного уравнения Больцмана .....	94
<b>Пухначев В.В.</b> Растворы полимеров и их математические модели .....	95
<b>Рахимов А.А.</b> Экспериментальное изучение реологии крови при различных скоростях деформации сдвига .....	97
<b>Сабитов К.Б., Хакимов А.Г.</b> Влияние давления и плотности окружающей среды на спектр частот колебаний прямоугольной пластины, шарнирно закрепленной по контуру .....	99
<b>Саметов С.П., Батыршин Э.С., Гарифуллин И.Ш., Таипов И.А., Имамутдинова А.А.</b> Определение эффективности потокоотклоняющих агентов методами микрофлюидики.....	102
<b>Сафиуллин А.Р.</b> Отражение и прохождение акустических волн из чистой жидкости в пузырьковую под прямым углом .....	104
<b>Стрижак П.А., Шлегель Н.Е., Подгорная Е.Р.</b> Измерение температуры гидратного пласта с использованием Planar Laser Induced Fluorescence....	106
<b>Тукмаков Д.А.</b> Аналитическая модель гравитационного осаждения дисперсной примеси в движущемся потоке ...	107
<b>Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф.</b> Математическая модель продольной трещины стержня для задач идентификации .....	110
<b>Утяшев И.М., Юлмухаметов А.А.</b> Определение упругих характеристик основания балки.....	113

**Фаттахов С.Р.**

Исследование волн давления в канале с пузырьковым кластером сферической формы ..... 115

**Хакимов А.Г.**

Изгиб однослойного графена под действием среднего давления ..... 117

**Харисов Э.И.**

Визуализация затопленных нефтегазовых струй в пакетах 3D моделирования ..... 120

**Чупров П.А., Уткин П.С.**

Численное исследование взаимодействия ударной волны с засыпкой частиц с использованием модели Баера-Нунциато ..... 123

**Шакирьянов М.М., Юлмухаметов А.А.**

Влияние присоединенной массы на пространственные колебания трубопровода с вибрирующими опорами ..... 124

**Шиповский И.Е., Трофимов В.А.**

Численный расчет устойчивости массива с жидкофазными включениями ..... 126

**Юношева Е.В.**

Мезоскопическое моделирование многофазных многокомпонентных течений ..... 128

**Каюмов Ш., Зиядуллаева Ш.С, Бекчанов Ш.Э., Хусанов Э.**

Математическое моделирование задачи структурных флюидов фильтрации в трехпластовых пористых средах ..... 129