ISSN 2658–5782

Том 18 (2023), № 4, с. 397–399

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.4.123.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.4.123

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

«14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Расчет переноса вещества и энергии в невязком стратифицированном океане и атмосфере[1]

Лапшина К.Ю.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Исследование волнового массопереноса в сплошных средах имеет большое количество прикладных и академических приложений. Однако, до сих пор исследователи не обращали внимание на перенос вещества связанный с распространением периодического возмущения границы раздела двух стратифицированных жидкостей. Дисперсионные характеристики периодического волнового движения на границе раздела в двухслойной системе невязких стратифицированных жидкостей были определены в [1]. Методика расчета и выражения для скорости массопереноса и траекторий движения материальных частиц в однородных средах получены в работе [2]. В настоящей работе ставится задача о расчете переноса вещества и энергии, связанного с возмущением поверхности на границе раздела двух стратифицированных невязких жидкостей.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 19-19-00598-П, «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», https://rscf.ru/project/19-19-00598/)

Постановка задачи

Рассмотрим две идеальные стратифицированные жидкости в декартовой системе координат Oxz, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести $\mathbf{g}$, а ось Ox совпадает с равновесным положением границы раздела $z = 0$ вдоль которой распространяется периодическое возмущение $z = \zeta(x, t$. Движение считается независимым от горизонтальной координаты y. Капиллярные силы на поверхности раздела характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ. Будем считать, что нижнее полупростаранство $z < 0$ заполняет более плотная жидкость с плотностью ρ_w, а верхнее полупространство занимает жидкость с плотностью $\rho_a < \rho_w$. Будем считать, что жидкости равномерно стратифицированы по экспоненциальному закону. Здесь и далее индексами a, w обозначены верхняя и нижняя среды соответственно. Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Эйлера и неразрывности для обеих сред, также их следует дополнить граничными условиями на поверхности раздела:

$$z > \zeta: \begin{cases} \rho_a = \rho_{00a} \exp(-z/\Lambda_a)(1 + \tilde{\rho}_a(x, z, t)) \\ \rho_a \partial_t \mathbf{u}_a + \rho_a (\mathbf{u}_a \cdot \nabla)\mathbf{u}_a = -\nabla P_a + \rho_a \mathbf{g} \\ \partial_t \rho_a + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$z<\zeta:\begin{cases}\rho_w=\rho_{00w}\exp(-z/\Lambda_w)(1+\tilde\rho_w(x,z,t))\\ \rho_w\partial_t\mathbf{u}_w+\rho_w(\mathbf{u}_w\cdot\nabla)\mathbf{u}_w=-\nabla P_w+\rho_w\mathbf{g}\\ \partial_t\rho_w+\operatorname{div}(\rho_w\mathbf{u}_w)=0\end{cases}\quad(2)$$

$$z=\zeta:\begin{cases}\partial_t(z-\zeta)+\mathbf{u}_a\cdot\nabla(z-\zeta)=0\\ \partial_t(z-\zeta)+\mathbf{u}_w\cdot\nabla(z-\zeta)=0\\ P_w-P_a-\sigma\operatorname{div}(\mathbf{n})=0\end{cases}\quad(3)$$

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla(z-\zeta)}{|\nabla(z-\zeta)|}=\frac{-\partial_x\zeta\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_z}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}},$$

Здесь $\rho_{00a,w}$ — равновесное значение плотности сред, $\Lambda_{a,w}=|d\ln\rho_{a,w}/dz|^{-1}$ — масштаб стратификации, $\tilde\rho_{a,w}$ — описывает возмущение плотности, связанное с волновым движением, $u=u_xe_x+u_ze_z$ — поле скоростей, $P_{a,w}$ — давление жидкостей, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к границе раздела, направленный из нижней среды в сторону верхней. В естественных условиях возмущение плотности мало по сравнению со средним значением $\tilde\rho_{a,w}\ll 1$. Решение задачи ищется в виде бегущей волны методом разложения по малому параметру, пропорциональному амплитуде волнового движения в приближении Буссинеска.

Расчет скорости массопереноса

Решение линеаризованной задачи (1)–(3) позволяет записать поле скоростей с точностью до первого порядка в эйлеровом представлении $\mathbf{V}_E=\mathbf{V}_E(\mathbf{r},t)$ для верхней и нижней сред соответственно:

$$\begin{aligned}u_{x_a}&=-Ak_{za}\exp(-k_{za}z)\cos(k_xx-t\omega),\\ u_{z_a}&=Ak_x\exp(-k_{za}z)\sin(k_xx-t\omega)\end{aligned}\quad(4)$$

$$\begin{aligned}u_{x_w}&=Bk_{zw}\exp(k_{z_w}z)\cos(k_xx-t\omega),\\ u_{z_w}&=Bk_x\exp(k_{zw}z)\sin(k_xx-t\omega)\end{aligned}\quad(5)$$

Здесь A, B — амплитуды, $k_{za,w}$, k_x — компоненты волнового числа, ω — частота волнового движения.

Переход к переменным Лагранжа, для определения дрейфовой скорости и описания движения частиц среды, осуществляется посредством подстановки выражений (4)–(5) в следующую формулу [3]:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{r}_0,t)=\mathbf{V}_E(\mathbf{r}_0,t)+\left(\left(\int\limits_0^t\mathbf{V}_E(\mathbf{r}_0,\tau)\right)\nabla_0\right)\mathbf{V}_E(\mathbf{r},t),\quad(6)$$

где $\mathbf{V}_E(\mathbf{r},t)$ необходимо взять в точке $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ и индекс «0» означает — что действие совершается в начальном положении отслеживаемой материальной точки. При переходе в лагранжево представление поле скоростей координаты эйлеровых скоростей изменяют свой статус — это позволяет получить скорость жидкой частички, которая в нулевой момент времени $t=0$ находилась в точке пространства $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$.

При этом для корректного применения формулы (6) необходимо перейти в другую систему координат $O^*x^*z^*$, которая движется вместе со средой. Также частота волнового движения изменяется из-за необходимости учета эффекта Доплера:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}x^*\\ y*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-U_{\text{drift}}t\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow\\ \Rightarrow k_xx-\omega t=k_x\left(x^*+U_dt\right)-\Omega t\\ \Rightarrow\Omega=\omega-k_xU_{\text{drift}},\end{gathered}\quad(7)$$

где U_{drift} — дрейфовая компонента скорости, которая смещает частицу жидкости с течением времени.

В формуле (6) горизонтальной скорости с точностью до второго порядка малости определены как дрейфовые, так и циклические слагаемы скорости. При подстановке (4)–(5) в (6) слагаемые, имеющие периодический характер, являются циклическими. Дрейфовые компоненты скорости появляются в результате вычисления интегральных слагаемых, путем усреднения их за период мы можем определить дрейфовую компоненту скорости у обеих сред:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}a_{\text{drift}}&=\left\{A^2k_xk_{za}^2\frac{\exp(-2k_{za}z)}{\omega};0\right\},\\ \mathbf{U}w_{\text{drift}}&=\left\{B^2k_xk_{zw}^2\frac{\exp(2k_{zw}z)}{\omega},0\right\}\end{aligned}\quad(8)$$

При расчетах траекторий движения индивидуальных жидких частиц необходимо выполнить еще одно действие. В этом случае формулу пересчета (6) корректно применять в системе координат, движущейся со скоростью среднего лагранжевого течения $V_L=V_E+U_{\text{drift}}$, которая вычисляется, как сумма скорости среднего эйлерова течения и скорости среднего массопереноса, вычисленной на предыдущем этапе.

Важными характеристиками потока жидкости, помимо дрейфового течения, являются плотность потока энергии и поток импульса:

$$\begin{gathered}\rho_{a,w}\mathbf{u}_{a,w}\left(\frac{\mathbf{u}_{a,w}^2}{2}+\frac{P_{a,w}}{\rho_{a,w}}\right);\\ P_{a,w}\mathbf{k}+\rho_{a,w}\mathbf{u}_{a,w}(\mathbf{u}_{a\cdot w}\cdot\mathbf{k})\end{gathered}\quad(9)$$

Здесь $\mathbf{k}$ — волновой вектор, определяемый в ходе решения дисперсионного соотношения через положительно определенную частоту волнового движения ω.

Заключение

Был проведен анализ влияние стратификации на перенос вещества в жидкости, исследована скорость дрейфа контактирующих сред, построены траектории движения материальных частиц жидкости. Расчеты показывают, что учет стратификации наиболее сильное влияние оказывает в области гравитационных волн. Особый интерес вызывает переход в область капиллярных волн, где значение скорости дрейфа Стокса при отдалении от границы раздела в стратифицированной жидкости значительно больше, чем в однородной жидкости, в отличии от области гравитационных волн, где стратифицированная жидкость характеризуется меньшей скоростью дрейфа, чем однородная. Также были визуализированы потоки энергии и импульса, возникающие при волновом движении.

Список литературы

[1] *Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Лапшина К. Ю.* Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т.23, вып. 6

[2] *Белоножко, Д. Ф., Очиров А.А.* О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 5. С. 675–683.