ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 4, с. 299–301

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.4.089.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.4.089

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Свободные колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости

Ян Наинг У

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

В данной работе рассмотрена задача о свободных колебаниях идеальной стратифицированной вращающейся несжимаемой жидкости, заполняющей цилиндрическую полость в твердом теле. Исследованы нормальные колебания стратифицированной жидкости, заполненной цилиндрический сосуд при малой и большой скорости вращения вокруг своей вертикальной оси симметрии. При достаточно больших значениях угловой скорости движения твердого тела с жидкостью рассматриваемый случай эквивалентен случаю вращения в условиях полной невесомости. Представлены численные результаты собственных значений и собственных функций нормальных колебаний жидкости получены при постоянной частоте плавучести и приведены в виде таблиц и графиков.

Колебания стратифицированной жидкости при малой скорости вращения

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости при полном и частичном заполнении полости. Пусть в невозмущенном движении вектор градиента плотности и вектор угловой скорости вращения коллинеарные векторы, а действие однородного силового поля описывается силовой функцией $U_0 = gx_3$. Здесь ограничимся рассмотрением случая, когда угловая скорость вращения ω_0 мала, и выполняется условие $\omega_0^2\,\ell/g << 1$ (ℓ — характерный размер). Это будет означать, что в невозмущенном состоянии изгиб поверхностей равной плотности мал и им можно пренебречь. В этом случае, используя исходные уравнения возмущенного движения, вектор скорости $\bar{V}(x_1, x_2, x_3)$ запишется в виде:

$$\bar{V} = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 4\omega_0^2} L \cdot \bar{a},$$

где тензор L вида,

$$L = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \dfrac{2\omega_0}{\lambda} & 0 \\ -\dfrac{2\omega_0}{\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda^2 + 4\omega_0^2}{\lambda^2 + N_{33}^2} \end{array} \right\} \tag{1}$$

здесь $N^2 = -\dfrac{g}{\rho_0^*}\dfrac{d\rho_0}{dx_3} = g\beta$, N^2 — частота плавучести, $\bar{a} = \frac{1}{\rho_0^*}\nabla p$.

Определим собственные числа и собственные функции задачи о нормальных колебаниях жидкости, полагая $p = \phi\, e^{i\omega t}$, $q = \dfrac{\omega}{2\omega_0}$, ω — частота нормальных колебаний. В цилиндрических координатах (x_3, r, η) с началом координат на поверхности жидкости Γ краевая задача запишется в виде:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{1-q^2}{Fr^2-q^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0, \quad (2)$$

а граничное условие при полном заполнении жидкости будет

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{i\chi}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0, \quad \text{при } r=r_0,\\ &\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=0, \quad \text{при } x_3=0,\ x_3=-H,\end{aligned} \quad (3)$$

и при частичном заполнении жидкости запишется в виде,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{i\chi}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0, \quad \text{при } r=r_0,\\ &\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=0, \quad \text{при } x_3=-H,\\ &(N^2-\omega^2)\phi+g\frac{\partial\phi}{\partial x_3}=0, \quad \text{при } x_3=0.\end{aligned} \quad (4)$$

здесь $\chi=\dfrac{1}{q}$, $Fr^2=\dfrac{N^2}{4\omega_0^2}$.

В рассматриваемом частном случае решение краевой задачи имеет вид

$$\phi_{mnl}=J_m(\xi_{mn}\bar{r})\,e^{im\eta}\cos k_l x_3\,, \quad (5)$$

где

$$k_l^2=k^2\frac{q^2-Fr^2}{1-q^2}; \quad k_l=\frac{l\pi}{H} \quad l=1,2,\ldots,$$

$$\xi_{mn}=k_{mn}r_0, \quad \bar{r}=\frac{r}{r_0},$$

$$n=1,2,\ldots,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

здесь $J_m(\xi_{mn}r)$ — функция Бесселя первого рода m-го порядка; ξ_{mn} — n-ый корень характеристического уравнения (6) при $\bar{r}=1$, $m=0$, $m=1$:

$$Y_2(\xi_{mn})=\xi_{mn}J_m'(\xi_{mn})\pm m\chi_{mnl}J_m(\xi_{mn})=0, \quad (6)$$

при фиксированных значениях m, n, l, Fr^2, безразмерная частота колебаний определяется формулой

$$q_{mnl}=\sqrt{\frac{\xi_{mn}^2Fr^2+\bar{k}_l^2}{\xi_{mn}^2+\bar{k}_l^2}}, \quad (7)$$

где $\bar{k}_l=k_l r_0$, $\chi_{mnl}=\frac{1}{q_{mnl}}$.

Колебания стратифицированной жидкости при большой скорости вращения

В данной постановке будем предполагать, что при достаточно больших значениях угловой скорости ω_0 стационарного вращения жидкости, поле центробежных сил инерции значительно больше поля сил тяжести, т.е. $\dfrac{\omega_0^2\ell}{g}\gg 1$. Следовательно, потенциальная энергия на единицу масс жидкости равна $\Pi_0=\dfrac{\omega_0^2r^2}{2}$. В таком случае свободная поверхность Γ вращающейся жидкости в закрытом сосуде в отсутствии колебаний примет форму цилиндрической поверхности с внутренним радиусом r_0.

В проекции на оси цилиндрической системе координат уравнения малых движений (1) запишутся в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V_r}{\partial t}=2\omega_0V_\eta-\frac{1}{\rho_0^*}\frac{\partial p}{\partial r}-w_rN_{rr}^2,\\ &\frac{\partial V_\eta}{\partial t}=-2\omega_0V_r-\frac{1}{\rho_0^*}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\eta},\\ &\frac{\partial V_x}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0^*}\frac{\partial p}{\partial x},\end{aligned} \quad (8)$$

где $N_{rr}^2=\dfrac{1}{\rho_0^*}\dfrac{\partial\rho_0(r)}{\partial r}\dfrac{\partial\Pi_0}{\partial r}=k\omega_0^2$, k — постоянная, зависящая от соотношения плотностей жидкости.

Уравнение для определения собственных колебаний жидкости в возмущенном движении запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\left(1-Fr^2\cdot\chi^2\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\\ &\quad+\left[1-\chi^2\left(1+Fr^2\right)\right]\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0,\end{aligned} \quad (9)$$

а граничные условия для быстровращающегося цилиндра со стратифицированной жидкостью будут

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\phi}{\partial r}-i\chi\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0, \quad \text{при } r=R_0,\\ &r\frac{\partial\phi}{\partial r}+\left[4\frac{1-\chi^2(1+Fr^2)}{\chi^2}\phi-i\chi\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]=0,\\ &\qquad\text{при } r=r_0\\ &\frac{\partial\phi}{\partial x}=0, \quad \text{при } x=0,\\ &\qquad x=-H.\end{aligned} \quad (10)$$

В рассматриваемом частном случае решение задачи (9) и (10) для внутренних волн имеет вид

$$\begin{aligned}&\phi_{mnl}=\left[AJ_m(\xi_{mn}\bar{r})+BY_m(\xi_{mn}\bar{r})\right]\times\\ &\times H\left(\left(1-Fr^2\cdot\chi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\eta\right)\cos k_l x,\end{aligned} \quad (11)$$

где

$$k_l = \frac{l\,\pi}{H}; \quad \xi_{mn} = k_{mn} r_0;$$

$$k_{mn} = k_l \sqrt{\chi^2(1+Fr^2)-1}; \quad \chi = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2+\xi_{mn}^2}{\bar{k}_l^2(1+Fr^2)}};$$

здесь $J_m(\xi_{mn}\bar{r})$ и $Y_m(\xi_{mn}\bar{r})$ — функции Бесселя первого и второго родов m-го порядка.

Собственное число при фиксированных значениях m, n, l, Fr^2 для внутренних волн определяется формулой

$$q_{mnl}^{(2=\text{С.})} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2(1+Fr^2)}{\bar{k}_l^2+\xi_{mn}^2}}. \tag{12}$$

Собственные функции жидкости для поверхностных волн можно представить так:

$$\begin{gathered}\phi_{ml} = [CI_m(\mu_m\bar{r}) + DK_m(\mu_m\bar{r})] \times \\ \times H\left(\left(1-Fr^2\cdot\chi^2\right)^{-\frac{1}{2}}\eta\right)\cos\kappa_l x,\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\kappa_l = \frac{l\,\pi}{H}; \quad \mu_m = \kappa_m r_0;$$

$$\kappa_m = \kappa_l \sqrt{1-\chi^2(1+Fr^2)}, \quad \chi = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2-\mu_m^2}{\bar{\kappa}_l^2(1+Fr^2)}};$$

здесь $I_m(\mu_m\bar{r})$ и $K_m(\mu_m\bar{r})$ — функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя) m-го порядка.

Собственное число при фиксированных значениях m, l, Fr^2 для поверхностных волн,

$$q_{ml}^{(\text{пов.})} = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2(1+Fr^2)}{\bar{\kappa}_l^2-\mu_m^2}}. \tag{14}$$

В докладе также приведены численные результаты определения собственных частот в виде таблиц и графиков.

Автор благодарит научного руководителя доцента каф. Теоретическая механика МГТУ им. Н.Э. Баумана А.Н. Темнова за содействие при выполнении работы.

Список литературы

[1] *Краусс В.* Внутренние волны. Методы и результаты теоретической океанографии. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1968, С. 270.

[2] *Miles J.W., Troesch B.A.* Surface oscillations of a rotating liquid. // J. Appl. Mech., 1961, V. 28(4), p. 491-496.

[3] *Габов С.А.* О спектре и базисах из собственных функций одной задачи, связанной с колебаниями вращающейся жидкости // Матем. сб., 1981, т. 116(158), № 2(10), с. 245–252.

[4] *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. Москва, Вычислительный центр АН СССР, 1968, 230 с.

[5] *Рвалов Р.В.* Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1973, № 4, с. 81–88.

[6] *Темнов А.Н.* Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Дис. …канд. физ.-мат. наук. Москва, МВТУ, 1983, 192 с.

[7] *Ян Наинг У.* Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Труды МАИ. 2023. № 130. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=174605