ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 4, с. 286–288

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.4.084.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.4.084

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

«14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Особенности массопереноса связанного распространением поверхностных периодических течений в вязкой стратифицированной жидкости[1]

Очиров А.А., Лапшина К.Ю.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Явление переноса вещества периодическими волнами, распространяющимися вдоль поверхности жидкости известно очень давно. Теоретические исследования начались с основополагающей работы Дж.Г. Стокса [1]. Исследование массопереноса периодическими течениями жидкости привлекает внимание и современных исследователей в связи с большим количеством научных и практических приложений. Описание волнового движения в вязкой несжимаемой стратифицированной жидкости с учетом компонентов течения, характеризующих тонкую структуру — лигаментов, предложено в [2]. В работе [3] подробно исследованы свойства дрейфа в вязкой однородной жидкости, связанные с волновым компонентом периодического течения. В настоящей работе ставится задача о выявлении особенностей расчета дрейфа Стокса в вязкой среде с учетом полных решений: волновых и лигаментных компонентов течения.

[1]Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700044-0)

Математическая формулировка задачи

Задача рассматривается в плоской постановке в декартовой системе координат Oxz, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления действия сил тяжести $\mathbf{g}$. Рассмотрим вязкую жидкость с кинематической вязкостью υ плотностью ρ. Стратификацию жидкости по плотности будем считать равномерной и экспоненциальной. В этом случае функция плотности записывается в виде:

$$\rho = \rho_{00} \exp\left(-z/\Lambda\right)\left(1 + \widetilde{\rho}\left(x, z, t\right)\right) \tag{1}$$

Здесь ρ_{00} — равновесное значение плотности на уровне невозмущенной свободной поверхности $z = 0$, $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$ — масштаб стратификации, а $\tilde{\rho}$ — возмущение плотности от равновесного значения. В природе часто при распространении периодических течений возмущения плотности мало по сравнению с равновесным значением и часто задачи решаются в приближении однородной жидкости. Поверхностное натяжение характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ или нормированным на равновесное значение плотности коэффициентом $\gamma = \sigma/\rho_{00}$. Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Навье-

Стокса, неразрывности, условия затухания движения с глубиной и стандартных гидродинамических граничных условий на свободной поверхности:

$$z<\zeta:\begin{cases}\rho\partial_t\mathbf{u}+\rho\left(\mathbf{u}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}-\rho v\Delta\mathbf{u}=-\nabla P+\rho\,\mathbf{g}\\ \partial_t\rho+\operatorname{div}\left(\rho\cdot\mathbf{u}\right)=0\end{cases}\tag{2}$$

$$z=\zeta:\begin{cases}\partial_t\left(z-\zeta\right)+\mathbf{u}\cdot\nabla\left(z-\zeta\right)=0,\\ \tau\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)+\mathbf{n}\cdot\left(\tau\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=0,\\ P-P_0-\sigma\operatorname{div}(\mathbf{n})-2\rho\mathbf{n}\left(\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u}\right)=0\end{cases}\tag{3}$$

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla\left(z-\zeta\right)}{\left|\nabla\left(z-\zeta\right)\right|}=\frac{-\partial_x\zeta\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_z}{\sqrt{1+\left(\partial_x\zeta\right)^2}},\tau=\frac{\mathbf{e}_x+\partial_x\zeta\,\mathbf{e}_z}{\sqrt{1+\left(\partial_x\zeta\right)^2}}.$$

Здесь $\zeta=\zeta\left(x,t\right)$ — функция, описывающая отклонение свободной поверхности от равновесного положения, $\mathbf{u}=u_x\mathbf{e}_x+u_z\mathbf{e}_z$ - поле скоростей, которое в приближении Буссинеска (при наложении дополнительного условия несжимаемости жидкости) можно записать в виде частных производных функций тока:

$$u_x=\partial_z\psi,\quad u_z=-\partial_x\psi\tag{4}$$

Давление жидкости P представляется в виде суммы атмосферного P_0, гидростатического и периодического $\tilde{P}$ давления:

$$P=P_0+\int_z^{\zeta}\rho\left(x,\xi,t\right)gd\xi+\tilde{P}\left(x,z,t\right)\tag{5}$$

Решение задачи ищется методом сингулярных возмущений с разложением задачи на порядки малости по параметру пропорциональному амплитуде периодического возмущения свободной поверхности в виде периодических функций.

Расчет скорости дрейфа Стокса

Следуя стандартной процедуре снесения граничных условий на равновесную поверхность, получим решение задачи в линейном приближении и дисперсионные соотношения, определяющие связь между компонентами волнового вектора и частотой периодического течения в вязкой стратифицированной жидкости:

$$\omega\left(k_x^2-k_z^2\right)\left(i\nu k_x^2-i\nu k_z^2+\omega\right)-\\-N^2k_x^2\exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right)=0\tag{6}$$

В приближении малой вязкости согласно теории сингулярных возмущений уравнение (6) допускает два типа решений: регулярные и сингулярные:

$$\begin{aligned}k_z&=\pm\Big(kx^2-i\omega(2\nu)^{-1}+(1-i)(2\sqrt{2}\nu\omega)^{-1}\times\\&\times\sqrt{4\exp(-z/\Lambda)kx^2N^2\nu\omega-i\omega^4}\Big)^{1/2}\\k_l&=\pm\Big(kx^2-i\omega(2\nu)^{-1}+(1-i)(2\sqrt{2}\nu\omega)^{-1}\times\\&\times\sqrt{4\exp(-z/\Lambda)kx^2N^2\nu\omega-i\omega^4}\Big)^{1/2}\end{aligned}\tag{7}$$

Регулярные решения k_z определяют волновой компонент течения и в предельном переходе идеальной жидкости сводятся к решениям, описывающим волновой компонент в идеальной среде. Сингулярные решения переобозначены k_l и определяют лигаментный компонент периодического течения, вырождающийся в предельном переходе невязкой среды. Регулярные решения математически определяются выражением $|Re\left(k_z\right)|\ll|Im\left(k_z\right)|$. Сингулярные решения математически определяются соотношением $|Re\left(k_l\right)|\sim|Im\left(k_l\right)|$. При подстановке дисперсионных соотношений, описывающих полное решение в искомые функции и в граничные условия, получается дисперсионное соотношение, приближенные решения которого громоздки и здесь не приводятся:

$$\begin{aligned}&(k_x^2+k_z^2)(k_l\omega^2-gk_x^2-\gamma k_x^4+\\&+i\omega\nu k_l(3k_x^2-k_l^2))-(k_x^2+k_l^2)\times\\&\times(k_z\omega^2-gk_x^2-\gamma k_x^4+i\omega\nu k_z(3k_x^2-k_z^2))=0\end{aligned}\tag{8}$$

Пример построения дисперсионных соотношений для воды и лигаментов для жидкости с параметрами воды и разной частотой плавучести приведен на Рис. 1.

Дрейф Стокса — явление второго порядка малости и определяется непериодическими компонентами скорости. В вязкой жидкости такие компоненты появляются при решении задачи второго порядка малости. Также компоненты скорости дрейфа Стокса возникают в результате перехода от описания скорости в переменных Эйлера $\mathbf{u}_E$ к переменным Лагранжа $\mathbf{u}_L$ по известной формуле:

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{r}_0,t)=\mathbf{u}_E(\mathbf{r}_0,t)+\left(\left(\int_0^t\mathbf{u}_E\left(\mathbf{r}_0,\tau\right)\right)\nabla_0\right)\mathbf{u}_E\left(\mathbf{r},t\right).\tag{9}$$

Из решения задачи второго порядка малости выделяются нециклические компоненты скорости

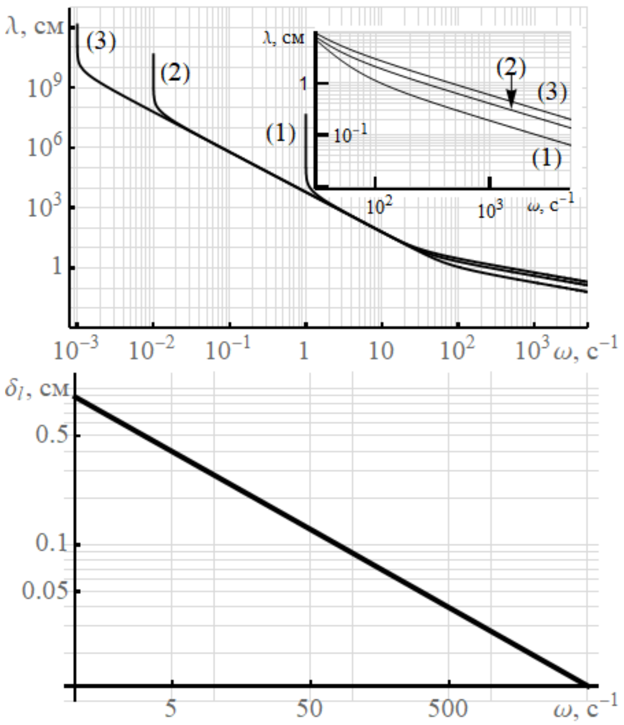

Рис. 1. Зависимость масштабов компонентов течения от частоты для воды: (а) — длины волны, линии (1 – 3) построены для $N = 1; 0.01; 0.001\ (c^{-1})$; (б) — толщины лигамента в сильно стратифицированной жидкости $N = 1c^{-1}$

и складывая их с нециклическими слагаемыми лагранжевой скорости (9) получим скорость дрейфа Стокса, определяемую всеми компонентами течения: волнами и лигаментами.

Заключение

Проанализирована методика расчета скорости дрейфа Стокса в вязких несжимаемых равномерно стратифицированных жидкостях. Показаны особенности расчета скорости массопереноса с учетом влияния волновых и лигаментных компонентов периодического течения.

Список литературы

[1] *Stokes G. G.*On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V 8. P. 441–455.

[2] *Chashechkin Y. D., Ochirov A. A.*Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11, № 8. P. 402.

[3] *Белоножко Д. Ф., Козин А.В.*О расчете скорости переноса вещества периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости // Журнал технической физики. 2010. Т. 80, № 4. С. 32–40.