ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 4, с. 283–285

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.4.083.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.4.083

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Периодические течения в концентрационно-стратифицированной несжимаемой вязкой жидкости[1]

Очиров А.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Изучение поверхностных периодических течений актуально с точки зрения академических и технологических приложений. Современные экспериментальные исследования обнаруживают тонкую сложную структуру течения, сопровождающую капиллярные и капиллярно-гравитационные волны. В работе [1] исследовано волновое течение в идеальной стратифицированной среде. В исследовании [2] исследованы особенности волновых движений, возникающих на границе раздела невязких стратифицированных сред. Работы [3, 4] посвящены периодическим движениям в вязких жидкостях. В модели вязкой среды в дисперсионных соотношениях помимо волнового движения можно выделить компоненты, отвечающие тонкой структуре течения – лигаментам, описывающим тонкие струи, сопровождающие волны на всех этапах существования. В настоящем исследовании рассматриваются вязкие стратифицированные жидкости, стратификация которых связана с неоднородным распределением солености.

Математическая формулировка задачи

Рассмотрим неограниченную вязкую жидкость с кинематической вязкостью ν, занимающую нижнее полупространство $z < 0$ в декартовой системе координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена вертикально вверх против направления поля силы тяжести $\vec{g}$, а плоскость Oxy совпадает с равновесным положением свободной поверхности жидкости. В общем случае плотность жидкости связана с многочисленными физическими факторами, в настоящей работе рассматривается модель, учитывающая стратификацию, связанную с неравномерным распределением концентрации примеси. При этом считается, что периодические возмущения вызывают малые отклонения значения солености от равновесного уровня. Плотность жидкости ρ в сделанных предположениях записывается следующим образом:

$$\rho = \rho_0\left(z\right)\left(1 + \alpha_S\left(S\left(x, z, t\right) - S_0\right)\right) \qquad (1)$$

Здесь $\rho_0\left(z\right) = \rho_{00}\exp\left(-z/\Lambda\right)$ — функция, задающая исходную стратификацию, $\Lambda = \left|d\ln\rho/dz\right|^{-1}$ — масштаб стратификации, ρ_{00} — значение плотно-

[1] Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700044-0)

сти на равновесном уровне $z=0$, α_S — коэффициент солевого уплотнения, $S(x,z,t)=S_0+\tilde{S}(x,z,t)$ — функция, определяющая соленость, S_0 — равновесное значение, а $\tilde{S}$ — периодическое возмущение солености. Рассмотрим плоские периодические возмущения свободной поверхности жидкости $z=\zeta(x,t)$. Будем считать, что движение не зависит от горизонтальной координаты y. Давление жидкости P определяется суммой атмосферного P_0, гидростатического и периодического $\tilde{P}$ давления:

$$P=P_0+\int_z^{\zeta}\rho(x,\xi,t)\,g d\xi+\tilde{P}(x,z,t) \tag{2}$$

В предельно редуцированной постановке с учетом описанных приближений и допущений математическая формулировка задачи по определению поля скоростей $\vec{u}=u\vec{e}_x+w\vec{e}_z$, давления P, плотности ρ и солености S записывается следующим образом:

$$z<\zeta:\begin{cases}\rho\left(\partial_t\vec{u}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)=\rho\nu\Delta\vec{u}-\nabla P+\rho\vec{g}\\ \partial_t\rho+\vec{u}\cdot\nabla\rho+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}=0\\ \partial_t S++\vec{u}\cdot\nabla S-\kappa_S\Delta S-Q_S=0\end{cases} \tag{3}$$

$$z=\zeta:\quad\begin{aligned}&\partial_t(z-\zeta)+\vec{u}\cdot\nabla(z-\zeta)=0\\ &\vec{\tau}\cdot(\vec{n}\cdot\nabla\vec{u})+\vec{n}\,(\vec{\tau}\cdot\nabla\vec{u})=0\\ &P-P_0-\sigma\nabla\cdot\vec{n}-2\rho\nu\vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\nabla\vec{u})=0\\ &\vec{n}=\frac{\nabla(z-\zeta)}{|\nabla(z-\zeta)|}=\frac{-\partial_x\zeta\vec{e}_x+\vec{e}_z}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}\\ &\vec{\tau}=\frac{\vec{e}_x+\partial_x\zeta\vec{e}_z}{\sqrt{1+(\partial_x\zeta)^2}}\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь Q_S — функция источников, κ_S — коэффициент диффузии, σ — коэффициент поверхностного натяжения, а векторы $\vec{n}$, $\vec{\tau}$ — вектор нормали и касательной к поверхности соответственно. Система уравнений (3) решается с учетом граничных условий на свободной поверхности жидкости (4) и представлений плотности (1) и давления (2) для инфинитезимальных периодических возмущений методом разложения по малому параметру, пропорциональному амплитуде периодического движения в приближении Буссинеска в отсутствии источников $Q_S=0$. В этом случае жидкость считается несжимаемой, а плотность считается переменной только у слагаемых с ускорением свободного падения.

Решение задачи

Решение линеаризованной задачи ищется в виде периодических функций, пропорциональных $\propto\exp(ik_x x-i\omega t)$. Связь между положительно определенной частотой волнового движения $\omega>0$ и компонентами волнового вектора $k_{x,z}$ определяется при помощи дисперсионных соотношений. Подстановка вида решения в основные уравнения и обезразмеривание на собственные параметры среды: обратную частоту плавучести $\tau_N=N^{-1}=\sqrt{\Lambda/g}$ и вязкий волновой масштаб $\delta_N^{g\nu}=(g\nu)^{1/3}N^{-1}$ приводит к дисперсионным соотношениям:

$$\begin{aligned}\omega_*\left(k_{*x}^2-k_{*z}^2\right)\left(i\varepsilon\left(k_{*x}^2-k_{*z}^2\right)+\omega_*\right)-\\ -\exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right)k_{*x}^2=0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\frac{\varepsilon}{Sc}\left(k_{*x}^2-k_{*zS}^2\right)-i\omega_*=0 \tag{6}$$

И решениям:

$$\begin{aligned}k_{*z}&=\pm\sqrt{k_{*x}^2-\frac{i\omega_*}{2\varepsilon}+\frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*x}^2\exp(-z/\Lambda)+\omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}}\approx\\ &\approx\pm k_{*x}\frac{\sqrt{\omega_*^2-\exp(-z/\Lambda)}}{\omega_*}\\ k_{*l}&=\pm\sqrt{k_{*x}^2-\frac{i\omega_*}{2\varepsilon}-\frac{i\sqrt{4i\varepsilon k_{*x}^2\exp(-z/\Lambda)+\omega_*^3}}{2\varepsilon\sqrt{\omega_*}}}\approx\\ &\approx\pm\frac{1-i}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{\omega_*}\\ k_{*lS}&=\pm\sqrt{k_{*x}^2-i\frac{Sc}{\varepsilon}\omega_*}\approx\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Sc}{\varepsilon}\omega_*}\end{aligned} \tag{7}$$

При выбранных параметрах обезразмеривания естественным образом возникает малый параметр $\varepsilon=\delta_g^{\nu}/\delta_N^{g\nu}=N\nu^{1/3}/g^{2/3}$, который определяет отношение вязкого масштаба к вязкому волновому и число Шмидта $Sc=\nu/\kappa_S$. Решения (5)–(6) записываются следующим образом:

Регулярные решения уравнения (5) в (7) обозначены k_{*z} и определяют волновой компонент периодического течения. Сингулярные решения (5)–(6) в (7) обозначены k_{*l}, k_{*lS} и определяют лигаментные компоненты скорости и солености соответственно. Подстановка вида решения с учетом лигаментных компонентов в граничные условия позволяет получить дисперсионное соотношение, связывающее компонент волнового вектора k_{*x} с частотой ω:

$$(k_{*l}^2 + k_{*x}^2)(\delta^2\varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2\omega_* k_{*z}(k_{*z}^2 - 3k_{*x}^2) + \\ + k_{*x}^2 - \varepsilon k_{*z}\omega_*^2) - (k_{*z}^2 + k_{*x}^2) \times \\ \times (\delta^2\varepsilon k_{*x}^4 + i\varepsilon^2\omega_* k_{*l}(k_{*l}^2 - 3k_{*x}^2) + \\ + k_{*x}^2 - \varepsilon k_{*l}\omega_*^2) = 0 \tag{8}$$

С учетом приближенных решений (7) можно получить решения уравнения (8), которые не приводятся здесь в силу громоздкости. Условие отбора физически реализуемых корней связано с затуханием движения с глубиной. Решения должны удовлетворять соотношению:

$$Re\,(k_{z,l}) > 0 \tag{9}$$

Заключение

Проанализированы дисперсионные соотношения, определяющие все компоненты периодического движения вдоль свободной поверхности жидкости — волны и присоединенные лигаменты, задающие структуру течения. Показано, что при периодическом поверхностном течении поведение солености определяется только лигаментными компонентами. Поведение поля скоростей описывается и волновыми и лигаментными компонентами периодического течения. Характерные собственные масштабы жидкости диктуют требования, предъявляемые к постановке эксперимента по наблюдению всех компонентов течения.

Список литературы

[1] *Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.*Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2022. Т. 58, № 5. С. 524–533.

[2] *Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Лапшина К. Ю.*Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, № 6.

[3] *Chashechkin Y. D., Ochirov A. A.*Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. V. 11, № 8. P. 402.

[4] *Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д.*Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87, № 3. С. 379–391.