



## Процессы образования гравитационных внутренних волн за телом, движущимся в двумерной и трехмерной стратифицированной вязкой жидкости

Матюшин П.В.

Институт Автоматизации Проектирования РАН, Москва

Проведено математическое моделирование равномерного движения квадрата и диска со скоростью  $U$  в покоящейся линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости вдоль горизонтальной оси  $Z$  симметрии тела справа налево [1]. Показано, как на пустом месте **в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей** формируются полуволны  $-1$  и  $1$  (Рис. 1, 3), первая из которых со временем формирует след за телом, а вторая начинает череду внутренних полуволн над следом (Рис. 1–3). Пусть  $T_b$  — период плавучести жидкости, тогда **первая часть механизма формирования внутренних волн (МФВВ1)** будет одинаковой для двумерного (2D) и трехмерного (3D) случаев: «Каждые  $T_b/2$  **новые полуволны  $k$  и  $-k$  рождаются над местом  $Q$  старта тела**, где  $k = 1, 2, 3, \dots$ ; точка  $Q$  находится на пересечении черной вертикальной прямой и оси  $Z$ , совпадающей с нижней границей рисунков. Нечётные и чётные полуволны  $k$  со временем становятся впадинами и гребнями, соответственно.

### Моделирование

Для математического моделирования решалась система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска [2], записанная как в декартовой  $(Z, X)$ , так и в цилиндрической  $(Z = Z, X = R \cdot \cos \varphi, Y = R \cdot \sin \varphi)$  системах координат. Решение системы находилось при помощи численного метода МЕРАНЖ [3] на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСП РАН). Длина стороны квадрата и диаметр диска равны  $d$ . Толщина диска  $h = 0.76 \cdot d$ . Эта задача характеризуется четырьмя параметрами:  $T_b, Fr = U \cdot T_b / (2\pi \cdot d)$  — внутреннее число Фруда,  $Re = U \cdot d / \nu$  — число Рейнольдса,  $Sc = \nu / \kappa = 709.2$  — число Шмидта, где  $\nu$  и  $\kappa$  — коэффициенты кинематической вязкости жидкости и диффузии соли. Пусть  $T = \tau / T_b$ , где  $\tau$  — реальное время, прошедшее с начала старта тела.

### МФВВ2 для квадрата

«Каждые  $T_b$  из левой части **осевой полуволны  $-1$  формируются новый вихрь  $k^{-1} \equiv -1(k)$  (осевая часть гребня  $k$ )**, где  $k$  — чётное число (Рис. 1, I)». Сердцевины полуволн на Рис. 1(в-д), I показаны красными штриховыми линиями с красными номерами.

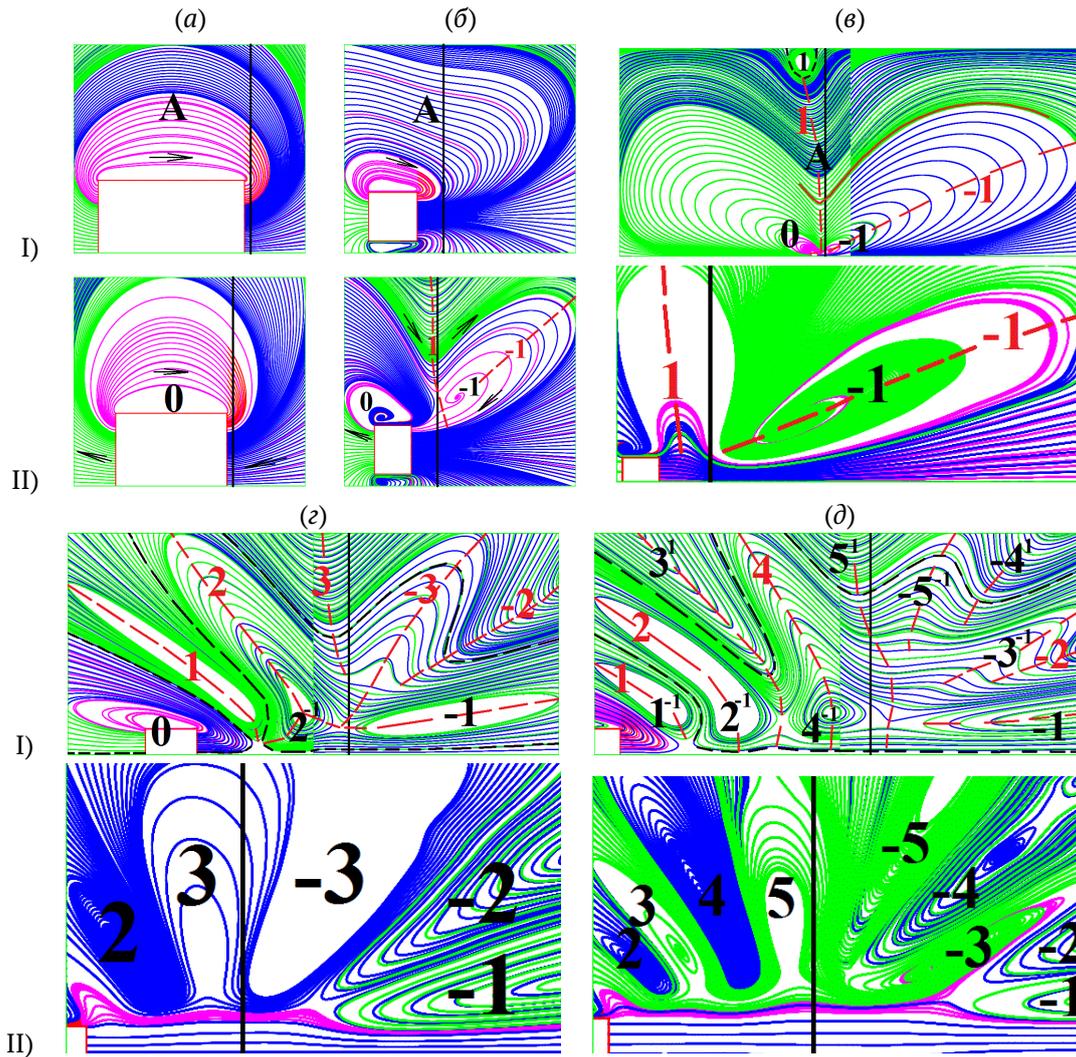


Рис. 1. Мгновенные линии тока в системе координат, связанной с жидкостью, при  $Fr = 0.3, Re = 50, T_b = 2\pi$  с около квадрата со стороной  $d$  (I) и диска толщиной  $0.76 \cdot d$  (II) (в вертикальной плоскости  $X - Z$ ): а-д –  $T = 0.02, 0.28, 0.55, 1.55, 2.55$

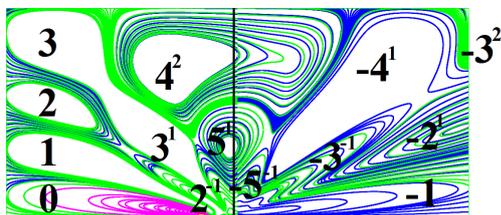


Рис. 2. Линии тока около квадрата при  $Fr = 0.3, Re = 50, T_b = 2\pi$  с,  $T = 2.55$

Черными номерами на Рис. 1в–д, I обозначаются вихревые ячейки, появившиеся в общем поле течения  $A$  около квадрата. Со временем картина течения становится похожей на шахматную доску (Рис. 2). Так на Рис. 1д, I и 2 виден пятилистник

следа, состоящий из вихревых ячеек  $2^{-1}, 4^{-1}$  и  $-1$  и полуячеек  $-5^{-1}$  и  $-3^{-1}$ , которые выделены на Рис. 1д, I чёрной штриховой линией. Над этим пятилистником виден первый ряд вихревых ячеек:  $1, 3^1, 5^1, -4^1, -2^1$ . Выше первого ряда расположился второй ряд вихревых ячеек:  $2, 4^2, -3^2$ , и т.д. В отличие от 2D-случая в 3D-случае в картинах линий тока в плоскости  $X - Z$  на Рис. 1, II такого шахматного расположения вихрей не наблюдается, отличается время формирования полуволн и отсутствуют осевые части гребней.

Для визуализации 3d вихревых структур течения используются изоповерхности функции  $\beta$  (мнимая часть двух комплексно сопряженных собственных значений тензора градиента скорости [4]). В двухцветной « $\beta+$ »-визуализации [1] полу-

волны окрашиваются двумя разными цветами при помощи знака фитой компоненты завихренности ( $\text{rot } v_\varphi$ ) (Рис. 3а,в,III), где  $v$  – вектор скорости жидкости. Для « $\beta-$ »-визуализации [1][1] выводятся на экран только полуволны, для которых  $\text{rot } v_\varphi < 0$  (Рис. 3б,III). В 2D-случае « $\beta+$ »-визуализация кроме полуволн показывает еще и зону блокировки перед квадратом и рециркуляционную зону сразу за квадратом (Рис. 3б,в,I), а также усложняет МФВВ2(2D, $\beta+$ ): «Каждые  $T_b$  около точки  $Q$  рядом друг с другом зарождаются два вихря  $-3(k)$  и  $-1(k)$  (осевые части гребня  $k$ ), где  $k$  – чётное число».

**МФВВ2(3D,  $\beta+$ ) для диска**

В 3D-случае сердцевины полуволн  $k$  и  $-k$  за диском похожи на деформированные **полукольца**, **которые падают на точку  $Q$**  [1][1]. «Каждые  $T_b$  для каждого нечётного  $k$  у оси  $Z$  формируется вихревая петля  $-k$ , состоящая из нитей  $f_k$  и полукольца  $-k$ , на которое потом садится чётное полукольцо

( $k + 1$ ). При этом нечетное полукольцо  $-k$  сначала превращается в полукруг (Рис. 3б,III), а потом в кольцо (Рис. 3в,III)». Таким образом, при  $X > 0$  и  $T > 0$  в течение каждого  $\Delta T = 1$  формируется новая внутренняя волна, состоящая из впадины  $k$  и гребня ( $k + 1$ ), где  $k$  – нечётное число. Полукольцо  $-k$  становится осевой частью гребня ( $k + 1$ ). Осевые части гребней оказываются связанными друг с другом в цепочку нечетными нитями.

**Список литературы**

[1] Матюшин П.В. Формирование пространственных внутренних волн за телом,двигающимся в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 4. С. 117–130.  
 [2] Boussinesq J. Essai sur la thйorie des eaux courantes // Comptes rendus de l'Acadіmie des Sciences. 1877. V. 23. P. 1–680.  
 [3] Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычислительной математики и математ. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.  
 [4] Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69–94.

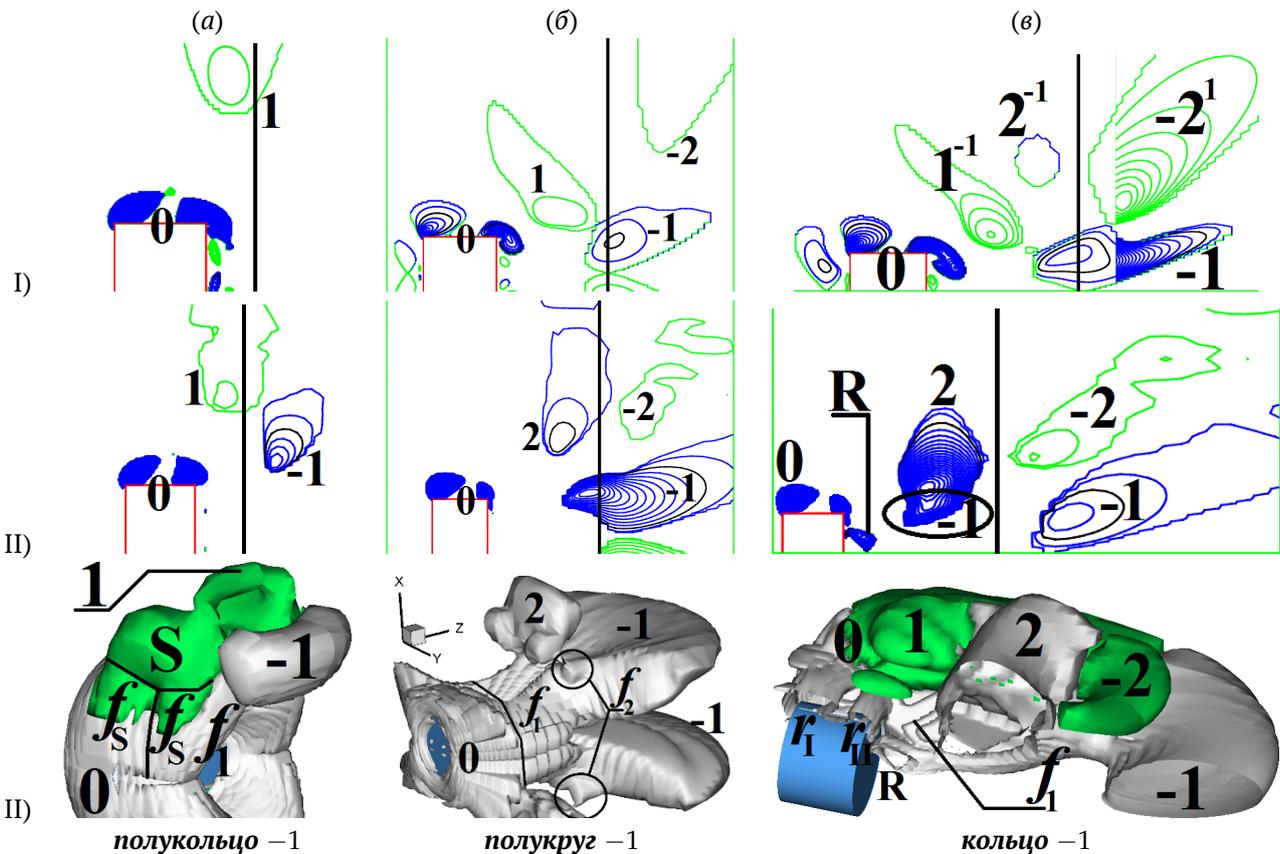


Рис. 3. Вихревая структура течения жидкости при  $Fr = 0.3$ ,  $Re = 50$ ,  $T_b = 2\pi$  с около квадрата (I) и диска (II–III): а–в – изолинии  $\beta+$  с шагами 0.01, 0.2, 0.1 и 0.01 при  $T = 0.28, 0.8, 1.05$  (I) и 0.005, 0.01, 0.01 (в вертикальной плоскости  $X - Z$ ) (II) и изоповерхности  $\beta+ = \pm 0.0052$ ,  $\beta- = 0.005$ ,  $\beta+ = \pm 0.005$  (III) при  $T = 0.28, 0.8, 1$ .  $S$  – боковая полуволна,  $f$  – нить,  $r$  – кольцевой вихрь вихревой оболочки следа  $O$ ,  $R$  – рециркуляционная область следа [1][1]