



Внутренние волны в двухслойной жидкости с непрерывной стратификацией в слоях¹

Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Черевко А.А.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Рассматривается нелинейная задача о внутренних волнах в двухслойной стратифицированной жидкости с плотностью, экспоненциально зависящей от глубины внутри слоев и имеющей скачок на поверхности раздела. Выведено уравнение второго длинноволнового приближения, описывающее бегущие уединенные волны, и охарактеризованы их дисперсионные свойства и предельные режимы распространения.

Математическая модель

Исследуемая гидродинамическая постановка является обобщением модели движения двухслойной жидкости с постоянными плотностями в слоях [1, 2]. Различные версии нелинейных асимптотических приближений, одновременно учитывающих и скачок плотности на границе раздела, и непрерывную стратификацию внутри слоев, предложены в [3–7]. В статье [3] такая гибридная схема названа 2.5-слойной моделью. Общий вид сдвигового течения под крышкой с кусочно-экспоненциальным профилем плотности, имеющим постоянную частоту плавучести N в слоях, показан на Рис. 1.

Исходной при построении длинноволнового приближения является система нелинейных уравнений Эйлера неоднородной жидкости для поля скоростей \mathbf{u} и давления p . Математическая фор-

мулировка задачи о бегущих волнах сводится в результате исключения давления к решению квазилинейного эллиптического уравнения Дюбрей-Жакотэн-Лонга для функции тока, дополненного кинематическим и динамическим граничными условиями на поверхности раздела.

Задача о двухслойных стратифицированных течениях даже без учета вязких и диффузионных свойств неоднородной жидкости является существенно многопараметрической [8]. Основными безразмерными константами в ней являются следующие параметры: а) плотностные (денсиметрические) числа Фруда F_j ($j = 1, 2$), представляющие фазовую скорость внутренней волны относительно каждого из слоев; б) параметры Буссинеска σ_j ($j = 1, 2$), характеризующие вертикальный гради-

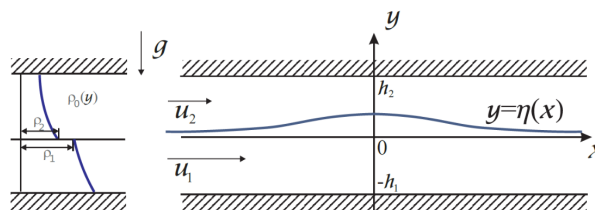


Рис. 1. Схема течения

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 21-71-20039).

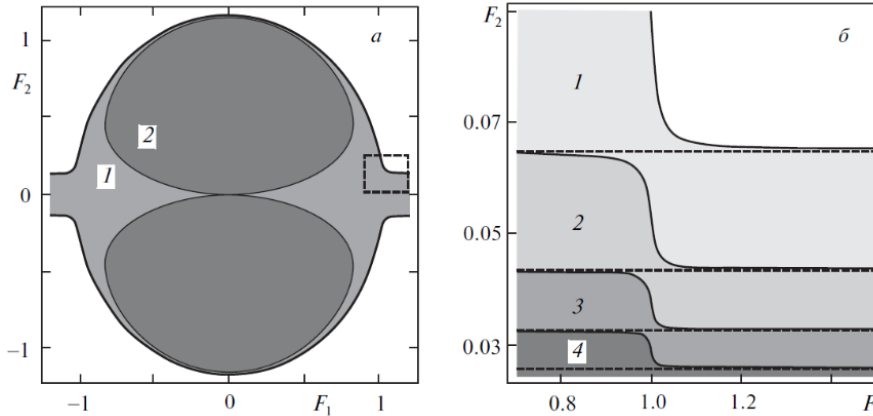


Рис. 2. Спектр главной моды (слева) и фрагмент спектра старших мод (справа); области 1 соответствуют тригонометрические собственные функции

ент плотности жидкости внутри слоев; в) параметр μ , задающий перепад плотности на границе раздела,

$$F_j^2 = \frac{\rho_j u_j^2}{g(\rho_1 - \rho_2)h_j}, \quad \sigma_j = \frac{N_j^2 h_j}{g}, \quad \mu = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2}.$$

Нелинейная дисперсионная модель второго длинноволнового приближения строится путем частичного разложения решения, использующего асимптотическое представление поля скоростей внутри области течения через неизвестную форму волновой поверхности η . Методом возмущений по параметрам слабой стратификации в итоге выводится нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для функции η , описывающие уединенные волны конечной амплитуды:

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = \eta^2 \frac{P(\eta, F_1, F_2)}{Q(\eta, F_1, F_2)} \quad (1)$$

Функции P и Q здесь являются квазиполиномами, соответственно, второй и четвертой степени по η с коэффициентами, которые зависят сложным тригонометрическим образом от η . При этом знаменатель Q оказывается положительным в области физически допустимых значений η , а знакопеременная функция P наследует информацию о дисперсионных свойствах исходных уравнений Эйлера. Решения типа уединенных волн главной моды ответвляются от основного течения на границе непрерывного спектра линеаризованной задачи, причем ветвление происходит в сверхкритическую область, где P положительна. На Рис. 2 показана структура спектра нормальных мод в сингулярном пределе исчезающе малой непрерывной стратификации внутри слоев.

Неравномерность предельного перехода по параметрам Буссинеска проявляется в возникнове-

нии спектральных пограничных слоев в плоскости чисел Фруда, которые содержат спектры старших мод. В то же время используемая асимптотическая процедура свободна от условий малости волновой амплитуды и охватывает такие режимы внутренних волн, как уединенные волны типа плато и плавные боры. Рис. 3 демонстрирует пример решения уравнения (1) в виде симметричной уединенной волны большой амплитуды, значительно превосходящей глубину невозмущенного верхнего слоя.

Если скачок плотности на поверхности раздела сравним с суммарными перепадами плотности по всей глубине прилегающих слоев, малый параметр μ имеет одинаковый порядок с параметрами Буссинеска σ_j . В этой ситуации, которая оказывается довольно типичной для придонных течений в океане с экстремально слабой глубоководной стратификацией, параметрическая область уединенных волн частично пересекается с областью сдвиговой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [5]. Указанная маргинальная устойчивость нелинейных волновых структур проявляется в часто наблюдаемом обрушении уединенных внутренних волн в окрестности их вершин, которое происходит в результате индуцированного волной местного усиления сдвига скорости потока.

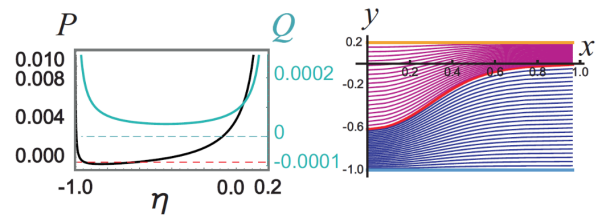


Рис. 3. Уединенная волна понижения (справа). Слева – соответствующие графики функций P и Q уравнения (1)

Список литературы

- [1] *Овсянников Л.В.* Лагранжевы приближения в теории волн. В кн.: Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. 1985. С. 10–77.
- [2] *Miyata M.* An internal solitary wave of large amplitude // *La Mer*. 1985. V. 23. №2. P. 43–48.
- [3] *Voronovich A.G.* Strong solitary internal waves in a 2.5-layer model // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 474. P.85–94.
- [4] *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л.* О спектре фазовых скоростей внутренних волн в двухслойной слабостратифицированной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*. 2009. № 2. С.125–145.
- [5] *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Морозов Е.Г., Тараканов Р.Ю., Иванова К.А.* Внутренние стационарные волны в глубоководных стратифицированных течениях // *ПМТФ*. 2019. Т.60. №2. С. 74–83.
- [6] *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Черевко А.А.* Внутренние волны в двухслойных стратифицированных течениях // *ПМТФ*. 2022. Т. 63. № 6. С. 135–144.
- [7] *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Черевко А.А.* Уединенные волны в двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией // *ПММ*. 2023. Т. 87. № 2. С. 186–198.
- [8] *Gavrilyuk S.L., Makarenko N.I., Sukhinin S.V.* *Waves in Continuous Media*. Cham, Switzerland: Birkhuser, 2017. 151 p.