



Сдвиговые течения вязкоупругой среды с несколькими временами релаксации

Ляпидевский В.Ю., Неверов В.В., Кармушин С.Р.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский Государственный университет(НГУ), Новосибирск

В работе рассматривается общая модель несжимаемой вязкоупругой жидкости с несколькими временами релаксации, частными случаями которой являются модели Джонсона-Сигалмана-Олдройда (ISO), Гизекуса и модель Роли-Поли. Показана гиперболичность рассматриваемой модели в одномерном случае. Предложен численный метод для расчета нестационарных одномерных разрывных решений. Численно решена нестационарная задача о течении Куэтта с переменной скоростью одной из границ. Исследован процесс образования высокоградиентных прослоек в течении вязкоупругой жидкости. В рамках рассматриваемой задачи проведено сравнение моделей ISO, Гизекуса и Роли-Поли между собой, а также сравнение расчетов с экспериментальными данными.

Введение

Многие жидкости, которые встречаются в природе или используются в технологических процессах не являются Ньютоновскими и имеют сложную реологию. Примерами являются полимерные растворы, гели, пасты, биологические жидкости и т.д. Одним из важнейших свойств таких сред является вязкоупругость. Известно [1], что даже в простых сдвиговых течениях вязкоупругих сред могут образовываться разрывы и высокоградиентные прослойки. Экспериментальное подтверждение возникновения внутренних разрывов приведено, например, в работах [2, 3].

В работе рассматривается общая модель вяз-

коупругой жидкости. Показано, что в случае сдвиговых течений модель является гиперболической. Численно исследовано возникновение сдвиговых расслоений в течении Куэтта вязкоупругой жидкости. Проведено сравнение расчетов с экспериментальными данными.

Математическая модель

В работе рассматривается многомодовая модель несжимаемой вязкоупругой жидкости

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{\tau}_i, \quad \lambda_i D \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\tau}_i + \mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}_i) = 2\mu_i \mathbf{D}, \quad (2)$$

где ρ — плотность, \mathbf{v} — скорость, p — давление, \mathbf{f} — вектор массовых сил, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, λ_i — время релаксации, соответствующее i -й моде, μ_i — динамическая вязкость i -й моды, \mathbf{D} — тензор скоростей деформации, $\mathbf{h}(\boldsymbol{\tau}_i)$ — функция от тензора

τ_i . Символом $D\tau_i$ обозначается объективная производная тензора τ_i ,

$$D\tau_i = \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tau_i + \frac{1 + \alpha_i}{2} (-\nabla \mathbf{v} \cdot \tau_i - \tau_i \cdot (\nabla \mathbf{v})^T) + \frac{1 - \alpha_i}{2} ((\nabla \mathbf{v})^T \cdot \tau_i + \tau_i \cdot \nabla \mathbf{v}) \quad (3)$$

это может быть верхняя конвективная производная ($\alpha_i = 1$), нижняя конвективная производная ($\alpha_i = -1$) или производная Яуманна ($\alpha_i = 0$).

Сдвиговые течения

Рассматривается класс сдвиговых течений, для которых скорость и тензор напряжений имеют вид

$$\mathbf{v} = (u(y), 0), \quad \tau_i = \begin{pmatrix} \xi_i & \pi_i \\ \pi_i & S_i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для сдвиговых течений выделяется два класса подмоделей:

1. Обобщенная модель JSO, т.е. $\mathbf{h}(\tau_i) = 0, \forall i$ и $\alpha_n = 1, |\alpha_i| \neq 1, i = 1, \dots, n - 1$;
2. Обобщенная модель Giesekus-Rolie-Poly, $\mathbf{h}(\tau_i) \neq 0, \alpha_i = 1, \forall i$.

Рассматривается одномерное нестационарное течение Куэтта вязкоупругой жидкости, в котором скорость одной из стенок зависит от времени. В настоящей работе показано, что система уравнений будет гиперболической для обоих классов подмоделей и может быть записана в дивергентном виде. В случае обобщенной модели JSO уравнения имеют вид:

$$\rho u_t = \sigma_y, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{i=n} \pi_i, \quad Z_i = \frac{1 - \alpha_i}{2} \xi_i - \frac{1 + \alpha_i}{2} S_i \quad (5)$$

$$\lambda_i \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + Z_i u_y \right) + \pi_i = \mu_i u_y, \quad (6)$$

$$\lambda_i \left(\frac{\partial Z_i}{\partial t} + (1 - \alpha_i)^2 \pi_i u_y \right) + Z_i = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

$$\pi_i(0, y) = \pi_i^0(y), \quad Z_i(0, y) = Z_i^0(y), \quad u(0, y) = u^0(y), \quad (8)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, H) = u^H(t). \quad (9)$$

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ для модели JSO ранее рассматривались, например, в работах [6–8]. В частности, в [8] было показано, что для случая $n = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ в модели JSO можно сделать замену

$$\varphi = \arctg \frac{\pi_1}{Z_1 + 1}, \quad P = \frac{1}{Re} (\pi_1 + \pi_2), \quad (10)$$

$$q = \sqrt{\pi_1^2 + (Z_1^2 + 1)^2}, \quad S = \pi_2 - \beta \varphi,$$

и записать уравнения (5)–(7) в дивергентном виде

$$Re \cdot u_t + P_y = 0, \quad \varphi_t - u_y = -\frac{\sin \varphi}{q}, \quad (11)$$

$$q_t = \cos \varphi - q, \quad S_t = \frac{\beta}{\kappa} \pi_2 + \frac{\sin \varphi}{q},$$

где

$$Re = \frac{\rho H^2}{\mu_1 \lambda_1}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \kappa = \frac{\mu_2 \lambda_2}{\mu_1 \lambda_1}. \quad (12)$$

Предложен численный алгоритм расчета нестационарных сдвиговых течений для обоих классов подмоделей. Основным отличием предложенного подхода является то, что в уравнения системы не добавляются члены с искусственной вязкостью, что позволяет с большей точностью выделять положение высокоградиентных прослоек и разрывов.

Результаты расчетов

В качестве тестовой задачи рассматривалась задача о нестационарном течении Куэтта, в котором скорость одной из границ зависит от времени. Эта задача часто возникает при интерпретации реологических осцилляционных тестов. Построены численные решения рассматриваемой нестационарной задачи для различных наборов параметров модели. В рамках задачи проведено сравнение частных случаев модели между собой, а также сравнение расчетов и экспериментальных данных.

Показано, что расчеты по предложенному методу дают хорошее совпадение с эксперименталь-

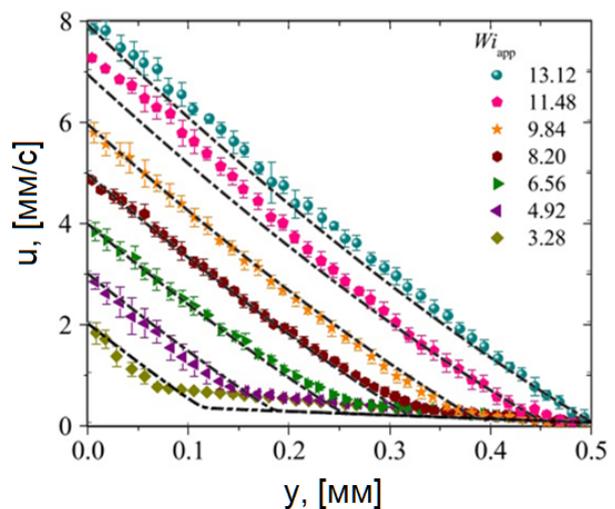


Рис. 1. Профиль скорости для разных скоростей движения левой границы. Сплошные линии — расчет по модели Giesekus ($Re = 0.001, \beta = 0.009, \kappa = 0.94$), точки — экспериментальные данные из работы [4]

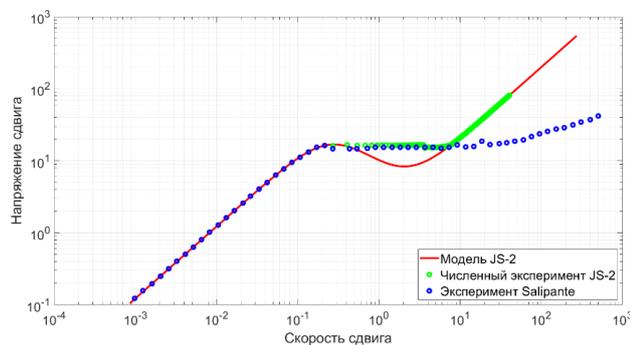


Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных из работы [5] (синие точки), расчета по стационарной модели (красная кривая) и расчета по нестационарной модели [6] (зеленая кривая)

ными данными. В частности, численные результаты корректно воспроизводят не только средние характеристики, но и внутреннюю структуру течения (Рис. 1). Было показано, что реологическая зависимость напряжений от скоростей деформации, полученная из расчетов по нестационарной обобщенной модели JSO сильно отличается от зависимости, полученной по стационарной модели. На

Рис. 2 показано, что учет нестационарности позволяет получить лучшее совпадение с расчетом с экспериментом.

Список литературы

- [1] Брутян М.А., Куликовский А.Г. Неустойчивость и неединственность квазистационарных течений вязкоупругой жидкости. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. №6 С. 29–39
- [2] Catheline S., Gennisson J.-L., Tanter M., Fink M. Observation of shock waves in elastic media // Phys. Rev. Lett. 2003. Т.91. № 16 С. 164301D
- [3] Divoux T., Fardin M.A., Manneville S., Lerouge S. Shear banding of complex fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 2016. Т.48. С. 81–103
- [4] Cheng P., Burroughs M.C., Leal L.G., Helgeson M.E. Distinguishing shear banding from shear thinning in flows with shear stress gradient // Rheol. Acta. 2017. Т.56. С.1007–1032
- [5] Salipante P.F., Little C.A.E., Hudson S.D. Jetting of a shear banding fluid in rectangular ducts // Phys. Rev. Fluids. 2017. №2 С. 033302
- [6] Malkus D.S., Nohel J.A., Plohr B.J. Analysis of new phenomena in shear flow of Non-Newtonian fluids // J. Appl. Math. 1991. Т.51. №4 С. 899–929
- [7] Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В. Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Тр. МИАН. 2013. Т. 281. С. 84–97
- [8] Ляпидевский В.Ю. Течение Куэтта вязкоупругой среды максвелловского типа с двумя временами релаксации // Тр. МИАН. 2018. Т. 300. С. 146–157