ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 4, с. 260–262

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.4.075.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.4.075

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Модели вихрей: история и развитие

Куйбин П.А.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

Вихревые течения широко распространены как в природе, так и при решении технических задач. На основе закрутки потока работают различного типа сепараторы и очистные устройства, горелки и топки, охладители и нагреватели, осушители и т.п. Для исследования закрученных течений используются методы экспериментального моделирования и вычислительной гидродинамики. Самый продуктивный подход в описании вихревых течений удается реализовать, когда появляется возможность аналитического описания характеристик потока. Примеры аналитических моделей вихрей можно найти в монографии [1]. В данной работе представлен обзор аналитических моделей вихрей и предложено развитие моделей винтовых вихрей.

Простейшей моделью вихря является прямолинейная вихревая нить, в которой завихренность сосредоточена на прямой линии. Такая нить генерирует (индуцирует) единственную компоненту (окружную в цилиндрической системе координат с осью z, совпадающей с нитью) скорости, величина которой пропорциональна интенсивности вихревой нити и обратно пропорциональна расстоянию от нее:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{1}$$

В реальных жидкостях завихренность может распределяться локализованно, но в конечных по размерам областях. Более реалистичная модель вихря была предложена Рэнкиным (William John Macquorn Rankine) в 19 веке. В модели завихренность распределена равномерно в цилиндрической области. В этом случае окружная скорость внутри цилиндра линейно растет, а вне его убывает по гиперболе:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r}\begin{pmatrix} r^2/\varepsilon^2, & r < \varepsilon \\ 1, & r \geqslant \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обобщение модели Рэнкина на случай винтовых течений, когда линии тока совпадают с вихревыми линиями, было сделано Васильевым [2]. Получена зависимость от радиальной координаты не только для окружной компоненты скорости, но и для осевой:

$$V = \alpha r, \quad W = \sqrt{V_0^2 - 2\alpha r}. \tag{3}$$

Более сложные модели колоннообразных вихрей учитывают неравномерное распределение завихренности в вихревом ядре. В качестве примера можно привести вихрь Ламба–Озеена [3, 4], для которого завихренность имеет не ступенчатое, а гауссово распределение завихренности:

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi\varepsilon^2}\exp\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right), \quad V = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(\frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right]. \tag{4}$$

Формулы (3) соответствует решению задачи о диффузии завихренности для прямолинейной вихревой нити, где эффективный размер вихревого ядра растет со временем: $\varepsilon^2 = 4\nu t$, t — время, а n — кинематическая вязкость.

Еще одна удобная для использования модель была предложена Кауфманном [5] (более известна, как модель Скалли [6]):

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi\varepsilon^2}\left(1 + \frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^{-2}, \quad V = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{r}{r^2+\varepsilon^2}. \tag{5}$$

Ватистас [7] развил модель Скалли, предложив семейство вихрей с распределением скорости следующего вида:

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{r}{\left(r^{2n}+\varepsilon^{2n}\right)^{1/n}}. \tag{6}$$

Обобщение моделей вихрей (2), (4), (5) на случай осесимметричных течений с винтовыми вихревыми линиями было предложено в работе [8]. При этом осевая компонента скорости связана с окружной соотношением:

$$W = W_0 - \frac{r}{l}V. \tag{7}$$

Здесь W_0 — значение осевой скорости на оси потока, $h = 2\pi l$ — шаг винтовых вихревых линий. Преимущество обобщения заключается в возможности описания закрученных течений типа струй и типа следов с неоднородным распределением осевой скорости.

Другой класс моделей вихрей связан с пространственно локализованными вихрями. В первую очередь к этому классу относятся вихревые кольца. Поле скорости, индуцированное бесконечно тонкой вихревой нитью радиуса r_0, выражается через полные эллиптические интегралы первого и второго рода, K и E [4]:

$$\begin{gathered} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \\ \Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{rr_0}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right], \\ k = \frac{4rr_0}{z^2+(r+r_0)^2}. \end{gathered} \tag{8}$$

Кольцевая вихревая нить движется в направлении бинормали с бесконечной скоростью. Для вихревого кольца с радиусом ядра $\varepsilon \ll r_0$ и с равномерным распределением завихренности формула для скорости движения кольца была получена Кельвином [9]:

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi r_0}\left(\ln\frac{8r_0}{\varepsilon} - \frac{1}{4}\right). \tag{9}$$

Хикс [10] получил аналогичную формулу для случая полого вихря, где в скобках вместо $1/4$ стояла $1/2$. В настоящее время и экспериментальное и теоретическое описание вихревых колец получили значительное развитие (см., например, [11, 12]).

Третья группа моделей вихрей касается винтовых вихрей, первые исследования которых проводились в начале XX века [13, 14], где были получены приближенные формулы для самоиндуцированной скорости винтовых вихрей. Поле скорости, индуцированное вихревой нитью произвольной формы можно найти через интеграл Био–Савара. В случае винтовой вихревой нити требуется вести интегрирование вдоль бесконечной нити. Хардин [15] преобразовал интегралы к рядам с коэффициентами, представленными через модифицированные функции Бесселя (ряды Каптейна). Для моделирования реальных винтовых вихрей необходимо переходить к вихрям с конечным размером ядра. Мур и Сэффмэн [16] предложили оценивать самоиндуцированную скорость с помощью добавления и вычитания соприкасающегося вихревого кольца. Рикка [17] реализовал этот подход при численных расчетах на основе представления поля скорости из [15]. Из общей теории вихревых нитей [18] известно, что локально вихрь движется в направлении бинормали, а сама бинормальная компонента скорости в окрестности вихревой нити может быть представлена в виде разложения, содержащего полюс, логарифмическую особенность, константу и малые величины. Рикка отметил, что константа отличается примерно на 0.25 от аналогичной константы в формуле для самоиндуцированной скорости [16]. Значительный прогресс в описании винтовых вихрей был достигнут после работы [19], где авторы применили технику прямого выделения особенностей в рядах типа Каптейна. Это позволило проводить расчеты поля скорости с высокой точностью; найти поле скорости для винтовой нити, расположенной соосно в цилиндре; было доказано, что в пределах малых и больших шагов винта константы отличаются точно на $1/4$. Следом, в работе [20] была доказана справедливость этого отличия при произвольном шаге винта.

В монографии [1] представлена модель для описания поля осредненных по окружной координате скоростей для винтового вихря с ядром конечного размера. Сопоставив их с экспериментально измеренными скоростями, можно найти параметры винтового вихря и по формулам из [19], оценить частоту прецессии вихря. В недавней экспериментальной работе [20] найдены режимы закрученного потока, сопровождающиеся образованием пары винтообразных прецессирующих вихрей. Для описания такой картины предложено обобщение упомянутой модели на случай композиции колоннообразного осесимметричного вихря и пары винтовых вихрей.

Список литературы

[1] *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.

[2] *Васильев О.Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.

[3] *Oseen C.W.* Uber die Wirbelbewegung in einer reibenden Flussigkeit // Ark. Mat. Astro. Fys. 1912. Vol. 7. P. 14–26.

[4] *Lamb H.* Hydrodynamics. 3rd ed. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1906. 650 p.

[5] *Kaufmann W.* Über die Ausbreitung kreiszylindrischer Wirbel in zähen Flüssigkeiten // Ingenieur–Archiv. 1962. Vol. 31, No. 1. P. 1–9.

[6] *Scully M.P., Sullivan J.P.* Helicopter rotor wake geometry and airloads and development of laser doppler velocimeter for use in helicopter rotor wakes // Massachusetts Institute of Technology Aerophysics Laboratory Technical Report 183, MIT DSR No. 73032, 1972.

[7] *Vatistas G.H., Kozel V., Mih W.C.* A Simpler Model for Concentrated Vortices // Experiments in Fluids. 1991. Vol. 11. P. 73–76.

[8] *Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Одномерные решения для течений с винтовой симметрией // Теплофизика и аэромеханика. 1996. № 4. С. 311–315.

[9] *Kelvin, Lord.* The translatory velocity of a circular vortex ring // Philos. Mag. 1867. Vol. 33. P. 511–512.

[10] *Hicks W.M.* Researches on the theory of vortex rings. Part II // Philos. Trans. R. Soc. London. 1885. A176. P. 725–780.

[11] *Ахметов Д.Г.* Вихревые кольца. Новосибирск: Гео, 2007. 151 с.

[12] *Fukumoto Y.* Global time evolution of viscous vortex rings // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2010. Vol. 24. P. 335–347.

[13] *Жуковский Н.Е.* Вихревая теория гребного винта // Труды Отделения Физических наук Общества Любителей Естествознания. 1913. Т. 16, № 1.

[14] *Da Rios L.S.* On the motion of an unbounded fluid with a vortex filament of any shape (in Italian) // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1906. V. 22. P. 117–135.

[15] *Hardin J.C.* The velocity field induced by a helical vortex filament // Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. P. 1949–1952.

[16] *Moore D.W., Saffman P.G.* The motion of a vortex filament with axial flow // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. Vol. A272. P. 403–429.

[17] *Ricca R. L.* The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 273. P. 241–259.

[18] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

[19] *Kuibin P.A., Okulov V.L.* Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of helical vortex filament // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. P. 607–614.

[20] *Boersma J., Wood D.H.* On the self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 384. P. 263–280.