



Анализ подходов к моделированию диссипации звуковых волн в гидродинамике сглаженных частиц¹

Бурмистрова О.А., Маркелова Т.В., Арендаренко М.С., Стояновская О.П.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой численный метод аппроксимации нестационарных уравнений в частных производных. Основу метода составляет способ вычисления пространственных производных от функции, значения которой заданы в подвижных нерегулярно расположенных в пространстве узлах — лагранжевых частицах. Для аппроксимации уравнений по значениям функции, известной в узлах, строится гладкая интерполирующая функция с помощью ядра (функции радиального базиса), носитель которого охватывает несколько соседних частиц. Такой способ интерполяции означает, что пространственное разрешение метода (точность интерполирования и вычисления производных от интерполянта) определяется независимыми параметрами — размером ядра и расстоянием между модельными частицами, а также видом ядра.

В настоящее время численные модели меха-

ники сплошных сред на основе SPH интенсивно развиваются. Критерии подбора численного разрешения метода носят эмпирический характер. В работе предпринимается попытка получить такой критерий для параболических уравнений на основе классического метода вычислительной математики — дисперсионного анализа.

Дисперсионное соотношение для одномерного уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = A^2 u_{xx}$$

имеет вид

$$\omega = -iA^2 k^2,$$

где k — волновое число, ω — частота.

Рассмотрены четыре SPH-аппроксимации [?] данного уравнения. Для каждой аппроксимации получено дисперсионное соотношение. Среди четырех рассмотренных выделены две схемы, обеспечивающие сходимость численного решения при $K \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$ независимо друг от друга, где K — число радиусов сглаживания в длине волны, φ — величина, обратная количеству соседних частиц в радиусе сглаживания. Первая схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_a}{dt} = u_a, & \rho = const \\ \frac{du_a}{dt} = A^2 \sum_b \frac{m}{\rho} (u_b - u_a) \frac{\partial^2 W(x_a - x_b)}{\partial x_a^2}, \end{cases} \quad (1)$$

¹Работа выполнена за счет средств гранта РФФ № 23-11-00142.

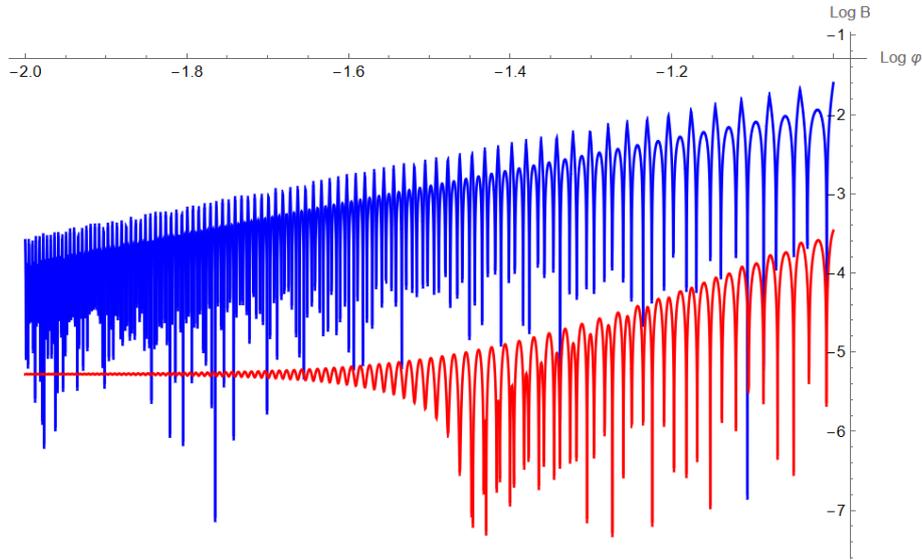


Рис. 1. Графики погрешности при фиксированном K для схемы (1) в двойном логарифмическом масштабе. Синяя линия соответствует ядру C2, красная — ядру C4

вторая — вид

$$\begin{cases} \frac{dx_a}{dt} = u_a, & \rho = const, \\ \frac{du_a}{dt} = A^2 \sum_b 2 \frac{m}{\rho} \frac{(u_a - u_b)}{x_a - x_b} \frac{\partial W(x_a - x_b)}{\partial x_a}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x_a — координата рассматриваемой частицы, x_b — координаты соседних частиц, ρ и m — плотность и масса одной частицы соответственно, W — ядро метода. Дисперсионное соотношение для схемы (1) имеет вид

$$\omega = -iA^2k^2 \sum_{j=0}^{[1/\varphi]} \frac{\varphi K^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi\varphi j}{K}\right) \tilde{W}_2(j\varphi),$$

для схемы (2) — вид

$$\omega = iA^2k^2 \sum_{j=1}^{[1/\varphi]} \frac{2K^2}{j\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi\varphi j}{K}\right) \tilde{W}_1(j\varphi).$$

Здесь \tilde{W}_1 и \tilde{W}_2 — первая и вторая производные безразмерного ядра \tilde{W} . Таким образом, дисперсионные соотношения для SPH-схем отличаются от дисперсионного соотношения уравнения Бюргера наличием в правой части соответствующего множителя.

Установлено, что для схем (1) и (2) порядок аппроксимации по φ определяется видом ядра и совпадает с его гладкостью. Аналогичный результат известен для гиперболических уравнений [2]. На Рис. 1 приведены графики погрешности фазовой

скорости $B(K, \varphi, W)$ схемы (1) при $K = 500$ и ядрах Вендланда гладкости 2 (C2)

$$\tilde{W}(q) = \begin{cases} \frac{5}{4}(1-q)^3(1+3q), & 0 \leq q < 1, \\ 0, & q \geq 1 \end{cases}$$

и гладкости 4 (C4)

$$\tilde{W}(q) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-q)^5(1+5q+8q^2), & 0 \leq q < 1, \\ 0, & q \geq 1. \end{cases}$$

На Рис. 2 приведены графики погрешности $B(K, \varphi, W)$ схем (1) и (2) при фиксированном $K = 1000$ и ядре Вендланда C2. Обнаружено, что погрешность фазовой скорости схемы (1) на порядки отличается от погрешности фазовой скорости схемы (2). Аналитические выводы подтверждены численными расчетами.

Список литературы

- [1] Fatehi R., Manzari M.T. Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives // Computers and Mathematics with Applications. 2011. № 61. P. 482–498.
- [2] Stoyanovskaya O.P., Lisitsa V.V., Anoshin S.A., Savvateeva T.A., Markelova T.V. Dispersion analysis of SPH as a way to understand its order of approximation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 438. P. 115495.

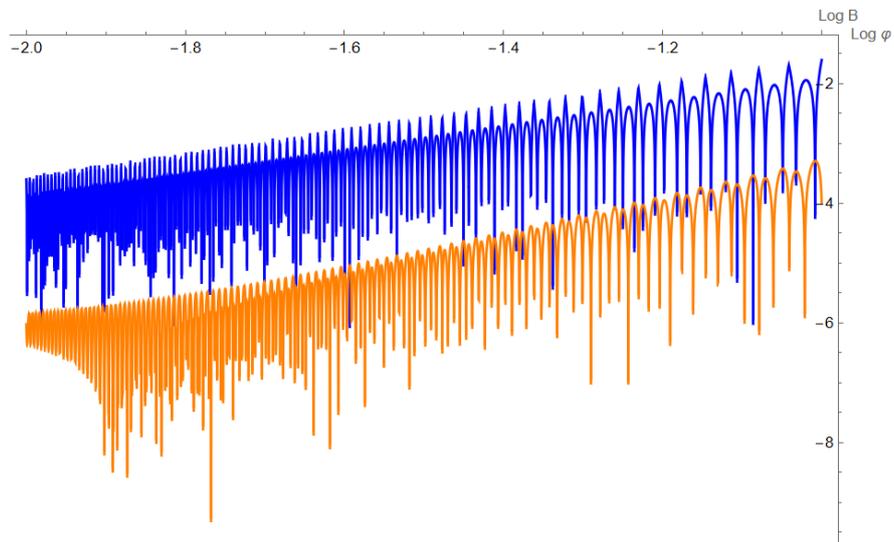


Рис. 2. Графики погрешности при фиксированном K и ядре S_2 для схемы (1) (синяя линия) и схемы (2) (оранжевая линия) в двойном логарифмическом масштабе