



## Оценка диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта в процессе движения жидкости<sup>1</sup>

Юй Чжаокай

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва

### Введение

Экспериментальные данные Г.Н. Микишева и Н.Я. Дорожкина [1] по определению логарифмического декремента малых колебаний реальной жидкости дают значение на 40% большие, чем расчёты с использованием теории погранслоя. В монографии [2] показывается, что неучёт эффектов вблизи линии трёхфазного контакта (ЛТК) является одной из основных причин рассогласования. В статье [3] предложено, что в процессе движения жидкости угол смачивания изменяется, пропорциональный скорости движения линии трёхфазного контакта, и сформулировано краевое условие с учётом изменения угла смачивания на линии трёхфазного контакта. Но полученное условие справедливо только для движения жидкости в цилиндрических сосудах при угле смачивания, равном 90 градусов. В статье [4] разработан метод малого параметра для учёта диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта по аналогии с теорией пограничного слоя. В работе [5] построен численный алгоритм определения коэффициента демпфирования колебаний жидкости на основе метода конечных элементов. И

в [6] предложен приближённо-аналитический метод оценки влияния изменения угла смачивания на диссипацию энергии вблизи линии трёхфазного контакта.

### Вывод граничного условия

Непосредственные наблюдения показывают, что жидкость в первый период колебаний смачивает стенку сосуда и при следующих циклах совершает движение по поверхности, покрытой плёнкой малой толщины. Именно в этой плоскости контакта возникают касательные напряжения трения. Непосредственные наблюдения показывают, что жидкость в первый период колебаний смачивает стенку сосуда и при следующих циклах движется по поверхности, покрытой плёнкой жидкости малой толщины. В плоскости контакта возникают касательные напряжения трения  $F_\tau$ , пропорциональные касательной составляющей скорости  $(\partial h / \partial t) / \sin \alpha_0$  и некоторому коэффициенту трения  $\mu_\gamma$ .

При плескании жидкости движущаяся сила  $\sigma^*$ , вызванная отличием  $\alpha^*$  динамического угла смачивания от статического (Рис. 1), уравновешивается  $F_\tau$ :

$$F_\tau = -\mu_\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \frac{1}{\sin \alpha_0}, \quad \sigma^* = \sigma \alpha^* \sin \alpha_0,$$

$$F_\tau + \sigma^* = 0 \Rightarrow \alpha^* = \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по стипендиям Китая.

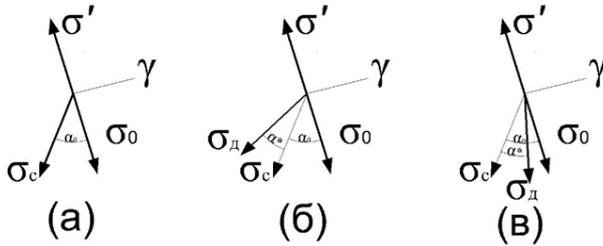


Рис. 1. Схема изменения угла смачивания жидкости: (а) – равновесие, (б) – жидкость движется в сторону газа, (в) – движется от стороны газа, где  $\sigma_0$  и  $\sigma'$  – поверхностное натяжение разделов жидкости–стенки и газа–стенки,  $\sigma_c$  и  $\sigma_d$  – статическое и динамическое поверхностное натяжение раздела жидкости–газа, их модули равны  $\sigma$

Используя полученные результаты о возмущениях свободной поверхности в работе [7]], получено новое граничное условие с учётом изменения угла смачивания для произвольной формы сосуда:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma.$$

Параметр  $\chi$  описывает форму стенки и свободной поверхности на ЛТК [8]. Из полученного граничного условия вытекают другие две модели движения ЛТК:

- 1)  $\mu_\gamma = 0$ , т.е. имеем условие о сохранении угла смачивания, как было показано в работах Н.Д. Копачевского:  $\partial h / \partial e + \chi h = 0$  на  $\gamma$ ;
- 2)  $\mu_\gamma \rightarrow \infty$ , т.е. имеется модель неподвижной ЛТК:  $h = 0$  на  $\gamma$ .

### Формулировка задачи

Вариационная формулировка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости с учётом изме-

нения угла смачивания имеет вид:

$$\delta I = 0,$$

$$I = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[ B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n^2 + \nabla_\Gamma h_n \nabla_\Gamma h_n \right\} d\Gamma_0 + \chi \int_\gamma h_n^2 d\gamma + C_a \Omega_n \int_\gamma h_n^2 d\gamma + \int_\Omega \nabla \phi_n \nabla \phi_n d\Omega,$$

выражения числа Бонда  $B_0$ , главной кривизны поверхности  $k_1$  и  $k_2$ , параметра линии трёхфазного контакта  $\chi$  приведены в работе [9], где  $\Omega_n = -\varepsilon_n + i\omega_n$  – комплексная частота колебаний жидкости, а  $\varepsilon_n$  – коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на ЛТК,  $C_a$  – число капиллярности, характеризующее соотношение вязкого трения и поверхностного натяжения:

$$C_a = \frac{\mu_\gamma}{\sin^2 \alpha_0 \sqrt{\rho l \sigma}} = \frac{\sqrt{\rho l^3 \omega_n^2 / \sigma}}{\rho l^2 \omega_n \sin^2 \alpha_0 / \mu_\gamma} = \frac{\omega_n^*}{Re_n^* \sin^2 \alpha_0}.$$

### Обсуждение результатов

Из Рис. 2 следует, что число капиллярности  $C_a$  в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи линии контакта и коэффициент демпфирования  $\varepsilon_1$  имеет один порядок как коэффици затухания вблизи стенки сосуда. А из выражения числа капиллярности  $C_a$  видно, что при маленьком угле смачивания  $\alpha_0$  и большом коэффициенте трения  $\mu_\gamma$  число капиллярности  $C_a$  реальной жидкости может быть находится в этом диапазоне.

На Рис. 3 видно, что собственная частота  $\omega_1$  при  $C_a$  в диапазоне 10–100 монотонно увеличивается с повышением числа капиллярности. При  $C_a \rightarrow 0$  собственная частота совпадает с численным значением частоты колебаний жидкости с граничным условием о сохранении угла смачивания  $\alpha_0$ , а при  $C_a \rightarrow \infty$  частота  $\omega_1$  приближается к результатам при неподвижной ЛТК ( $h = 0$  на  $\gamma$ ).

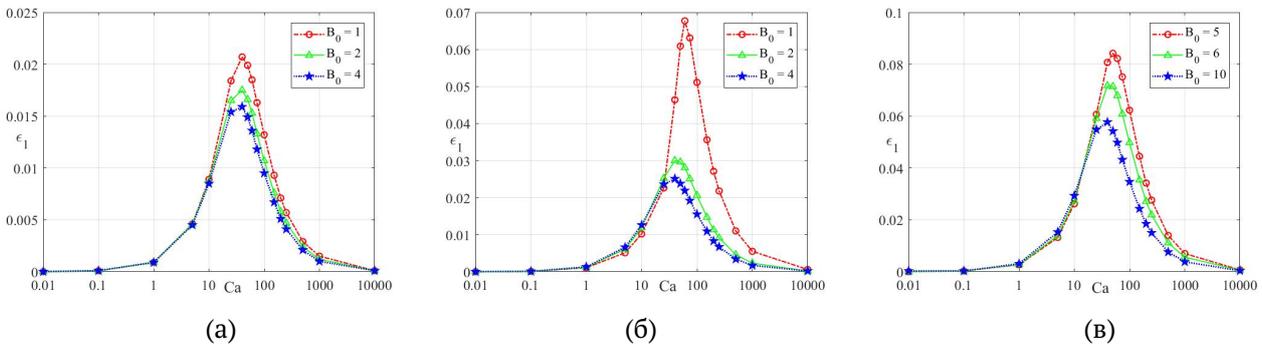


Рис. 2. Коэффициент затухания основного тона  $\varepsilon_1$  в зависимости от числа капиллярности  $C_a$  и числа Бонда  $B_0$ , (а) –  $\beta = 20\%$ , (б) –  $50\%$  и (в) –  $80\%$

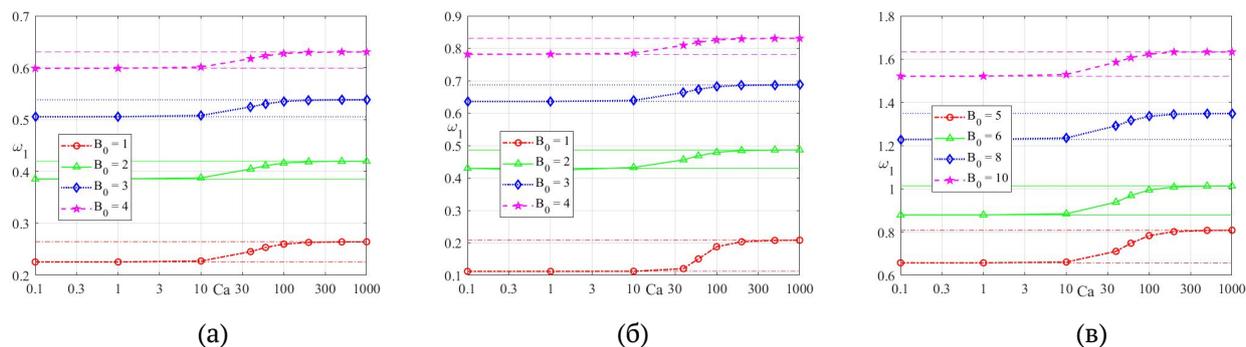


Рис. 3. Собственная частота основного тона  $\omega_1$  в зависимости от числа капиллярности  $Ca$  и числа Бонда  $B_0$ , (а) –  $\beta = 20\%$ , (б) –  $50\%$  и (в) –  $80\%$

## Выводы

Введено новое граничное условие на линии трёхфазного контакта с учётом диссипации энергии, вызываемой изменением угла смачивания в процессе движения жидкости. После решения задачи о малых колебаниях маловязкой капиллярной жидкости с применением нового граничного условия получены комплексные числа с отрицательной вещественной частью и определены коэффициенты демпфирования колебаний жидкости вблизи линии трёхфазного контакта. Количественно оценено влияние числа Бонда  $B_0$ , объёма жидкости  $\beta$  и введённого числа капиллярности  $Ca$  на значение коэффициента демпфирования вблизи линии трёхфазного контакта. Число капиллярности  $Ca$  в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта.

Автор выражает благодарность к.ф.-м. А.Н. Темнову и д.т.н. П.М. Шкапову за помощь в формулировке задачи и плодотворные обсуждения результатов работы.

## Список литературы

- [1] Микишев Г.Н., Дорожкин Н.Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах // Механика и машиностроение. 1961. № 4.
- [2] Богоряд И.Б. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. Томск: Издательство Томского университета, 1980. 101 с.
- [3] Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // Journal of Fluid Mechanics. 1987. V. 179. P. 253?266.
- [4] Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // Journal of Fluid Mechanics. 1991. V. 222. P. 197?205.
- [5] Wang W. Study on liquid sloshing with small amplitude considering capillary effect (in Chinese). Dissertation for the degree of Doctor of Engineering. Beijing: Tsinghua University, 2008. 141 p.
- [6] Utsumi M. Slosh damping caused by friction work due to contact angle hysteresis // AIAA Journal. 2017. V. 55. No. 1. P. 179.
- [7] Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. О малых возмущениях равновесной поверхности капиллярной жидкости // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. № 4. С. 695?702.
- [8] Мышкис А. Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова Думка. 1992. 592 с.
- [9] Юй Чжаокай. Vimage1.ерсолновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом силы поверхностного натяжения. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2022, № 78. С. 151–165.