



## Форма гидравлического прыжка в плоской постановке<sup>1</sup>

Сухов А.Д., Петров А.Г.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

### Введение

Течение в открытых каналах, как направление гражданского строительства изучается уже долгое время с помощью лабораторных, численных и натурных экспериментов. Гидравлический прыжок возникает в том случае, когда начинают доминировать силы инерции, а число Фруда  $Fr = u / \sqrt{gh}$  становится много большим 1 [1]. Тогда уровень воды может резко возрасти, что в строительстве может использоваться в качестве механизма рассеивания энергии. При этом ключевыми параметрами для проектирования водных сооружений являются место, где происходит прыжок, его начальная глубина и протяженность прыжка. Пионером в данной области был французский ученый Беланджер, который экспериментально связал отношение двух высот прыжка к начальному числу Фруда [2]. Реллей [3] установил эту связь из законов сохранения расхода и импульса. В более поздних работах экспериментальных работах по гидравлическому прыжку [4–8] еще много раз были найдены основные параметры потока, такие как отношение высот прыжка, дли-

на прыжка, а главное в данных работах зачастую приводится и профиль прыжка, который позволяет произвести наиболее полное сравнение результатов теоретического и экспериментального исследования. Данное исследование посвящено исследованию профиля плоского гидравлического прыжка, то есть стационарного течения жидкости со свободной поверхностью в виде функции  $h(x)$  и двумя горизонтальными асимптотами:  $h(-\infty) = h_1$ ,  $h(+\infty) = h_2$ , где  $h_1 < h_2$ . На Рис. 1 представлена картинка, демонстрирующая постановку задачи.

### Основная часть

В нашей работе мы применяем уравнения Буссинеска для каналов [9–11]

$$\begin{aligned} Q &= hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx}, \\ P &= \frac{gh^2}{2} + \frac{\dot{h}h^2}{3}, \quad \dot{h} = u \frac{d}{dx} \left( u \frac{dh}{dx} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений интегрируется следующим образом. Сначала интегрируем второе уравнение (1):  $Qu + P + A_1 = 0$ . Подставляя в него выражение для  $P$  и  $u = Q/h$ , получим

$$\frac{Q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + \frac{hQ^2}{3} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right) + A_1 = 0.$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 22-21-00833.

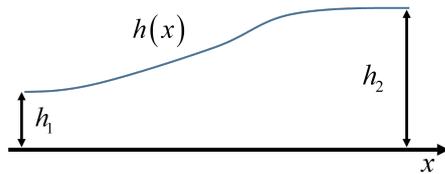


Рис. 1. Постановка задачи гидравлического прыжка

Если умножить это уравнение на  $\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx}$ , то его можно записать в виде производной

$$\frac{d}{dx} \left[ -\frac{Q^2}{2h^2} + \frac{gh}{2} + \frac{Q^2}{6} \left( \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{A_1}{h} \right] = 0.$$

Отсюда получаем полный интеграл системы. Из него можно выразить производную высоты поверхности по координате, как функцию от высоты поверхности.

$$(h')^2 = Pol(h) = 3 \left( 1 + \frac{2}{Q^2} A_1 h + \frac{2}{Q^2} A_2 h^2 - \frac{gh^3}{Q^2} \right). \quad (2)$$

Кубический полином  $Pol(h)$  имеет три корня. Если корни действительные  $h_0 < h_1 < h_2$ , то уравнение имеет следующий вид

$$h' = \pm \sqrt{Pol(h)},$$

$$Pol(h) = 3 \left( 1 - \frac{h}{h_0} \right) \left( 1 - \frac{h}{h_1} \right) \left( 1 - \frac{h}{h_2} \right) \quad (3)$$

и определяет периодические волны, где  $h_1, h_2$  — минимальная и максимальная высоты волны соответственно. В случае совпадения корней  $h_0 = h_1$ , мы получаем решения в виде уединенной волны (солитона). Корни  $h_1$  и  $h_2$  соответствуют низшей и высшей точкам волны. Расход выражается через из уравнений (2) и (3) путем приравнивания коэффициентов в полиноме при третьей степени таким образом:  $Q^2 = gh_0 h_1 h_2 < gh_1 h_2 (h_1 + h_2) / 2$ . Он точно меньше, чем расход в гидравлическом прыжке, который должен получаться, исходя из фундаментальных законов сохранения. Поэтому система уравнений (1) не применима для описания гидравлического прыжка. Его можно попытаться описать, дополнив уравнение силой  $f$ . Данная сила имеет физический смысл вихревых сопротивлений на свободной границе гидравлического прыжка и на дне.

$$Q = hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} - f, \quad P = \frac{gh^2}{2} + \frac{\dot{h}h^2}{3}. \quad (4)$$

Такой же подход применен в работе Гаврилюка [12], в которой сила берется пропорциональной

квадрату скорости. В этом случае уже проинтегрировать аналитически систему уравнений не удается, и она исследуется только численно. Мы же подберем силу, задав ее потенциал  $G$  так, чтобы сила не меняла полный импульс в системе, то есть должны выполняться законы сохранения. Покажем, что сила, определяемая по формуле

$$f = -\frac{dG}{dx},$$

$$G = \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left( h^2 \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^3}{h_1 h_2} \right) - \frac{gh^2}{2}. \quad (5)$$

с расходом  $Q^2 = gh_1 h_2 (h_1 + h_2) / 2$  не меняет импульс системы.

Аналогичным образом можем получить производную высоты в новой системе уравнений.

$$\left( \frac{dh}{dx} \right)^2 = 3 \left( 1 - \frac{h}{h_2} \right)^2 \left( 1 - \frac{h}{h_1} \right)^2. \quad (6)$$

Таким образом, мы можем описывать профиль гидравлического прыжка (Рис. 2) зная соотношения высот на бесконечностях. А само соотношение высот хорошо предсказывается, исходя из соотношения Беланджера [13, 14].

## Список литературы

- [1] Hager W.H. Critical flow condition in open channel hydraulics // Acta Mechanica, 1985. V. 54(3). P. 157–179.
- [2] Belanger J.B. Essai sur la solution numerique de quelques problemes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes; [Essay on the numerical solution of some problems relative to steady flow of water] par m. J.-B. Belanger. chez Carilian-Goeury, libraire, des corps royaux des ponts et chaussees et des mines, 1828. (in French).
- [3] Rayleigh Lord On the Theory of Long Waves and Bore. Proc. Roy. Soc. A. 1914. 90, 324; Papers, 6, 250. Cambridge University Press.
- [4] Hager W.H., Hutter K. Approximate treatment of the plane hydraulic jump with separation approximate treatment of the plane hydraulic jump with separation zone above the flow zone above the flow zone // Journal of Hydraulic Research. 1983. V. 21(3). P. 195–204.
- [5] Schröder R. Ein Beitrag zur Frage der Energieumwandlung und Turbulenz diskontinuierlicher Wasserströmungen mit freier Oberfläche (A contribution to the question of energy dissipation and the turbulence of discontinuous water flow) 1957. (Doctoral dissertation, Ph. D. dissertation, Institute of Hydraulic Engineering and Water Resources Management, Technische Universität Berlin, Berlin (in German)).
- [6] Schröder R. Die turbulente Strömung im freien Wechselsprung. 1963. (In German).
- [7] Murzyn, F., Chanson, H. Free surface, bubbly flow and turbulence measurements in hydraulic jumps, 2007.
- [8] Wóycicki K. Wassersprung, Deckwalze und Ausfluss unter einer Schütze. Diss. ETH Zurich, 1951. (in German).
- [9] Benjamin T. B., Lighthill M. J. On cnoidal waves and bores. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. // Mathematical and Physical Sciences. 1954. V. 224(1159). P. 448–460.

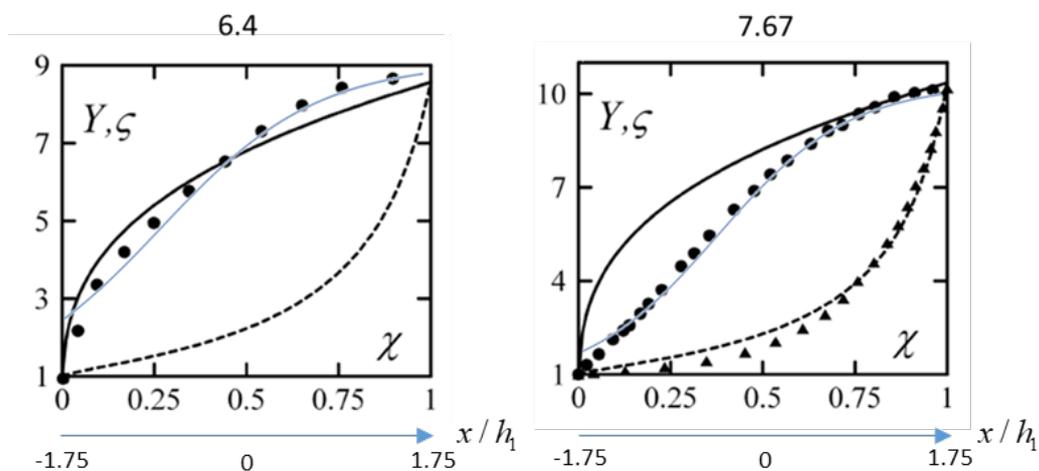


Рис. 2. Сравнение профиля прыжка с экспериментом и другой современной аналитической моделью с разными начальными числами Фруда (слева 6.4 и 7.67 справа). Черные точки – эксперимент [15], черная линия – аналитическая модель [15], черные треугольники – эксперимент (отделены точки безвихревой зоны) [15], черная пунктирная линия – аналитическая модель [15], синяя линия – наша модель

[10] Petrov A.G. Integrating the Long Wave equations in Kulikovskii–Drozdova Form // Dokl. Ross. Akad. Nauk. 2000. V. 373. P. 762–766.

[11] Petrov A.G. Integration of the Boussinesq Equations for Steady Channel and Jet Flows // Fluid Dynamics. 2007. Vol. 42, No. 6. P. 966–977.

[12] Richard, G. L., Gavriluk, S. L. The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows // Journal of Fluid Mechanics. 2013. V. 725. P. 492–521.

[13] Агроскин И.И. Гидравлика. М.–Л. 1964. 352 с. (in Russian).

[14] Khatsuria Rajnikant M. Hydraulics of spillways and energy dissipators. CRC Press, 2004.

[15] Castro-Orgaz O., Hager W. H. Classical hydraulic jump: Basic flow features // Journal of Hydraulic Research. 2009. V. 47(6). P. 744–754.