



Растекание тонкого слоя вязкой жидкости по твердой поверхности и гидравлический прыжок в поле продольной массовой силы

Смирнов К.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

При ударе вертикальной струи жидкости о твердую поверхность формируется течение тонкой пленки, и на некотором расстоянии от струи происходит резкий скачок толщины пленки. Такое явление называется гидравлическим прыжком, при этом происходит переход от «сверхкритического» к «докритическому» режиму течения. В сверхкритическом режиме скорость течения больше скорости распространения гравитационных волн по поверхности жидкости, а в докритическом — меньше. В рамках газогидродинамической аналогии гидравлический прыжок соответствует ударной волне [1]. В классической постановке задачи имеется вертикальная струя жидкости, ударяющаяся о плоский неподвижный диск; на некотором расстоянии от струи происходит резкий переход к медленному течению пленки большей толщины [2]; радиус прыжка не может быть определен в рамках модели идеальной жидкости, поскольку он определяется балансом инерционных, гравитационных и вязких сил [3]. В данной работе рассматривается влияние дополнительных продольных сил, ускоряющих течение жидкости, и изучается влияние этих сил на

положение и структуру прыжка. Рассматривается два случая: течение по сферической «шапочке» и течение на вращающемся диске.

Постановка задачи

Пусть вертикальная круглая струя несжимаемой жидкости падает в центр симметрии поверхности (центр сферической шапочки или центр диска соответственно), при этом ось струи совпадает с осью симметрии (Рис. 1). В случае со сферой роль массовой силы играет проекция компоненты силы тяжести за счет наличия кривизны у поверхности, а в случае течения на вращающемся диске — центробежная сила. Также на вращающемся диске нужно учитывать кориолисову силу, действующую в азимутальном направлении. Течение стационарно и осесимметрично, действие капиллярных сил несущественно, кроме небольшой области самого прыжка и края диска. Область вблизи оси симметрии, где происходит перестройка течения от вертикального к радиальному, а также прорастание пограничного слоя на всю толщину пленки, не рассматривается — вязкое течение считается развитым. Край диска также не рассматривается, краевая задача ставится на отдалении от струи и на некотором расстоянии от края диска.

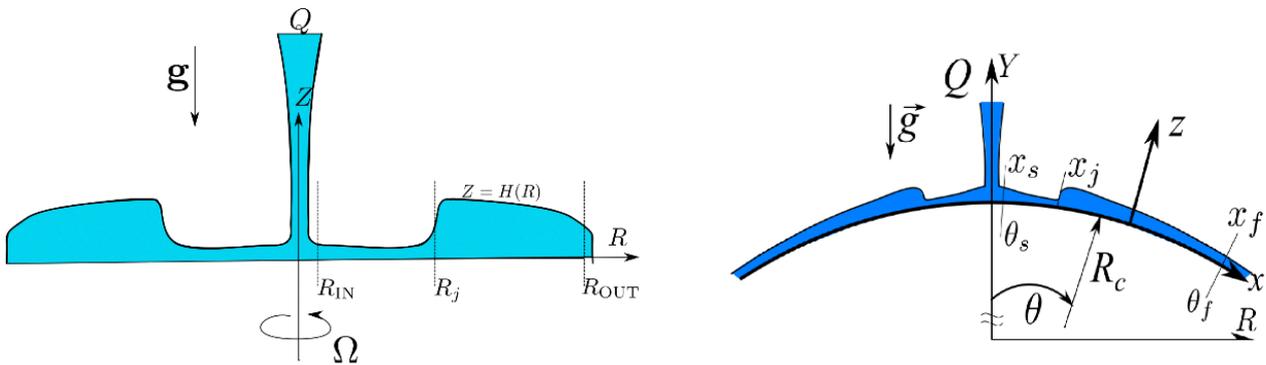


Рис. 1. Схема течения на вращающемся диске (слева) и на сфере (справа). Системы координат

Характерное значение расстояния до оси симметрии, на котором инерционные, вязкие силы и градиент гидростатического давления имеют один порядок, выражается [3] через расход жидкости Q , ускорение свободного падения g и коэффициент кинематической вязкости ν : $L = Q^{5/8} g^{1/8} \nu^{-3/8}$. В случае со сферой также предполагается, что радиус сферического сегмента R_c , по которому течет жидкость, много больше этой величины.

Для описания течения вводится ортогональная криволинейная система координат, связанная с твердой поверхностью, координатные линии совпадают с координатными линиями сферической системы координат (с центром в центре сферы) или цилиндрической системы координат (с центром в центре вращающегося диска).

Так как характерная толщина слоя $H = Q^{1/4} g^{-1/4} \nu^{1/4}$ много меньше масштаба продольной координаты L , используются уравнения тонкого слоя, распределение давления при этом является гидростатическим.

Постоянный профиль скорости

Дальнейшим упрощением модели является сведение уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для этого проводится осреднение уравнений вдоль толщины пленки в предположении о виде профиля скорости. Метод [4], который применен к задаче о гидравлическом прыжке в [3], предполагает, что профиль скорости имеет одну и ту же форму во всех сечениях.

Уравнения тонкого слоя, осредненные по толщине с учетом граничных условий непротекания и отсутствия трения на свободной поверхности, представляются в следующем виде. В обоих случаях уравнение неразрывности имеет вид: $urh = 1$.

Уравнение импульса же в случае сферы имеет вид:

$$C_1 u u' = \frac{1}{u^2 r} u' + \frac{1}{ur^2} + \alpha r - C_2 u^3 r^2.$$

Безразмерный параметр α соответствует кривизне твердой поверхности. Здесь u — средняя скорость в продольном направлении, r — продольная координата, h — толщина пленки, $1, 2$ — некоторые константы, выражающиеся через профиль скорости.

В случае течения на вращающемся диске имеем два уравнения импульса:

$$u u' - \omega^2 (1 + B_1 v + B_2 v) = \frac{1}{u^2 r} u' + \frac{1}{ur^2} - u^3 r^2,$$

$$v' + 2 \frac{v}{r} + \frac{1}{r} = -A u v r^2.$$

Безразмерный параметр ω соответствует угловой скорости вращения диска. v — азимутальная средняя скорость.

Граничное условие ставится при некотором малом значении r . В случае, если не существует решения задачи Коши, определенного при всех значениях координаты, строится разрывное решение, соответствующее объединению двух фазовых кривых, сопряженных с помощью условий на скачке, следующих из законов сохранения. Построена классификация решений в зависимости от значений параметра α или ω .

Показано, что в случае течения по сфере существует 2 критических значения α , разделяющих три различных типа решений: разрывное решение с прыжком, непрерывное решение с переходом из сверхкритического в докритический режим и всюду сверхкритическое решение; а в случае течения на вращающемся диске имеется 3 критических значения и соответственно 4 режима течения, представленных на Рис. 2.

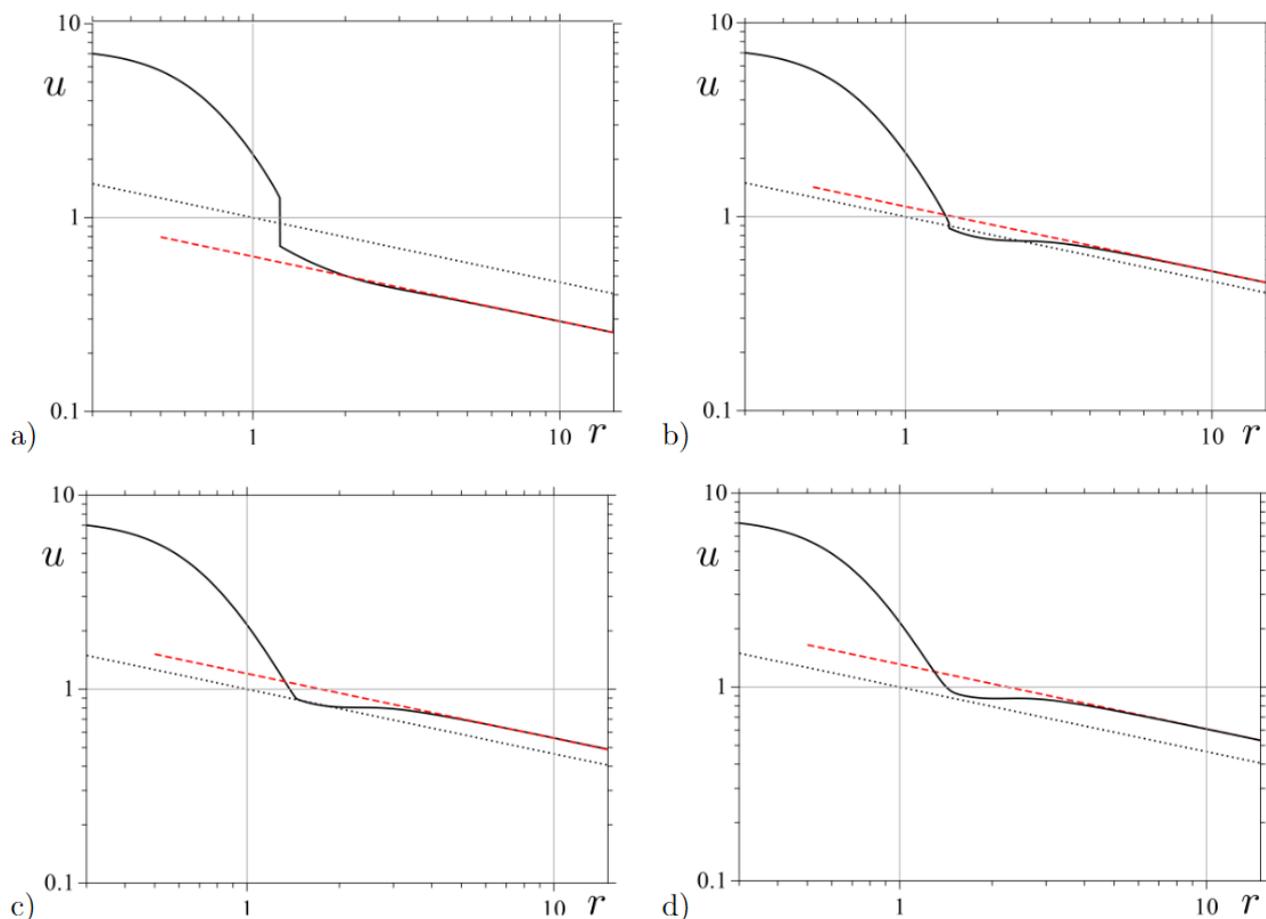


Рис. 2. Режимы течения на вращающемся диске. Красная линия показывает асимптотику при больших радиусах, серая линия – $Fr = 1$, разделяет сверхкритический и докритический режимы течения. а) – прыжок является разрывом, разделяет 2 режима течения, б), в) – существует локальная докритическая зона течения, выход из нее непрерывный, вход с помощью разрыва в первом случае и непрерывный во втором, в) – всюду сверхкритическое решение

Переменный профиль скорости

В случае течения по сфере также предложен подход с использованием переменного профиля скорости. Развитие течения от места падения струи сопровождается изменением профиля скорости: при малых значениях расстояния до оси на участке, где пограничный слой развит, для всех h наблюдается баланс вязких и инерционных сил, в этом случае имеется автомодельное решение [5], профиль скорости которого хорошо аппроксимируется кубической параболой; при больших значениях продольной координаты вязкие силы компенсируют независимые от поперечной координаты массовые силы, профиль скорости параболический. Для описания непрерывного течения во всей области в этом случае используется кубическая зависимость скорости от h с переменными коэффициентами;

условие на расход и граничные условия на твердой и свободной поверхности выделяют однопараметрическое семейство функций, описывающих профиль, параметр λ на этом семействе называется форм-фактором. Такой метод описания течений с гидравлическим прыжком применен в [6]. Использование форм-фактора позволяет разделять безотрывные течения и течения, имеющие локальные рециркуляционные зоны.

В качестве граничных условий используются равенство толщины слоя заданному значению во входном сечении и ограниченность решения на бесконечности. Структура уравнений такова, что решения соответствуют непрерывному изменению профиля скорости от автомодельного [5] к параболическому. Решение определено для всех r , прыжок определяется как точка с достаточно большим

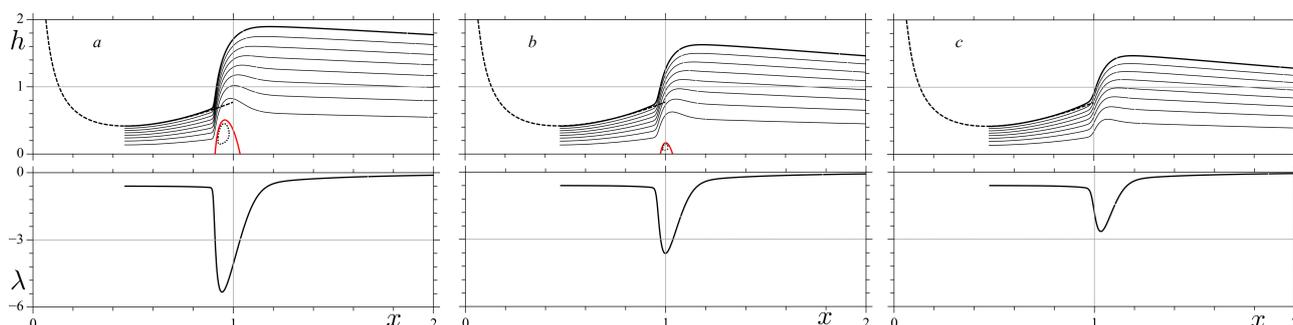


Рис. 3. Линии тока, граница рециркуляционных зон (красным цветом) для 3 различных параметров

значением $\frac{dh}{dx}$. При $\alpha = 0$ за прыжком образуется рециркуляционная зона. При увеличении параметра α размер рециркуляционной зоны уменьшается, прыжок смещается к периферии, что согласуется с результатами анализа на основе постоянного профиля скорости. Максимальное значение $\frac{dh}{dx}$ также уменьшается, что означает исчезновение прыжка. На рис. 3 приведены картины течений при различных значениях α , показывающие эволюцию течения.

Результаты качественного анализа и численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования в рамках полных уравнений Навье–Стокса [7].

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.
- [2] Rayleigh On the theory of long waves and bores // Proc. R. Soc. Lond. A 1914. V. 90, № 619. P. 324–328.
- [3] Bohr T., Dimon P., Putkaradze V. Shallow-water approach to the circular hydraulic jump // J. Fluid Mech. V. 254. P. 635–648.
- [4] Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкой пленки вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
- [5] Watson E.J. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane // J. Fluid Mech. 1964. V. 20, № 3. P. 481–499.
- [6] Watanabe S., Putkaradze V., Bohr T. Integral methods for shallow free-surface flows with separation // J. Fluid Mech. 2003. V. 480. P. 233–265.
- [7] Saberi A., Teymourtash A.R., Mahpeykar M.R. Experimental and numerical study of circular hydraulic jumps on convex and flat target plates // European Journal of Mechanics – B // Fluids. 2020. V. 80. P. 32–41.