



Решение задачи об электровихревом течении между плоскостями при различных граничных условиях¹

Михайлов Е.А.^{*,**}, Таранюк А.А.^{*}

^{*}Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

^{**}Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН, Москва, Россия

Электровихревые течения играют важную роль в прикладных задачах, связанных с течениями жидких металлов, электролитов и т.д. Они возникают во время прохождения электрического тока меняющейся плотности через хорошо проводящую среду. В таком случае, электрический ток порождает магнитное поле и возникает электромагнитная сила, являющаяся причиной закрученных течений.

Первые исследования, связанные с электровихревыми течениями, относятся к 1970-м годам. Большой вклад в изучение внесли специалисты латвийского Института физики, которым принадлежат как экспериментальные результаты, так и теоретические модели [1]. В настоящее время электровихревые течения активно исследуются в Институте механики сплошной среды УрО РАН (г. Пермь) [2], Объединенном институте высоких температур РАН (г. Москва) [3], Магнитогорском государственном

техническом университете им. Г.И. Носова [4] и других научных центрах в России и за рубежом.

В настоящий момент большая часть теоретических исследований ведётся с помощью вычислительных методов. В то же время, даже с учетом использования современных суперкомпьютеров, задачи о генерации электровихревых течений могут требовать достаточно больших ресурсов. По этой причине до сих пор удобно использовать модели промежуточного характера, которые бы сочетали высокую точность и возможность как аналитического решения, так и численного моделирования с использованием ограниченных вычислительных мощностей.

Ситуация заметно упрощается в тех случаях, когда задача обладает осевой симметрией. Это позволяет решать её, пользуясь переменными «скалярная функция тока — завихренность». В таком случае удается избежать необходимости решения задачи для давления, а для медленных течений нередко можно получить точное решение путём интегрирования. Между тем, в том случае, если решение невозможно найти аналитически, возникает необходимость найти решение редуцированной задачи для скалярной функции тока численно.

Если мы ставим граничные условия, следующие из физической постановки задачи, то мы при-

¹Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова.

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН

© Михайлов Евгений Александрович,

ea.mikhajlov@physics.msu.ru

© Таранюк Антон Александрович, taranyuk.anton@gmail.com

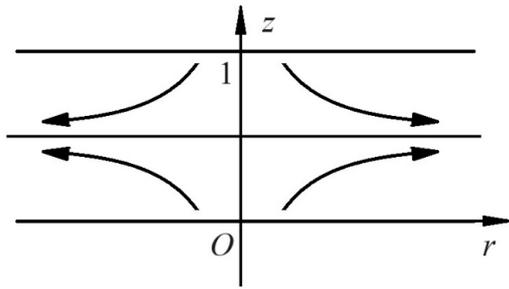


Рис. 1. Схема распространения электрического тока в среде

ходим к необходимости решения эволюционных уравнений четвертого порядка. Подобные задачи являются исключительно трудоемкими с вычислительной точки зрения. По этой причине достаточно часто используют приближенные граничные условия, дающие возможность решать вместо исходной задачи пару уравнений второго порядка, для которых численные методы оказываются несоизмеримо проще. Между тем, встает резонный вопрос об обоснованности подобных приближений и соответствии полученного решения в реальности.

Рассмотрим пример ЭВТ между двумя протяженными плоскостями, находящимися на малом расстоянии друг от друга (Рис. 1), которые являются электродами одноименной полярности (противоположный электрод находится на большом расстоянии). В таком случае можно представить скалярную функцию тока в автомоделном виде [5]:

$$\psi(r, z) = r^2 \cdot F(z)$$

Тогда в безразмерном виде (длины измеряются в расстояниях между электродами) для установившегося течения уравнение для функции $F(z)$ выглядит следующим образом:

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} = \frac{d^4 F}{dz^4} + S \left(z - \frac{1}{2} \right),$$

где S — так называемый параметр электровихревого течения.

Граничные условия, следующие из физических свойств задач, будут представимы в следующем виде:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = 0$$

$$\frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=1} = 0$$

Вместо этого для упрощения расчетов часто используют более простую систему уравнений вто-

рого порядка. В таком случае вводят функцию, имеющую смысл завихренности $W = -F''$. Тогда система уравнений может быть представлена в форме:

$$F \frac{dW}{dz} = \frac{d^2 W}{dz^2} + S \left(\frac{1}{2} - z \right);$$

$$W = -\frac{d^2 F}{dz^2}$$

В качестве граничных условий используют приближенные условия Тома [6]:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = 0;$$

$$W|_{z=0} = -\frac{1}{\Delta z^2} F|_{z=\Delta z};$$

$$W|_{z=1} = -\frac{1}{\Delta z^2} F|_{z=1-\Delta z};$$

где Δz — шаг сетки.

Мы сравнили результаты расчетов для точной постановки задачи и для приближенных граничных условий. На Рис. 2 показан результат вычислений, которые сделаны с точными и приближенными граничными условиями. Можно видеть, что разница составляет около одной сотой. Между тем, данной точности может быть достаточно, и существенно меньшая вычислительная трудоемкость решения (для точных граничных условий потребовалось использование суперкомпьютера, в то время как приближенные допускают решение на ПК) компенсирует имеющую место погрешность.

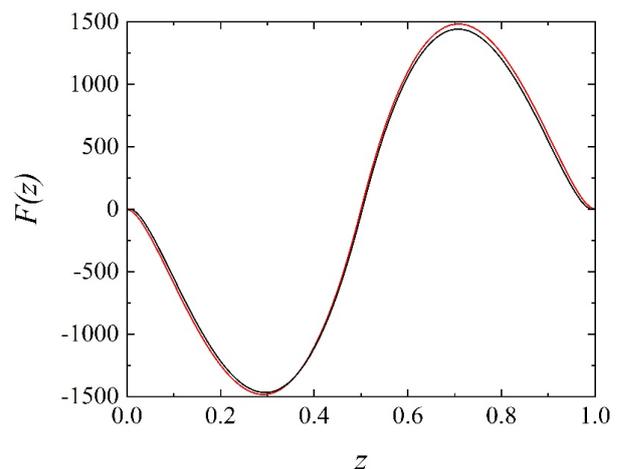


Рис. 2. Решение для точных и приближенных граничных условий для $S = 10^9$. Черная линия — график зависимости функции от координаты для при решении уравнения четвертого порядка. Красная линия — с использованием условий Тома

Список литературы

- [1] Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
- [2] Хрипченко С.Ю. Электровихревые течения в тонких слоях проводящей жидкости // Магнитная гидродинамика, 1991. №1. С.126–129.
- [3] Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений // Теплофизика высоких температур, 2011. Т. 47, №6. С. 957.
- [4] Ячиков И.М., Портнова И.В., Ларина Т.П. Исследование на физической модели поведения токонесущей жидкости в ванне ДППТ под действием внешнего вертикального магнитного поля // Известия ВУЗов. Черная металлургия, 2018. №1. С. 28.
- [5] Михайлов Е.А., Степанова А.П., Таранюк А.А. Электровихревые течения между двумя плоскостями при больших токах // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2022. №1. С. 32–42.
- [6] Weinan E., Liu J.G. Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes // Journal of Computational Physics, 1996. V.124. P.368–382.