



Влияние эффекта релаксации вязкости на капиллярные осцилляции излучающей заряженной капли

Колбнева Н.Ю.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль

Введение

Исследование капиллярных осцилляций и устойчивости заряженных капель при различных физико–химических характеристиках жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, гидрометеорологии [1, 2]. Впервые феномен радиоизлучения осциллирующей заряженной облачной капли обсуждался в работе [3], выполненной на модели идеальной проводящей жидкости. Важность сформулированной проблемы обуславливает появление новых работ [4]. Известно, что в верхней части реального конвективного облака капли переохлаждены, а при минусовых температурах переходят в стеклообразное состояние, для которого характерна вязкоупругость. В связи со сказанным представляется актуальным провести исследование влияния вязкоупругих свойств реальной жидкости на капиллярные осцилляции заряженной капли с учетом энергопотерь на излучение электромагнитных волн.

В результате кратковременных внешних силовых воздействий (меньших или сравнимых

с характерными молекулярными временами [5], стр. 222) вязкая жидкость упруго деформируется, а возникающие сдвиговые напряжения затухают за время релаксации, существенно превышающее время внешнего воздействия [6], стр. 188.

Вязкоупругие свойства жидкости описываются введением комплексной кинематической вязкости при помощи известной формулы Максвелла [6]:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - i\omega_n \tau'} \quad (1)$$

i — мнимая единица, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости для нулевой частоты внешнего воздействия, τ — характерное время релаксации вязкости (время, за которое возникающие в жидкости упругие деформации возвращаются к нулевому уровню), ω_n — комплексная частота капиллярных осцилляций n -моды; реальная ее часть определяет собственную частоту осцилляций, а мнимая часть — декремент затухания или инкремент капиллярной электростатической неустойчивости. В (1) учтена экспоненциальная зависимость от времени амплитуд капиллярных осцилляций капли: $\sim \exp(-i\omega_n t)$.

Математическая модель. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижную сферическую каплю радиуса R вязкой несжимаемой проводящей жидкости, имеющей заряд Q . Пусть жидкость обладает плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме.

Уравнение возмущенной поверхности капли в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли при использовании осесимметричной постановки задачи представим в виде: $r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t)$, где возмущение равновесной сферы, вызванное капиллярным волновым движением, описывается функцией $\xi(\theta, t)$. В качестве малого параметра задачи примем безразмерную амплитуду осцилляций: $\varepsilon \equiv |\max \xi| / R \ll 1$.

Система уравнений электрогидродинамики с электрическим полем, создаваемым собственным зарядом Q капли, имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}, \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \vec{E} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0: \quad \vec{V} \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0:$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla F = 0; \quad (5)$$

$$\vec{\tau}(\vec{n} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{n}(\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{V} = 0;$$

$$P - 2\rho\nu\vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla) \vec{V} + P_q = P_\sigma, \quad (\vec{\tau} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (6)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad (7)$$

$$\int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \vec{E}) dS = Q; \quad (8)$$

$$S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

где \vec{V} — поле скоростей движения жидкости в капле, \vec{E} — напряженность электрического поля, P — давление внутри капли, $P_q = \vec{E}^2 / 8\pi$ — давление электрических сил, $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ — давление капиллярных сил, \vec{n} , $\vec{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности капли.

Задача (2)–(8) решается методом прямого разложения в рамках теории возмущений в линейном приближении по малому параметру ε . Для этого искомые функции раскладываются по порядкам малости безразмерной амплитуды осцилляций ε . Задача нулевого порядка малости описывает равновесное состояние системы.

Решение задачи первого порядка малости по ε позволяет прийти к дисперсионному уравнению второго порядка для случая маловязкой жидкости. При использовании динамического коэффициента кинематической вязкости (1) получается уже уравнение третьего порядка [7]:

$$\omega_n^3 - il_1 \omega_n^2 - \omega_n(l_{21} + il_{22}) + il_{31} - l_{32} = 0; \quad (n \geq 2),$$

$$l_1 = \frac{1}{\tau}; \quad l_{21} = \frac{2\nu_0}{R^2\tau}(n-1)(2n+1) + (Re\omega_n)^2,$$

$$(Re\omega_n)^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right);$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3},$$

$$l_{22} = W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2(n+1) \left(\frac{2^n(n-1)!}{(2n)!}\right)^2 \left(\frac{Re\omega_n R}{c}\right)^{2n+1};$$

$$l_{31} = \frac{(Re\omega_n)^2}{\tau}, \quad l_{32} = \frac{l_{22}}{\tau},$$

из-за усложнения спектра реализующихся движений жидкости за счет возникновения релаксационных апериодических сдвиговых движений.

В пакете аналитических вычислений МАТЕМАТИКА для характерных облачных и дождевых капель найдены численные решения дисперсионного уравнения, порожденного эффектом релаксации вязкости, при докритических значениях параметра Релея W :

для $R = 3$ мкм:

$$\omega_2^{(1)} = -99.5 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 4.7 \cdot 10^6 - 0.3 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с},$$

для $R = 30$ мкм:

$$\omega_2^{(1)} = -99.5 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 0.15 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с},$$

для $R = 0.25$ мм:

$$\omega_2^{(1)} = -99.8 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 6.1 \cdot 10^3 - 0.08 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с},$$

для $R = 3.5$ мм:

$$\omega_2^{(1)} = -100 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 117 - 0.4i) \text{ рад/с}.$$

Из анализа выше приведенных численных оценок ясно, что первый корень показывает чисто релаксационное апериодическое затухание упругих

движений вязкой жидкости. Второй и третий корни соответствуют слабо затухающим вязкоупругим осцилляциям облачных и дождевых капель. Учет эффекта релаксации вязкости приводит к снижению декремента вязкоупругого затухания и незначительному увеличению частоты собственных осцилляций по сравнению с характеристиками, рассчитанными в пренебрежении вязкоупругих свойств жидкости.

Заключение

Показано, что эффект релаксации вязкости сказывается на снижении гасящего влияния на спектр капиллярных осцилляций капли на высоких частотах. Выявлено, что наличие эффекта релаксации вязкости приводит к существенной зависимости декремента вязкоупругого затухания от характерного времени релаксации. Учет вязкоупругих свойств жидкости приводит к снижению декремента затухания, определяемого энергопотерями на излучение электромагнитных волн, и интенсивности электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли на высоких частотах. Обнаруже-

но, что вязкоупругость, как и вязкость жидкости, не оказывают влияния на критические условия реализации электростатической неустойчивости капли по отношению к собственному заряду.

Список литературы

- [1] *Аджиев А.Х., Богаченко Е.М.* Грозы Северного Кавказа. Нальчик: Полиграфсервис и Т., 2011. 152 с.
- [2] *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24, № 6. С. 613–621.
- [3] *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю.* Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва–Берлин: Директ–Медиа, 2021. 200 с.
- [5] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [7] *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* О влиянии эффекта релаксации вязкости жидкости на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли // Коллоидный журнал. 2023. Т. 85. № 4. С. 483–501.