



ISSN: 2658–5782

Номер 2

2023

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Исследование собственных функций возмущения радиальной составляющей скорости потока¹

Низамова А.Д.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассмотрено течение термовязкой модельной жидкости в кольцевом канале с заданным температурным полем. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе обобщенного уравнения спектральным методом разложения по полиномам Чебышева первого рода. Исследуется влияние учета экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от температуры и геометрии канала на спектральные характеристики уравнения гидродинамической устойчивости течения несжимаемой жидкости в кольцевом канале. Численно получены спектры собственных значений. Спектральные характеристики определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости. При этом собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени. Построены графики собственных функций обобщенного уравнения устойчивости течения в кольцевом канале. Показано, что структура спектров в значительной степени зависит как от свойств жидкости, определяемых показателем функциональной зависимости вязкости, так и от геометрии канала. Устойчивость течения термовязкой жидкости зависит от наличия собственного значения с положительной мнимой частью среди всего множества найденных собственных значений при фиксированных параметрах числа Рейнольдса и волнового числа. Установлено, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости в плоском канале, однако при его увеличении число собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет ненулевые амплитуды возмущений поперечной скорости. Стоит отметить, что разнообразию спектров собственных значений соответствует разнообразие собственных функций, имеющих нетривиальный характер распределения амплитуды осцилляций по сечению в каждом случае. Гладкие кривые получаются для узкого канала, как и для случая плоского канала. Однако при увеличении отношения радиусов канала наблюдается появление «скачков». Также заметим, что собственные функции не обладают признаком симметрии, это следует из того, что профиль скорости в невозмущенном состоянии также не обладает симметрией. Максимальные значения собственных функций смещены вправо от центра канала, что соответствует тому, что возмущения возникают и интенсивно растут вблизи горячей стенки.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, гидродинамическая устойчивость, собственные функции, кольцевой канал

1. Введение

В исследованиях устойчивости течений жидкостей в плоских каналах в настоящее время накоплен достаточный задел, однако при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений. На-

пример, в работах [1–5] численно получено критическое число Рейнольдса равное 5772, при котором течение становится неустойчивым. Однако, в работе [6] выполнен учет температурной зависимости вязкости жидкости. Проведено численное исследование течения водного раствора пропиленгликоля 45 %, имеющего широкое применение в системах отопления промышленных помещений, в плоском канале, и установлено, что критическое число Рейнольдса снижается до 1563 и зависит от функционального вида зависимости вязкости жидкости

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00915).

от температуры. Так как течения жидкостей возникают в различных отраслях промышленности при эксплуатации технических устройств, то в этих случаях важной проблемой является выявление особенностей течений при различных режимах, относительно энергетической эффективности важен ламинарный режим, однако при учете эффективности теплопереноса — турбулентный.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об устойчивости течения термовязкой жидкости в кольцевом канале с заданным профилем температуры.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [6–8].

Аналогично плоскому случаю рассмотрим течение несжимаемой термовязкой жидкости в кольцевом канале под действием перепада давления с фиксированными внешним и внутренним радиусами канала и нагреваемым внутренним стержнем.

Аналогичными к задаче о гидродинамической устойчивости термовязкой жидкости в плоском канале преобразованиями получим обобщенное уравнение об устойчивости течения жидкости в кольцевом канале:

$$\begin{aligned} & \mu_0 \left[\varphi^{IV} + \frac{2}{r} \varphi''' - \frac{3}{r^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi' \right) - 2k^2 \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) \right] - \\ & - ik \operatorname{Re} \left[(u_0 - c) \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \varphi \right) \right] + \\ & + \left\{ k^4 + 2 \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{r^4} + ik \operatorname{Re} \left[u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right] \right\} \varphi + \\ & + \mu_0' \left(2\varphi''' + \frac{3}{r} \varphi'' - \frac{3}{r^2} \varphi' + \frac{1}{r} \left(\frac{3}{r^2} - k^2 \right) \varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0, \quad \varphi'(r_1) = \varphi'(r_2) = 0,$$

где r_2 и r_1 — внешний и внутренний радиусы канала; $\mu = \exp(-\alpha T)$ — вязкость жидкости; $\varphi(y)$ — амплитуда возмущения радиальной компоненты скорости; $u_0 = u_0(y)$ — профиль скорости в невозмущенном состоянии; i — мнимая единица; $c = w/k$ — фазовая скорость волны вдоль оси канала (собственное значение); w — частота; k — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число); Re — число Рейнольдса. Все параметры представлены в безразмерном виде; $s = \frac{r_2}{r_1} - 1$.

Следует отметить, что вывод представленного выше уравнения осуществлялся при задании

возмущений только на давление и компоненты вектора скорости.

Для решения задачи об устойчивости течения жидкости необходимо найти все собственные значения c , которым соответствуют нетривиальные собственные функции $\varphi(y)$. Тогда критерием неустойчивости, очевидно, будет условие $c_i > 0$: если существует хотя бы одно собственное значение c положительной мнимой частью, то течение является неустойчивым при заданных числе Рейнольдса и волновом числе. Если же все собственные значения имеют неположительную мнимую часть, то течение устойчивое при заданных параметрах.

Условие $c_i = 0$ дает нейтральную кривую, на которой возмущения не растут и не затухают. Минимальное значение числа Рейнольдса на нейтральной кривой называется критическим числом Рейнольдса Re_{cr} .

Согласно теории [5] рассматривается устойчивость течений жидкостей относительно возмущений поперечной скорости, так как они являются самыми «опасными» для турбулизации течения.

3. Результаты численного исследования

Численное исследование выполнялось с помощью спектрального метода разложения по полиномам Чебышева первого рода [6].

Построены собственные функции для собственных значений, которые располагаются на левой ветви, объединяющей моды Эйри (А), включающей единственную неустойчивую моду с положительной мнимой частью собственного значения, и на правой ветви, объединяющей моды Пекериса (Р).

Разнообразие спектров собственных значений [9, 10] соответствует разнообразие собственных функций, имеющих нетривиальный характер распределения амплитуды осцилляций по сечению в каждом случае (рис. 1 и 2). Гладкие кривые получаются для узкого канала, как и для случая плоского канала. Однако при увеличении отношения радиусов канала наблюдается появление «скачков». Стоит отметить, что собственные функции не обладают признаком симметрии, это следует из того, что профиль скорости в невозмущенном состоянии также не обладает симметрией. Максимальные значения собственных функций смещены вправо от центра канала, что соответствует тому, что возмущения возникают и интенсивно растут вблизи горячей стенки.

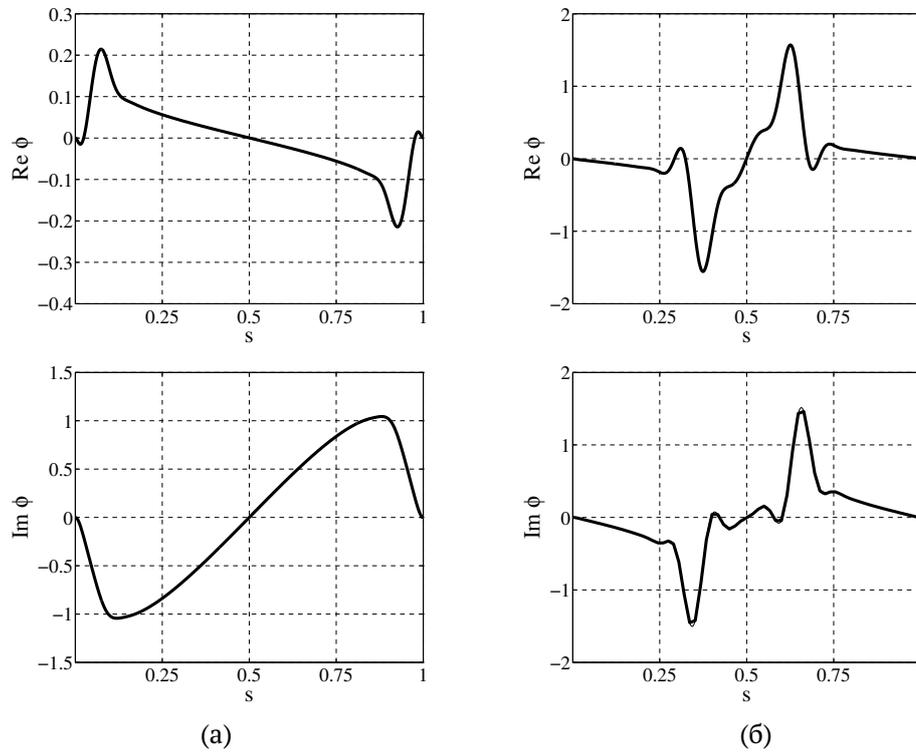


Рис. 1. Собственные функции для $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 0.001$, $s = 0.001$ и ветвей А (а) и Р (б)

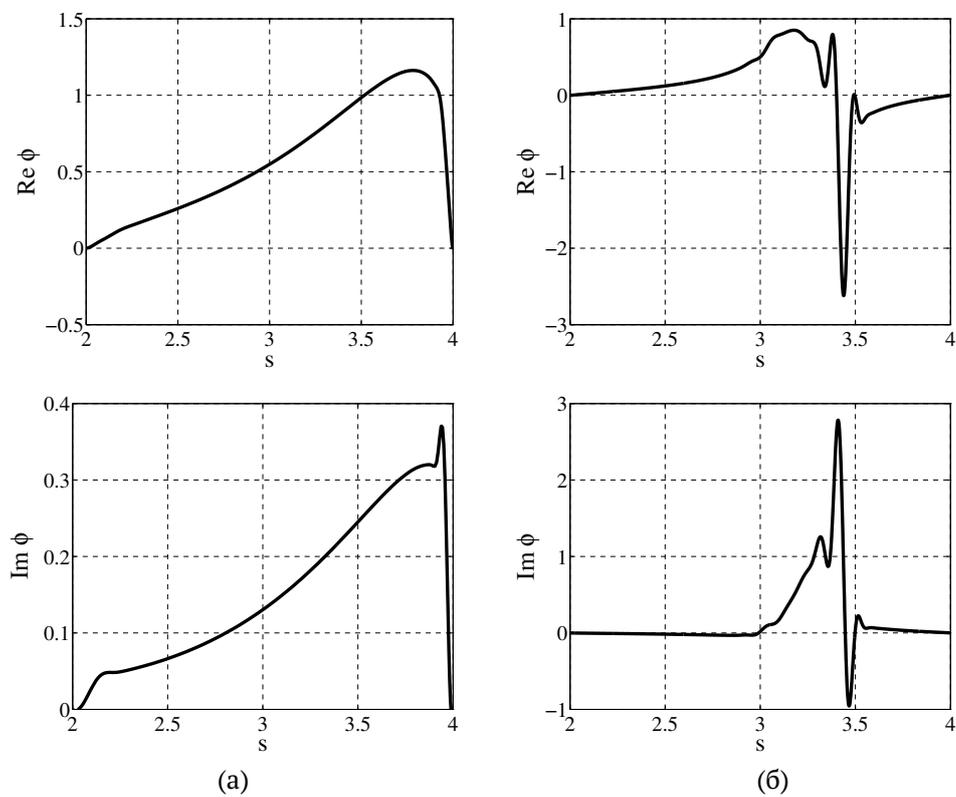


Рис. 2. Собственные функции для $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 2$, $s = 2$ и ветвей А (а) и Р (б)

4. Заключение

Установлено, что учет зависимости вязкости от температуры значительно влияет на выводы относительно гидродинамической устойчивости, что, безусловно, важно при анализе режимов течения в каналах теплообменников. При одних и тех же значениях чисел Рейнольдса и волновых чисел, описывающих устойчивые режимы течения, увеличение параметра термовязкости и изменение геометрических параметров канала может привести к возникновению как устойчивых, так и неустойчивых режимов. Следует отметить, что при этом происходит и качественное изменение структуры собственных функций.

Список литературы

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Шкаликов А.А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям – спутника Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа 2002). Часть 3. СМФН. 2003. Т. 3. С. 89–112.
<http://mi.mathnet.ru/cmfd17>
- [4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf229>
- [5] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [6] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)
- [7] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [8] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459.
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [9] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Исследование спектральных характеристик течения термовязкой жидкости в кольцевом канале // *Многофазные системы*. 2022. Т. 17, № 3–4. С. 187–191.
DOI: [10.21662/mfs2022.3.017](https://doi.org/10.21662/mfs2022.3.017)
- [10] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1778–1784.
DOI: [10.1134/S1995080223050463](https://doi.org/10.1134/S1995080223050463)



Investigation of eigenfunctions of perturbation of the radial component of flow velocity

Nizamova A.D.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

The flow of a thermoviscous model fluid in an annular channel with a given temperature field is considered. The problem of the stability of the flow of a thermoviscous fluid is solved on the basis of a generalized equation by the spectral method of expansion in Chebyshev polynomials of the first kind. The influence of taking into account the exponential dependence of fluid viscosity on temperature and channel geometry on the spectral characteristics of the equation of hydrodynamic stability of incompressible fluid flow in an annular channel is investigated. The eigenvalue spectra were obtained numerically. The spectral characteristics determine the structure of the eigenfunctions and the critical parameters of the flow of a thermoviscous fluid. In this case, the eigenfunctions demonstrate the behavior of transverse velocity disturbances, their possible growth or decay over time. Graphs of the eigenfunctions of the generalized flow stability equation in an annular channel have been constructed. It is shown that the structure of the spectra largely depends on both the properties of the liquid, determined by the functional dependence of viscosity, and on the geometry of the channel. The stability of the flow of a thermoviscous fluid depends on the presence of an eigenvalue with a positive imaginary part among the entire set of found eigenvalues for fixed parameters of the Reynolds number and wave number. It has been established that at small values of the thermoviscosity parameter the spectrum is comparable to the spectrum for isothermal fluid flow in a flat channel, however, as it increases, the number of eigenvalues and their density increase, that is, there are a greater number of points at which the problem has non-zero amplitudes of transverse velocity disturbances. It is worth noting that the diversity of eigenvalue spectra corresponds to the diversity of eigenfunctions, which have a nontrivial distribution of the oscillation amplitude over the cross section in each case. Smooth curves are obtained for a narrow channel, as for the case of a flat channel. However, as the ratio of the channel radii increases, “jumps” appear. Also, note that the eigenfunctions do not have the property of symmetry; this follows from the fact that the velocity profile in the unperturbed state also does not have symmetry. The maximum values of the eigenfunctions are shifted to the right from the center of the channel, which corresponds to the fact that disturbances arise and grow intensively near the hot wall.

Keywords: thermoviscous liquid, hydrodynamics instability, eigenfunctions, annular channel

References

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Shkalikov A.A. Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 124(6). Pp. 5417–5441.
DOI: [10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7)
- [4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // *Computational mathematics and mathematical physics*. 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.
- [5] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian).
- [6] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)
- [7] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation // *Multiphase systems*. 2019. Vol. 14, No. 1. Pp. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [8] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] *Prikladnaya mexanika i matematika*. 2019. Vol. 83, No. 3. Pp. 454–459 (in Russian).
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)

- [9] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Research of the spectral characteristics of the thermoviscous fluid flow in an annular channel // *Multiphase systems*. 2022. Vol.17, No. 3–4. Pp. 187–191
DOI: [10.21662/mfs2022.3.017](https://doi.org/10.21662/mfs2022.3.017)
- [10] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1778–1784.
DOI: [10.1134/S1995080223050463](https://doi.org/10.1134/S1995080223050463)