ISSN: 2658–5782

Номер 2

2023

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 2, с. 45–49

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2023.2.007
DOI: 10.21662/mfs2023.2.007
УДК 517.958:533.7

Получена: 3.07.2023
Принята: 18.08.2023

Задачи группового анализа. Законы сохранения

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Дифференциальные уравнения механики получены из законов сохранения массы, импульса и энергии. Другие законы сохранения можно получить с помощью симметрий этих уравнений. Любой закон сохранения может быть получен из одного с помощью канонических операторов, частными случаями которых являются операторы симметрий. Вычисление канонических операторов закона сохранения равносильно прямому методу отыскания дивергентного вида уравнений справедливых в силу уравнений механики. На примере одномерных уравнений газовой динамики получены все законы сохранения нулевого порядка прямым методом. Для специальных уравнений состояния получено бесконечное множество законов сохранения, многие из которых являются новыми.

Ключевые слова: законы сохранения, газовая динамика, уравнение состояния, условия совместности

1. Введение

Уравнения механики сплошной среды допускают достаточно широкую группу преобразований. Множество решений изучают с помощью допускаемой группы. В работе [1] поставлены основные задачи группового анализа, для которых известны алгоритмы решений. На примере уравнений одномерной газовой динамики решен ряд основных задач в качестве описания работы алгоритмов. Сформулированы другие задачи группового анализа. В настоящей работе рассмотрены алгоритмы получения законов сохранения [2] и на примере уравнений одномерной газовой динамики получены все законы сохранения. Законы сохранения используют в прикладных задачах, например, для нахождения выражений из физических величин, не изменяющихся со временем, для определения обобщенных решений с сильными разрывами, для организации консервативных разностных схем при численном решении краевых задач.

Пусть S система дифференциальных уравнений для функций $\vec{u} = (u^1, ..., u^m)$ от независимых переменных $\vec{y} = (t, x^1, ..., x^n)$. Продолженная система $\tilde{S}$ задается уравнениями S вместе с ее дифференциальными следствиями.

Законом сохранения системы S называют соотношение

$$\vec{D} \cdot \vec{A} = 0, \tag{1}$$

которое выполняется в силу $\tilde{S}$. Здесь $\vec{D} = (D_t, D_1, ..., D_n)$ — операторы полного дифференцирования по переменным $t, x^1, ..., x^n$; $\vec{A} = (A^0, A^1, ..., A^n)$ — вектор закона сохранения, зависящий от $t, \vec{x}, \vec{u}$ и производных. Порядок закона сохранения — порядок старшей производной в векторе $\vec{A}$. Вектор $\vec{A}$ определен с точностью до слагаемого, для которого (1) выполнено без перехода на многообразие $\tilde{S}$ (тривиальный закон).

Канонический оператор

$$X = \vec{\eta}(\vec{y}, \vec{u}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_k)\partial_{\vec{u}} + ...$$

для вектора закона сохранения $\vec{A}$ определяется условием инвариантности

$$\left(X\vec{D} \cdot \vec{A} \right) \Big|_{\tilde{S}} = 0.$$

Здесь $\vec{u}_k$ — производные порядка k.

Показано, что действие канонического оператора симметрии системы S на любой ее вектор дает вектор закона сохранения [3]. Канонический оператор коммутирует с операторами полного дифференцирования [3]:

$$0 = \left(X\vec{D} \cdot \vec{A} \right) \Big|_{\tilde{S}} = \left(\vec{D} \cdot X\vec{A} \right) \Big|_{\tilde{S}}.$$

Значит $X\vec{A}$ — вектор закона сохранения для любого канонического оператора вектора $\vec{A}$ закона сохранения.

Пусть $\vec{A}$ — вектор закона сохранения системы S нулевого порядка с условием $\operatorname{rank}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{u}} = n+1$. Для любого вектора $\vec{B}$ закона сохранения системы S найдется канонический оператор X для вектора $\vec{A}$ такой, что $X\vec{A} = \vec{B}$. Для этого надо решить линейную систему для координат $\vec{\eta}$ с матрицей Якоби $\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{u}}$ [4].

2. Законы сохранения одномерной газовой динамики

Уравнения газовой динамики выводятся из законов сохранения массы, импульса и энергии элементарного объема. В дивергентном виде в одномерном случае уравнения таковы [5]:

$$\rho_t + (u\rho)_x = 0 \;\Rightarrow\; \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0,$$
$$(\rho u)_t + (u^2\rho + p)_x = 0 \;\Rightarrow\; u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0,$$
$$\left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^2\right)_t + \left(u\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^3 + pu\right)_x = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \varepsilon_t + u\varepsilon_x + p\rho^{-1}u_x = 0,$$

где ρ — плотность; u — скорость частицы; p — давление; ϵ — удельная внутренняя энергия. Замыкает систему уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$, которое записывают в виде $p = \rho^2\varepsilon_\rho = f(\rho, S)$ или $a^2(\rho, p) = f_\rho(\rho, S)$ для нормального газа. Здесь S — энтропия, которая удовлетворяет уравнению [5]

$$(\rho S)_t + (u\rho S)_x = 0 \;\Rightarrow\; S_t + uS_x = 0.$$

Любой закон сохранения записывают в виде

$$D_t\eta + D_x(u\eta + B) = 0,$$

где η — плотность, B — поток. Это равенство должно выполняться в силу уравнений системы. Отыскание η и B из этого равенства — прямой метод нахождения законов сохранения.

Уравнения газовой динамики возьмем в виде уравнений для $\vec{u} = (\rho, u, S)$. Канонический оператор имеет вид:

$$X = \eta^\rho\partial_\rho + \eta^u\partial_u + \eta^S\partial_S + D_t\eta^\rho\partial_{\rho_t} + D_x\eta^\rho\partial_{\rho_x} +$$
$$+ D_t\eta^u\partial_{u_t} + D_x\eta^u\partial_{u_x} + D_t\eta^S\partial_{S_t} + D_x\eta^S\partial_{S_x},$$

где координаты зависят от $t,\ x,\ \vec{u},\ \vec{u}_x$.

Возьмем закон сохранения для энтропии и подействуем на него оператором X в силу уравнений газовой динамики:

$$\begin{gathered} 0 = X\left(D_t(\rho S) + D_x(\rho S u)\right) = \\ = X\left(\rho_t S + \rho S_t + \rho S u_x + \rho u S_x + u S \rho_x\right) = \\ = S\left(D_t\eta^\rho + uD_x\eta^\rho + u_x\eta^\rho\right) + \rho S D_x\eta^u + \\ + (\rho S_x + \rho_x S)\eta^u + \rho(D_t\eta^S + uD_x\eta^S) = \\ = D_t\eta + D_x(u\eta + B), \\ \eta = S\eta^\rho + \rho\eta^S,\;\; B = \rho S\eta^u. \end{gathered} \tag{2}$$

Это уравнение для нахождения канонических операторов закона сохранения для энтропии. Оно имеет дивергентный вид и является уравнением для нахождения плотности η и потока B. Таким образом, нахождение канонических операторов равносильно прямому методу нахождения законов сохранения. Далее найдем законы сохранения нулевого порядка прямым методом. В уравнении (2) произведем дифференцирование в силу уравнений газовой динамики. Переменные u_x, ρ_x, S_x свободные, так как η и B не зависят от производных. Приравнивая нулю коэффициенты при свободных переменных, получим переопределенную систему уравнений:

$$B_u = \rho\eta_\rho - \eta,\;\; \rho B_\rho = f_\rho\eta_u,\;\; \rho B_S = f_S\eta_u,$$
$$\eta_t + B_x + u\eta_x = 0.$$

Из условий совместности первых трех уравнений следует:

$$\begin{gathered} B = B(p, u, t, x),\;\; p = f(\rho, S), \\ \eta = \rho h(p, u, t, x) + \tilde{\eta}(p, \rho, t, x),\;\; B_p = h_u, \\ B_u = (\rho h_p + \tilde{\eta}_p)\rho f_\rho + \rho\tilde{\eta}_\rho - \tilde{\eta}, \\ B_x = -\rho(h_t + uh_x) - \tilde{\eta}_t - u\tilde{\eta}_x. \end{gathered} \tag{3}$$

Отсюда получим $B_{uu} = \rho a^2 B_{pp}$. Если $(\rho^2 a^2)_\rho \neq 0$, то

$$B_{uu} = B_{pp} = 0,\; B = b_{11}pu + b_{10}u + b_{01}p + b_{00},$$
$$h = \frac{1}{2}b_{11}u^2 + b_{01}u + h_1(p, t, x), b_{ij}(t, x),$$

$$\begin{gathered} b_{11}p + b_{10} = \rho^2 a^2 h_{1p} + \rho a^2\tilde{\eta}_p + \rho\tilde{\eta}_\rho - \tilde{\eta}, \\ b_{11x}up + b_{10x}u + b_{01x}p + b_{00x} = \\ = -\rho\left(\frac{1}{2}b_{ut}u^2 + b_{01t}u + h_{1t}\right) - \\ -\rho u\left(\frac{1}{2}b_{11x}u^2 + b_{01x}u + h_{1x}\right) - \tilde{\eta}_t - u\tilde{\eta}_x \;\Rightarrow \\ \Rightarrow b_{11x} = 0,\;\; b_{11t} + 2b_{01x} = 0, \\ b_{10x} + \rho b_{01t} + \rho h_{1x} + \tilde{\eta}_x = 0, \\ pb_{01x} + b_{00x} + \rho h_{1t} + \tilde{\eta}_t = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Интегрированием получим:

$$
\begin{gathered}
b_{11}(t),\;\; b_{01}=-\frac{1}{2}b'_{11}x+\tilde b_{01}(t),\\
(\rho h_1+\tilde\eta)_t=\frac{1}{2}b'_{11}p-b_{00x},\\
(\rho h_1+\tilde\eta)_x=\rho\left(\frac{1}{2}b''_{11}x-b'_{01}\right)-\\
-b_{10x}\Rightarrow b'''_{11}=0,\;\tilde b''_{01}=0,\\
b_{00xx}=b_{10tx}\Rightarrow b_{11}=C_2t^2+C_1t+C_0,\\
\tilde b_{01}=D_1t+D_0,\; b_{00}=\varphi_t,\; b_{10}=\varphi_x-\tilde b(t),\\
\tilde\eta+\rho h_1=\nu(\rho,p)-\varphi_x+\frac{1}{2}pt(C_2t+C_1)+\\
+\rho x\left(\frac{1}{2}C_2x-D_1\right).
\end{gathered}
$$

Уравнение (4) принимает вид:

$$
\begin{gathered}
p\left(C_2t^2+C_1t+C_0\right)-\tilde b=\rho a^2\nu_p+\rho\nu_\rho-\nu+\\
+\frac{1}{2}t(C_2t+C_1)(\rho a^2-p)\Rightarrow\tilde b=A_2t^2+A_1t+A_0.
\end{gathered}
$$

Расщепляя по t, получим

$$
\begin{gathered}
(\rho a^2-3p)(C_2t+C_1)+2(A_2t+A_1)=0,\\
\rho a^2\nu_p+\rho\nu_\rho=\nu+pC_0-A_0\Rightarrow\\
\Rightarrow\nu=C_0\rho\varepsilon+A_0+\rho g(S),
\end{gathered}\tag{5}
$$

$$
\begin{gathered}
B=up(C_0+t(C_2t+C_1))+\\
+u(\varphi_x-A_2t^2-A_1t-A_0)+\\
+p(D_1t+D_0-x(C_2t+\frac{1}{2}C_1))+\varphi_t,\\
\eta=\frac{1}{2}\rho u^2(C_2t^2+C_1t+C_0)+\\
+\rho u\left(-\frac{1}{2}x(2C_2t+C_1)+D_1+D_0\right)+\\
+C\rho\varepsilon+A_0+\rho g(S)-\varphi_x+\frac{1}{2}pt(C_2t+C_1)+\\
+\rho x(\frac{1}{2}C_2x-D_1).
\end{gathered}\tag{6}
$$

Величинам A_0, $\varphi(t,x)$ соответствуют тривиальные законы сохранения. Если $(\rho a^2-3p)_\rho\neq 0$, то $C_1=C_2=A_1=A_2=0$. Оставшиеся произвольные величины задают закон сохранения энергии (C_0); закон сохранения центра масс $\eta=\rho(tu-x)$, $B=tp$ (D_1); закон сохранения импульса (D_0); закон сохранения массы $(g'=0)$; закон сохранения энтропии $(g(S))$.

Пусть $\rho f_\rho-3p=-3n$ — постоянная $\Rightarrow p=f(\rho,S)=n+g(S)\rho^3$. Такое уравнение состояния соответствует одноатомному газу в одномерном случае [5]. Из (5) следует $A_2=\dfrac{3}{2}C_2n$, $A_1=\dfrac{3}{2}C_1n$. Постоянным C_2 и C_1 соответствуют по формулам (6) дополнительные законы сохранения:

$$
\begin{gathered}
\eta=\rho u\left(\frac{1}{2}ut^2-xt\right)+\frac{1}{2}(pt^2+\rho x^2),\\
B=upt^2-\frac{3}{2}nut^2-ptx(C_2),\\
\eta=\frac{1}{2}\rho u(ut-x)+\frac{1}{2}pt,\\
B=upt+\frac{3}{2}nut-\frac{1}{2}px(C_1).
\end{gathered}
$$

Эти формулы уточняют результат из работы [4].

3. Законы сохранения для специального газа

Пусть $\rho^2a^2=\theta(p)\Rightarrow F(p)=\int\theta^{-1}dp=g(S)-\rho^{-1}$. Если справедливы неравенства $F>0$, $F'>0$, $F''<0$, то выполняются условия нормального газа [5].

Уравнения (3) принимают вид:

$$
\begin{gathered}
B_p=h_u,\; B_u-\theta(p)h_p=\rho^{-1}\theta(p)\tilde\eta_p+\rho\tilde\eta_\rho-\tilde\eta,\\
B_x=-\rho(h_t+uh_x)-\tilde\eta_t-u\tilde\eta_x.
\end{gathered}\tag{7}
$$

Дифференцируем последнее уравнение по ρ дважды:

$$
\begin{gathered}
\tilde\eta_{\rho\rho t}+u\tilde\eta_{\rho\rho x}=0\Rightarrow\tilde\eta_{\rho\rho t}=\tilde\eta_{\rho\rho x}=0\Rightarrow\\
\tilde\eta=\mu(\rho,p)+\rho\mu_1(p,t,x)+\mu_0(p,t,x),\\
h_t+uh_x+\mu_{1x}+u\mu_{1x}=0,\\
B_x=-\mu_{0t}-u\mu_{0x}\Rightarrow B_{xu}=-\mu_{0x}\Rightarrow\\
B_u=-\mu_0+b_u(p,u,t)\Rightarrow\\
B=-u\mu_0+b+c(p,t,x),\;\; c_x+\mu_{0t}=0.
\end{gathered}\tag{8}
$$

Второе уравнение системы (7) принимает вид:

$$
b_u-\theta(h_p+\mu_{1p})=\rho^{-1}\theta(\mu_p+\mu_{0p})+\rho\mu_\rho-\mu.\tag{9}
$$

Дифференцируем его по ρ и разделим переменные:

$$
\begin{gathered}
\rho\mu_{p\rho}+\rho^3\theta^{-1}\mu_{\rho\rho}-\mu_p=\mu_{0p}=\nu'(p)\Rightarrow\\
\mu_0=\nu(p)+\tilde\mu_0(t,\vec x),\; c_{xp}=0\Rightarrow\\
c=C_1(p,t)+C_0(t,x)\Rightarrow C_{0x}+\tilde\mu_{0t}=0.
\end{gathered}
$$

Уравнение (9) запишем в разделенных переменных:

$$
\begin{gathered}
\rho^{-1}\theta(\mu_p+\nu'(p))+\rho\mu_\rho-\mu=\theta\varkappa'(p),\\
h_p=\theta^{-1}b_u-\mu_{1p}-\varkappa'(p).
\end{gathered}\tag{10}
$$

Первое уравнение системы (7) принимает вид:

$$h_u = -u\nu'(p) + b_p + C_{1p}.$$

Из уравнения (8) дифференцированием по u найдем

$$h_x = -b_{pt} - C_{1pt} - \mu_{1x},\ \ h_t = u(b_{pt} + C_{1pt}) - \mu_{1t}.$$

Определили все производные функции h. Перекрестное дифференцирование дает:

$$b_{ut} = 0,\ b_{ppt} + C_{1ppt} = 0,\ b_{ptt} + C_{1ptt} = 0,$$
$$\theta^{-1} b_{uu} = b_{pp} + C_{1pp} - u\nu''.$$

Отсюда определяем

$$\begin{gathered} b + C_1 = Ktp + \varphi(p,u) + \psi(t), \\ \theta^{-1}(p)\varphi_{uu} = \varphi_{pp} - u\nu''(p), \\ h = K(tu - x) - \mu_1(p,t,x) - \varkappa(p) + H(u,p), \\ H_u = \varphi_p - u\nu',\ \ H_p = \theta^{-1}\varphi_u. \end{gathered} \tag{11}$$

Резюмируя вычисления, запишем плотность и поток:

$$B = -u(\tilde{\mu}_0 + \nu) + C_0 + Kpt + \varphi + \psi(t),$$
$$\eta = K\rho(tu - x) - \rho\varkappa + \rho H + \mu + \nu + \tilde{\mu}_0.$$

Функциям C_0, $\tilde{\mu}_0$, ψ соответствуют тривиальные законы сохранения. Постоянной K соответствует закон сохранения центра масс. Для оставшихся функций сделаем замену $\bar{\mu} = \mu + \nu$, $\bar{\varphi} = \varphi - \nu u$, $\bar{H} = H - \varkappa$. Учитывая уравнения (10) и (11) получим бесконечное множество законов сохранения:

$$\begin{gathered} D_t(\rho\bar{H} + \bar{\mu}) + D_x\left(u(\rho\bar{H} + \bar{\mu}) + \bar{\varphi}\right) = 0, \\ \bar{H}_u = \bar{\varphi}_p, \bar{H}_p = \theta^{-1}(\bar{\varphi}_u + \nu - \theta\varkappa'), \end{gathered} \tag{12}$$

$$\rho^{-1}\theta\bar{\mu}_p + \rho\bar{\mu}_\rho = \bar{\mu} + \theta\varkappa' - \nu,\ \ \theta\bar{\varphi}_{pp} = \bar{\varphi}_{uu}. \tag{13}$$

Теорема. *Уравнения газовой динамики с уравнением состояния $\rho^2 f_\rho = \theta(f)$ с любой функцией θ имеют законы сохранения (12) с любыми решениями уравнений (13), где ν, $\varkappa$ — произвольные функции.*

Замечание. Законов сохранения (12), (13) больше тех, которые представлены в [4].

Произвольные функции и решения уравнений (13) можно подобрать так, что получатся все законы сохранения, полученные для произвольного уравнения состояния.

Уравнение состояния, заданное функцией $p = f(\rho, S)$, где f удовлетворяет уравнению теоремы, можно задать функцией $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S) = \bar{\varepsilon}(\rho, p)$. Тогда функция $\bar{\varepsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho^2\bar{\varepsilon}_\rho + \theta(p)\bar{\varepsilon}_p = p. \tag{14}$$

Закон сохранения энергии имеет плотность $\rho\varepsilon + \dfrac{1}{2}\rho u^2 = \rho\bar{H} + \bar{\mu}$ и поток $\bar{\varphi} = pu$. Из формул (13) определяем:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}u^2 - \varkappa + \int \theta^{-1}(p + \nu)dp,$$
$$\bar{\mu} = \rho\left(\bar{\varepsilon} + \varkappa - \int \theta^{-1}(p+\nu)dp\right).$$

Уравнение для $\bar{\varphi}$ выполнено. Уравнение для $\bar{\mu}$ есть уравнение (14).

Если $\nu = \theta\varkappa'$, $\bar{\varphi} = 0$, то $\bar{H} = C$ — постоянная. При $\bar{\mu} = 0$ получим закон сохранения массы.

В переменных ρ, S имеем $\bar{\mu}(\rho,p) = \mu(\rho,S)$, $p = f(\rho,S)$, $\rho\mu_S = \mu \Rightarrow \mu = \rho g(S)$. Получаем закон сохранения энтропии.

Для закона сохранения импульса имеем:

$$\rho u = \rho\overline{H} + \bar{\mu}, \overline{\varphi} = p \Rightarrow \overline{H}_u = 1, \overline{H}_p = \theta^{-1}\nu - \varkappa' \Rightarrow$$
$$\overline{H} = u - \varkappa + \int \nu\theta^{-1}dp, \bar{\mu} = \rho(\varkappa - \int \nu\theta^{-1}dp).$$

Уравнения (13) выполнены.

Список литературы

[1] Хабиров С.В. Основные задачи группового анализа дифференциальных уравнений механики // Многофазные системы. 2022. Т. 17, № 1–2. С. 51–62.
DOI: 10.21662/mfs2022.1.005

[2] Ibragiov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 333, No. 1. P. 311–328.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078

[3] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука. 1983. 280 с.

[4] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск. НГТУ. 2012. 659 с.

[5] Овсянников Л.В Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: ИКИ 2003. 336 с.

ISSN 2658–5782

18 (2023), **2**, 45–49

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2023.2.007
DOI: 10.21662/mfs2023.2.007

Received: 3.07.2023
Accepted: 18.08.2023

Group analysis tasks. Conservation laws

Khabirov S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

Differential equations of mechanics are derived from the laws of conservation of mass, momentum and energy. Other conservation laws can be obtained using the symmetries of these equations. Any conservation law can be derived from one using canonical operators, special cases of which are symmetry operators. The calculation of canonical conservation law operators is equivalent to a direct method of finding a divergent form of equations that are valid by virtue of the equations of mechanics. Using the example of one-dimensional equations of gas dynamics, all zero-order conservation laws are obtained by the direct method. For special equations of state, an infinite set of conservation laws have been obtained, many of which are new.

Keywords: conservation laws, gas dynamics, equation of state, compatibility conditions

References

[1] Khabirov S.V. The main tasks of group analysis of differential equations of mechanics // Multiphase systems. 2022. V. 17, № 1–2. Pp. 51–62 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2022.1.005

[2] Ibragiov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 333, No. 1. P. 311–328.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078

[3] Ibragimov N.H. Transformation groups in mathematical physics. M.: Nauka. 1983. 280 p. (in Russian).

[4] Chirkunov Y.A., Khabirov S.V. Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics. Novosibirsk. NGTU. 2012. 659 p. (in Russian).

[5] Ovsannikov L.V. Lectures on the basics of gas dynamics. M.: IKI 2003. 336 p. (in Russian).