

ISSN: 2658–5782

Номер 3

2023

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org



Первая часть трудов
14-й международной конференции —
школы молодых ученых
«Волны и вихри в сложных средах»

Москва
28 ноября–01 декабря 2023 г.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского

Идея проведения регулярной конференции и львиная доля усилий по её организации принадлежат профессору Юлию Дмитриевичу Чашечкину. Ещё до начала работы конференции успешно функционировала Программа фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН по проблемам волновых процессов в многофазных и неоднородных средах, объединившая целый ряд институтов РАН, университетов и других научных организаций из большого числа регионов страны. В конце каждого года участники Программы встречались для подведения итогов работы и выступали с докладами по своей теме. Именно эти отчётные доклады и послужили в дальнейшем основой для ежегодной конференции-школы.

Материалы этого выпуска распределены по трём объединяющим их разделам: «Гидродинамические модели и устойчивость, волны, колебания», «Вычислительные методы гидродинамики», «Капли и пузырьки». Если в работах, вошедших в первый раздел акцент сделан на разработке новых математических моделей или принципах их построения, то во втором разделе представлены вычислительные методы в задачах механики сплошных сред или модификации этих методов. Третье направление посвящено конкретным исследованиям в области динамики капель и пузырьков.

Разумеется, представленное распределение по разделам является достаточно условным и порой трудно выделить основной мотив выполненной работы. Именно поэтому задачи устойчивости течений, распространения волн и исследования колебаний были включены в первый раздел.

Работы некоторых авторов (Т.Г. Елизаровой, В.М. Овсянникова, Ю.Д. Чашечкина) можно рекомендовать как методические — они носят общезначимый характер.



Автомодельные режимы установившегося стекания степенной жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности¹

Агеев А.И., Осипцов А.Н.

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Введение

За последнее десятилетие значительно вырос интерес к моделированию течений жидкости вблизи супергидрофобных поверхностей (СГП), в элементах текстуры которых удерживаются микропузырьки газа. Проскальзывание жидкости вдоль пузырьков приводит к макроскопическому эффекту снижения сопротивления на СГП (см. обзор [1]). Появившаяся возможность создания СГП с контролируемым микрорельефом поверхности способствовала пересмотру ряда задач гидродинамики вязкой жидкости на СГП с формулировкой условия проскальзывания вместо классического условия прилипания. В частности, были описаны автомодельные режимы растекания тонкого слоя ньютоновской жидкости вдоль горизонтальной и наклонной СГП [1]. Для течения тонкого слоя ньютоновской жидкости вдоль СГП опубликованных результатов существенно меньше, хотя в самые последние годы наблюдается всплеск интереса к исследованию

таких течений. Это связано как с возможностью создания СГП с заметным проскальзыванием ньютоновских жидкостей, так и с обнаружением ряда неожиданных эффектов, в частности, аномально высокого скольжения псевдопластической среды при ее течении в канале с супергидрофобными стенками [2].

В настоящей работе рассматривается стационарное стекание ручейка жидкости со степенной реологией от точечного источника по наклонной неоднородной плоской СГП. В приближении стока тонкого слоя с заданным на СГП граничным условием проскальзывания получено уравнение для формы поперечного сечения ручейка. В предположении симметрии поверхности ручейка найдены условия существования класса автомодельных решений. Для ряда значений параметров скольжения СГП и реологических показателей жидкости построены аналитические и численные решения для автомодельной функции и геометрии пятна смачивания на наклонной СГП. Полученные решения могут быть использованы для планирования и интерпретации экспериментальных исследований, цель которых определение эффективных свойств СГП.

¹Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ им. М.В. Ломоносова.

Постановка задачи

Рассмотрим стекание неньютоновской жидкости от локализованного источника по плоской СГП, образующей угол φ с горизонтом. Жидкость задана реологическим соотношением $\tau_{ij}^* = 2\mu_0^* I^{n-1} e_{ij}^*$, где τ_{ij}^* и e_{ij}^* — тензоры напряжений и скоростей деформации соответственно, $I = \sqrt{e_{ij}^* e_{ij}^*}$, $n > 0$, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. При $n = 1$ коэффициент μ_0^* совпадает с динамической вязкостью ньютоновской жидкости. Начало декартовой системы координат $Ox^*y^*z^*$ совпадает с локализованным источником массоподвода; оси Ox^* и Oy^* направлены вдоль главных направлений тензора скольжения на СГП [1]; ось Oz^* направлена по нормали к наклонной поверхности. Обозначим через L , l и h_0 характерные линейные размеры длины, ширины и толщины ручейка соответственно. Предполагается, что толщина ручейка много меньше его ширины, а ширина много меньше длины: $h_0/l = l/L = \varepsilon \ll 1$. В предположении малой относительной толщины слоя ε , а также $\varepsilon^2 2^{n-1} \rho^* L^n U^{2-n} / \mu_0^* \rightarrow 0$ (где ρ^* — плотность жидкости, U — характерная скорость стекания, определяемая по заданному объемному расходу жидкости Q^* , h_0 и l) из уравнений Навье–Стокса получаем уравнения тонкого стока слоя на наклонной плоскости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right) + \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Данные уравнения получены в предположении равенства единице коэффициента, содержащего ускорение свободного падения, и соотношения на геометрические масштабы задачи. На наклонной СГП задаются условия непротекания и проскальзывания для компонент скорости, которые в безразмерной форме принимают вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad u &= b_1(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^m, \\ v &= b_2(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^m, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На свободной поверхности ручейка ставятся кинематическое (непротекание) и динамические (отсутствие касательных напряжений) граничные

условия:

$$\begin{aligned} z = h(x, y): \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= w, \quad p = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В граничном условии (2) на СГП параметры b_1 и b_2 — коэффициенты пропорциональности, связывающие безразмерную касательную скорость и степени безразмерных нормальных производных продольных скоростей среды, вычисленных на СГП при $z = 0$ [1]. Случай $m = 1$ соответствует линейному граничному условию Навье для течения ньютоновской ($n = 1$) жидкости вдоль СГП. Для ньютоновских жидкостей $b_{1,2}$ соответствуют безразмерным «длинам скольжения» главных направлений тензора скольжения. Рассмотрим достаточно общую ситуацию неоднородной СГП, для которой зависимость безразмерных коэффициентов $b_{1,2}$ в условии проскальзывания от координат описывается функциями вида $B_{1,2} x^\gamma y^\delta$, где $B_{1,2}$ — положительные константы. Частный случай, когда $\delta = \gamma = 0$, соответствует СГП с однородными свойствами. Ограничимся рассмотрением случая $m = 1$ для неньютоновской жидкости. После решения уравнений (1) с граничными условиями (2) и (3), интегрирования уравнения неразрывности по толщине слоя получаем уравнение для установившейся формы поперечного сечения ручейка на СГП:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}} \right) \operatorname{tg} \varphi + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\left[\frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_2 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для установившегося стекания жидкости расход через поперечное сечение ручейка вычисляется следующим образом:

$$\int_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \int_0^{h(x,y)} u(x, y, z) dz dy = 1,$$

где $\pm y_e(x)$ на плоскости (x, y) — заранее неизвестные боковые границы области смачивания жидкости, на которых толщина слоя равняется нулю. После подстановки в интегральный закон сохранения расхода жидкости выражения для компоненты скорости u получаем:

$$\begin{aligned} (\sin \varphi)^{\frac{1}{n}} \int_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \left(\left[\frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} + \right. \\ \left. + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}} \right) dy = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача (4)–(5) является многопараметрической и может описывать широкий класс течений для различных неоднородных СГП и стекающих жидкостей. Далее рассмотрим для уравнения (4) автомодельные решения вида:

$$h(x, y) = \alpha F(\eta), \quad \eta = y/Cx\beta, \quad C = \text{const} > 0,$$

где α и β — некоторые константы [3]. Новая переменная η характеризует автомодельный закон расширения области смачивания жидкости в направлении оси Oy . Значение константы C вычисляется из условия $\eta = 1$ на боковой границе ручейка. После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (4) и закон постоянства расхода получаем условия существования автомодельных решений и уравнение для вычисления C :

$$\alpha = -\frac{n}{5n+2}, \quad \beta = \frac{2n+1}{5n+2}, \quad \gamma = -\frac{n+(2n+1)\delta}{5n+2};$$

$$C(\sin \phi)^{\frac{1}{n}} \int_{-1}^1 \left(\left[\frac{n}{2n+1} \right] F^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 C^\delta \eta^\delta F^{\frac{n+1}{n}} \right) d\eta = 1.$$

После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (4) получаем краевую задачу для автомодельной функции F :

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{2n+1} \right] \frac{d}{d\eta} \left(F^{\frac{2n+1}{n}} \frac{dF}{d\eta} \right) + B_2 C^\delta \frac{d}{d\eta} \left(\eta^\delta F^{\frac{n+1}{n}} \frac{dF}{d\eta} \right) + \\ + \left[\frac{C^2 n}{5n+2} \right] \frac{d}{d\eta} \left(\eta F^{\frac{2n+1}{n}} \right) \text{tg}\phi + \\ + B_1 C^{\delta+2} \left[\frac{2n+1}{5n+2} \right] \frac{d}{d\eta} \left(\eta^{\delta+1} F^{\frac{n+1}{n}} \right) \text{tg}\phi = 0, \\ F'(0) = F(1) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя данное уравнение с условием $F'(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{n}{2n+1} \right] F \frac{dF}{d\eta} + B_2 C^\delta \eta^\delta \frac{dF}{d\eta} + \left[\frac{C^2 n}{5n+2} \right] \eta F \text{tg}\phi + \\ + B_1 C^{\delta+2} \left[\frac{2n+1}{5n+2} \right] \eta^{\delta+1} \text{tg}\phi = 0, \quad F(1) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае СГП, у которой коэффициенты скольжения зависят от одной пространственной координаты ($\delta = 0$ и $\gamma = -n/(5n+2)$) в выражениях для $b_{1,2}$) уравнение для автомодельной функции (6), имеет аналитическое решение, выраженное неявной функцией:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2n+1} \right) F + B_2 \ln \left| F + \left(\frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right| - \\ - B_1 \ln \left| F + \left(\frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right| = \frac{nC^2 \text{tg}\phi}{(10n+4)} (1 - \eta a^2) + \\ + B_2 \ln \left| \left(\frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right| - B_1 \ln \left| \left(\frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right|. \end{aligned}$$

При $n = 1$ и $B_{1,2} = 0$ уравнение (6) принимает известный в литературе вид [3]. Решения для других значений δ и γ могут быть получены на основе численного интегрирования уравнения (6) с краевым условием $F(1) = 0$. Значение константы C в законе расширения пятна смачивания вычисления итерациями на основе решения ОДУ для автомодельной функции.

Список литературы

- [1] *Ареев А.И., Осипцов А.Н.* Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности // Коллоидный журнал. 2022. Т. 84(6). С. 380.
- [2] *Patlathan S., Vagner S.* Apparent slip of shear thinning fluid in a microchannel with a superhydrophobic wall // Phys. Rev. E. 2007. No. 96. P. 013104.
- [3] *Wilson S.K., Duffy B.R., Hunt R.* A slender rivulet of a power-law fluid driven by either gravity or a constant shear stress at the free surface // Q. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55(3). P. 385.
- [4] *Ареев А.И., Осипцов А.Н.* Стеkanie ручейка неньютоновской жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности // Письма в ЖЭТФ. 2023. Т. 118(3). С. 171.



Коротковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений мелкой воды над резко меняющимся дном

Аллилуева А.И.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Описаны коротковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений мелкой воды в случае, когда рельеф дна и внешний поток меняются скачкообразно вблизи некоторой кривой. В зависимости от типа скачка (тангенциальный или нормальный) изучены кривые Петровского и различные моды прошедших и отраженных волн. Асимптотика выражается через вспомогательное

обыкновенное дифференциальное уравнение; показано, что это уравнение вырождается (т.е. его порядок меньше, чем в случае гиперболических систем общего положения). Основной результат — асимптотический ряд для решения задачи Коши.

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН

© Аллилуева Анна Ивановна, esina_anna@list.ru



Влияние индуцированных неоднородностей плотности газа на стабильность плазмы непрерывного оптического разряда¹

Андросенко В.Н., Котов М.А., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Непрерывный оптический разряд (НОР) является широкополосным источником света с высокой спектральной яркостью [1, 2]. Одним из факторов, оказывающих влияние на стабильность излучения НОР, может являться неоднородность коэффициента преломления среды, через которую проходит лазерный луч, формирующий и питающий плазму. Особенно это актуально при больших разрядных объемах в колбах или камерах, когда термогравитационная конвекция, возникающая в плазмообразующем газе вокруг НОР [3, 4], создает направленный поток газа вверх в области вблизи плазмы (в центральной части колбы/камеры). Здесь может возникать обратное движение газа вниз в отдаленных от плазмы областях (на периферии). Поскольку конвекция газа вокруг НОР является главным фактором, от которого зависит стабильность излучения плазмы, изучение ее влияния на процессы

формирования и поддержания плазмы НОР является особенно актуальным.

НОР зажигался и поддерживался в сапфировой трубке с внутренним диаметром 15 мм и длиной 70 мм, наполненной ксеноном (Рис. 1).

Инициация и поддержание плазмы проводилось по следующей схеме (Рис. 1(a)): импульсно-периодический лазер YLPP-1-150V-30 (1) генерировал излучение на длине волны 1.06 мкм, направленное через зеркало (2) и сфокусированное линзой (3) в центре сапфировой трубки (4), наполненной ксеноном под давлением 30 бар (газ комнатной температуры). В фокусе луча инициировался оптический пробой. Далее включался непрерывный лазер Raycus RFL-C1500 (5) с выходной мощностью 150–1500 Вт и длиной волны 1.08 мкм, настроенный с помощью линзы (6) на пересечение фокальных перетяжек обоих лазеров. Мощность его излучения превышала пороговую в 3–4 раза. После инициации НОР импульсный лазер выключался, а мощность непрерывного лазера уменьшалась до необходимой для поддержания плазмы. Измерение мощностей излучения обоих лазеров во время эксперимента осуществлялось с помощью измерителей мощности (7).

На Рис. 1(b) показана схема получения изоб-

¹Работа выполнена по теме государственного задания (№ 123021700057-0).

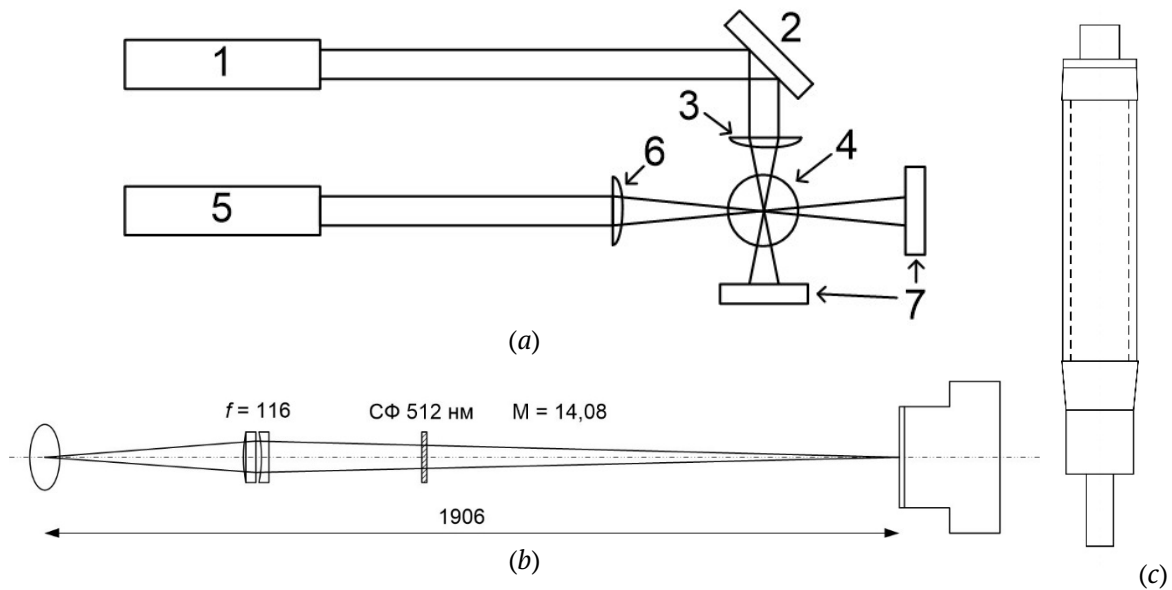


Рис. 1. Схема эксперимента: (а) Инициация НОР с помощью импульсно-периодического лазера, 1 – импульсно-периодический лазер, 2 – зеркало, 3, 6 – фокусирующие линзы, 4 – сапфировая трубка с ксеноном, 5 – лазер непрерывного излучения, 7 – измерители мощности лазерного излучения; (б) Схема получения изображения плазмы; (с) Рисунок трубки с внутренним диаметром 15 мм и длиной 70 мм, наполненной ксеноном под давлением 30 бар, в объеме которой инициировался НОР

ражения плазмы. Свет НОР, проходя через линзу $f = 116$ мм и светофильтр 512 нм, попадал на объектив и матрицу скоростной камеры. Аналогично шпирен методом с дополнительным источником света за плазмой и щелью в фокусе были получены теневые изображения конвективных пульсаций вокруг НОР и фотографии хаотичного распределения завихрений в объеме трубки (Рис. 1(с)). Съемка проводилась со скоростью 1000 кадров в секунду и экспозицией 50 наносекунд при съемке плазмы и 998 наносекунд при съемке шпирен методом.

На полученных сериях изображений конвективных пульсаций вокруг плазмы НОР (Рис. 2) отмечено нестабильное поведение факела термогравитационной конвекции.

Также обращают на себя внимание неоднородности плотностей в периферийной области разрядного объема. На Рис. 3 показана картина таких остаточных течений в трубке сразу после отключения лазера, поддерживающего НОР. На Рис. 4 представлены прямые фотографии плазмы с низкой выдержкой, при которой видна ее структура. Видно, что остаточные течения горячего газа и, соответственно изменения градиентов плотности и коэффициента преломления среды влияют на прохождение лазерного пучка и траектории пролета квантов лазерного излучения в разрядном объеме. Поэтому распределение интенсивности лазерного излучения при поглощении в плазме изме-

няется соответственно градиентам коэффициента преломления в объеме трубки, от чего и возникает пространственно-временная нестабильность структуры плазмы НОР.

Такое влияние на структуру плазмы НОР можно объяснить большой высотой используемой трубки (Рис. 1(с)) – при ее вертикальном размещении конвективные течения, возникающие около плазмы НОР, успевают набирать большие значения скорости и интерферировать друг с другом. Для оценки этого влияния проводились эксперименты с горизонтальным размещением сапфировой трубки. В этом случае объем циркуляции в конвективной зоне уменьшался по сравнению с вертикальным размещением – характерные размеры по 7.5 мм вверх и вниз от НОР. Непрерывное лазерное излучение подавалось снизу с помощью внеосевого параболического зеркала.

При такой конфигурации НОР остаточные нестабильности горячего газа в периферийной области трубки практически пропадают, и сохраняется стабильность конвективных пульсаций и структуры плазмы НОР (Рис. 5).

Изучение поведения структуры плазмы НОР в разрядном объеме с различными вариантами установки трубки и оптической схемы, фокусирующей лазерное излучение, является определяющим фактором для исследования нестабильностей НОР, возникающих в плазмообразующем газе.

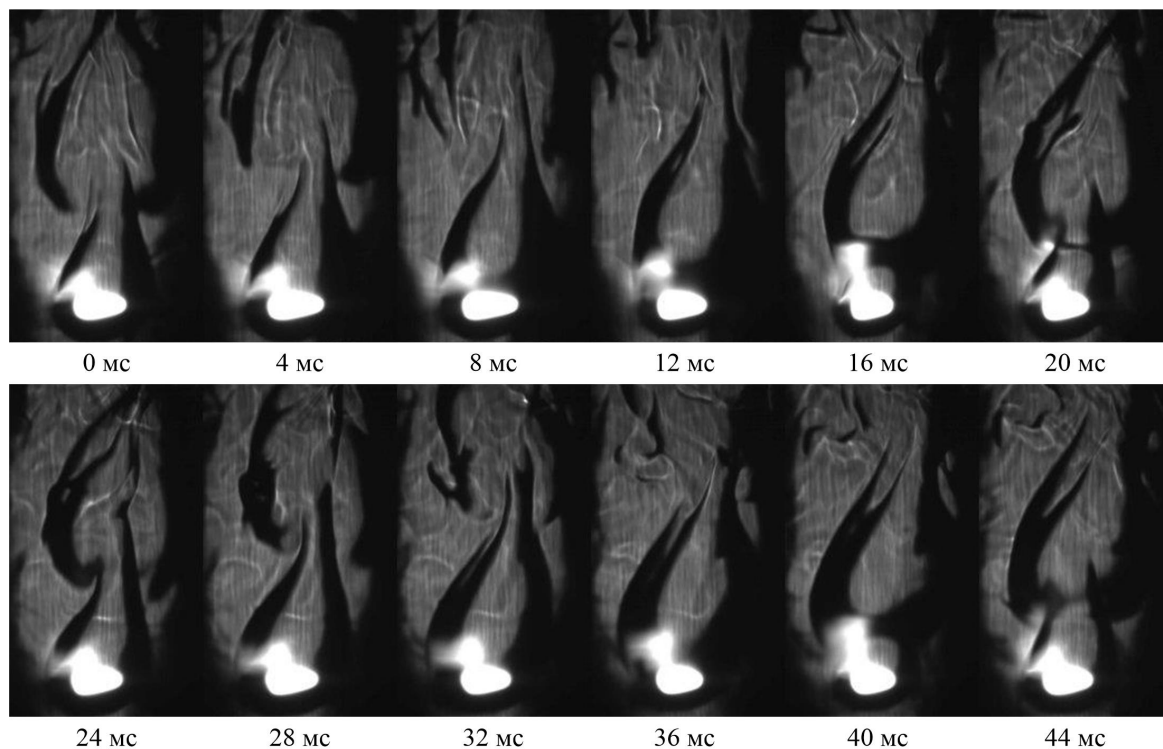


Рис. 2. Серия шлирен фотографий конвективных пульсаций НОР, поддерживаемого мощностью непрерывного лазерного излучения 210 Вт на 1.08 мкм. Выдержка 998 мкс, размер одного кадра 4.35×7.45 мм

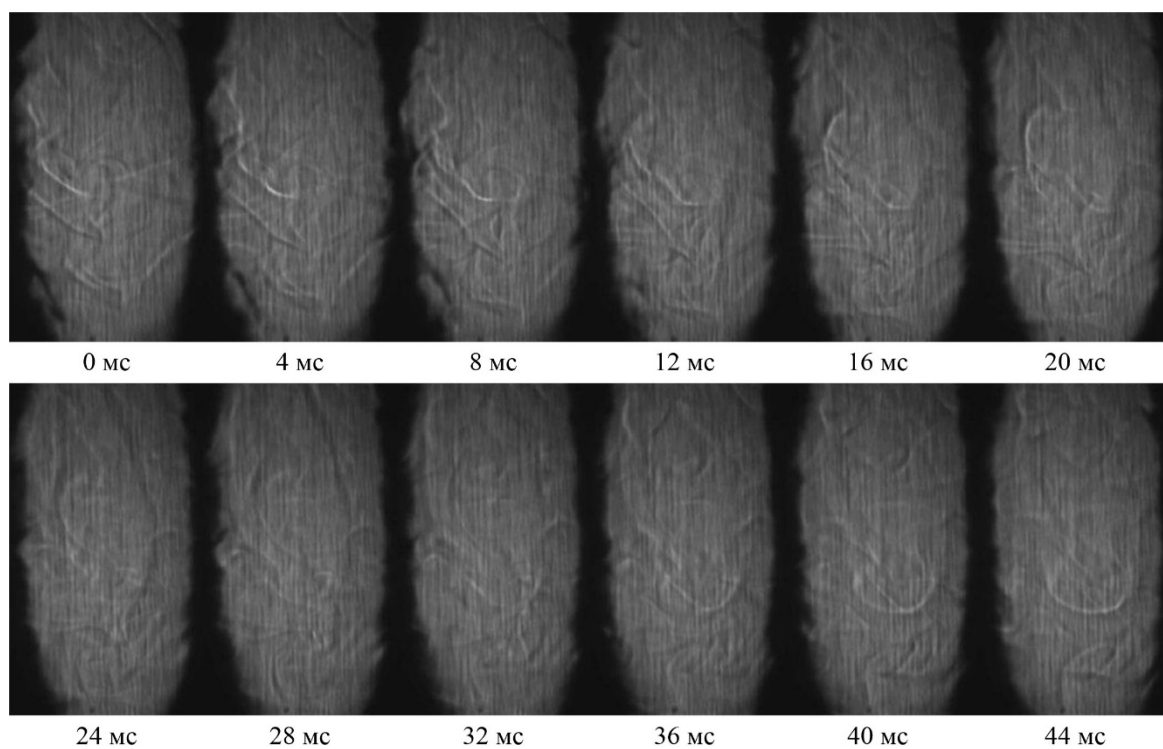


Рис. 3. Серия шлирен фотографий остаточных неоднородностей коэффициента преломления среды, вызванных конвекцией горячего газа вокруг НОР сразу после его выключения. Выдержка 998 мкс, размер одного кадра 4.35×7.45 мм

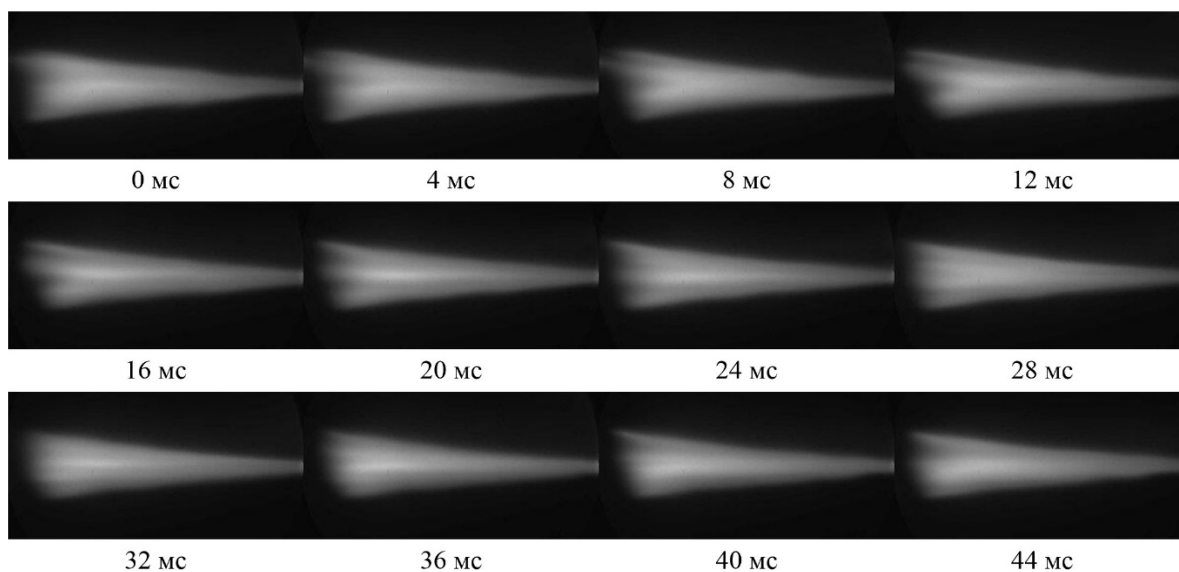


Рис. 4. Серия фотографий плазмы НОР с мощностью непрерывного лазерного излучения 675 Вт через каждые 4 мс. Выдержка 50 мкс., размер одного кадра 3.8×1.9 мм

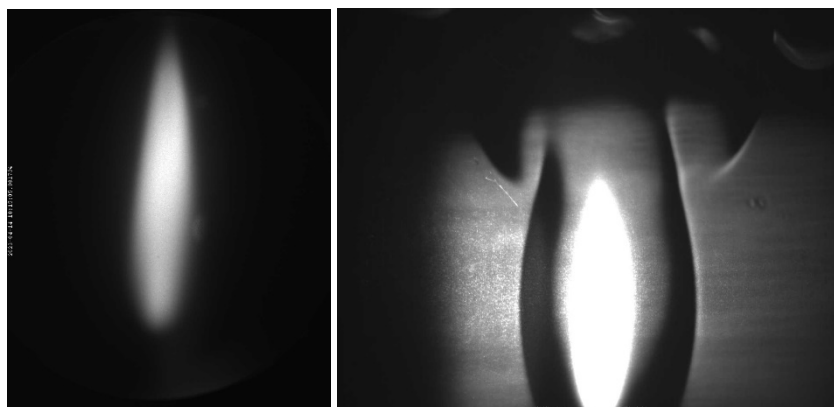


Рис. 5. Фотография плазмы НОР с выдержкой 50 мкс (слева) и ширин фотография конвективных пульсаций НОР с выдержкой 998 мкс (справа) с мощностью непрерывного лазерного излучения 600 Вт. Размер кадров 2.55×3.18 мм и 4.48×3.58 мм для левого и правого рисунков соответственно

Список литературы

- [1] Зимаков В.П., Кузнецов В.А., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Шилов А.О., Якимов М.Ю. Взаимодействие лазерного излучения ближнего ИК-диапазона с плазмой непрерывного оптического разряда // Физика плазмы. 2016. Т. 42(1). С. 74–80.
- [2] Зимаков В.П., Кузнецов В.А., Лаврентьев С.Ю., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Шилов А.О., Якимов М.Ю. Новые возможности применения оптических разрядов в аэрофизическом эксперименте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2016. Т. 17(2). С. 653. <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-2/articles/653/>.
- [3] Kotov M.A., Lavrentyev S.Yu., Solovyov N.G., Shemyakin A.N., Yakimov M.Yu. Dynamics of laser plasma convective plume in high pressure xenon // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1675. P. 012073. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012073>.
- [4] Kotov M.A., Lavrentyev S.Y., Shemyakin A.N., Solovyov N.G., Yakimov M.Y. Oscillations of convective flow around a continuous optical discharge in high-pressure xenon // Plasma Sources Science and Technology. 2022. V. 31(12). P. 12.



Об управлении параметрами колебания поплавок в неоднородной жидкости¹

Байдулов В.Г.

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Рассмотрена задача управления колебаниями поплавок в неоднородной жидкости за счет изменения его формы. Использован подход Л.Н. Сретенского, впоследствии адаптированный к случаю неоднородной жидкости [1]. Ранее рассматривалась задача о колебаниях сферы нейтральной плавучести в непрерывно стратифицированной жидкости [2], в том числе при учете вязкого сопротивления. Уравнения движения тела сводились к дифференциальному уравнению. Масса тела оказывалась увеличенной за счет присоединенной массы, а сами колебания определялись линейными силами плавучести и вязкой диссипации. Условный период колебаний при этом с течением времени оставался постоянным.

В рамках использованного подхода, когда колебания описываются интегро-дифференциальным уравнением с ядром типа свертка, показано, что характеристики колебаний (мгновенная частота и декремент затухания) меняются со временем и существенно зависят от вида ядра. Была решена задача о стабилизации параметров колебаний по-

плавка за счет изменения его форм во времени. В качестве параметра управления использовалась относительная ширина поплавок. Получены выражения, описывающие закон управления, при котором частота поплавок и декремент затухания остаются неизменными в процессе колебаний.

Список литературы

- [1] Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г. Экстремальные свойства колебаний поплавок эллиптической формы // Доклады АН. 2019. Т. 487. №2. С. 140 – 143. DOI: 10.31857/S0869-56524872140-143
- [2] Larsen L.H. Oscillations of a neutrally buoyant sphere in a stratified fluid // Deep-Sea Res., 1969. V. 16, p. 587 – 603.

¹Работа выполнена по теме государственного задания (госрегистрации 123021700055-6).



Электрогидродинамическая неустойчивость границы расплавленного металла в условиях сильного электрического поля¹

Баренгольц С.А., Зубарев Н.М., Кочурин Е.А.

ФГБУН Институт электрофизики Уральского отделения РАН, Екатеринбург

Физические процессы, приводящие к вакуумному пробою, уже длительное время являются предметом активного исследования. Причина интереса к этому явлению состоит в широком использовании вакуумной изоляции в различных приборах и устройствах. Эти исследования получили новый импульс в связи с разработкой ускорительной техники тераваттного уровня мощности [1]. Именно вакуумный пробой ускорительных структур при воздействии на них электромагнитными импульсами наносекундной длительности является основной проблемой на пути достижения высоких ускорительных градиентов [2]. В качестве основного механизма вакуумного пробы в наносекундном диапазоне рассматривается образование проводящей среды (плазмы) на катоде из-за разогрева естественных микровыступов с высокими коэффициентами усиления поля (β) автоэмиссионными токами [3]. Напряженности поля, при которых реализу-

ется такой механизм в ускорительных структурах, имеют порядок 10^8 В/см [4]. Появление на катоде расплавленного металла создает условия для развития электрогидродинамической (ЭГД) неустойчивости [5]. Она приводит к заострению границы — формированию конусов Тейлора [6, 7]. В результате, после плавления микровыступов будет меняться их геометрия (расти β) и, как следствие, ускоряться предпробойные процессы.

В настоящей работе мы рассмотрим, в чем специфика развития ЭГД неустойчивости в полях напряженностью (E) около 10^8 В/см, что на три порядка превышает ее порог $E_c = (4\epsilon_0^{-2}\rho g\alpha)^{1/4}$ [5] (для жидкой меди это $8.5 \cdot 10^4$ В/см), где ϵ_0 — электрическая постоянная, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения. Характерный масштаб конических образований убывает с ростом приложенного поля как $\lambda \propto E^{-2}$ [7]. Понятно, что уменьшение l на 6 порядков при изменении E на 3 порядка приведет к тому, что приближение идеальной жидкости перестанет работать, и необходимо будет учитывать вязкость расплава.

Будем считать границу жидкости в невозмущенном состоянии плоской. Пусть функция η задает ее возмущение. При анализе неустойчивостей

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-19-00323.

границы η ищется в виде $\eta \propto \exp(ikx - i\omega t)$, где x — координата, t — время, k — волновое число, ω — частота. Линейная динамика границы описывается законом дисперсии, который можно получить (с учетом вязкости), взяв известную формулу для гравитационных волн [8] и сделав в ней замену $\rho g k \rightarrow -\varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3$, соответствующую тому, что вместо силы тяжести мы будем рассматривать капиллярные и электростатические силы. Получим

$$\rho(2\nu k^2 - i\omega)^2 - \varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho\nu^{3/2} k^3 \sqrt{\nu k^2 - i\omega} \quad (1)$$

где ν — кинематическая вязкость (см. также [9]). Из этого соотношения следует, что можно ввести характерное значение напряженности поля $E_\nu = \alpha\nu^{-1}\varepsilon_0^{-1/2}\rho^{-1/2}$, такое, что при $E \ll E_\nu$ вязкими эффектами можно пренебречь, а при $E \geq E_\nu$ именно они будут определять динамику неустойчивости. Для жидкой меди при температуре плавления имеем $E_\nu \approx 9.8 \cdot 10^7$ В/см, что попадает в интересующий нас диапазон полей.

Рассмотрим, как развивается ЭГД неустойчивость при полях порядка E_ν . Будем интересоваться описывающими развитие аperiodической неустойчивости решениями (1). Это соответствует тому, что $\omega = i\gamma$, где $\gamma > 0$ — инкремент. Характерный пространственный и временной масштабы при $E = E_\nu$ составляют $\lambda \approx 23$ нм и $\tau \approx 27$ пс. Применительно к расплаву, образующемуся на вершине катодного выступа, можно отождествить радиус вершины острия R с четвертью длины волны, что дает 5–6 нм. Этот размер коррелирует данными [10], где методом молекулярной динамики моделировалась деформация вершины катодного острия с $R = 1$ –10 нм. При $R > 3$ нм пороговое значение поля, при котором начиналось вытягивание медного нановыступа, составляло $\approx 11 \cdot 10^7$ В/см, т.е. близко к E_ν . Согласно [10] вытягивание происходило за времена в десятки–сотни пс при температурах, значительно превышающих температуру плавления. Рассмотренный нами ЭГД механизм заострения вершины выступа не требует достижения высоких температур, причем может реализовываться при меньших полях.

При разработке нелинейной модели развития неустойчивости важно, чтобы связь γ от k описывалась максимально простым выражением. Так, в длинноволновом пределе имеем линейную зависимость $\gamma \propto k$, что позволило в [11] построить модель, описывающую нелинейную эволюцию границы вплоть до формирования на ней особенностей — точек с бесконечной кривизной. Для вязкой жидкости мы сталкиваемся с той трудностью, что дисперсионное соотношение является весьма громоздким. Однако, как оказывается, описываемая

(1) связь γ и k в частном случае $E = E_\nu/2$ хорошо (с погрешностью менее 10%) аппроксимируется параболической зависимостью $\gamma = \alpha(2\rho\nu)^{-1}k - 2\nu k^2$. Такое выражение, несмотря на свою простоту, отражает все основные особенности точного закона дисперсии в области неустойчивых k .

Мы предлагаем при $E = E_\nu/2 \approx 4.9 \cdot 10^7$ В/см для описания развития ЭГД неустойчивости использовать следующую нелинейную модель:

$$\eta_t = -\alpha(2\rho\nu)^{-1}\hat{H}\eta_x + 2\nu\eta_{xx} + \alpha(4\rho\nu)^{-1}((\hat{H}\eta_x)^2 - (\eta_x)^2), \quad (2)$$

где \hat{H} — оператор Гильберта. Линейная часть (2) соответствует приближенному параболическому закону дисперсии и позволяет адекватно учесть влияние и электростатических, и капиллярных, и вязких сил. Нелинейная часть (2) соответствует модели из [11], в которой учитывались только электростатические силы.

Рассмотрим в рамках (2) динамику формирования особенности на границе жидкости. Считаем, что жидкость занимает ограниченную область $L/2 \leq x \leq L/2$. Исходную форму границы зададим как $\eta = A \cos(2\pi x/L)$ с $L = 360$ нм (применительно к расплаву на вершине острия это соответствует радиусу в ≈ 100 нм) и амплитудой $A = 10^{-2}L$. Уравнение (2) решалось численно на основе спектральных методов с числом гармоник $N = 8096$. Граничные условия по пространству брались периодическими. Интегрирование по времени проводилось явным методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с шагом $dt = 2.2 \cdot 10^{-15}$ с. Эволюция возмущения границы показана на Рис. 1. Видно, что происходит неограниченное заострение поверхности к моменту $t_c \approx 0.73$ нс. Масштаб формирующегося острия можно оценить как ширину области, в которой угол наклона превышает 45° ; она составляет ≈ 30 нм, что ожидаемо близко к половине длины доминантной (соответствующей максимуму инкремента γ) моды в ≈ 40 нм.

На Рис. 1 штриховой линией показано решение линеаризованного уравнения (2) в момент t_c . Из сравнения линейного и нелинейного решений ясно, что нелинейные слагаемые радикально ускоряют развитие неустойчивости; именно они обуславливают формирование особенности. Таким образом, модель (2), несмотря на ее простоту, демонстрирует тенденцию к заострению границы и, как следствие, росту коэффициента усиления поля β . В связи с тем, что этот рост происходит при полях на вершине микровыступа субмикронного размера меньше пробивных, можно сделать вывод о том, что плавление вершины неизбежно приведет к ускорению вакуумного пробоя.

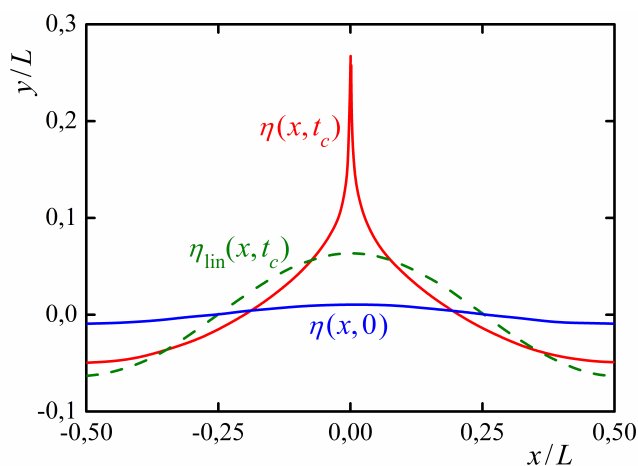


Рис. 1. Эволюция поверхности расплавленного металла в рамках нелинейной модели (2). Синяя сплошная линия соответствует начальному моменту времени, красная — моменту формирования особенности, зеленая штриховая — этому же моменту для линейного приближения

Список литературы

- [1] *Aichele M. et al. (Eds).* CLIC Conceptual Design Report CERN 2012-007. Geneva, CERN, 2012.
- [2] *Wuensch W.* CERN-OPEN-2014-028, CLIC-Note-1025. Geneva, CERN, 2013.
- [3] *Mesyats G.A., Proskurovsky D.I.* Pulsed Electrical Discharge in Vacuum. Berlin, Springer, 1989.
- [4] *Баренгольц С.А., Месяц Г.А.* Взрывоэмиссионные процессы в термоядерных установках с магнитным удержанием плазмы и линейных электрон-позитронных коллайдерах // УФН. 2023. Т. 193(7). С. 751–769.
- [5] *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6(4). С. 348–350.
- [6] *Taylor G.I.* Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. p. 383–397.
- [7] *Suvorov V.G., Zubarev N.M.* Formation of the Taylor cone on the surface of liquid metal in the presence of an electric field // J. Phys. D: Appl. Phys. 2004. V. 37. p. 289–297.
- [8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, ГРФМЛ. 1988. С. 736.
- [9] *Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.* Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом // ПММ. 2023, Т. 87(3). С. 379–391.
- [10] *Gao X. et al.* Molecular dynamics simulations of thermal evaporation and critical electric field of copper nanotips // J. Phys. D: Appl. Phys. 2020. V. 53. p. 365202.
- [11] *Зубарев Н.М.* Формирование особенностей на поверхности жидкого металла в сильном электрическом поле // ЖЭТФ. 1998. Т. 114(6). С. 2043–2054.



Теоретическое и экспериментальное исследование течений с испарением на термокапиллярной границе раздела: особенности моделирования, анализ характеристик¹

Бекежанова В.Б.^{*}, Гончарова О.Н.^{*,**}, Люлин Ю.В.^{*,***}

^{*}Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

^{**}Алтайский государственный университет, Барнаул

^{***}НИУ «Московский энергетический институт», Москва

Экспериментальные и теоретические исследования

Изучение конвекции в жидкостях с учётом испарения на межфазной поверхности относится к актуальным направлениям исследований, затрагивающим проблемы теплофизики и гидродинамики. Характер конвективных течений, развивающихся в слое жидкости под действием граничного теплового режима и испарения, вызываемого спутным потоком газа, оказывает прямое влияние на структуру самих течений, на величину массовой скорости испарения и характеристики теплопереноса и паросодержания в газе. Для получения полной картины течений в слое жидкости необходимо проводить совместные эксперименталь-

ные и теоретические исследования. Разработанные экспериментальные методы, включающие в себя стенд, оптические методики и инфракрасную съёмку, позволяют контролировать массовый расход газа, температуру рабочих сред, поддерживать плоскую форму границы раздела жидкости и газа и измерять температуру на поверхности и массовый расход парогазовой смеси на выходе рабочего участка. Для рабочей системы «этанол–воздух» при толщине слоя 3 мм проведены термографические исследования поверхности слоя жидкости, испаряющейся под действием потока газа. Получены новые экспериментальные данные массовой скорости испарения с межфазной поверхности в широком диапазоне скоростей потока газа 0.00139–1.38 м/с (Рис. 1), которые используются для верификации развиваемых аналитических методов исследования конвекции в условиях диффузионного испарения.

Теоретическое исследование испарительной конвекции включает разработку математических моделей для описания течений с учётом массопереноса через границу раздела жидкость–газ, изу-

¹Работа выполнена при поддержке РНФ (код проекта 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243/>).

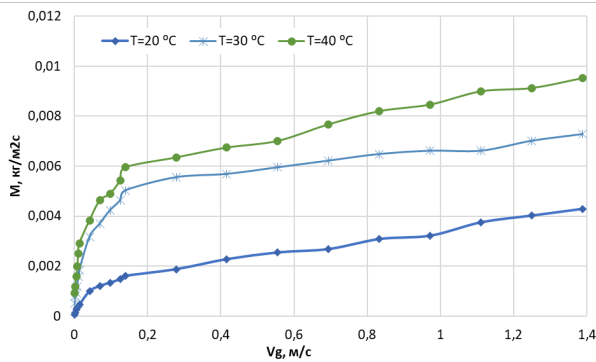


Рис. 1. Экспериментальные зависимости массовой скорости испарения M от рабочей температуры T в системе «этанол – воздух» и скорости потока газа V_g при толщине слоя жидкости 3 м

чение корректности сформулированных начально-краевых задач и построение точных решений, исследование вопросов устойчивости течений, описываемых точными решениями, определение области применимости данных решений и математической модели в целом, проведение сравнения с экспериментальными данными [1]. Для исследования процессов конвективного теплообмена в двухфазных системах используется подход, основанный на применении приближения Обербека–Буссинеска уравнений Навье–Стокса. При этом в определяющих уравнениях и граничных соотношениях дополнительно учитывается вклад явлений термодиффузии и диффузионной теплопроводности, имеющих место в парогазовом слое за счёт присутствия испаряемого компонента.

Среди точных решений уравнений конвекции, имеющих групповую природу, выделяются решения типа решений Остроумова–Бириха, которые могут быть эффективно использованы для описания течений в условиях фазовых превращений жидкость–пар. Аналитическое и численное исследование двухфазных течений с испарением или конденсацией на поверхности раздела, проведенное на основе обобщений решений Остроумова–Бириха, позволяют описать режимы испарительной конвекции, наблюдаемые в реальных физических системах, что подтверждается хорошим качественным и количественным согласованием экспериментальных данных и теоретических результатов. Построенные решения позволяют изучить фундаментальные и вторичные особенности моделируемых физических процессов и представить анализ влияния геометрических и теплофизических характеристик рабочей системы на характер течений [2–4].

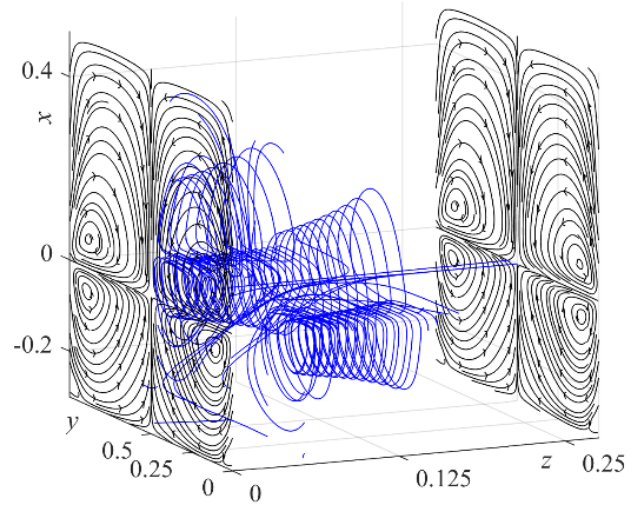


Рис. 2. Примеры распределений характеристик в системе сред «этанол–азот»: поле скорости и траектории жидких частиц

Особенности трёхмерных решений

Точное решение в трёхмерном случае является частично-инвариантным решением ранга 2 дефекта 3 определяющих уравнений и качественно описывает стационарные совместные течения жидкости и парогазовой смеси в бесконечном канале прямоугольного сечения. На основе решения определяются характеристики конвективных течений на рабочем участке протяженного канала, описываются различные формы реализации поступательно-вращательных течений, включая формирование валиковой конвекции, приповерхностных горячих слоев и термических валов, специфических тепловых структур с дефектами, а также холодного термоклина в объёмной жидкой фазе. На Рис. 2–5 представлен пример структуры течения, устано-

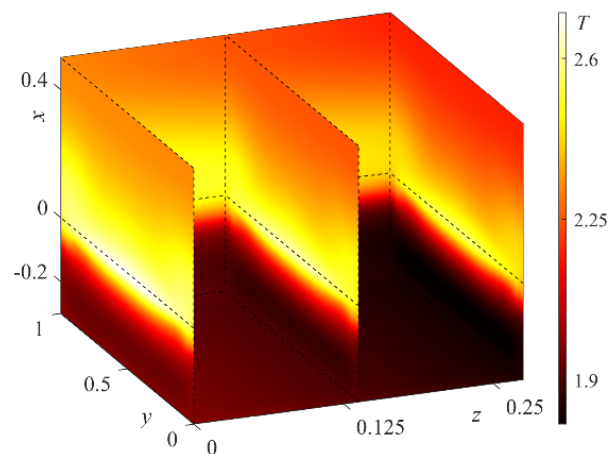


Рис. 3. Примеры распределений характеристик в системе сред «этанол–азот»: температура

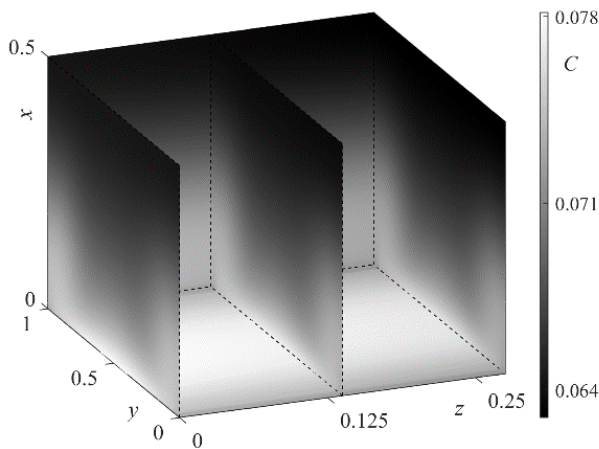


Рис. 4. Примеры распределений характеристик в системе сред «этанол–азот»: концентрация пара

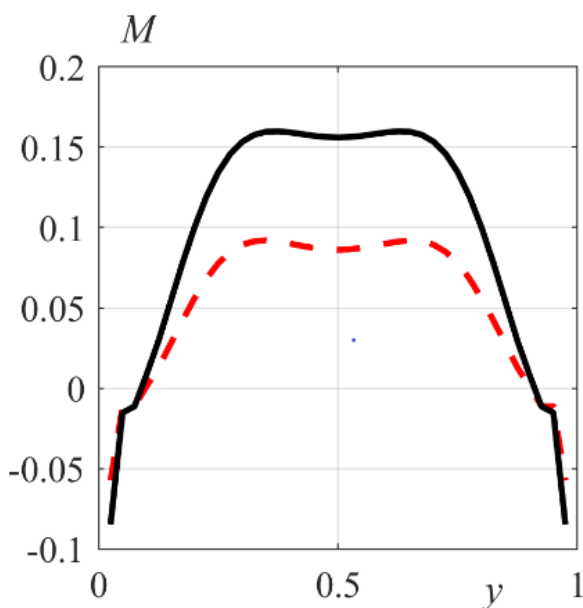


Рис. 5. Примеры распределений характеристик в системе сред «этанол–азот»: профили массовой скорости испарения при $T_{in} = 20\text{ °C}$ (штриховая линия) и $T_{in} = 30\text{ °C}$ (сплошная линия)

вившегося в канале с теплоизолированными стенками. При этом толщины жидкого и парогазового слоёв равны, соответственно, $l = 3\text{ мм}$ и $h = 5\text{ мм}$; течение развивается в условиях нормальной гравитации $g = 9.81\text{ м/с}^2$; исходная температура системы и продольный градиент температуры приняты равными $T_{in} = 20\text{ °C}$ и $A = 5\text{ °C/см}$ ($V_* = V_g = 0.00139\text{ м/с}$, $T_* = 10\text{ °C}$ – характерные скорость и температура). Профили массовой скорости испарения M на поверхности раздела представлены на Рис. 5.

Особенности двумерных решений

Двумерное точное решение задачи о конвекции в двухслойной системе с испарением (частично-инвариантное решение ранга 1 дефекта 2) позволяет провести моделирование однородного и неоднородного (относительно продольной координаты) испарения на границе раздела. Проведён анализ постановок краевых задач в двумерном случае для моделирования течений испаряющейся жидкости, увлекаемой спутным потоком газа в горизонтальном канале. Задачи различаются типом температурного и концентрационного режимов на стенках канала. Проведена классификация типов конвективных течений, расширяющая классификацию Наполитано; описаны чисто термокапиллярные течения, течения смешанного и пуазейлевского типов, их характеристики и механизмы. Изучены вопросы устойчивости течений. Проведено сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными, позволяющее указать область применимости двумерного точного решения.

Список литературы

- [1] Lyulin Yu., Kabov O. Thermal effect in the evaporation process from the interface of the horizontal liquid layer under a shear gas flow // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2023. V. 11(1). Pp. 55–64.
- [2] Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82(2). С. 219–260.
- [3] Bekezhanova V.B., Goncharova O.N. Thermocapillary convection with diffusive-type evaporation in a three-dimensional channel under the conditions of combined thermal load // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2022. V. 10(2). p. 11–30.
- [4] Шефер И. А. Влияние поперечного перепада температур на устойчивость двух слойных течений жидкости с испарением // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2019. №5. С. 15–25.



К расчету неустойчивости заряженной поверхности неоднородной жидкости

Белоножко Д.Ф.

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, Ярославль

Введение

В середине 30-х годов прошлого столетия в работах Л. Тонкса [1] и Я.И. Френкеля [2] была построена количественная модель дестабилизации заряженной поверхности жидкости под действием поверхностных электрических сил, доминирующих над силами поверхностного натяжения. Задача расчета критического значения поверхностной плотности электрического заряда, превышение которой приводит к неустойчивости свободной поверхности, на настоящий момент является классической и приводится в качестве «простого» упражнения в восьмом томе курса теоретического физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [3]. Приведенная в [3] методика расчета легко обобщается на более сложные задачи. Но подобное обобщение зачастую нуждается в правильной физической интерпретации. Настоящая работа представляет собой пример такого обобщения на случай, когда поверхность заряженная жидкость является стратифицированной по глубине и в расчетах возникают практически нереализуемые решения, которые из физических соображений необходимо опустить.

Математическая формулировка задачи

Задача решалась в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Ox направленной горизонтально вдоль поверхности жидкости. Ось Oz ориентировалась вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести \mathbf{g} . Полупространство $z < 0$ считалось заполненным идеальной, идеально проводящей жидкостью, по поверхности которой равномерно распределен электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью, индуцированной вертикальным электрическим полем с напряженностью E_0 . Коэффициент поверхностного натяжения жидкости γ полагался постоянным. Считалось, что плотность жидкости в невозмущенном состоянии экспоненциально растет с глубиной $\rho = \rho_0(1 + \exp(-z/\Lambda))$, где $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$. Параметр вертикального масштаба изменения плотности Λ непосредственно определялся через частоту плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$. Эффектами вязкости, диффузии и теплопроводности пренебрегалось. Исследовалась устойчивость системы по отношению к малым возмущениям $z = \xi(t, x)$ свободной поверхности жидкости. Для простоты, возмущенное движение жидкости считалось независимым от координаты y .

В линейном приближении по малому параметру, пропорциональному отношению амплитуды

возмущения к его длине, в условиях приближения Буссинеска математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
 z > 0: \quad & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \\
 z < 0: \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(1+r(z))} \frac{\partial p}{\partial x}; \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(1+r(z))} \frac{\partial p}{\partial z}; \\
 & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{\Lambda} r(z) = 0; \\
 z = 0: \quad & \frac{\partial \xi}{\partial t} = v; \\
 & -\rho_0 \xi g + p - E_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}; \\
 & \varphi - E_0 \xi = 0; \\
 z \rightarrow \infty: \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0; \\
 z \rightarrow -\infty: \quad & v \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Здесь $u \equiv u(t, x, z)$ и $v \equiv v(t, x, z)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей; $p \equiv p(t, x, z)$ — возмущения к равновесному распределению давления в жидкости; φ — вызванное волновым искажением поверхности возмущение равновесного электрического потенциала $\Phi = -E_0 z + \varphi$ в верхнем полупространстве $z > 0$.

Результаты расчета

Стандартными методами легко построить дисперсионное уравнение задачи. В отличие от классической ситуации, для дисперсионного уравнения получаются две ветви. Принимая в качестве критерия отбора условие затухания движения жидкости с глубиной, несложно установить, что в зависимости от значения поверхностной плотности заряда физически реализуются разные части ветвей дисперсионного уравнения. В целом, результат удается описать с помощью формулы:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(N^2 + \text{sign}(\omega_0^2) \sqrt{4\omega_0^2 - N^4} \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 &= gk(1 + \alpha k - \alpha kW); \\
 \alpha &= \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0 g}}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\gamma\rho_0 g}}
 \end{aligned}$$

Здесь k — волновое число возмущения свободной поверхности; ω_0 — циклическая частота элетро-капиллярно-волнового движения на поверхности жидкости постоянной плотности ρ_0 ; α — капиллярная постоянная жидкости. Безразмерный параметр Тонкса–Френкеля W характеризует отношение электрических и капиллярных сил на гребнях волновых возмущений. Также, как и в классическом случае, критерием трансформации устойчивого состояния системы в неустойчивое является переход значений частоты ω_0 от действительных к чисто комплексным значениям. Анализируя (1), легко установить, что как и в классическом случае, как только $W > 2$, в спектре волновых искажений появляется диапазон волновых чисел, которым соответствуют экспоненциально растущие со временем амплитуды. Формально, критерий неустойчивости остается прежним — как и в классической задаче. Но при этом в выражениях для параметра Тонкса–Френкеля и капиллярной постоянной следует брать значение плотности жидкости вблизи её поверхности.

Результаты

При расчете условий развития неустойчивости заряженной поверхности неоднородной жидкости, необходимо правильно отбирать физически реализуемые решения электрогидродинамической задачи. Это позволяет однозначно установить критерий развития неустойчивости, согласованный с известным классическим решением.

Список литературы

- [1] *Tonks L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // *Physical Review*. 1935. Т. 48(??). p. 562.
- [2] *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1936. Т. 6(??). С. 347–350.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. Т. 8: Электродинамика сплошных сред/под ред. Л. П. Питаевского. 4-е изд., стереотип. – 2003.



Нелинейные колебания двухслойной жидкости при угловых колебаниях цилиндрической полости

Вин Ко Ко, Темнов А.Н.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

В статье исследована задача о нелинейных колебаниях двух идеальных и несжимаемых жидкостей в осесимметричной цилиндрической полости, совершающей колебания относительно горизонтальной оси OY . Полость полностью заполнена несжимаемыми жидкостями. Приведены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания круглого цилиндрического сосуда и поверхности раздела двухслойной жидкости в окрестности основного резонанса нелинейных колебаний, и определены линейные и нелинейные гидродинамические коэффициенты при различных значениях глубины верхней жидкости. Выявлены основные нелинейные эффекты, связанные с вращением диаметра поверхности раздела жидкостей. Используя метод Бубнова-Галеркина, построены области неустойчивости и амплитудно-частотные характеристики двухслойной жидкости при вынужденных угловых колебаниях сосуда.

Введение

С развитием ракетно-космической техники и увеличением перевозки сниженных природных ресурсов морским транспортом, возрастает интерес к задачам движения тел, внутренние полости которых заполнены неоднородной жидкостью. Простейшей моделью такой неоднородной жидкости может являться двухслойная жидкость, которая полностью заполняет полость твердого тела.

В книге [1] были исследованы нелинейные задачи динамики твердого тела, в которых существуют полости, заполненные жидкостью со свободной поверхностью. Рассмотрены различные модели и методы, применяемые для анализа таких задач, и

предоставлены численные результаты проведенных исследований.

В работе [2] исследуется задача о малых колебаниях двухслойной тяжелой жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд. Поставлена и решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости. В работе [3] рассмотрены свободные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом прямоугольном сосуде.

Постановка задачи

Рассматривается круглый цилиндрический сосуд, полностью заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, который совершает колебания вокруг неподвижной оси OY . Связанную с твердым телом систему координат $OXYZ$ расположим так, чтобы в невозмущенном положении механической системы ось ox была перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей

Γ_0 .

Представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 \cdot A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t) B_i^{(k)}(x, r, \eta), \quad (k = 1, 2), \quad (1)$$

$\Phi^{(k)}$ — потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей; $A^{(k)}$ — гармонические скалярные функции; $B_i^{(k)}$ — функции координат верхней и нижней жидкостей, α_i — обобщенные координаты волновых движений i -ой гармоники на поверхности раздела. Поставленная задача решается с применением разложения функций в ряд Тейлора, а также использования значения функций и её нормальных производных на невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0 . Представим функции $A^{(k)}$ и $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно

$$A^{(k)} = A_0^{(k)} + \sum_i \alpha_i A_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j A_{ij}^{(k)} + \dots; \\ B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \dots; \quad (2)$$

где функции $A_0^{(k)}$, $A_i^{(k)}$, $A_{ij}^{(k)}$, $B_{i0}^{(k)}$, $B_{ij}^{(k)}$, $B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Выделим две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и определяемые обобщенными координатами и формами $\alpha_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2$): $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $f_1 = f_\alpha = \varphi(r) \sin \eta$, $f_2 = f_\beta = \varphi(r) \cos \eta$, f_α , f_β — Это формы основного тона колебаний поверхности раздела жидкостей [1].

Система уравнений для обобщенных координат волновых движений α и β , характеризующих колебания поверхности раздела двух жидкостей при возбуждении основного тона примет вид [5]

$$L_1(\alpha, \beta) = (1 + d_1 \alpha^2 + d_2 \beta^2) \ddot{\alpha} + (d_1 \alpha \beta - d_2 \alpha \beta) \ddot{\beta} + (d_3 \alpha^2 - d_4 \beta^2 - d_0) \ddot{\theta} + d_1 \alpha \dot{\alpha}^2 + (d_1 \alpha - 2d_2 \alpha) \dot{\beta}^2 - d_5 \alpha \dot{\theta}^2 + 2d_2 \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - (d_3 + 3d_4) \beta \dot{\theta} \dot{\beta} + \sigma^2 \alpha = 0, \quad (3)$$

$$L_2(\alpha, \beta) = (1 + d_1 \beta^2 + d_2 \alpha^2) \ddot{\beta} + (d_1 \alpha \beta - d_2 \alpha \beta) \ddot{\alpha} + (d + (d_3 + d_4) \alpha \beta) \ddot{\theta} + d_1 \beta \dot{\beta}^2 + (d_1 \beta - 2d_2 \beta) \dot{\alpha}^2 - d_6 \beta \dot{\theta}^2 + 2d_2 \alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} + (d_3 + 3d_4) \beta \dot{\theta} \dot{\alpha} + \sigma^2 \beta = 0, \quad (4)$$

где, $d = \lambda/\mu$, $d_0 = \lambda_0/\mu$, $d_1 = \mu_1/\mu$, $d_2 = \mu_2/\mu$, $d_3 = \lambda_3/\mu$, $d_4 = \lambda_2/\mu$, $d_5 = J_1/\mu$, $d_6 = J_2/\mu$,

Допустим, сосуд совершает угловые колебания по данному закону

$$\theta = \theta_0 \cos pt, \quad (5)$$

Если параметрический резонанс отсутствует в рассматриваемом случае, т.е. $\beta \equiv 0$, то вынужденные угловые колебания системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha, \beta) = (1 + d_1 \alpha^2) \ddot{\alpha} + (d_3 \alpha^2 - d_0) \ddot{\theta} + \alpha \dot{\alpha}^2 - d_5 \alpha \dot{\theta}^2 + \sigma^2 \alpha = 0; \quad (6)$$

После использования метода Бубнова-Галеркина [1] получим соотношения для построения областей неустойчивости.

На Рис. 1, (а, б) кривые линии FGQ соответствуют резонансным кривым, которые описывают поведение системы при резонансе. Кривые сплошные линии RNM и KLD соответствуют плоским линейным устойчивым колебаниям, то есть колебаниям, при которых система возвращается к равновесному состоянию.

Вывод

Учет вязкости жидкостей, как правило, приводит к ослаблению возбуждения гармоник с более высокими частотами. В этом смысле учет только двух форм колебаний, рассматриваемых в данной работе, является оправданным, и может быть использован при исследовании нелинейных движений неоднородных жидкостей, взаимодействующих с твердым телом.

Список литературы

- [1] Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость; Отв. Ред. В.А. Троценко; АН УССР. Ин-т математики. — Киев: Наук. Думка, 1990. 296 с.
- [2] Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость. // Механика твердого тела. 1987. №2. С. 52–58.
- [3] Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dynamics. 2019. V. 54(6). p. 761–773.
- [4] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объеме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8
- [5] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Труды МАИ. 2021. № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03

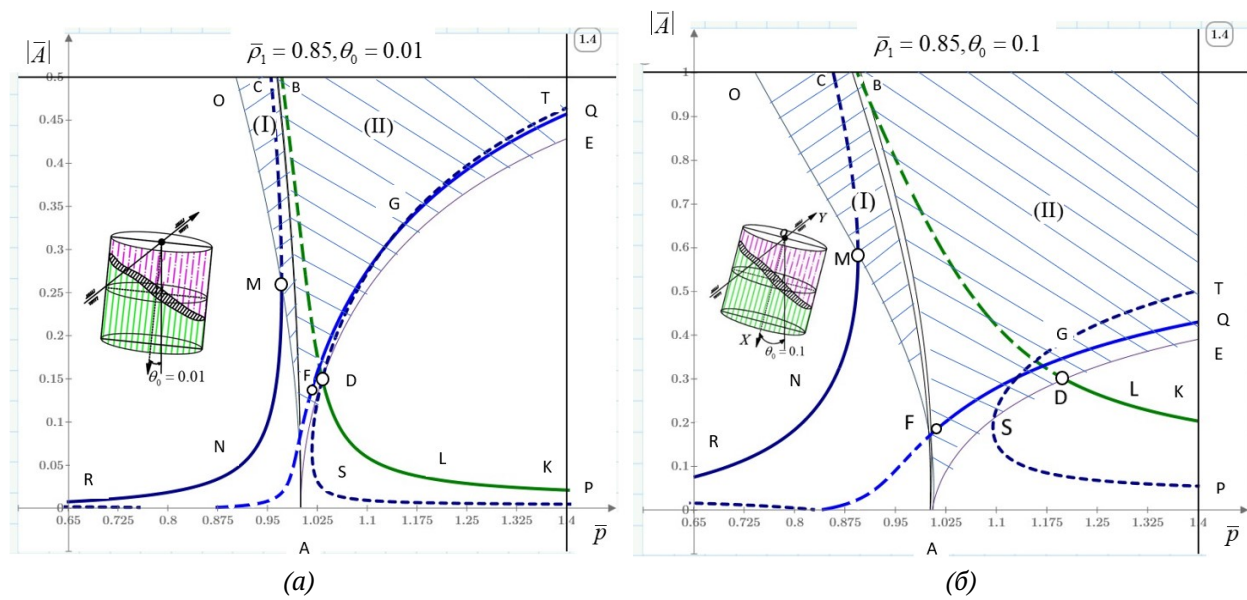


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{\rho}_1 = 0.85, \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1, \bar{h}_0 = 0$ при $\theta_0 = 0.01$ (а) и $\theta_0 = 0.1$ (б)



Эффективный подход к математическому моделированию задач обтекания с фазовыми переходами¹

Гайдуков Р.К., Данилов В.Г.

Национальный Исследовательский Университет «Высшая Школа Экономики», Москва

Классическая математическая модель, описывающая теплоперенос с фазовым переходом (например, плавление—кристаллизация, растворение—осаждение) в подвижной среде состоит из уравнений движений среды — уравнений Навье–Стокса и неразрывности, уравнений теплопроводности с адвекцией в каждой фазе, и условия Стефана на границе раздела фаз. Хорошо известно [1], что температура фазового в случае криволинейной границы раздела фаз отличается от случая плоской границы (см. рис. 2(в)), и эта разница описывается условием Гиббса–Томсона, учитывающего поверхностное натяжение на границе раздела фаз. Получившаяся задача Стефана–Гиббса–Томсона является вычислительно сложной — требуется очень мелкая сетка для точного определения положения криволинейной границы раздела фаз в каждый момент времени.

Однако, эту вычислительную сложность можно обойти, применив другой подход, основанный

на введении функции порядка $\phi = \phi(t, x, \zeta)$, такой что $\phi = +1$ в жидкой фазе (например, в вводе), и $\phi = -1$ в твердой фазе (например, во льду), t и x — время и координаты, а ζ — параметр регуляризации: в ζ -окрестности границы раздела фаз функция ϕ быстро меняется от -1 до $+1$. В рамках этого подхода температура T во всей области и функция порядка определяется из системы уравнений фазового поля (см. (2)), которая является регуляризацией задачи Стефана–Гиббса–Томсона при $\zeta \rightarrow +0$, см. [2]. Граница раздела фаз определяется как линия нулевого уровня функции порядка. Система фазового поля эффективно решается численно с помощью простых разностных схем с постоянным шагом, что позволяет эффективно моделировать динамику фазового перехода без использования высокопроизводительных компьютеров.

В рамках такого подхода авторами изучены задачи обтекания водой малых ледяных наростов на поверхности пластины [3, 4] и внутри трубы [5] при достаточно больших числах Рейнольдса Re (но таких, при которых еще сохраняется ламинарный поток). В [3] изучен случай обтекания поверхности y_s изо льда с малым наростом. А именно, рассматривается нарост в точке $x_0 = 1$ вида $y_s = \varepsilon^{4/3} h(t, (x - 1)/\varepsilon)$, где $\varepsilon = Re^{-1/2}$ — малый параметр, $h(t, \xi)$ —

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00186, <https://rscf.ru/project/22-21-00186/>.

гладкая функция, описывающая динамику границы раздела фаз, такая, что $h(t, \pm\infty) = 0$. Отметим, что такой масштаб неровностей приводит к двухпалубной структуре пограничного слоя [6]. Полученная в [3] математическая модель состоит из системы уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2/3} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = \\ = -f''(0)v^*|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + \varepsilon^{2/3} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u^*}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = 0, \quad (1) \\ u^*|_{\bar{\theta}=0} = v^*|_{\bar{\theta}=0} = 0, \quad u^*|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = f''(0)\bar{\theta}, \\ v^*|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \Big|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} = f''(0), \end{aligned}$$

где $u^* = u^*(t, \xi, \bar{\theta})$ и $v^* = v^*(t, \xi, \bar{\theta})$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости, f — функция Блазиуса; U_0 — некоторая гладкая функция, $\bar{\theta} = (y - y_s)/\varepsilon^{4/3}$ — вертикальная погранслоевая переменная, $\xi = (x - 1)/\varepsilon$ — горизонтальная быстрая переменная, и системы уравнений фазового поля

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2/3} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial \xi} + v \frac{\partial T}{\partial \theta} - \\ - \frac{\lambda_l}{c_l \rho_l} \varepsilon^{-2} \left(\varepsilon^{2/3} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right) = \quad (2) \\ = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \zeta^2 \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \zeta^2 \beta \Delta_{\xi, \theta} \varphi + \varphi(1 - \varphi^2) + \\ + \zeta(1 - \varphi^2) T / \sqrt{2\beta}, \end{aligned}$$

дополненной некоторыми краевыми и начальными условиями, $\theta = \bar{\theta} + h$, u и v — продолженные нулем в область твердой фазы скорости u^* и v^* (гладко в силу условий прилипания), а постоянные α и β определяются физическими постоянными и обезразмериванием, $\alpha = \varepsilon^{2/3}/(mT_0) \approx 2.1 \cdot 10^{-2}$, $\beta = \varepsilon^{-4/3} \sigma \hat{T}_m / (l \rho_l T_0) \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$, подробнее см. в [3]. В результате численного исследования задачи (1), (2) было показано [3], что при малой разности температур воды и льда (2°C и -2°C) вершинки горбиков плавятся, а на остальной поверхности, наоборот, происходит намерзание (см. рис. 1(a)), а наличие потока жидкости приводит к асимметричному и более быстрому плавлению вершинки неровности (в 6.5 раз). При большой температуре воды (20°C) происходит плавление уже всей области (см. рис. 1(б)), но вершинки горбиков плавятся немного быстрее. Также исследовано наличие зоны отрыва пограничного слоя с вихрем (который возникает при превышении высоты горбика

некоторой величины) — скорость таяния вершинок горбиков больше, чем в случае малой высоты (см. рис. 1(в)).

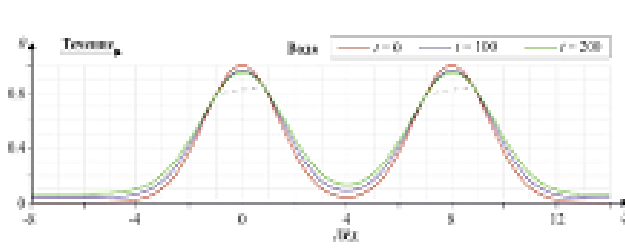
В [4] исследован более сложный случай — наличие малого ледяного нароста на нерасплавленной подложке (например, замерзшая капля воды), см. рис. 2(a). Особенностью этого случая является наличие точек контактов трех сред и двух фаз — воды, льда и подложки, в которых модель из [3] необходимо модифицировать, т.к. в точках контакта не определена нормаль, фигурирующая в условии Гиббса–Томсона. В [4] было предложено два пути решения этой проблемы, результаты моделирования для случая течения воды с температурой 20°C (температура льда -2°C) приведены на рис. 2(б): видно что плавление происходит активнее со стороны набегающего потока.

В [5] исследована задача о фазовом переходе на стенках трубы с аксиально-симметричным ледяным наростом на стенке с течением Пуазейля внутри, см. рис. 3(a). Особенностью задачи является то, что при таянии ледяного слоя толщины a происходит небольшое изменение течения Пуазейля, т.к. увеличивается радиус области, в которой течет жидкость. Отметим, что предложенная модель годится также и для задач о течении переохлажденной жидкости, результаты такого моделирования для случая трубы приведены на рис. 3(б): температура воды -1°C , льда -5°C . Видно асимметричное намерзание, позади неровности — более активное, чем перед ней.

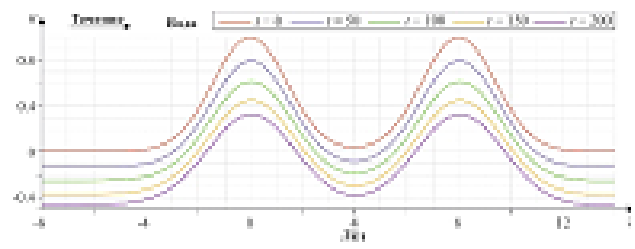
Также предлагаемая модель годится и для моделирования течений с химическим взаимодействием — фазовым переходом типа растворение — осаждение. Для таких задач часто используются довольно экзотические модификации системы фазового поля (что на наш взгляд является излишним), но общая концепция сохраняется.

Список литературы

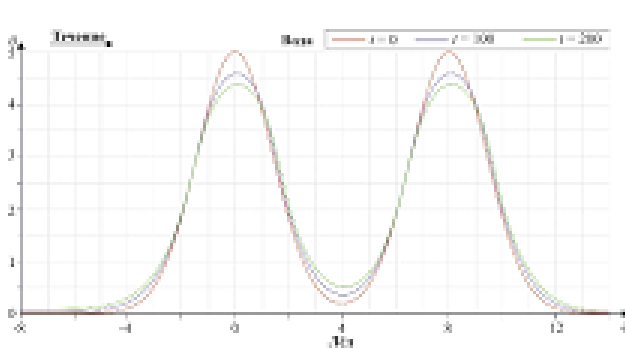
- [1] Caginalp G. An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Ration. Mech. Anal. 1986. V. 92(3). P. 205–245.
- [2] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // Eur. J. Appl. Math. 1999. V. 10. P. 55–77.
- [3] Гайдуков Р.К., Данилов В.Г., Фонарева А.В. Моделирование таяния-намерзания льда в задаче обтекания жидкостью малой неровности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 5. С. 82–94.
- [4] Danilov V.G., Gaydukov R.K. Ice-water phase transition on a substrate // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. V. 30(2). P. 165–175.
- [5] Гайдуков Р.К., Данилов В.Г. Моделирование фазового перехода лед–вода в трубе с малыми ледяными наростами на стенке // ЖВМиМФ. 2023. (на рецензии).
- [6] Gaydukov R.K. Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape // Eur. J. Mech. B. 2021. V. 89. P. 401–410.



(а) случай малой амплитуды и малой разности температур;



(б) случай малой амплитуды и большой разности температур;



(в) случай большой амплитуды и малой разности температур (правый рисунок: линии тока)

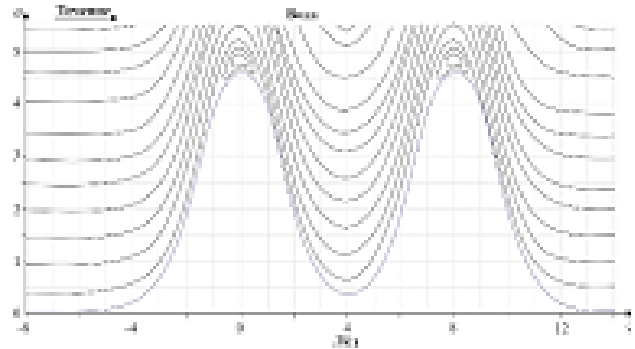
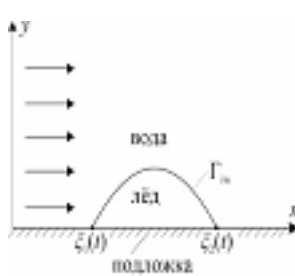
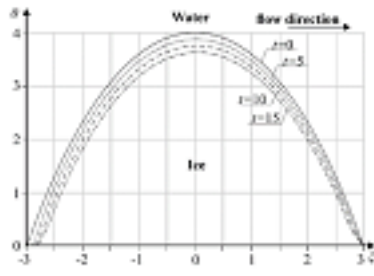


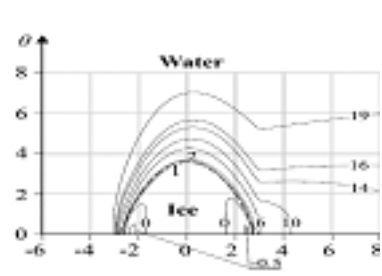
Рис. 1. Динамика границы раздела фаз при плавлении ледяной поверхности с наростом



(а) геометрия задачи;

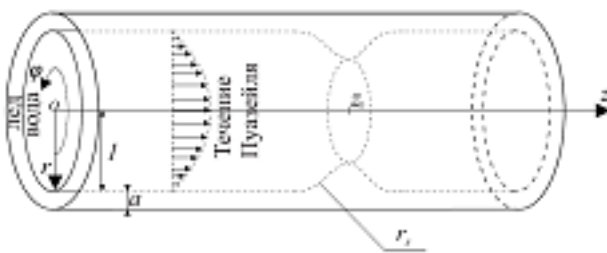


(б) динамика границы раздела фаз;

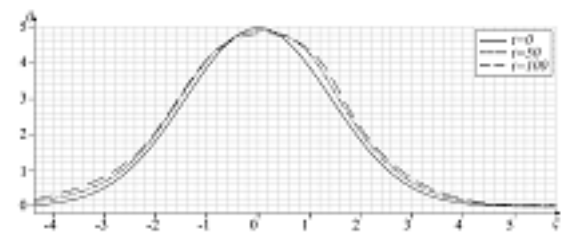


(в) изолинии температур

Рис. 2. Фазовый переход в системе 2 фазы – 3 среды



(а) геометрия задачи;



(б) намерзание переохлажденной воды

Рис. 3. Течение в трубе со слоем льда с неровностью



Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухслойной сжимаемой жидкости

Денисова И.В.* , Солонников В.А.**

*Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург

**Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург

Введение

Существование поверхности равновесия для изолированной сжимаемой жидкой массы, вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной скоростью, впервые было доказано в [1]. Наша цель — доказать существование фигур равновесия для вращающейся сжимаемой двухслойной жидкости.

Задачу о вращении изолированной несжимаемой капли как твердого тела рассматривали многие известные математики, среди которых были Ньютон, Маклорен, Якоби, Ковалевская, Ляпунов, Пуанкаре и другие [2, 3]. Они, в основном, изучали движение без капиллярности. Капиллярные жидкости впервые исследовали Глоба–Михайленко [4], Буссинеск и Шаррюо в начале 20-го века. Причём Шаррюо дал подробный анализ проблемы, рассчитал форму фигур равновесия и рассмотрел некоторые аспекты устойчивости [5]. Эти результаты вошли в большой обзор на эту тему, представленный в книге Аппелля [6]. Проблема устойчивости различных эллипсоидальных фигур равновесия анализируется также в монографии [7].

Мы предполагаем сжимаемые жидкости баротропными, а это означает, что давление p является известной возрастающей функцией плотности: $p'(\rho) > 0$. Пусть, кроме того, $\rho = \rho(|x'|)$, $x' = (x_1, x_2, 0)$. Будем считать, что фигуры равновесия F^+, F^- представляют собой почти шарообразные вложенные области с радиусами R_0^\pm ($R_0^+ < R_0^-$), а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость \mathbf{v} мала, а плотность ρ мало отличается от ступенчатой функции $\rho^\pm > 0$. Схематически эта картина представлена на рис. 1. Обозначим шары $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq R_0^\pm\}$ через $B_{R_0^\pm}$. Мы доказываем существование границ G^+ и G^- фигур F^+ и F^- соответственно.

Постановка задачи

Стационарное движение двухслойного облака $F \equiv \overline{F^+} \cup F^-$, равномерно вращающегося вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью ω , описывается однородными стационарными уравнениями Навье–Стокса

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbb{T} = 0, \quad \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0, \quad x \in \cup F^\pm, \quad (1)$$

(здесь плотность ρ и скорость \mathbf{V} зависят только от x) и граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{V}, P)\mathbf{n}|_{G^-} &= \sigma^- H^- \mathbf{n}, \quad x \in G^-, \\ [\mathbf{V}]|_{G^+} &= 0, \quad [\mathbb{T}(\mathbf{V}, P)\mathbf{n}]|_{G^+} = \sigma^+ H^+ \mathbf{n}, \quad x \in G^+, \quad (2) \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad x \in G = G^+ \cup G^-. \end{aligned}$$

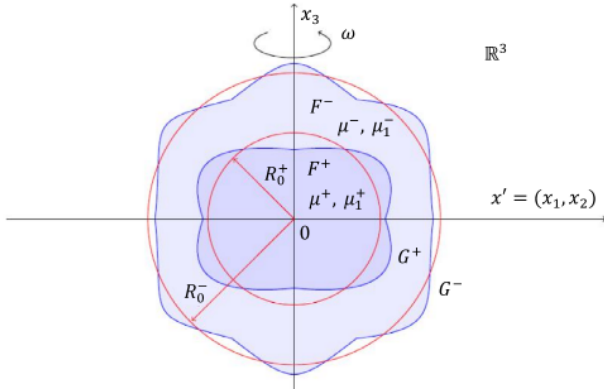


Рис. 1. Фигуры равновесия для двухслойной сжимаемой жидкости

где тензор напряжений $\mathbb{T}(\mathbf{v}, p) = (-p^\pm(\rho) + \mu_1^\pm \nabla \cdot \mathbf{v})\mathbb{I} + \mu^\pm \mathbb{S}(\mathbf{v})$ задаётся в двух областях F^\pm , причём $(\mathbb{S}(\mathbf{v}))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ — удвоенный тензор скоростей деформации, \mathbb{I} — единичная матрица, μ^\pm, μ_1^\pm — ступенчатые функции динамических вязкостей, равные μ^-, μ_1^- в F^- и μ^+, μ_1^+ в F^+ , $\mu^\pm > 0$, $2\mu^\pm + 3\mu_1^\pm \geq 0$; H^\pm — это удвоенные средние кривизны поверхностей равновесия G^\pm , $\sigma^\pm > 0$ — коэффициенты поверхностного натяжения на G^\pm , \mathbf{n} — вектор внешней нормали к объединению G , $[\mathbf{v}]|_{\Gamma_i^\pm} \equiv \lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma_i^+, x \in \Omega_i^+} \mathbf{v}(x, t) - \lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma_i^+, x \in \Omega_i^-} \mathbf{v}(x, t) = 0$. Последнее соотношение в (2) следует из условия непротекания газа через границы. Давление P — заданная функция от ρ .

Нетрудно видеть, что векторное поле скорости и градиент функции давления

$$\mathbf{V}(x) = \omega(-x_2, x_1, 0),$$

$$\nabla P(\rho) = \rho \omega^2 x' \equiv \rho \frac{\omega^2}{2} \nabla |x'|^2, \quad |x'|^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

удовлетворяют (1). Подставим их в граничные условия (2). Тогда мы получим уравнения для поверхностей G^\pm

$$\begin{aligned} \sigma^- H^-(x) + P(\rho) &= 0, \quad x \in G^-, \\ \sigma^+ H^+(x) + [P(\rho)]|_{G^+} &= 0, \quad x \in G^+, \end{aligned} \quad (3)$$

при этом в простейшем случае $P'(\rho) = \rho(x)$, $P^\pm(\rho) \equiv \rho^2(x)/2 + p^\pm$ в F^\pm с определёнными значениями постоянных p^\pm . Очевидно, что тогда плотность определяется формулой

$$\rho(x) = \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^\pm, \quad x \in F^\pm. \quad (4)$$

Константы c^\pm можно вычислить, задав массы жидкостей

$$\int_{F^\pm} \rho(x) dx \equiv \int_{F^\pm} \left(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^\pm \right) dx = m^\pm. \quad (5)$$

Еще одним параметром задачи мы считаем угловой момент β . Зададим его:

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \int_{F^+ \cup F^-} \rho(x) \mathbf{V} \cdot \eta_3 dx = \\ &= \omega \int_{\cup F^\pm} \left(\frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + c^\pm \right) |x'|^2 dx, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\eta_i = \mathbf{e}_i \times \mathbf{x}$ — вектор жесткого вращения, \mathbf{e}_i — базисный вектор, $i = 1, 2, 3$. Тогда угловая скорость ω является функцией от β .

Пусть S_1 — единичная сфера в \mathbb{R}^3 с центром в нуле, $\xi = x/|x| \in S_1$. Мы предполагаем, что поверхности равновесия G^\pm заданы функциями $R^\pm(\xi)$ на S_1 , которые чётны по ξ_3 и вращательно симметричны, т.е. зависят только от $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и ξ_3 . Мы доказываем, что система (3), (5), (6) при малом значении β и условии

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\sigma^+}{3\rho^+ R_0^+} - \rho^+ \right) \left(\frac{2\sigma^- (R_0^{-3} - R_0^{+3})}{3\rho^- R_0^{-4}} - \rho^- \right) - \\ - \frac{2\sigma^- \rho^- R_0^{+3}}{3\rho^+ R_0^{-4}} \neq 0 \end{aligned}$$

однозначно разрешима относительно переменных радиусов R^\pm , угловой скорости ω и констант c^\pm . Доказательство проводится в четных по ξ_3 , вращательно симметричных пространствах Гельдера с помощью теоремы о неявной функции. Аналогичный результат верен и для произвольной гладкой возрастающей функции давления P , заданной в двух областях, при этом изменяется и формула для плотности (4).

Заключение

Таким образом, мы показали, что для двухслойной сжимаемой жидкости при малом угловом моменте существуют осесимметричные фигуры равновесия, близкие к вложенным шарам, причём функция давления задается гладкой растущей функцией плотности жидкости, а данные задачи удовлетворяют некоторому условию. Локальная разрешимость нестационарной задачи была получена в [8, 9]. Следующий этап исследования проблемы будет заключаться в доказательстве существования глобального решения нестационарной

задачи для малых начальных данных и его стремления к стационарному решению (\mathbf{V}, ρ) , а также в изучении устойчивости полученных равновесных фигур. Аналогичный анализ для двухкомпонентной несжимаемой жидкости был проведён в [10, 11]. Существование аксиально симметричных фигур равновесия в виде сплюснутых вложенных сфероидов доказано в [12].

Кроме того, отметим, что наше исследование проведено без учёта гравитации жидкостей. Такая ситуация реализуется в космосе, и наше двухслойное газообразное облако можно рассматривать, например, как газообразную планету или другое вращающееся космическое тело.

Список литературы

- [1] *Solonnikov V.A., Tani A.* Equilibrium figures of slowly rotating viscous compressible barotropic capillary liquid // *Advances in Math. Sciences and Applications*. 1993. Т. 2(1). С. 139–145.
- [2] *Ляпунов А. М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // *Издание АН. 1884 (Собр. сочин., т. 3, АН СССР, М., 1959. 5–113)*.
- [3] *Poincaré H.* Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris, Gautier-Villars, 1902.
- [4] *Globa-Mikhailenko B.* Figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide en rotation quand on tient compte de la pression capillaire // *Comptes rendus*. 1915. Т. 160. С. 233.
- [5] *Charrueau A.* Étude d'une masse liquide de révolution homogène, sans pesanteur et à tension superficielle, animée d'une rotation uniforme // *Ann. de École Normale Supérieure*. 1926. Т. 43. С. 129–176.
- [6] *Аппелль П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.–М.: Главная редакция общетехнической литературы (сокр. ОНТИ). 1936. С. 375.
- [7] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М: Мир. 1973. С. 288.
- [8] *Денисова И. В.* Задача о движении двух сжимаемых жидкостей, разделённых замкнутой свободной поверхностью // *Зап. научн. семин. ПОМИ*. 1997. Т. 243. С. 61–86.
- [9] *Denisova I.V.* Solvability in weighted Hölder spaces of a problem governing the evolution of two compressible fluids // *Зап. научн. семин. ПОМИ*. 2003 Т. 295. С. 57–89.
- [10] *Denisova I. V., Solonnikov V. A.* Rotation Problem for a Two-Phase Drop // *J. Math. Fluid Mech.* 2022. Т. 24. № 2, 40. 26 С.
- [11] *Denisova I. V., Solonnikov V. A.* Hölder Space Theory for the Rotation Problem of Two-Phase Drop // *Mathematics*. 2022. V. 10(24). P. 4799.
- [12] *Солонников В. А.* Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей // *Проб. мат. анализа*. 2006. Т. 34. С. 103–121.



Вынужденные колебания ледяных дисков при ударе¹

Епифанов В.П.^{*}, Гусева Е.К.^{*,**}

^{*}Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

^{**}Московский физико-технический институт, Долгопрудный

Удар рассматривается как переходной процесс, реакция льда на кратковременное воздействие, интерференция длинноволновых и коротковолновых возмущений [1–4]. В задаче о неупругом прямом ударе сферического индентора по ледяному диску, расположенном на массивной плите с возможностью смещения ледяного диска относительно опоры, исследуется влияние начальной температуры льда и разных энергий удара. Для изучения процессов неупругого удара применяется комплексный подход, основанный на расчётном (сеточно-характеристический, используемый также в [5]) и акустических методах [6]. Акустико-механический метод используется для получения мгновенных ускорений, по которым определяются, например, зависимости осевого мгновенного напряжения от глубины осадки. Для описания процесса удара используются упругопластические модели, а также идеи вычислительной техники расщепления по физическим процессам. Экспериментальные зависимости сопоставлены с модельными решениями. Рассмотрено формирование локальной вторичной структуры и текстуры льда, зависимости

упругих свойств от координат, температуры, выявлены особые точки на деформационной кривой, связанные с формированием трещин. Рассчитаны пространственные волновые картины. Параметры исследуемого льда определены экспериментально. Совместное действие нормальных, сдвиговых напряжений и температуры в промежуточном слое усиливает эффект метаморфизма льда. Далее приведены некоторые примеры.

При малой фиксированной энергии удара, но разных температурах наблюдается (Рис. 1) классическая картина изменения мгновенного ускорения индентора (синяя кривая) и частиц ледяной пластины в оппозитной точке на оси удара (красная кривая). Данные получены для температур -2°C и -10°C .

При высокой температуре (-2°C) наблюдается классическое изменение наклона: вначале соударения (упрочнение), затем — фазовый переход (в ядре) и упругопластическое деформирование. При низкой температуре (-10°C) симметричные ветви кривой характеризуют близкое к упругому поведение льда.

При большой фиксированной энергии удара (Рис. 2) наблюдается немонотонность в вершине кривой удара ($OABCDEF$), что соответствует неупругим деформациям и процессам изменения, эволюции структуры льда, в частности разрушению льда.

¹ Данная работа была выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-21-00384.

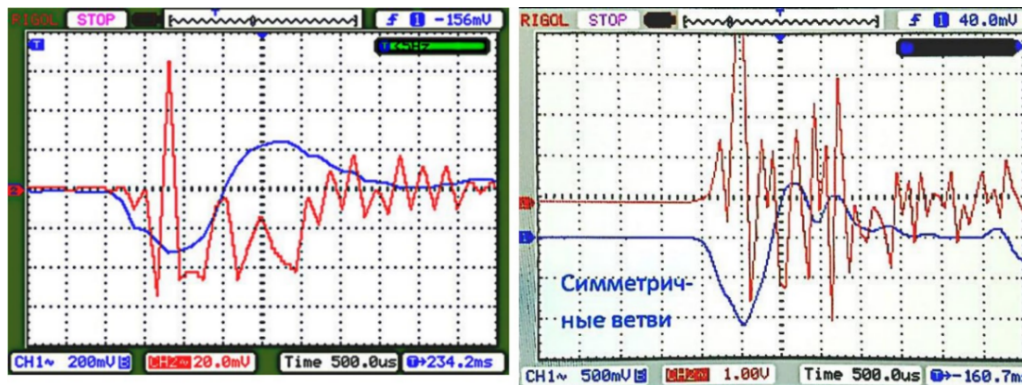


Рис. 1. Осциллограммы удара малой энергии при температурах льда -2°C (слева) и -10°C (справа) и периодические смещения частиц в оппозитной точке удара

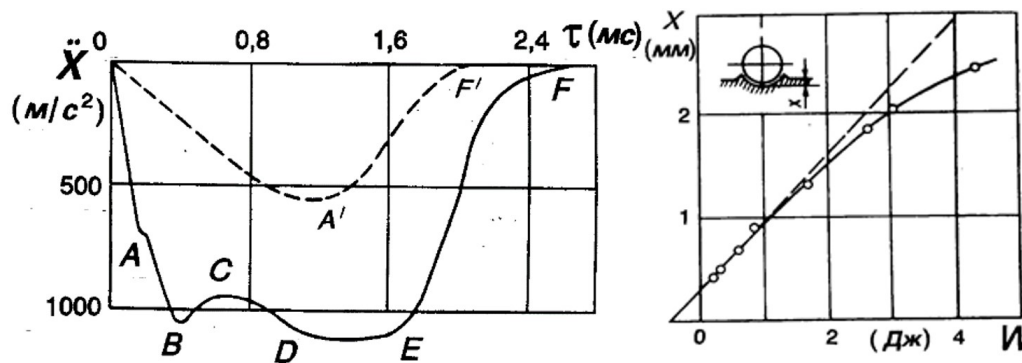


Рис. 2. Типичные зависимости ускорений от времени соударения для средних ($W < 1$ Дж) и больших энергий удара $OABCDEF$ ($W > 1$ Дж), а также зависимость осадки от энергии удара

Для рассматриваемого случая амплитуда деформационной кривой существенно возрастает, однако это возрастание не является пропорциональным, так как с увеличением энергии удара увеличиваются диссипативные потери.

Полученные экспериментальные факты представляют интерес для дальнейшего изучения механизма медленного удара по ледяному диску в части, касающейся влияния структуры переходного слоя и механизмов контактного разрушения, напряжений на границе контакта, а также количественного изучения влияния волновых эффектов на распределение усилий в массиве льда и формирование области пластических деформаций.

Список литературы

- [1] Gao Y., Hu Z., Ringsberg J. W., Wang J. An elastic-plastic ice material model for shipiceberg collision simulations // *Ocean Engineering*. 2015. V. 102. P. 27–39. doi: 10.1016/j.oceaneng.2015.04.047.
- [2] Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig, Berlin, B.G. Teubner, 1910. 998 p.
- [3] Nakaya U. Visco-elastic Properties of Snow and Ice in Greenland Ice Cap // *Journal of the Faculty of Science*, Ser. II. 1958. V. 5(3). P. 119–164.
- [4] Zhang W., Li J., Li L., Yang Q. A systematic literature survey of the yield or failure criteria used for ice material // *Ocean Engineering*. 2022. V. 254. P. 111360. doi: 10.1016/j.oceaneng.2022.111360.
- [5] Guseva E.K., Beklemysheva K.A., Golubev V.I., Epifanov V.P., Petrov I.B. Investigation of Ice Rheology Based on Computer Simulation of Low-Speed Impact // In: Balandin, D., Barkalov, K., Meyerov, I. (eds) *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2022. Communications in Computer and Information Science*. Springer, Cham, 2022. V. 1750. P. 176–184. doi: 10.1007/978-3-031-24145-1_15.
- [6] Епифанов В.П., Лычёв С.А. Двойная периодичность механических свойств тонкого ледяного поля, сформированного в условиях бокового стеснения // *Лёд и Снег*. 2022. Т. 62(4). С. 591–606. doi: 10.31857/S2076673422040154.



Уединенные волны в многослойной стратифицированной жидкости¹

Ермишина В.Е., Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Уединенные внутренние волны часто встречаются в океанических и прибрежных течениях. Характерная особенность внутренних волн, обуславливающая интерес к их исследованию, состоит в том, что амплитуда уединенной волны может существенно превышать начальную толщину одного из слоев, вдоль границы которых распространяется волна. При моделировании внутренних волн обычно используются уравнения типа Грина–Нагди, содержащие производные высоких порядков. Однако, при численном моделировании расчеты занимают достаточно длительное время и постановка неотражающих граничных условий может быть достаточно сложна.

В работе предложена одномерная модель законов сохранения первого порядка, описывающая распространение внутренних уединенных волн на многослойном стратифицированном мелководье в стратифицированной мелкой воде с негидростатическим распределением давления в двух внешних слоях и произвольным числом внутренних гидро-

статических слоев. Построение этой модели основано на использовании дополнительных переменных, позволяющих аппроксимировать дисперсионные уравнения типа Грина–Нагди системой первого порядка. В приближении Буссинеска основные уравнения позволяют моделировать распространение нелинейных внутренних волн с учетом тонкой стратификации плотности, слабого сдвига скорости в слоях и неровного рельефа. Численные расчеты генерации и распространения внутренних волн большой амплитуды проводятся как с использованием предложенной системы первого порядка, так и с использованием уравнений типа Грина–Нагди. Установлено, что решения этих моделей практически совпадают. Преимуществом уравнений первого порядка является простота численной реализации и значительное сокращение времени расчета. Показано, что результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными по эволюции уединенных волн моды 2 в резервуарах постоянной и переменной высоты.

Также для полученной модели проведено построение стационарных солитоноподобных решений, в виде симметричных и несимметричных волн моды 2, примыкающих к заданному многослойному постоянному потоку. Построенные решения верны для произвольного количества слоев с гидростатическим распределением давления, что

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00090).

позволяет учесть тонкую стратификацию в слоях. Получение таких решений возможно при задании таких данных Коши, выбор которых определяется анализом асимптотического поведения решения. Солитоноподобные решения строились в предположении слабого сдвига скоростей в слоях, далее исследовались условия существования данных решений в случае произвольного сдвига скоростей.

Для простоты исследование условий существования решения в форме уединенной волны для уравнений динамики длинных волн проводилось для двухслойного стратифицированного течения в приближении Буссинеска с негидростатически распределенным давлением в одном или обоих слоях. В терминах условий гиперболичности модели без учета негидростатической поправки давления сформулированы ограничения на сдвиг скорости в слоях. Далее получены ОДУ, определяющие профиль уединенной волны в зависимости от двух безразмерных параметров (чисел Фруда), связанных

со скоростью волны и сдвигом скорости в слоях для невозмущенного потока. В плоскости чисел Фруда определена область параметров, для которой возможно построение решения в форме уединенной волны. Приведены примеры профилей уединенных волн в сдвиговом двухслойном потоке и выполнено сопоставление моделей, показывающее влияние упрощающих предположений (гидростатичность одного из слоев, линеаризация дисперсионных членов) на форму волны. Полученные условия существования можно распространить на случай трехслойного течения, симметричного относительно средней линии, тогда модель будет применима для описания симметричных волн второй моды.

Список литературы

- [1] Chesnokov A. A., Ermishina V. E., Liapidevskii V. Y. Strongly non-linear Boussinesq-type model of the dynamics of internal solitary waves propagating in a multilayer stratified fluid // *Physics of Fluids*. 2023. 35(7).



Подавление турбулентности неравномерным во времени вращением¹

Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Экспериментально исследуется возможность подавления турбулентности в сферическом течении Куэтта — течении вязкой несжимаемой жидкости, формирующимся под действием вращения концентрически расположенных сферических границ вокруг общей оси. Сферический слой сформирован двумя оптически прозрачными коаксиальными сферами, с радиусами внутренней и внешней сфер $r_1 = 0.075$ и $r_2 = 0.15$ м соответственно. Слой наполнялся силиконовым маслом, с вязкостью $\nu \approx 5.10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ при температуре 22°С . Измерения азимутальной компоненты скорости течения u_φ лазерным анемометром проводились вблизи внешней сферы: на расстоянии 0.078 м от плоскости экватора и 0.105 м от оси вращения. Температура в слое поддерживалась постоянной с точностью не менее $\pm 0.05^\circ\text{С}$. Скорость вращения внутренней сферы Ω_{10} поддерживалась постоянной, скорость вращения внешней сферы $\Omega_2(t)$ изменялась: $\Omega_2(t) = \Omega_{20}(1 + A \sin(2\pi f t + \varphi))$, где A — амплитуда модуляции, f — частота модуляции, средняя погрешность рассматриваемых величин

не превышала 0.05% от заданных значений.

Сначала при встречном вращении границ в отсутствие модуляции ($A = 0$) формировалось исходное турбулентное течение. Рассматривались три режима течения. ИТ I: $Re_2 = \Omega_{20} r_2^2 / \nu = -900$, $Re_1 = \Omega_{10} r_1^2 / \nu = 434$; ИТ II: $Re_2 = -700$, $Re_1 = 382$; ИТ III: $Re_2 = -700$, $Re_1 = 377$. Особенностью этих режимов является то, что при уменьшении числа Re_1 и постоянном Re_2 происходит переход к ламинарному, симметричному относительно экватора периодическому режиму течения с тремя вихрями, распространяющимися в азимутальном направлении, и этот переход происходит с гистерезисом. При переходе от описанного ламинарного течения к турбулентности при возрастании числа Re_1 ($Re_2 = \text{const}$) в течении наблюдаются распределенные случайным образом фрагменты пространственных структур характерные для ламинарного режима. Течения ИТ I и ИТ II получены путем повышения Re_1 ($Re_2 = \text{const}$). Течение ИТ III находится внутри области гистерезиса и получалось из ИТ II путем уменьшения Re_1 ($Re_2 = \text{const}$). После установления каждого из перечисленных выше исходных турбулентных течений при выбранной величине f амплитуду A увеличивали от нуля до заданного значения (но не более 20% от Ω_{20}).

Увеличение A во всех рассмотренных случаях может приводить к подавлению турбулентно-

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-29-00051.

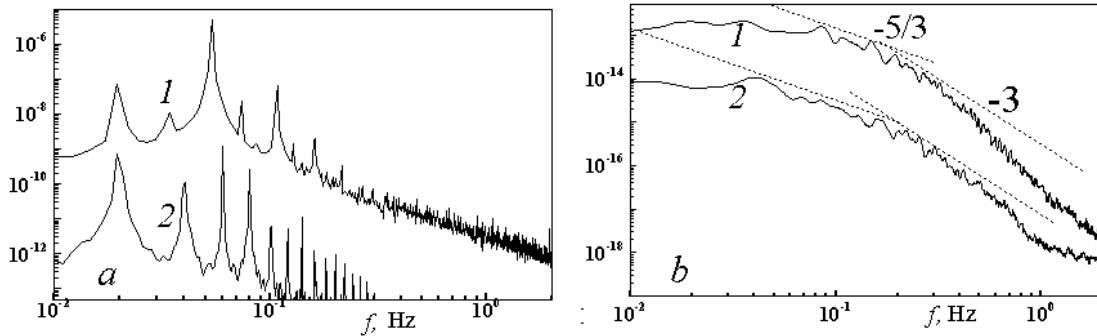


Рис. 1. Спектры u_φ^2 ламинарного (а) и турбулентного (б) течений при $f = 0.02 \text{ Hz}$. Кривые 1 – ИТ III, $A = 0.02$; кривые 2 – ИТ II, $A = 0.15$

сти, которая сменяется ламинарным течением. В спектре ламинарных течений (Рис. 1, а) присутствуют пики на частоте модуляции $f = 0.02 \text{ Hz}$, пики на собственных частотах $f = 0.06 \text{ Hz}$ при ИТ II и $f = 0.053 \text{ Hz}$ при ИТ III, и их комбинации. Уменьшение A при ИТ I и ИТ II приводит к восстановлению турбулентности. В этом случае при подавлении турбулентности и ее восстановлении наблюдается гистерезис. При ИТ III с уменьшением A ламинарное течение остается. Спектры турбулентных течений, показанные на Рис. 1, б, соответствуют спектрам двумерной турбулентности, поскольку на меньших частотах можно выделить участок с постоянным углом наклона, близким к величине $-5/3$, а на больших частотах – к величине -3 .

На Рис. 2 приведены фрагменты зависимости от времени $\Omega_2(t)$ и $u_\varphi(t)$: а, б – разрушение турбулентности и переход к ламинарному течению после увеличения A , с – восстановление турбулентности после уменьшения A . Также на Рис. 2, а, б приведены зависимости от времени амплитуд на частоте модуляции и на собственных частотах ламинарных режимов. Амплитуды $A_f(t)$ рассчитаны тем же, что и в [1], методом, основанным на использовании преобразования Гильберта (НТ): $A_f(t) = |u_f(t) + iHT(u_f(t))|$, где $u_f(t)$ для каждой из частот определяется исходя из $u_\varphi(t)$ с помощью процедуры фильтрации в полосе частот $f \pm \Delta f$, $\Delta f = 0.005 \text{ Hz}$. Характерное время роста амплитуды от локального минимума, предшествующего

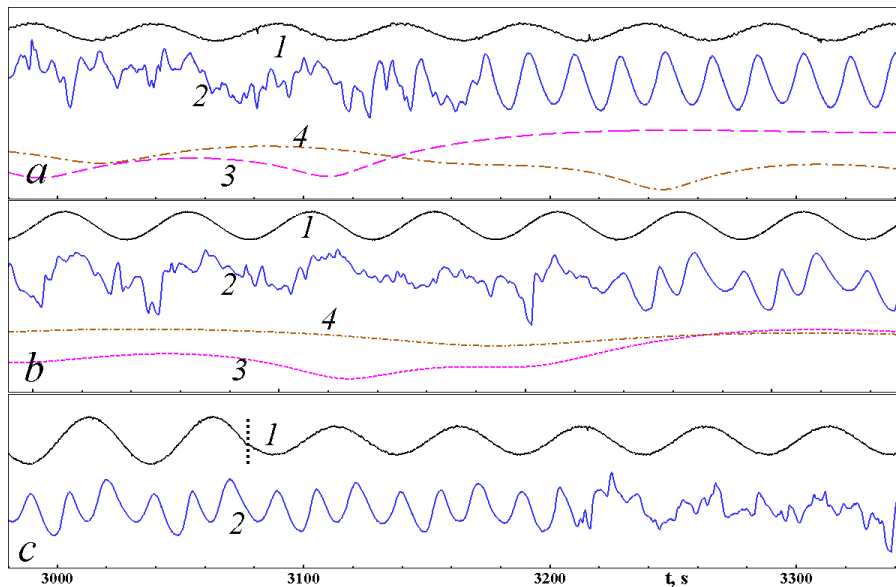


Рис. 2. Зависимость от времени сглаженного сигнала $\Omega_2(t)$ (1), u_φ (2), амплитуды на частоте когерентных структур (3), амплитуды на частоте модуляции $f = 0.02 \text{ Hz}$ (4). а – ИТ III, $A = 0.02$; б – ИТ II, $A = 0.15$; с – ИТ II, переход от $A = 0.1$ к $A = 0.059$ (момент изменения A показан вертикальной пунктирной линией).

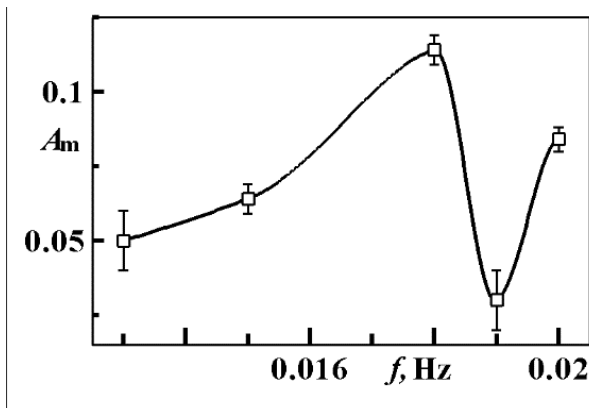


Рис. 3. Зависимость амплитуды модуляции A_m , соответствующей подавлению турбулентности, от частоты модуляции f для ИТ III. Вертикальные линии соответствуют величине шага ступенчатого изменения A , при котором происходило подавление турбулентности.

стадии окончательного возрастания, до момента разрушения турбулентности составляет примерно один период колебаний (Рис. 2, а, б). При ИТ III модуляция практически не оказывает влияния на форму ламинарной части сигнала (Рис. 2, а), и в этой части $A_{0.053}(t) \gg A_{0.02}(t)$, где $A_{0.053}(t)$ и $A_{0.02}(t)$ — рассчитанные величины амплитуд на частотах $f = 0.053 \text{ Hz}$ и $f = 0.02 \text{ Hz}$ соответственно. В случае ИТ II амплитуды близки, и видна сильная амплитудная модуляция ламинарной части сигнала (Рис. 2, б).

Интересно отметить, что разрушение турбулентности при возрастании A происходит в момент времени, близкий к минимуму $\Omega_2(t)$ (Рис. 2, а, б). Восстановление турбулентности после уменьшения A происходит при прохождении максимума $\Omega_2(t)$ (Рис. 2, с). Получается, что подавление турбулентности происходит в той области параметров, которая более удалена от границы формирования турбулентности, где уровень стохастичности при стационарном вращении более интенсивен. И на-

оборот, восстановление турбулентности наблюдается при попадании в область параметров, близкую к границе формирования турбулентности, где уровень стохастичности при стационарном вращении ниже.

Величина амплитуды модуляции A_m , соответствующая подавлению турбулентности, зависит от частоты модуляции f , и эта зависимость существенно нелинейная (Рис. 3). В диапазоне изменения f от 0.01 до 0.018 Hz A_m увеличивается по мере роста частоты. Это может объясняться более быстрым пространственным затуханием в радиальном направлении более высоких частот. В диапазоне изменения f от 0.018 до 0.02 Hz наблюдается локальный минимум величины A_m . Частота, соответствующая локальному минимуму, оказывается близкой к $1/3$ от собственной частоты ламинарных режимов. Поскольку в ламинарном сигнале три вихря, указанная частота соответствует частоте прохождения одного вихря. Поэтому можно сделать вывод, что турбулентность наиболее восприимчива к возмущениям, частота которых соответствует частоте прохождения одного вихря предшествующего турбулентности периодического течения.

Таким образом, модуляция скорости внешней сферы на частоте, не превышающей частоты прохождения одного вихря в предшествующем турбулентности ламинарном течении, может привести к подавлению турбулентности. Как возрастание амплитуды сигнала на частоте когерентных структур, так и разрушение турбулентности происходят в моменты времени вблизи минимума скорости внешней сферы. Восстановление турбулентности при снижении амплитуды модуляции происходит в моменты времени, близкие к максимуму скорости внешней сферы, и при меньших величинах амплитуд модуляции, чем при ее подавлении.

Список литературы

- [1] Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Подавление турбулентности в течениях с вращением // Письма в журнал технической физики. 2019. Т. 45. № 17. С. 20.



Уменьшение турбулентных пульсаций скорости при модуляции скорости вращения¹

Жиленко Д.Ю.* , Кривоносова О.Э.* , Сороковых Д.Е.**

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва,

**Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Введение

Основным свойством турбулентных течений является наличие инерционного интервала переноса энергии. Взаимное расположение участков энергетического спектра и их наклон в инерционном интервале определяют вид турбулентности. В трехмерной турбулентности наблюдается прямой каскад переноса энергии от больших к меньшим масштабам. Зависимость энергетического спектра $E(k)$ от волнового числа k в трехмерной турбулентности имеет вид $E(k) \sim k^{-5/3}$ для изотермических течений и $E(k) \sim k^{-11/5}$ для стратифицированных по температуре течений. В двумерной турбулентности принято выделять два инерционных интервала, разделенных интервалом волновых чисел, в котором к течению подводятся энергия и энтропия. При меньших частотах наблюдается обратный каскад передачи кинетической энергии от меньших масштабов к большим с зави-

симостью $E(k) \sim k^{-5/3}$, а при больших частотах — прямой каскад переноса энтропии с зависимостью $E(k) \sim k^{-3}$. Двумерная и трехмерная турбулентность могут наблюдаться в разных областях одного и того же течения (например, в слоях смешения и струях). Переход от трехмерной к двумерной турбулентности в течении может происходить при наличии внешней вынуждающей силы и вращения.

Сочетание вращения и сферической геометрии, характерное для крупномасштабных геофизических процессов, присуще и сферическому течению Куэтта (СТК) — течению вязкой несжимаемой жидкости, вызванному вращением концентрически расположенных сферических границ вокруг общей оси. Цель настоящей работы — экспериментальное и численное исследование влияния модуляции скорости вращения внутренней сферы на свойства развитых турбулентных течений во вращающемся сферическом слое.

Постановка задачи

Эксперименты проводились в сферическом слое, сформированном двумя оптически прозрачными коаксиальными сферами, с радиусами внутренней и внешней сфер $r_1 = 0.075$ и $r_2 = 0.15$ м соответственно. Слой наполнялся силиконовым мас-

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-29-00051.

лом, с вязкостью $\nu \approx 510^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ при температуре 22°C . Измерения азимутальной компоненты скорости течения u_φ лазерным анемометром проводились вблизи внешней сферы: на расстоянии 0.078 m от плоскости экватора и 0.105 m от оси вращения.

Изотермические течения вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U} - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } \mathbf{U},$$

$$\text{div } \mathbf{U} = 0.$$

Здесь \mathbf{U} , p — поле скорости течения и давление соответственно, ρ , ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости. Граничными условиями являются прилипание и непротекание, которые в сферической системе координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальными направлениями (φ) могут быть представлены в следующем виде:

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t) r_k \sin \theta, \quad u_r(r = r_k) = 0,$$

$$u_\theta(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2,$$

здесь u_φ , u_r , u_θ — азимутальная, радиальная и полярная компонент скорости \mathbf{U} , индексы 1 и 2 относятся к внутренней ($k = 1$) и внешней ($k = 2$) твердым сферическим границам, Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости вращения сфер. Расчеты проводились по алгоритму, разработанному в [1].

Как в расчете, так и в эксперименте скорость вращения внешней сферы была постоянна $\Omega_2 = \text{const}$, скорость вращения внутренней сферы изменялась во времени:

$$\Omega_1(t) = \Omega_{10}(1 + A \sin(2\pi f t + \varphi)).$$

Результаты

В отсутствие модуляции как в экспериментальном, так и расчетном спектрах можно выделить участок с постоянным углом наклона, близким к величине $-11/5$ (Рис. 1, а). Выше отмечалось, что зависимость вида $E(k) \sim k^{-11/5}$ была обнаружена в стратифицированных по температуре течениях. Необходимо отметить, что общим свойством рассматриваемого турбулентного течения и турбулентных конвективных течений является наличие крупномасштабной циркуляции и, возможно, именно это является причиной формирования подобных спектров. Под воздействием модуляции (Рис. 1, б) спектры изменяются, появляются спектры, характерные для двумерной турбулентности: с наклоном $-5/3$ на меньших частотах и наклоном -3 на больших частотах.

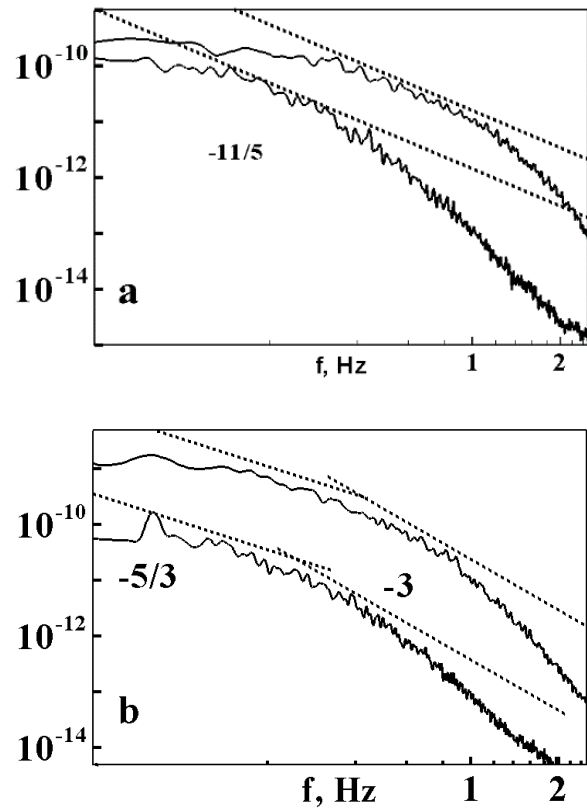


Рис. 1. Спектры $u_\varphi^2(a, b)$. а — $A = 0$, б — $A = 0.02$; верхние кривые — расчет, нижние — эксперимент, для удобства сравнения кривые сдвинуты по оси ординат

Изменение вида спектров является следствием изменения свойств турбулентных пульсаций скорости. Так, изображенные на Рис. 2, а зависимости среднеквадратичных отклонений

$$u_\varphi \text{ rms}(u_\varphi) = \sqrt{\frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} \left(u_\varphi(n, r) - \overline{u_\varphi(r)} \right)^2}$$

от A показывают наличие локальных минимумов при $A < 0.05$, и чем меньше величина f , тем более выражен этот минимум. Таким образом, при небольших амплитудах модуляции возможно уменьшение уровня турбулентных пульсаций по сравнению со случаем $A = 0$. В том диапазоне изменения A , где происходит переход от трехмерной турбулентности к двумерной в случае $f = 0.08 \text{ Hz}$, наблюдаются наибольшие отличия в уровне турбулентных пульсаций: для двумерной турбулентности они существенно ниже, чем для трехмерной.

Величины u_φ и $\text{rms}(u_\varphi)$, нормированные на эти же величины, но в отсутствие модуляции, $u_n =$

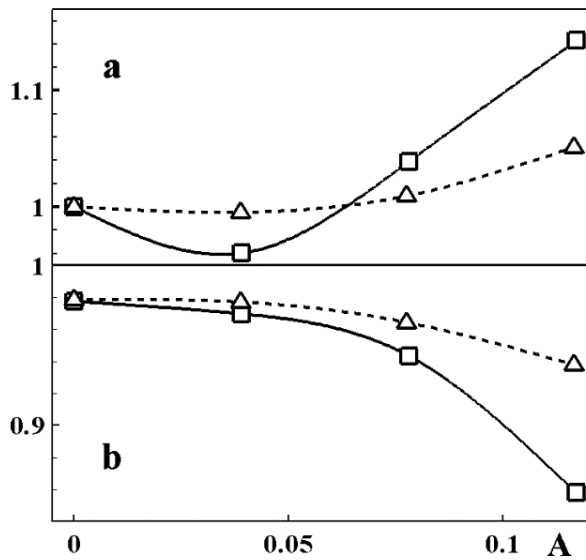


Рис. 2. Эксперимент: а — величины $\text{rms } u_\varphi / \text{rms } u_\varphi(A = 0)$; б — величины $\text{rms}(u_\varphi - u_{coh}) / \text{rms } u_\varphi$

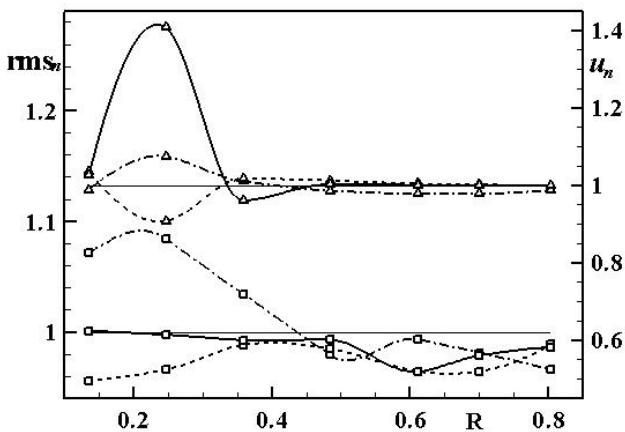


Рис. 3. Расчет: зависимости u_n , (треугольные символы) и rms_n , (прямоугольные символы) от нормированного расстояния между сферами R для $A = 0.007$ и трех значений меридионального угла. Прерывистые линии с точками — $\theta = 21.3^\circ$, прерывистые линии — $\theta = 52.9^\circ$, сплошные линии — $\theta = 89.8^\circ$. Горизонтальные линии соответствуют величинам, равным единице.

$u_\varphi / u_\varphi(A = 0)$ и $\text{rms}_n = \text{rms}(u_\varphi) / \text{rms}(u_\varphi)(A = 0)$, приведены на Рис. 3. При малых амплитудах модуляции $A = 0.007$ наиболее сильное изменение величин u_n наблюдается в области влияния внутренней сферы, вблизи $R = 0.247$ (Рис. 3, верхняя часть), в остальных областях течения отношение скоростей близко к единице. Величины rms_n повышаются только вблизи оси вращения ($\theta = 21.3^\circ$) при $R < 0.48$, тогда как на средних широтах и вблизи экватора во всем диапазоне изменения R наблюдается небольшое снижение (до 5%) этой величины (Рис. 3). Таким образом, при малых амплитудах модуляции во всем течении за исключением приосевой области возможно снижение уровня турбулентных пульсаций скорости по сравнению со случаем $A = 0$ [2], что согласуется с результатами экспериментов [3] (Рис. 2).

Список литературы

- [1] Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comp. Phys. 2006. V. 217. P. 759–781.
- [2] Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Синхронизация в турбулентном сферическом течении Куэтта под действием неравномерного вращения // ЖТФ. 2019. Т. 89. № 7. С. 998–1003.
- [3] Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Изменение свойств турбулентных течений в сферическом слое под действием модуляции скорости вращения // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. № 10. С. 87–94.



Устойчивость столбика Тейлора–Праудмана, создаваемого движущейся во вращающейся жидкости сферой¹

Звягинцева Е.А., Кудымова Е.М., Власова О.А., Козлов В.Г.

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь

Введение

Движение тел во вращающейся жидкости является одной из фундаментальных задач, впервые рассмотренной теоретически Тейлором в работе [1]. Далее теоретическое и экспериментальное развитие данной тема получила в работах Мура и Саффмана [2], а также Максвози [3]. Экспериментальному изучению движения тела во вращающейся жидкости посвящена работа [4]. В данной работе всплытие легкой сферы в поле силы тяжести вдоль оси вращающегося цилиндра характеризовалось двумя безразмерными параметрами. Один из них – безразмерная скорость всплытия (отношение скорости всплытия во вращающейся жидкости к скорости свободного всплытия тела) $V = v_b \cdot v / (gd^2(1 - \rho))$. Здесь v_b – размерная осевая скорость движения тела, v – кинематическая вязкость жидкости, d – диаметр тела, ρ – отно-

сительная плотность тела. Вторым управляющим параметром является безразмерная частота вращения $\omega = \Omega_{rot} \cdot d^2 / \nu$, где Ω_{rot} – угловая скорость вращения полости. Найденная экспериментальная зависимость $V = 15\omega^{-1.57}$ удовлетворительно согласуется с теоретическими результатами [2], полученными в квазигеострофическом приближении, расхождение уменьшается с повышением безразмерной частоты.

Опыты показали, что тело в процессе всплытия совершает дифференциальное вращение относительно полости. Скорость дифференциального движения тела Ω_b меняется по мере всплытия тела: вблизи нижнего торца скорость положительна (тело совершает интенсивное опережающее вращение относительно полости) и по мере всплытия тела уменьшается. В средней по длине части кюветы скорость становится равной нулю (тело совершает твердотельное вращение вместе с кюветой), после чего она меняет свой знак на отрицательный; по мере приближения к верхнему торцу скорость отстающего дифференциального вращения тела нарастает по величине. Дифференциальное вращение тела определяется асимметрией переднего и заднего столбиков Тейлора–Праудмана, интенсивность вращения которых изменяется с их длиной. При относительно низких безразмерных

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ (проект KPZU-2023-0002).

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
© Звягинцева Екатерина Александровна, zvyagintsevat@gmail.com
© Кудымова Екатерина Михайловна, kudymovakat@gmail.com
© Власова Ольга Андреевна, vlasova_oa@pspu.ru
© Козлов Виктор Геннадьевич, kozlov@pspu.ru

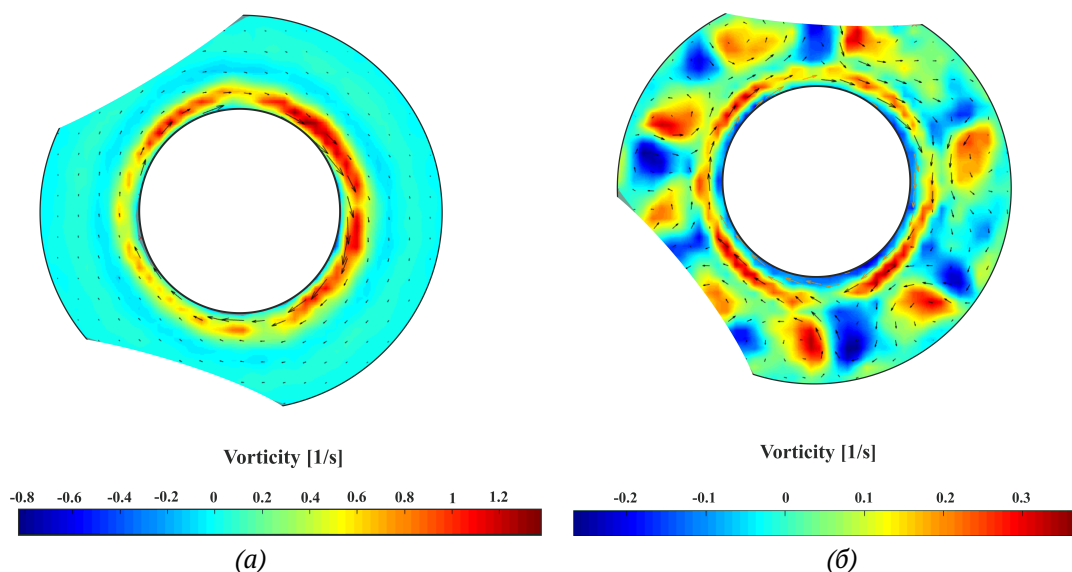


Рис. 1. Характерный вид полей скорости за пределами столбика Тейлора–Праудмена позади всплывающего тела в поперечном сечении вращающегося цилиндра на расстоянии 4.9 см от дна полости: а) при скорости вращения полости $f_{rot} = 9$ об/с, б) при $f_{rot} = 15$ об/с. Вязкость жидкости $\nu = 1.66$ сСт, положение тела относительно дна полости $l_z = 15.8$ см

частотах структуры столбиков Тейлора–Праудмена устойчивы, и дифференциальное движение жидкость совершает только в их пределах, за пределами столбиков жидкость вращается практически твердотельно с полостью.

Однако в области высоких безразмерных частот обнаружено пороговое возбуждение неустойчивости осесимметричного столбика Тейлора–Праудмена, проявляющейся в развитии регулярной системы двумерных вихревых структур на его границе.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование этой не изученной проблемы — устойчивости столбиков Тейлора–Праудмена, создаваемых движущимся во вращающейся жидкости телом.

Экспериментальная установка и методика

Установка состоит из прозрачной цилиндрической кюветы внутренним диаметром 5.3 см и длиной 22.5 см, в которой находится легкое сферическое тело диаметром 2.40 см и плотностью $\rho = 0.90$ г/см³. Кювета приводится во вращение шаговым двигателем, скорость вращения варьируется в диапазоне 9–17 об/с.

В экспериментах используются водный раствор глицерина, вязкость которого составляет $\nu = 1.66$ сСт. Изучение полей скорости в полости выполняется методом PIV (Particle Image

Velocimetry) в различных по высоте поперечных сечениях, а также в вертикальном осевом сечении.

Результаты эксперимента

Эксперименты показывают, что неустойчивость развивается позади движущегося тела по достижении некоторого порогового значения частоты вращения полости. В допороговой области за пределами столбика Тейлора–Праудмена жидкость совершает сравнительно слабое осесимметричное вращение, в то время как жидкость, находящаяся внутри столбика Тейлора–Праудмена, совершает интенсивное осесимметричное дифференциальное опережающее вращение. Обнаружено, что при вращении полости со скоростью выше некоторого порогового значения столбик теряет устойчивость, и за его пределами развиваются вытянутые вдоль оси вращения двумерные вихревые структуры, интенсивность которых возрастает по мере увеличения скорости вращения полости (Рис. 1).

Если рассматривать движение жидкости внутри столбика и за его пределами в надкритической области скоростей вращения полости, то можно заметить, что интенсивность (скорость) движения жидкости внутри столбика Тейлора–Праудмена на несколько порядков выше интенсивности движения жидкости за пределами столбика (Рис. 2).

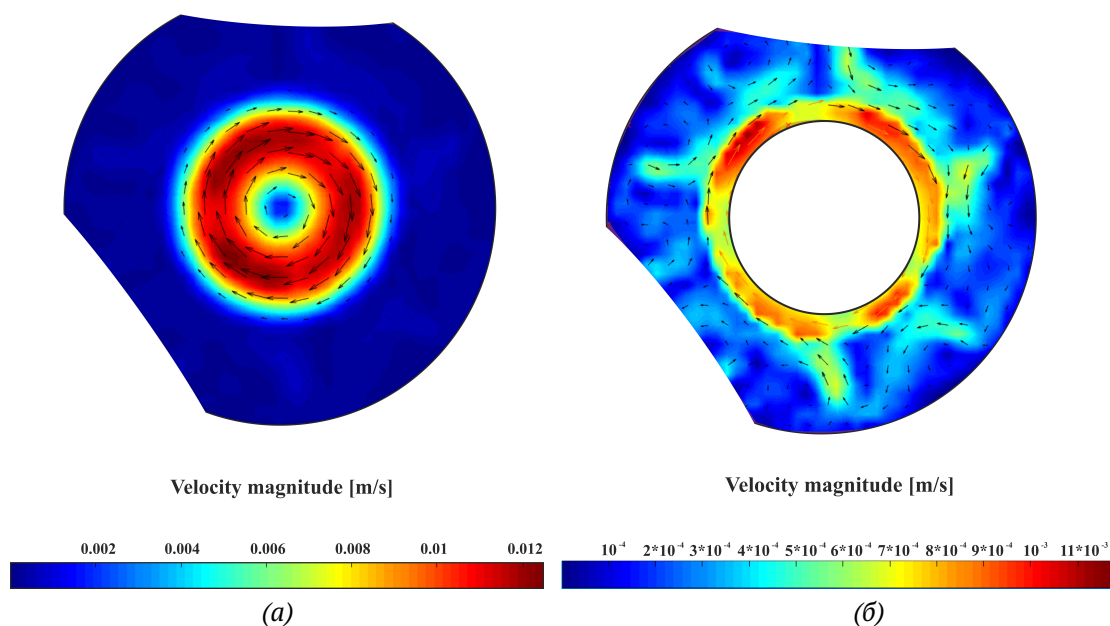


Рис. 2. Сравнение скорости движения жидкости: а) в столбике Тейлора–Праудмена, б) за пределами столбика. Частота вращения полости $f_{rot} = 15$ об/с. Вязкость жидкости $\nu = 1.66$ сСт, тело находится на расстоянии $l_z = 15.84$ см от дна полости

Заключение

Экспериментально изучена структура течений жидкости во вращающемся вертикальном цилиндре при движении сферического тела вдоль его оси. Показано, что тело возбуждает движение в виде столбика Тейлора–Праудмена, в котором жидкость совершает интенсивное дифференциальное вращение. При умеренных скоростях вращения полости жидкость совершает осесимметричное движение в столбике и за его пределами. Обнаружено, что при повышении безразмерной скорости вращения осесимметричное движение пороговым образом теряет устойчивость, вблизи столбика Тейлора – Праудмена образуются двумерные вытянутые вдоль оси вращения вихревые структуры. Неустой-

чивость развивается в столбике, расположенном позади движущегося тела и совершающем опережающее дифференциальное вращение.

Список литературы

- [1] Taylor G. I. Motion of Solids in Fluids when the Flow is not Irrotational // Proceedings of the Royal Society. 1916. A92. 408–424.
- [2] Moore D.W., Saffman P.G. The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length // J. Fluid Mech. 1968. 31. 635–642.
- [3] Maxworthy T. The observed motion of a sphere through a short, rotating cylinder of fluid // J. Fluid Mech. 1968. 31. 643–655.
- [4] Kozlov V., Zvyagintseva E., Kudymova E., Romanetz V. Motion of a light free sphere and liquid in a rotating vertical cylinder of finite length // Fluids 2023. 8. 49.



Движение легкого сферического тела и жидкости во вращающейся полости

Звягинцева Е.А., Кудымова Е.М., Романец В.Я., Козлов В.Г.

Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, Пермь

Введение

Движение жидкости во вращательной системе является интересным явлением в природе, которое широко используется в науке и технике. Движением жидкости во вращающемся цилиндре, а особенно движением твердого сферического тела, всплывающего в этой жидкости, занимался Тейлор [1]. В своем исследовании ученый показал, что движение жидкости в быстро вращающейся полости является двумерным. Течения, возбуждаемые движущимся во вращающейся жидкости твердым сферическим телом, позднее получили название столбиков Тейлора–Праудмена.

В работах [2, 3] при экспериментальном изучении и теоретическом описании движения твердого сферического тела во вращающейся жидкости показано, что сферическое тело, движущееся вдоль оси вращающегося цилиндра, толкает перед собой (тянет за собой) столбики Тейлора–Праудмена. За пределами этих столбиков в пределе высоких скоростей вращения жидкость совершает твердо-

тельное вращение вместе с полостью. При этом жидкость обтекает тело только в тонком вязком слое (слое Экмана), который формируется вблизи поверхности тела. Все это приводит к генерации вихревого движения в самих столбиках Тейлора–Праудмена, отстающего — перед телом и опережающего — позади тела.

Ранее данная задача изучалась преимущественно теоретически, поэтому целью данного исследования является экспериментальное изучение движения свободного тела в полости конечной длины в области высоких безразмерных частот вращения полости [4].

Экспериментальная установка и методика проведения

Экспериментальная установка состоит из цилиндрической кюветы, в которой находится легкое сферическое тело. Диаметр кюветы составляет 5.3 см, а длина — 22.5 см. В качестве легкого сферического тела используется резиновый шарик диаметром 2.40 см и плотностью $\rho_S = 0.90 \text{ г/см}^3$. В качестве рабочей жидкости используются водные растворы глицерина, вязкость которых варьируется в интервале $\nu = 1–100 \text{ сСт}$.

Скорость вращения кюветы изменяется в диапазоне 0–20 об/с, при помощи шагового двигателя. Положение кюветы (горизонтальное, под углом к

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН

© Звягинцева Екатерина Александровна,

zvyagintsevkata@gmail.com

© Кудымова Екатерина Михайловна, kudymovakat@gmail.com

© Романец Влада Ярославовна, v.romanetz2000@gmail.com

© Козлов Виктор Геннадьевич, kozlov@pspu.ru

горизонту или вертикальное) может изменяться в процессе эксперимента.

Для изучения скорости движения тела и его вращения относительно полости в процессе всплытия во вращающейся вертикальной полости применялась скоростная видеосъемка тела камерой, расположенной с боковой стороны. Изучение полей скорости в полости выполнялось методом PIV (Particle Image Velocimetry) в различных по высоте поперечных сечениях, а также в вертикальном осевом сечении.

Результаты

Эксперименты показывают, что независимо от вязкости жидкости скорость подъема тела понижается при повышении скорости вращения кюветы. В то же время при заданной скорости вращения с повышением вязкости жидкости скорость движения сферического тела повышается, т.е. в вязкой жидкости тело всплывает быстрее.

Наблюдения показывают, что в ходе перемещения вдоль оси кюветы тело совершает дифференциальное вращение относительно полости. Вблизи нижнего торца кюветы тело вращается быстрее, т.е. движется с опережением. В средней по длине части полости дифференциальное вращение отсутству-

ет: тело вращается в лабораторной системе отсчета со скоростью, равной скорости вращения кюветы. В верхней части тело совершает отстающее вращение. При этом скорость осевого движения тела v_b остается практически постоянной и слабо зависит от положения тела относительно дна полости: лишь вблизи торцов полости скорость продольного движения незначительно понижается.

Для характеристики движения легкого сферического тела использовались безразмерная скорость всплытия $V = v_b \cdot \nu / (gd^2 (1 - \rho))$, где ρ — относительная плотность тела и безразмерная скорость вращения $\omega \equiv \Omega_{rot} d^2 / \nu$, где Ω_{rot} — угловая скорость вращения полости.

В ходе эксперимента было выяснено, что во вращающейся полости формируются осесимметричные столбики Тейлора–Праудмена, которые расположены вдоль оси вращения. Азимутальная скорость движения жидкости внутри столбиков отличается от скорости вращения за его пределами (Рис. 1). Диаметр столбиков согласуются с диаметром всплывающего тела.

Результаты экспериментов показывают, что нижний и верхний столбики Тейлора–Праудмена практически одинаковы, основное отличие заключается в том, что направления дифференциального вращения столбиков отличаются.

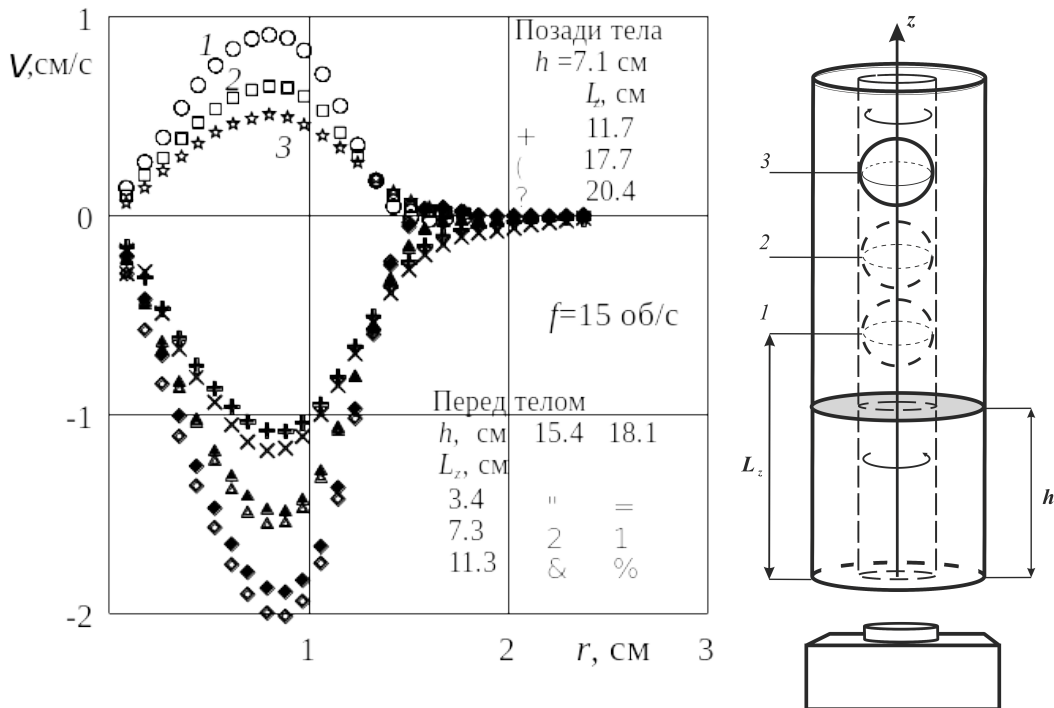


Рис. 1. Азимутальная (тангенциальная) скорость дифференциального движения жидкости в зависимости от расстояния до оси вращения в разных сечениях полости при различном положении тела в полости. Схема измерения поля скорости позади движущегося тела

Выводы

Было проведено экспериментальное исследование движения легкого сферического тела, всплывающего вдоль оси вращающегося вертикального цилиндра, и движения жидкости, возбуждаемого этим телом. Эксперименты проводились в диапазоне высоких частот вращения полости. В процессе исследования использовались высокоскоростная видеосъемка и PIV-метод.

Во вращающейся полости всплывающее тело генерирует дифференциальное движение жидкости в виде столбиков Тейлора–Праудмена, диаметр которого соответствует диаметру тела. В верхнем столбике жидкость имеет отстающий характер движения, а в нижнем — опережающий. За пределами столбиков дифференциальное вращение практически отсутствует. Также было обнаружено, что интенсивность отстающего азимутального движения в верхнем столбике увеличивается по мере подъема тела, в то время как интенсивность опережающего вращения в нижнем столбике уменьшает-

ся. Свободное тело одновременно с движением вдоль оси совершает дифференциальное вращение: в нижней части полости оно опережающее, в то время как в верхней части — отстающее.

Кроме этого, в некоторых экспериментах за пределами столбиков Тейлора–Праудмена были обнаружены структуры в виде валов. В зависимости от скорости вращения полости интенсивность этих валов изменялась. С увеличением частоты вращения количество валов возрастает.

Список литературы

- [1] *Taylor G.I.* Motion of Solids in Fluids when the Flow is not Irrotational // Proc. of the Royal Society of London 1916, A92, 408–424.
- [2] *Moore D.W., Saffman P.G.* The rise of a body through a rotating fluid in a container of finite length // J. Fluid Mech. 1968, 31, 635–642.
- [3] *Maxworthy T.* The observed motion of a sphere through a short, rotating cylinder of fluid // J. Fluid Mech. 1968, 31, 643–655.
- [4] *Kozlov V., Zvyagintseva E., Kudymova E., Romanetz V.* Motion of a light free sphere and liquid in a rotating vertical cylinder of finite length // Fluids 2023, 8, 49.



Асимптотические решения одномерного псевдодифференциального уравнения для водяных волн над неровным дном с учетом отражения от вертикальной стенки¹

Золотухина А.А., Миненков Д.С.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Волны на поверхности жидкости над неровным дном в поле сил тяжести Земли описываются уравнением с псевдодифференциальным оператором, который в первом приближении похож на волновой оператор. В данной работе рассматривается одномерный случай и ставится задача Коши с локализованным начальным условием и краевым условием непротекания (условие Неймана) на жесткой вертикальной стенке. В работе исследуется отражение волны от стенки и влияние дисперсии на начальное возмущение. Асимптотики задачи строятся в виде канонического оператора Маслова с использованием метода отражений. В окрестности головного фронта асимптотика выражается через функцию Эйри и ее производную. При использовании равномерных формул можно выразить через функцию Эйри и всю асимптотику, что при использовании современных программных пакетов значительно удобнее традиционного

сшивания решений в регулярных и сингулярных картах.

Рассматриваемое уравнение с псевдодифференциальным оператором возникает из задачи на потенциальную модель течения жидкости в двумерном слое в поле сил тяжести Земли с аналогичными условиями на границах. Переход между такими задачами может быть осуществлен посредством операторного разделения переменных в случае отсутствия вертикальной стенки.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 21-11-00341.



Линейная устойчивость фильтрационного течения газа и двух несмешивающихся жидкостей¹

Кожурина П.И., Томашева А.М., Горкунов С.В., Коломийцев Г.В.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Месторождения нефти с газовой шапкой составляют значительную долю газовых и нефтяных месторождений [1]. Добыча нефти из таких месторождений обладает определенными особенностями и отличается от разработки чисто нефтяных коллекторов. Снижение давления в области, насыщенной нефтью, вызывает движение поверхности газонефтяного контакта, которая может быть неустойчивой и приводить к газовому пробою к добывающей скважине. В результате в пласте образуется остаточная неизвлекаемая нефть [2–4]. Если между газом и нефтью находится слой воды, то газовые пальцы образуются в области, занятой водой, и формируют области с малоподвижной водой, а не нефтью. В большинстве случаев вязкость нефти больше вязкости воды, поэтому граница вода-нефть также является неустойчивой.

Коротковолновая неустойчивость этой границы приводит к формированию пальцев воды в области, занятой нефтью. Схема рассматриваемо-

го пласта пористой среды представлена на Рис. 1. Жидкости в системе предполагаются несжимаемыми, а фильтрационное течение описывается законом Дарси с учетом силы тяжести:

$$\operatorname{div} \vec{v}_i = 0, \quad (1a)$$

$$0 = -\nabla(P_i + \rho_i g z) - \frac{\mu_i}{k} \vec{v}_i, \quad (1b)$$

где \vec{v}_i — скорость фильтрации, P_i — давление, ρ_i — плотность, g — ускорение свободного падения, μ_i — вязкость, k — проницаемость среды, где $i = 1$ для области, занятой водой, и $i = 2$ для области, насыщенной нефтью.

С помощью метода нормальных мод получены соотношения, описывающие рост возмущений

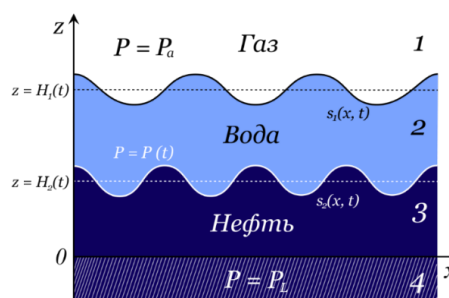


Рис. 1. Схема течения в пласте пористой среды

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-11-00126.

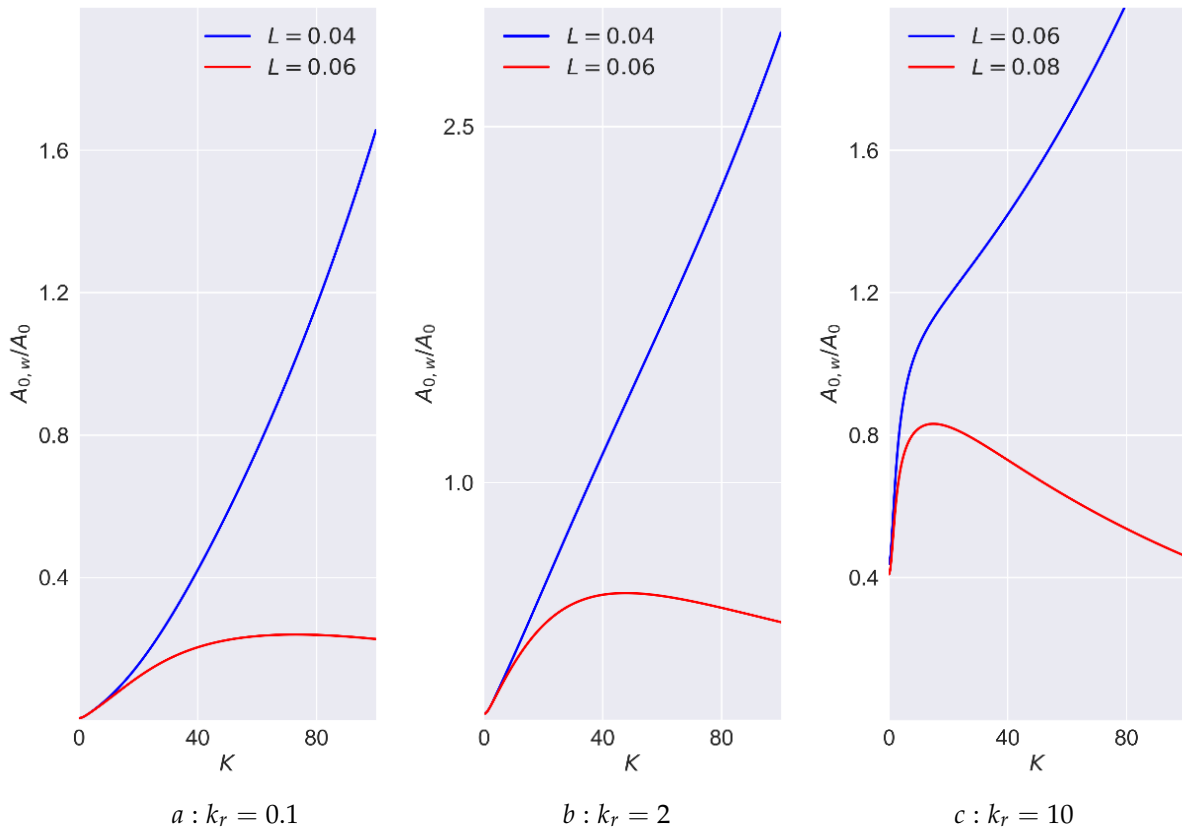


Рис. 2. Зависимость $A_{*}/A_{0,g}$ от K при различной толщине слоя водонасыщенной области и $c_t = 0.1$

поверхностей газ–вода и вода–нефть. Эти соотношения описывают эволюцию возмущений в линейном приближении в зависимости от длины волны возмущения и параметров основного течения.

Выполненное исследование показывает, что существует пороговое значение толщины слоя воды L_* . Если толщина слоя воды больше порогового значения, то развитие возмущений на границе вода-газ не оказывает влияния на развитие возмущений за время, сравнимое с характерным временем процесса вытеснения нефти.

Получено выражение для расчета порогового значения L_* при заданных значениях вязкости нефти, перепада давлений и толщины низкопроницаемого слоя пористой среды, содержащего нефть.

$$L > L_* = \frac{c_t - k_r + \sqrt{c_t^2 + k_r^2}}{2}, \quad (2)$$

где c_t – отношение рассматриваемого момента времени t_* ко времени, за которое нефть была бы полностью вытеснена водой из пласта, если бы обе границы раздела оставались плоскими ($0 < c_t < 1$); k_r – отношение вязкостей жидкостей.

Из Рис. 3 видно, что в рассматриваемом в работе случае, если начальные амплитуды возмуще-

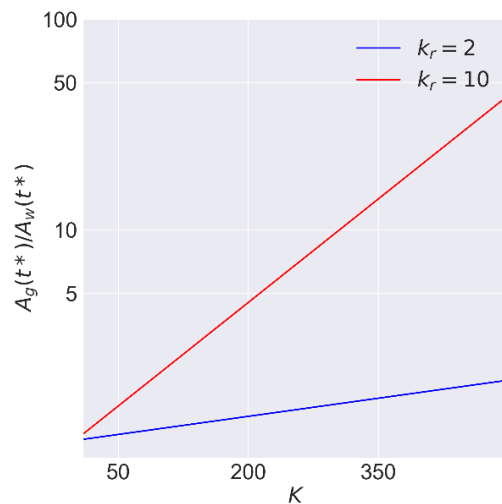


Рис. 3. Зависимость A_g/A_w от K при $t = t_*$, $c_t = 0.1$, $L = 0.1$

ний обеих поверхностей равны, то коротковолновые возмущения границы вода–нефть на линейной стадии развития возмущений растут значительно медленнее возмущений на границе вода–газ.

Из полученных результатов следует, что наличие слоя воды между нефтью и газом существенно уменьшает рост коротковолновых возмущений («пальцев») в области, занятой нефтью. Таким образом, слой второй жидкости может позволить снизить количество остаточной нефти, которая является большой проблемой эффективной добычи.

Исследование выполнено для малых возмущений в предположении, что длина волны возмущения остается много больше амплитуды. Развитие возмущений на нелинейной стадии планируется исследовать в будущем с помощью континуальной и сетевой моделей, ранее описанных авторами в работе [5].

Авторы выражают благодарность научному руководителю Шаргатову Владимиру Анатольевичу за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению.

Список литературы

- [1] Лалук Б.Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 296 с.
- [2] Кутырев Е.Ф., Шкандратов В.В., Белоусов Ю.В. Некоторые результаты физического моделирования процессов газообмена в пластовой системе нефть – нагнетаемая вода // Георесурсы. 2005. № 5. С. 33–36.
- [3] Rostami1 B., Kharrat R., Ghotbi C., Tabatabaie S.H. Gas-Oil relative Permeability and Residual Oil Saturation as Related to Displacement Instability and Dimensionless Numbers // Oil&Gas Science and Technology – Rev. IFP 2010. V. 65. No. 2. P. 299–313.
- [4] Kim V.C., Kim S., Chung B.-J., Choi C.K. Convective instability in a horizontal porous layer saturated with oil and a layer of gas underlying it // Int. Comm. Heat Mass Transfer. V. 30. No. 2. P. 225–234.
- [5] Shargatov V., Tsyarkin G.G., Gorkunov S.V., Kozhurina P.I., Bogdanova Y.A. On the Short Wave Instability of the Liquid/Gas Contact Surface in Porous Media // Mathematics 2022, 10.



Динамика слоя вязкой жидкости на внутренней границе горизонтальной цилиндрической полости при модуляции скорости вращения¹

Козлов В.Г., Зимасова А.Р., Козлов Н.В.

Пермский государственный гуманитарно–педагогический университет, Пермь

Экспериментально исследуется поведение границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкости в неравномерно вращающемся длинном горизонтальном цилиндре. Более вязкая жидкость имеет большую плотность и располагается вблизи границы полости в виде тонкого слоя под действием центробежной силы. В средней части полости располагается маловязкая жидкость меньшей плотности, в отсутствие модуляции скорости вращения граница раздела имеет форму кругового цилиндра. Изучается динамика межфазной границы в зависимости от толщины слоя вязкой жидкости, скорости вращения, амплитуды и частоты либраций.

Исследования направлены на разработку методов вибрационного управления формой межфазной границы во вращающемся длинном цилиндре. Эффективное осредненное действие либраций на границу раздела жидкостей с высоким контрастом вязкости было показано в [1] при изучении динамики двух жидкостей в круговой ячейке Хеле-Шоу, совершающей неравномерное вращение вокруг своей оси по закону $\Omega = 2\pi f_{rot}(1 + \varepsilon \cos(2\pi f_{lib}t))$. В работе экспериментально и теоретически исследованы равновесная форма и устойчивость межфазной границы. Были обнаружено несколько эффектов: при определенных соотношениях частоты либраций и скорости вращения граница смещается

в радиальном направлении в системе отсчета полости. Другой эффект проявляется в том, что с увеличением амплитуды модуляции скорости круговая граница раздела пороговым образом теряет устойчивость: на границе возникает азимутально периодический рельеф. Это связано с осцилляционной неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца, обусловленной тангенциальными колебаниями менее вязкой жидкости вблизи границы раздела с более вязкой.

Экспериментальная кювета представляет собой цилиндрическую полость (Рис. 1), выточенную в блоке из оргстекла в виде длинного параллелепипеда квадратного поперечного сечения. Длина рабочей полости $L = 7.4$ см, радиус рабочей полости $R = 3.0$ см. Кювета приводится во вращение вокруг горизонтальной оси шаговым двигателем.

Эксперименты проводятся в диапазоне частот вращения $f_{rot} = \Omega_{rot}/2\pi = 3 - 6$ об/с и частот либрации $f_{lib} = \Omega_{lib}/2\pi = 3 - 9$ Гц. Амплитуда модуляции скорости варьируется в диапазоне $\varepsilon = 0 \div 0.7$.

¹Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда, проект 23-11-00242.

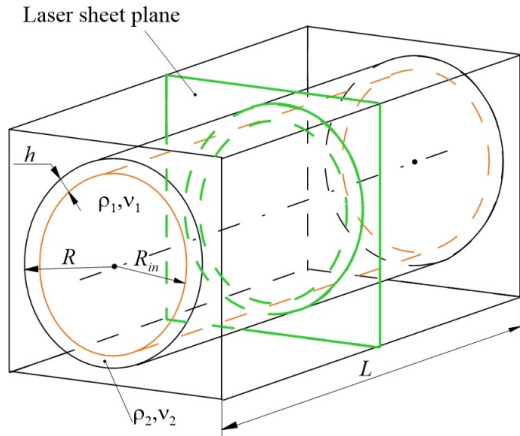


Рис. 1. Схематичное изображение экспериментальной кюветы и границы раздела в плоскости вертикального лазерного ножа

В ходе эксперимента форма радиальной границы вязкой жидкости, которая визуализируется родаминовым красителем, регистрируются с помощью скоростной видеокамеры. Видео-регистрация выполняется со стороны переднего прозрачного торца соосно с осью вращения кюветы.

В качестве жидкостей используются масло АК – 0.65 кинематической вязкостью $\nu_1 = 1.02$ сСт и плотностью $\rho_1 = 0.76$ г/см³ и глицерин, кинематическая вязкость которого равняется $\nu_2 = 820$ сСт, а плотность составляет $\rho_2 = 1.26$ г/см³.

Глицерин окрашен родаминовым красителем, что позволяет с высокой точностью определить границу раздела жидкостей методом фоторегистрации с использованием красного светофильтра и освещения жидкостей лазером зеленого цвета. При съемке с торца кюветы камера фокусируется на границе раздела жидкостей в плоскости лазерного ножа, расположенного так, что лазерный нож про-

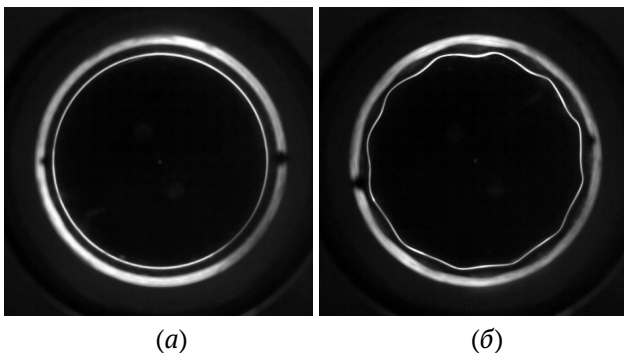


Рис. 2. Граница раздела жидкостей (толщина слоя $h = 3.0$ мм) при модуляции скорости вращения при $f_{rot} = 3$ об/с, $f_{lib} = 4$ Гц: (а) $\varepsilon = 0$; (б) $\varepsilon = 0.55$

ходит по середине полости перпендикулярно оси вращения кюветы, освещая слой столба жидкости в центре полости.

Эксперименты проводятся на нескольких толщинах слоя вязкой жидкости h : 2.3 мм, 3.0 мм, 5.6 мм.

Эксперименты проводятся в центрифугированном состоянии системы, при этом вязкая жидкость, расположенная у стенки полости в виде коаксиального слоя, совершает вращение вместе с кюветой. В отсутствие модуляции скорости граница раздела жидкостей имеет круговую форму (Рис. 2(а)).

Обнаружено, что с повышением амплитуды модуляции скорости вращения граница раздела пороговым образом теряет устойчивость, на ней развивается квазистационарный рельеф с азимутальной периодичностью (Рис. 2(б)).

С увеличением амплитуды либраций высота квазистационарного рельефа на границе раздела увеличивается, при этом пространственный период рельефа на границе также возрастает (Рис. 3). Обнаружено, что при увеличении частоты либрации при фиксированной скорости вращения и за-

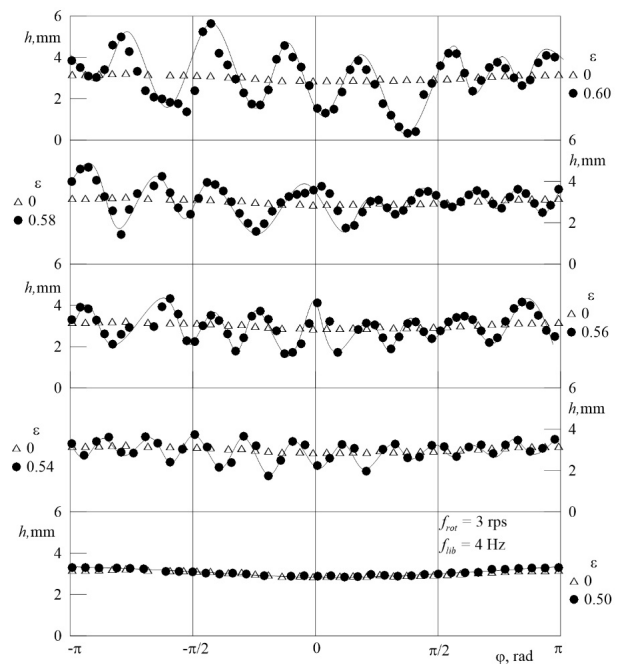


Рис. 3. Зависимость толщины слоя вязкой жидкости от угловой координаты в некоторый момент времени (в лабораторной системе, начало отсчета определяется направлением ускорения свободного падения) в отсутствие либраций и в надкритической области; $f_{rot} = 3$ об/с, $f_{lib} = 4$ Гц, толщина невозмущенного слоя $h = 3.0$ мм

данной амплитуде либраций высота холмов рельефа увеличивается.

Исследования показали, что возникновение двумерного квазистационарного рельефа на межфазной границе связано с развитием осцилляционной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца и происходит пороговым образом при увеличении амплитуды модуляции скорости вращения. Результаты исследования устойчивости границы представлены в пространстве безразмерных параметров.

Обнаружено, что одним из определяющих параметром является безразмерная скорость вращения полости $\omega_{rot} \equiv \Omega_{rot} h^2 / \nu$, с увеличением которого пороговое значение вибрационного параметра возрастает.

Список литературы

- [1] Kozlov V, Petukhova M, Kozlov N. Dynamics of liquids with high viscosity contrast in unevenly rotating Hele–Shaw cell // Phil. Trans. R. Soc. A. 2023. 20220082.



Влияние эффекта релаксации вязкости на капиллярные осцилляции излучающей заряженной капли

Колбнева Н.Ю.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль

Введение

Исследование капиллярных осцилляций и устойчивости заряженных капель при различных физико–химических характеристиках жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, гидрометеорологии [1, 2]. Впервые феномен радиоизлучения осциллирующей заряженной облачной капли обсуждался в работе [3], выполненной на модели идеальной проводящей жидкости. Важность сформулированной проблемы обуславливает появление новых работ [4]. Известно, что в верхней части реального конвективного облака капли переохлаждены, а при минусовых температурах переходят в стеклообразное состояние, для которого характерна вязкоупругость. В связи со сказанным представляется актуальным провести исследование влияния вязкоупругих свойств реальной жидкости на капиллярные осцилляции заряженной капли с учетом энергопотерь на излучение электромагнитных волн.

В результате кратковременных внешних силовых воздействий (меньших или сравнимых

с характерными молекулярными временами [5], стр. 222) вязкая жидкость упруго деформируется, а возникающие сдвиговые напряжения затухают за время релаксации, существенно превышающее время внешнего воздействия [6], стр. 188.

Вязкоупругие свойства жидкости описываются введением комплексной кинематической вязкости при помощи известной формулы Максвелла [6]:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - i\omega_n \tau'} \quad (1)$$

i — мнимая единица, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости для нулевой частоты внешнего воздействия, τ — характерное время релаксации вязкости (время, за которое возникающие в жидкости упругие деформации возвращаются к нулевому уровню), ω_n — комплексная частота капиллярных осцилляций n -моды; реальная ее часть определяет собственную частоту осцилляций, а мнимая часть — декремент затухания или инкремент капиллярной электростатической неустойчивости. В (1) учтена экспоненциальная зависимость от времени амплитуд капиллярных осцилляций капли: $\sim \exp(-i\omega_n t)$.

Математическая модель. Постановка задачи

Рассмотрим неподвижную сферическую каплю радиуса R вязкой несжимаемой проводящей жидкости, имеющей заряд Q . Пусть жидкость обладает плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме.

Уравнение возмущенной поверхности капли в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли при использовании осесимметричной постановки задачи представим в виде: $r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t)$, где возмущение равновесной сферы, вызванное капиллярным волновым движением, описывается функцией $\xi(\theta, t)$. В качестве малого параметра задачи примем безразмерную амплитуду осцилляций: $\varepsilon \equiv |\max \xi| / R \ll 1$.

Система уравнений электрогидродинамики с электрическим полем, создаваемым собственным зарядом Q капли, имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}, \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \vec{E} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0: \quad \vec{V} \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0:$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla F = 0; \quad (5)$$

$$\vec{\tau}(\vec{n} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{n}(\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{V} = 0;$$

$$P - 2\rho\nu\vec{n}(\vec{n} \cdot \nabla) \vec{V} + P_q = P_\sigma, \quad (\vec{\tau} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (6)$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad (7)$$

$$\int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n} \cdot \vec{E}) dS = Q; \quad (8)$$

$$S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

где \vec{V} — поле скоростей движения жидкости в капле, \vec{E} — напряженность электрического поля, P — давление внутри капли, $P_q = \vec{E}^2 / 8\pi$ — давление электрических сил, $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ — давление капиллярных сил, \vec{n} , $\vec{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности капли.

Задача (2)–(8) решается методом прямого разложения в рамках теории возмущений в линейном приближении по малому параметру ε . Для этого искомые функции раскладываются по порядкам малости безразмерной амплитуды осцилляций ε . Задача нулевого порядка малости описывает равновесное состояние системы.

Решение задачи первого порядка малости по ε позволяет прийти к дисперсионному уравнению второго порядка для случая маловязкой жидкости. При использовании динамического коэффициента кинематической вязкости (1) получается уже уравнение третьего порядка [7]:

$$\omega_n^3 - il_1 \omega_n^2 - \omega_n(l_{21} + il_{22}) + il_{31} - l_{32} = 0; \quad (n \geq 2),$$

$$l_1 = \frac{1}{\tau}; \quad l_{21} = \frac{2\nu_0}{R^2 \tau} (n-1)(2n+1) + (Re\omega_n)^2,$$

$$(Re\omega_n)^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right);$$

$$W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3},$$

$$l_{22} = W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2 (n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!}\right)^2 \left(\frac{Re\omega_n R}{c}\right)^{2n+1};$$

$$l_{31} = \frac{(Re\omega_n)^2}{\tau}, \quad l_{32} = \frac{l_{22}}{\tau},$$

из-за усложнения спектра реализующихся движений жидкости за счет возникновения релаксационных апериодических сдвиговых движений.

В пакете аналитических вычислений МАТЕМАТИКА для характерных облачных и дождевых капель найдены численные решения дисперсионного уравнения, порожденного эффектом релаксации вязкости, при докритических значениях параметра Релея W :

для $R = 3$ мкм:

$$\omega_2^{(1)} = -99.5 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 4.7 \cdot 10^6 - 0.3 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с},$$

для $R = 30$ мкм:

$$\omega_2^{(1)} = -99.5 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 0.15 \cdot 10^6 - 1.7 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с},$$

для $R = 0.25$ мм:

$$\omega_2^{(1)} = -99.8 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 6.1 \cdot 10^3 - 0.08 \cdot 10^3 i) \text{ рад/с},$$

для $R = 3.5$ мм:

$$\omega_2^{(1)} = -100 \cdot 10^3 i \text{ рад/с},$$

$$\omega_2^{(2,3)} = (\pm 117 - 0.4i) \text{ рад/с}.$$

Из анализа выше приведенных численных оценок ясно, что первый корень показывает чисто релаксационное апериодическое затухание упругих

движений вязкой жидкости. Второй и третий корни соответствуют слабо затухающим вязкоупругим осцилляциям облачных и дождевых капель. Учет эффекта релаксации вязкости приводит к снижению декремента вязкоупругого затухания и незначительному увеличению частоты собственных осцилляций по сравнению с характеристиками, рассчитанными в пренебрежении вязкоупругих свойств жидкости.

Заключение

Показано, что эффект релаксации вязкости сказывается на снижении гасящего влияния на спектр капиллярных осцилляций капли на высоких частотах. Выявлено, что наличие эффекта релаксации вязкости приводит к существенной зависимости декремента вязкоупругого затухания от характерного времени релаксации. Учет вязкоупругих свойств жидкости приводит к снижению декремента затухания, определяемого энергопотерями на излучение электромагнитных волн, и интенсивности электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли на высоких частотах. Обнаруже-

но, что вязкоупругость, как и вязкость жидкости, не оказывают влияния на критические условия реализации электростатической неустойчивости капли по отношению к собственному заряду.

Список литературы

- [1] *Аджиев А.Х., Богаченко Е.М.* Грозы Северного Кавказа. Нальчик: Полиграфсервис и Т., 2011. 152 с.
- [2] *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24, № 6. С. 613–621.
- [3] *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю.* Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва–Берлин: Директ–Медиа, 2021. 200 с.
- [5] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [7] *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* О влиянии эффекта релаксации вязкости жидкости на интенсивность электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли // Коллоидный журнал. 2023. Т. 85. № 4. С. 483–501.



Исследование устойчивости бегущих волн в двухфазных потоках жидкости в пористой среде методом функции Эванса¹

Коломийцев Г.В., Горкунов С.В., Кожурина П.И., Томашева А.М.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Рассматривается двухфазный одномерный поток жидкости в пористой среде в рамках модели, основанной на использовании закона Дарси в среде, проницаемость которой описывается квадратичными функциями насыщенности. В работе получены уравнения для исследования устойчивости решений в виде бегущих волн методом функции Эванса и обоснована возможность применения этого метода.

Введение

Проблема математического описания процесса распространения жидкости в двухфазной среде в одномерном приближении возникает в задачах извлечения нефти из пластов пористой породы под действием давления накачиваемой в пласт воды [1, 2]. В приближении исчезающей вязкости (уравнения Бакли–Левверетта) существуют решения в виде бегущих волн [3, 4], линейная устойчивость которых в данной работе исследуется методом функции Эванса. Этот подход применяется, например, при анализе устойчивости бегущих волн в средах с диссипацией и дисперсией [5, 6].

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 21-11-00126.

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
© Кожурина Полина Ивановна, polinakozhurina2020@gmail.com
© Томашева Анастасия Михайловна, anastasiatomasheva@gmail.com
© Горкунов Сергей Владимирович, gorkunov.ser@mail.ru
© Коломийцев Георгий Васильевич, kolomytsev@theor.mephi.ru

Основные соотношения и результаты

Рассматривается пористая среда с проницаемостью K , в которой движутся две несжимаемые несмешивающиеся жидкости, одна из которых несмачивающая (нефть), характеризуемая скоростью v_W и давлением p_W , а вторая — смачивающая (вода) с соответствующими параметрами v_N , p_N . Закон Дарси предполагает связь между скоростью жидкости и градиентом давления в ней:

$$v_i = -\lambda_i \nabla p_i, \quad i = \{W, N\}.$$

Коэффициенты подвижности $\lambda_W = \lambda_W(u)$ и $\lambda_N = \lambda_N(1 - u)$ зависят от насыщенности среды смачивающей фазой u , ее проницаемости K , вязкости жидкостей $\mu_{W,N}$ и некоторых модельных функций $\kappa_{W,N}$:

$$\lambda_i = \frac{Ka_i}{\mu_i} \kappa_i(u),$$

где $a_{W,N}$ — некоторые постоянные, а модельные функции имеют квадратичную зависимость от насыщенности:

$$\kappa_W(u) = u^2, \quad \kappa_N(u) = (1 - u)^2.$$

Дополнительной величиной, выбираемой из модельных соображений, является капиллярное давление

$$p_c(u) = p_N(u) - p_W(u).$$

В одномерной постановке закон сохранения массы и уравнение несжимаемости приводятся к виду

$$\partial_{t'} u + \partial_{x'} F(u) = \partial_{x'} G(u) \partial_{x'} u,$$

$$\partial_{x'} p = -\frac{M}{u^2 + M(1-u)^2} \left(1 + (1-u)^2 p'_c(u) \partial_{x'} u \right),$$

где введены обозначения:

$$t' = t / \left(\frac{Ka_N}{U\mu_N} \right), \quad x' = x / \left(\frac{Ka_N}{\mu_N} \right),$$

$$U = (\lambda_N(u_+) + \lambda_W(u_+)) (\partial_x p)_+, \quad p \equiv p_W;$$

$$M = \frac{\mu_W a_N}{\mu_N a_W}.$$

Функция потока Бакли–Левретта $F(u)$ и эффективный коэффициент диссипации $G(u)$ определяются как

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 + M(1-u)^2}, \quad G(u) = -p'_c(u) \frac{u^2(1-u)^2}{u^2 + M(1-u)^2}.$$

Граничные условия задаются постоянными значениями насыщенности и градиента давления при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u = u_+, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \partial_x p = (\partial_x p)_+.$$

В координатах бегущей волны $z = x' - Dt'$ уравнение для насыщенности приводится к виду

$$\partial_{t'} u + \partial_z (F(u) - Du) = \partial_z G(u) \partial_z u,$$

и его стационарные решения $u = u(z) > 0$ отвечают волнам, бегущим со скоростью D .

Известно, что слабая зависимость капиллярного давления от насыщенности приводит к исчезновению эффективного коэффициента диссипации,

так что уравнение для насыщенности становится гиперболическим и дает соотношение на разрыве

$$D = \frac{F(u_-) - F(u_+)}{u_- - u_+}.$$

В работах [4, 7] исследование устойчивости разрывных решений сводится к анализу устойчивости решений уравнения с малой постоянной диссипацией $G(u) \rightarrow \varepsilon = \text{const}$. Такой подход позволяет установить ряд общих утверждений, относящихся к устойчивости решений, однако связан с использованием решений, не являющихся собственно решениями задачи с исходным коэффициентом диссипации.

Альтернативный подход к анализу устойчивости профилей бегущих волн сводится к построению функции Эванса линеаризованного уравнения для малых возмущений «основного» решения

$$u(z, t) = e^{\lambda t} y(z) + u_0(z).$$

В описанной выше модели уравнение для $y(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2}{dz^2} (G(u_0(z)) y(z)) - \frac{d}{dz} ((F'_u(u_0(z)) - D) y(z)) = \lambda y(z),$$

при этом анализ устойчивости сводится к поиску собственных значений получившегося линейного дифференциального оператора в пространстве дважды интегрируемых функций. Наличие собственных значений с $\text{Re} \lambda > 0$ отвечает наличию неустойчивости.

Функция Эванса $E(\lambda)$ для дифференциальных операторов второго порядка определяется через скалярное произведение решений соответствующих этому дифференциальному уравнению системам

$$Y'(z) = J(z, \lambda) Y(z); \quad -\tilde{Y}'(z) = J^T(z, \lambda) \tilde{Y}(z),$$

$$J(z, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\lambda + (F'_u(u_0(z)) - G'_z(u_0(z)))}{G(u_0(z))} & -\frac{2G''_z(u_0(z)) - F''_u(u_0(z)) + D}{G(u_0(z))} \end{bmatrix};$$

$$E(\lambda) = \tilde{Y}^T(z) \cdot Y(z).$$

Решения этих систем выбираются так, чтобы $Y(z)$ исчезало при $z \rightarrow \infty$, а $\tilde{Y}(z)$ — напротив, исче-

зало при $z \rightarrow -\infty$. Изолированные нули функции $E(\lambda)$ в комплексной плоскости спектрального параметра λ отвечают собственным значениям оператора.

Анализ асимптотического поведения функции Эванса при больших параметрах λ показывает ее ограниченность в бесконечно удаленной точке. При этом вычисление функции Эванса для задачи определения устойчивости фильтрационных течений в виде бегущих волн может быть сведено к вычислению определителя Вронского двух линейно независимых решений уравнения с некоторым редуцированным оператором, обладающим спектром, совпадающим со спектром исходного оператора:

$$G(u_0(z)) \frac{d^2}{dz^2} f(z) + R(u_0(z)) f(z) = \lambda f(z),$$

$$R(u_0(z)) = \frac{1}{2G(u_0(z))} \left(G'_z(u_0(z)) (F'_u(u_0(z)) - D) - \frac{1}{2} (F'_u(u_0(z)) - D)^2 - G(u_0(z)) (F'_u(u_0(z)))'_z \right).$$

Список литературы

- [1] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
- [2] Bear J. Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, New York, London, Amsterdam. 1972.
- [3] van Duijn C.J., Peletier L.A., Pop I.S. A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2007. Т. 39. № 2. С. 507–536.
- [4] Spayd K., Shearer M., Hu Z. Stability of plane waves in two-phase porous media flow // Applicable Analysis. 2012. Т. 91. № 2. С. 295–308.
- [5] Evans J. W., Feroe J. Local stability of the nerve impulse // Mathematical Biosciences. 1977. Т. 37. № 1–2. С. 23–50.
- [6] Chugainova A. P., Kolomyitsev G. V., Shargatov V. A. On the Instability of Monotone Traveling-Wave Solutions for a Generalized Korteweg–de Vries–Burgers Equation // Russian Journal of Mathematical Physics. 2022. Т. 29. № 3. С. 342–357.
- [7] Bakharev F., Enin A., Petrova Y., Rastegae N. Impact of dissipation ratio on vanishing viscosity solutions of the Riemann problem for chemical flooding model // Journal of Hyperbolic Differential Equations. 2023. Т. 20. № 02. С. 407–432.



Эволюционные уравнения, описывающие гидродинамическую неустойчивость пламени¹

Минаев С.С., Дац Е.П.

Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), Аякс 10, Русский остров, Владивосток

В работе описаны подходы, позволяющие получить эволюционные уравнения для возмущенного фронта пламени в условиях неустойчивости Дарье–Ландау. Нелинейные уравнения для фронта пламени получены в предельных случаях малого и очень большого коэффициента расширения газа. В обоих случаях, полученные уравнения имеют вид нелинейного интегро-дифференциального уравнения Сивашинского.

Введение

Динамика распространения предварительно перемешанного пламени в большом объеме горючей смеси — одна из интересных фундаментальных проблем теории горения, с которой связано множество важных приложений — от сжигания газов в двигателях внутреннего сгорания до крупномасштабных взрывов газовых смесей. Расширение газа в зоне химической реакции приводит к развитию гидродинамической неустойчивости, которая проявляется в образовании ячеек на фронте пламени. Рост общей поверхности пламени увеличивает скорость его распространения и определяет динамику энерговыделения, изменения давления и других характеристик в системе с горением газа. Поэтому моделирование динамического поведения фронта пламени является актуальной задачей

для практических приложений. Численное моделирование динамики ячеистого пламени и, связанного с ним возмущенного потока газа, требует значительных вычислительных затрат, которые зависят от размера расчетной области. Например, моделирование расходящегося цилиндрического пламени [1] показывает, что количество ячеек на фронте пламени увеличивается пропорционально радиусу пламени, и в этом случае количество узлов сетки, необходимых для расчета поля течения газа, пропорционально квадрату радиуса пламени.

Один из возможных способов уменьшить объем вычислений — использовать приближенные эволюционные уравнения для переменных, заданных на фронте пламени, что позволяет избежать вычислений в пространстве, окружающем пламя. Такой подход позволяет существенно сократить объем вычислений за счет уменьшения размерности системы. Решение этой задачи для произвольных значений коэффициента расширения газа $E = \rho_1/\rho_2$, (где ρ_1 и ρ_2 — плотности горючего газа и продуктов сгорания) сталкивается со значительными трудностями, связанными с описанием вихревого течения продуктов сгорания. В данной работе

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZNS-2023-0031).

рассмотрен случай больших значений коэффициента расширения газа, что позволяет использовать асимптотическое разложение, рассматривая величину $1/E \ll 1$ как малый параметр.

Эволюционное уравнение для фронта пламени при больших коэффициентах расширения газа

Предполагая, что коэффициент расширения газа большая величина $E \gg 1$, будем считать $\varepsilon = E^{-1/2}$ малым параметром задачи. Фронт пламени, заданный уравнением $z = f(x, t)$ разделяет свежую смесь ($z > f$) и продукты горения ($z < f$). Движение газа описывается уравнениями Эйлера и на границе областей выполняются условия сохранения массы, импульса газа и условие распространения фронта пламени по свежему газу с заданной нормальной скоростью [2]. Предполагается, что нормальная скорость распространения пламени зависит от локальной кривизны фронта пламени и описывается зависимостью Маркштейна [3].

В этом случае можно использовать следующие переменные для возмущения фронта пламени $F = f/\sigma$, пространственные координаты, $\eta = x/\sigma$, $\zeta = y/\sigma$ и время $\tau = tS_0/\varepsilon\sigma$. Компоненты скорости в горючей смеси измеряются в единицах S_0/ε , скорости сгоревшего газа измеряются в единицах S_0/ε^2 , а давление выражается в единицах $\rho_1 S_0^2/\varepsilon^2$. Здесь S_0 — скорость распространения плоского ламинарного пламени, σ — длина Маркштейна [3][3] и ρ_1 — плотность свежей смеси.

Записав основное уравнение Эйлера для скоростей, давления и граничных условий в безразмерных переменных, можно получить систему уравнений для возмущений фронта пламени $F(\zeta, \tau)$ и потенциала потока горючей смеси $\psi(\zeta, \tau)$ на фронте пламени [4].

$$F_\tau = -\hat{K}\{\psi\} - \hat{K}\{F\hat{K}\{\psi\}\} - \psi_{\zeta\zeta}F - \psi_\zeta F_\zeta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \psi_\tau = & -\hat{K}\{F\} - 2F_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2}(\hat{K}\{F\})^2 - \\ & - \frac{1}{2}F_\zeta^2 + \hat{K}\{F\hat{K}\{F\}\} + F_{\zeta\zeta}F - \\ & - \hat{K}\{\psi\}F_\tau - \frac{1}{2}\left((\hat{K}\{\psi\})^2 + \psi_\zeta^2\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\hat{K}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} |k| \exp(ik(y - y_1)) f(y_1) dy_1 dk$$

нелокальный линейный оператор. В фурье-представлении действие этого оператора сводится

к умножению коэффициентов Фурье функции на модуль волнового вектора $|k|$. Уравнение (1) следует из уравнения распространения фронта пламени по свежей смеси с заданной нормальной скоростью. Как было показано в работе [4], при больших коэффициентах расширения газа безразмерные уравнения для продуктов сгорания не зависят от времени, что позволяет получить уравнение (2) для фронта пламени F и функции ψ . Система уравнений (1) и (2), допускает дальнейшее упрощение. Записывая уравнения (1), (2) в переменных $X = F - \psi$ и $Y = F + \psi$ можно показать, что переменная X экспоненциально возрастает, тогда как Y экспоненциально убывает. В ходе эволюции переменная $Y = F + \psi$ будет экспоненциально стремиться к нулю откуда следует, что $\psi \rightarrow -F$ и $X \rightarrow 2F$. В результате, можно получить уравнение для фронта пламени вида:

$$F_\tau = \hat{K}\{F\} + F_{\zeta\zeta} + F_\zeta^2 \quad (3)$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения Сивашинского [5], полученного ранее для случая малого коэффициента расширения газа $E - 1 \ll 1$. Несмотря на идентичную математическую формулировку эволюционных уравнений, физическая интерпретация решений, полученных в предельных случаях $E - 1 \ll 1$ и $E \gg 1$, различна. В случае малых коэффициентов расширения газа нелинейное уравнение описывает только эволюцию возмущений фронта пламени F . В случае больших коэффициентов расширения нелинейное уравнение описывает возмущения как фронта пламени F , так и потенциала поля скорости горючей смеси на фронте пламени ψ . В случае больших коэффициентов расширения газа в продуктах сгорания возникает вихревое течение и картина течения принципиально отличается от случая малых коэффициентов расширения. Завихренность потока сохраняется вдоль линий тока и остается отличной от нуля всюду в области продуктов сгорания. В общем случае эволюция пламени описывается системой уравнений (1) и (2) для F и функции ψ . Необходимость использования полной системы уравнений возникает, например, при описании перехода от первоначально плоского пламени к тюльпанообразному пламени, распространяющемуся в канале [6]. Исследование решений этой системы будет проводиться в дальнейшем.

На Рис. 1 показаны линии тока, построенные для точного частного решения уравнения (3), имеющего вид:

$$F(\zeta, \tau) = \ln(1 + a^2 + 2a \cos(\zeta\tau)) + w\tau, \quad w = k - k^2 \quad (4)$$

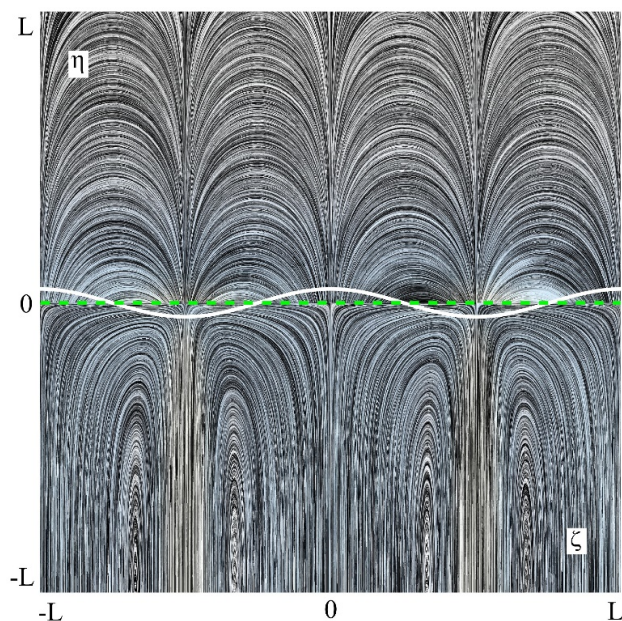


Рис. 1. Линии тока, соответствующие стационарному решению (4), построены для случая $L = 10$, $k = 2\pi/L$ и $a^2 = (1 - k)/(1 + k)$. Сплошная белая линия – фронт пламени. Зелёный пунктир – невозмущённое пламя

Список литературы

- [1] *L.Filyand, G.I.Sivashinsky and M.L.Frankel*, On self-acceleration of outward propagating wrinkled flames// *Physica D*, 1994, V.72, p.110–118.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.
- [3] *G.H.Markstein*, *Nonsteady Flame Propagation*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [4] *Minaev S., Gubernov V.*, Nonlinear Analysis of Flame Hydrodynamic Instability at Large Gas Expansion Ratio, *Combustion Theory Modeling*, 2022, V. 26(4), p. 654–668.
- [5] *G.I. Sivashinsky*, Some developments in premixed combustion, *Proceedings of the Combustion Institute*, 2002, V. 29, p. 1737–1761.
- [6] *G. Joulin, Hazem El-Rabii an K.A.Kazakov*, Description of Non-Stationary Flames, *J. Fluid Mech.*, 2008, V. 608, p. 217–242.



Асимптотики длинных распространяющихся волн в одномерном бассейне с пологими берегами¹

Миненков Д.С., Вотякова М.М.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

Рассматривается задача Коши для одномерной системы нелинейных уравнений мелкой воды с переменным дном $D(x)$ в протяженном бассейне, ограниченном с двух сторон берегами (где дно вырождается $D(a) = 0$), или берегом и стенкой.

Построены коротковолновые асимптотики линейаризованной системы в виде бегущей локализованной волны. После применения к построенным функциям простой параметрической или явной замены, предложенной в недавних статьях (Доброхотов, Миненков, Назайкинский, 2022 и Доброхото-

тов, Калиниченко, Миненков, Назайкинский, 2023) получаются асимптотики исходной нелинейной задачи. На построенных семействах функций исследуется соотношение амплитуды и длины волны, при котором не происходит обрушения волны при накате на берег.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 21-11-00341.

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
© Миненков Дмитрий Сергеевич, minenkov.ds@gmail.com
© Вотякова Мария Михайловна, votiakova.mm@phystech.edu



Решение задачи об электровихревом течении между плоскостями при различных граничных условиях¹

Михайлов Е.А.^{*,**}, Таранюк А.А.^{*}

^{*}Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

^{**}Физический институт имени П.Н.Лебедева РАН, Москва, Россия

Электровихревые течения играют важную роль в прикладных задачах, связанных с течениями жидких металлов, электролитов и т.д. Они возникают во время прохождения электрического тока меняющейся плотности через хорошо проводящую среду. В таком случае, электрический ток порождает магнитное поле и возникает электромагнитная сила, являющаяся причиной закрученных течений.

Первые исследования, связанные с электровихревыми течениями, относятся к 1970-м годам. Большой вклад в изучение внесли специалисты латвийского Института физики, которым принадлежат как экспериментальные результаты, так и теоретические модели [1]. В настоящее время электровихревые течения активно исследуются в Институте механики сплошной среды УрО РАН (г. Пермь) [2], Объединенном институте высоких температур РАН (г. Москва) [3], Магнитогорском государственном

техническом университете им. Г.И. Носова [4] и других научных центрах в России и за рубежом.

В настоящий момент большая часть теоретических исследований ведётся с помощью вычислительных методов. В то же время, даже с учетом использования современных суперкомпьютеров, задачи о генерации электровихревых течений могут требовать достаточно больших ресурсов. По этой причине до сих пор удобно использовать модели промежуточного характера, которые бы сочетали высокую точность и возможность как аналитического решения, так и численного моделирования с использованием ограниченных вычислительных мощностей.

Ситуация заметно упрощается в тех случаях, когда задача обладает осевой симметрией. Это позволяет решать её, пользуясь переменными «скалярная функция тока — завихренность». В таком случае удается избежать необходимости решения задачи для давления, а для медленных течений нередко можно получить точное решение путём интегрирования. Между тем, в том случае, если решение невозможно найти аналитически, возникает необходимость найти решение редуцированной задачи для скалярной функции тока численно.

Если мы ставим граничные условия, следующие из физической постановки задачи, то мы при-

¹Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхпроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова.

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН

© Михайлов Евгений Александрович,

ea.mikhajlov@physics.msu.ru

© Таранюк Антон Александрович, taranyuk.anton@gmail.com

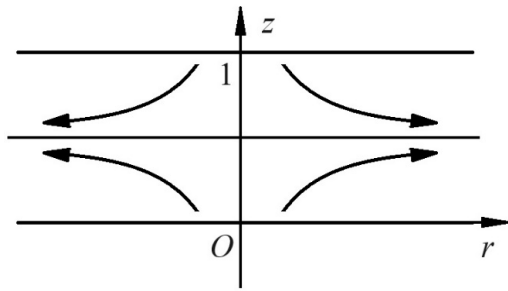


Рис. 1. Схема распространения электрического тока в среде

ходим к необходимости решения эволюционных уравнений четвертого порядка. Подобные задачи являются исключительно трудоемкими с вычислительной точки зрения. По этой причине достаточно часто используют приближенные граничные условия, дающие возможность решать вместо исходной задачи пару уравнений второго порядка, для которых численные методы оказываются несоизмеримо проще. Между тем, встает резонный вопрос об обоснованности подобных приближений и соответствии полученного решения в реальности.

Рассмотрим пример ЭВТ между двумя протяженными плоскостями, находящимися на малом расстоянии друг от друга (Рис. 1), которые являются электродами одноименной полярности (противоположный электрод находится на большом расстоянии). В таком случае можно представить скалярную функцию тока в автомоделном виде [5]:

$$\psi(r, z) = r^2 \cdot F(z)$$

Тогда в безразмерном виде (длины измеряются в расстояниях между электродами) для установившегося течения уравнение для функции $F(z)$ выглядит следующим образом:

$$F \frac{d^3 F}{dz^3} = \frac{d^4 F}{dz^4} + S \left(z - \frac{1}{2} \right),$$

где S — так называемый параметр электровихревого течения.

Граничные условия, следующие из физических свойств задач, будут представимы в следующем виде:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = 0$$

$$\frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{dF}{dz} \Big|_{z=1} = 0$$

Вместо этого для упрощения расчетов часто используют более простую систему уравнений вто-

рого порядка. В таком случае вводят функцию, имеющую смысл завихренности $W = -F''$. Тогда система уравнений может быть представлена в форме:

$$F \frac{dW}{dz} = \frac{d^2 W}{dz^2} + S \left(\frac{1}{2} - z \right);$$

$$W = -\frac{d^2 F}{dz^2}$$

В качестве граничных условий используют приближенные условия Тома [6]:

$$F|_{z=0} = F|_{z=1} = 0;$$

$$W|_{z=0} = -\frac{1}{\Delta z^2} F|_{z=\Delta z};$$

$$W|_{z=1} = -\frac{1}{\Delta z^2} F|_{z=1-\Delta z};$$

где Δz — шаг сетки.

Мы сравнили результаты расчетов для точной постановки задачи и для приближенных граничных условий. На Рис. 2 показан результат вычислений, которые сделаны с точными и приближенными граничными условиями. Можно видеть, что разница составляет около одной сотой. Между тем, данной точности может быть достаточно, и существенно меньшая вычислительная трудоемкость решения (для точных граничных условий потребовалось использование суперкомпьютера, в то время как приближенные допускают решение на ПК) компенсирует имеющую место погрешность.

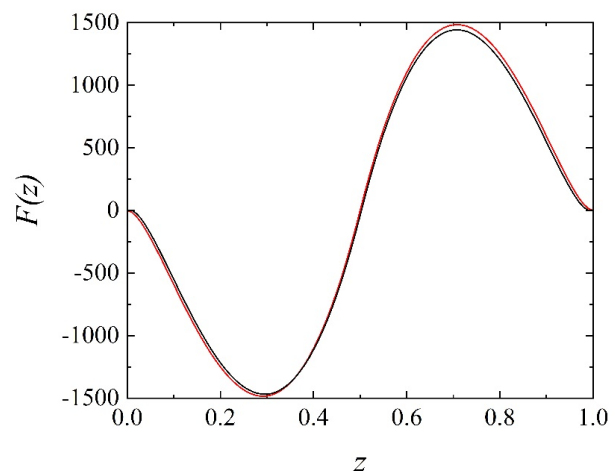


Рис. 2. Решение для точных и приближенных граничных условий для $S = 10^9$. Черная линия — график зависимости функции от координаты для при решении уравнения четвертого порядка. Красная линия — с использованием условий Тома

Список литературы

- [1] Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
- [2] Хрипченко С.Ю. Электровихревые течения в тонких слоях проводящей жидкости // Магнитная гидродинамика, 1991. №1. С.126–129.
- [3] Жилин В.Г., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. К вопросу о закрутке осесимметричных электровихревых течений // Теплофизика высоких температур, 2011. Т. 47, №6. С. 957.
- [4] Ячиков И.М., Портнова И.В., Ларина Т.П. Исследование на физической модели поведения токонесящей жидкости в ванне ДППТ под действием внешнего вертикального магнитного поля // Известия ВУЗов. Черная металлургия, 2018. №1. С. 28.
- [5] Михайлов Е.А., Степанова А.П., Таранюк А.А. Электровихревые течения между двумя плоскостями при больших токах // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2022. №1. С. 32–42.
- [6] Weinan E., Liu J.G. Vorticity Boundary Condition and Related Issues for Finite Difference Schemes // Journal of Computational Physics, 1996. V.124. P.368–382.



Поверхностные волны в круговом цилиндре с возвышением на дне¹

Нестеров С.В., Калиниченко В.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

В приближении теории длинных волн в [1] рассмотрена задача о стоячих волнах (сейшах) в круговом цилиндре при убывании глубины жидкости от оси сосуда к стенкам по параболическому закону. В настоящей работе рассмотрено влияние возвышения на дне кругового цилиндра на собственные частоты низших волновых мод на свободной поверхности жидкости. Все количественные оценки получены методом ускоренной сходимости в приближении мелкой воды. Проводится сравнение результатов теоретической модели и лабораторного эксперимента. Отметим, что метод ускоренной сходимости [2] был успешно апробирован авторами в работах [3–5] для сейш в прямоугольных сосудах с переменной глубиной и шириной.

В случае жесткого кругового цилиндра радиуса R_0 с горизонтальным дном собственная частота гравитационных волн на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости глубины h равна [?, 1]

$$\omega_{nm} = \sqrt{gk_{nm} \operatorname{th}(k_{nm}h)} \quad (1)$$

где для (n, m) волновых мод величина k_{nm} определяется из уравнения $J'_n(k_{nm}R_0) = 0$. Соответствующие профили волн максимального развития для осесимметричных $(0, 1)$, $(0, 2)$ и асимметричных мод $(1, 1)$ и $(1, 2)$ приведены на Рис. 1.

Когда глубина бассейна $H = H_0 f(r/R_0)$ зависит от расстояния, измеряемого от центра бассейна, в приближении теории длинных волн смещение свободной поверхности удовлетворяет дифференциальному уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = g \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right]$$

Учитывая периодичность волн во времени, переходя к полярным координатам (r, ϕ) и вводя безразмерную переменную $z = r/R_0$, приходим к следующей задаче Штурма–Лиувилля

$$\frac{d}{dz} \left(z f(z) \frac{dU_m}{dz} \right) + \left(\lambda z - \frac{n^2}{z} f(z) \right) U_m = 0,$$

$$u = U_m(r) \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_{n,m} = \frac{\omega^2 R_0^2}{gH_0}$.

Требуется найти такие значения $\lambda_{n,m}$ (собственные числа), при которых существуют нетривиаль-

¹Работа выполнена по темам государственных заданий № 123021700050-1 и 123021700044-1.

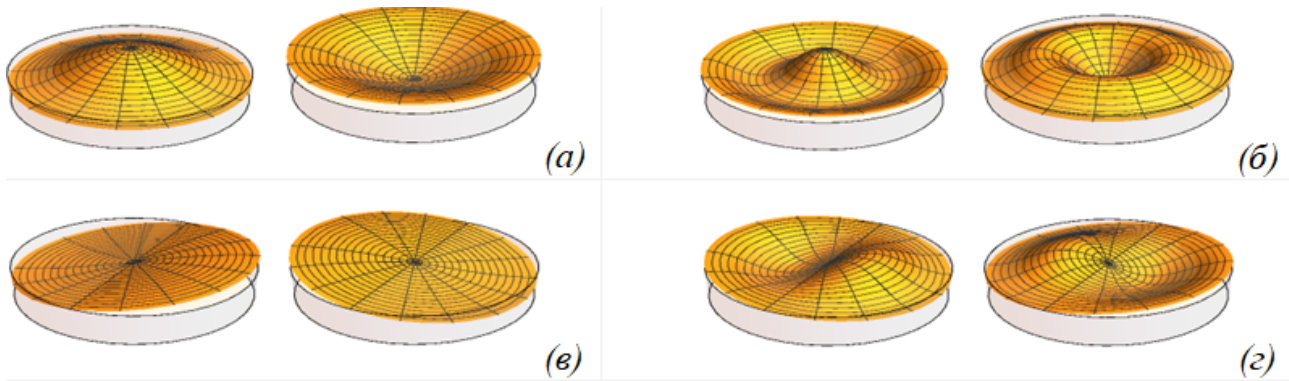


Рис. 1. Профили волн максимального развития для осесимметричных и асимметричных мод ($R_0 = 9.8$ см; $h = 4$ см): (а-г) – (0, 1), (0, 2), (1, 1) и (1, 2)

ные решения данного уравнения, удовлетворяющие краевым условиям

$$|U_m(0)| \leq M; \quad U'_m(1) = 0$$

После ввода регуляризирующего параметра a краевая задача принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[(z+a)f(z) \frac{dU_m}{dz} \right] + \left(\lambda z - \frac{n^2}{z+a} f(z) \right) U_m = 0 \\ |U_m(0)| \leq M; \quad U'_m = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Для решения (2) с целью нахождения собственных чисел применяется метод ускоренной сходимости, подробно описанный в [2]. Отметим, что с помощью этого метода при $a = 10^{-7}$ удается получить собственные числа с точностью до 10^{-6} .

Все вычисления проводятся в предположении,

что глубина бассейна задается формулами

$$f(z) = \begin{cases} 1 + bz^2 \\ 1 + bz \end{cases}.$$

Отметим, что указанные формы дна бассейна достаточно просто реализовать в экспериментальных условиях. На Рис. 2 приведены зависимости безразмерной собственной частоты низших волновых мод от параметра b .

Из Рис. 2 следует, что с увеличением параметра b , характеризующего возвышение на дне сосуда, безразмерные собственные частоты $\sqrt{\lambda_{n,m}}$ симметричных и асимметричных волновых мод монотонно растут.

Для верификации численно-аналитической модели проведена серия экспериментов. Волновые движения исследовались в режиме основного и гармонического резонансов Фарадея. При фиксированной амплитуде сосуда $s = 0.7$ см вариации Ω обеспечивали возбуждение соответствующим

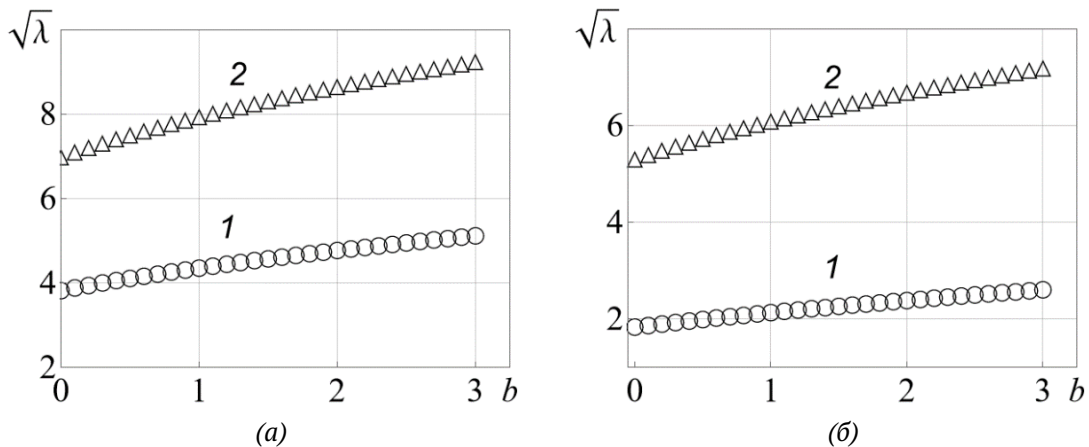


Рис. 2. Зависимости безразмерных собственных частот от параметра b : (а) – осесимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{0,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{0,2}}$ (2); (б) – асимметричные волновые моды $\sqrt{\lambda_{1,1}}$ (1) и $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ (2)

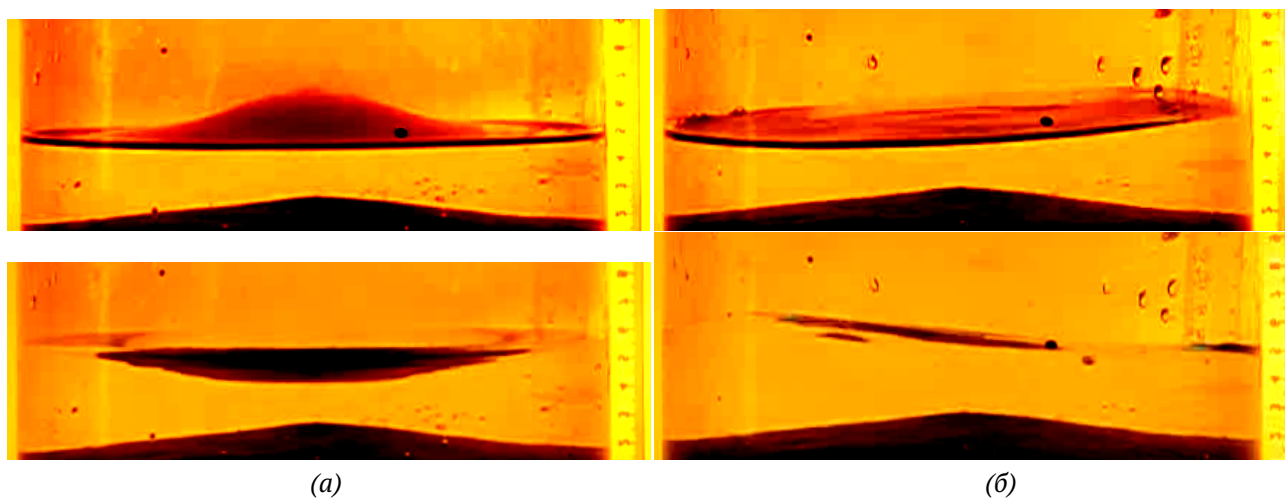


Рис. 3. Профили волн максимального развития в круговом цилиндре радиуса $R_0 = 9.8$ см с коническим возвышением на дне при максимальной глубине жидкости $h = 4$ см: (а, б) – осесимметричная (0, 1) и асимметричная (1, 1) волновые моды

щей волновой моды (n, m) . В качестве рабочей жидкости использовалась вода. Волновая картина регистрировалась цифровой камерой Canon PowerShot SX50HS (скорость видеосъемки 30 и 120 кадров в секунду). Разрешение видеоизображения составляло 0,15 мм/пиксель. Последующая обработка видеокадров производилась при использовании программы ImageJ.

В экспериментах использовались два сосуда с радиусами $R_0 = 7$ и 9.8 см при глубине воды $h = 3.7$ и 4 см соответственно. По материалам видеосъемки затухающих волн оценивалась собственная частота низших волновых мод в сосудах с горизонтальным и профилированным дном, изготовленным из технического пластилина.

Фотографии волновых мод (0, 1) и (1, 1) представлены на Рис. 3. Измерения показали, что собственные частоты этих мод существенно ниже значений, отвечающих сосуду с горизонтальным дном – уменьшение частоты порядка 15%.

Приведенная выше численно-аналитическая модель неплохо описывает экспериментальные результаты по измерению собственных частот стоячих поверхностных гравитационных волн в том случае, когда возбуждается волна с одной узловой линией, проходящей через центр сосуда – волновая мода (1, 1) – рисунки 1 в и 3 б. Отметим, что для

волновой моды (1, 1) достаточно хорошо выполняется требование теории длинных волн. В проведенных экспериментах волны с частотами $\sqrt{\lambda_{0,1}}$, $\sqrt{\lambda_{0,2}}$, $\sqrt{\lambda_{1,2}}$ и т.д. уже не удовлетворяют длинноволновому приближению ($k_{nm}h < 1$). Поэтому измеренные и рассчитанные собственные частоты волн (0, 1) совпадают гораздо хуже по сравнению со случаем моды (1, 1).

Эксперименты проводились на стенде ДСО (уникальная научная установка Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН).

Список литературы

- [1] Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [2] Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. placeCityBoca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
- [3] Акуленко Л.Д., Калиниченко В.А., Нестеров С.В. Сейши в канале с резким изменением рельефа дна // Изв. РАН. МЖГ. 2012. №3. С. 103–111.
- [4] Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Со А.Н. Стоячие поверхностные волны в прямоугольном сосуде с локальными нерегулярностями стенок и дна // Изв. РАН. МЖГ. 2017. №2. С. 65–74.
- [5] Нестеров С.В. Собственные частоты и формы сейш в канале переменной глубины // ПММ. 2022. Т. 86. № 3. С. 365–369.
- [6] Rayleigh L. On waves // Lond. Edinb. placeCityDublin Philos. Mag. J. Sci. 1876. V. 1. No. 4. P. 257–279.



Влияние параметров течения термовязкой жидкости в кольцевом канале на изменение критического числа Рейнольдса¹

Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа

В исследовании устойчивости течений жидкостей в плоских каналах накоплен достаточный задел в настоящее время, однако, при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений [1,2]. Течения жидкостей возникают в различных отраслях промышленности при эксплуатации технических устройств. В данных случаях важной проблемой является выявление особенностей течения при различных режимах. Относительно энергетической эффективности важен ламинарный режим, однако, при учете эффективности теплопереноса — турбулентный.

Рассмотрим задачу об устойчивости ламинарного течения термовязкой жидкости в кольцевом канале с заданным профилем температуры.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным по-

лем сводится к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [3–5].

Аналогично плоскому случаю рассмотрим течение несжимаемой термовязкой жидкости в кольцевом канале (Рис. 1) под действием перепада давления, с фиксированными внешним и внутренним радиусами канала и нагреваемым внутренним стержнем.

После выполнения алгебраических преобразований получим уравнение гидродинамической устойчивости термовязкой жидкости в линейном

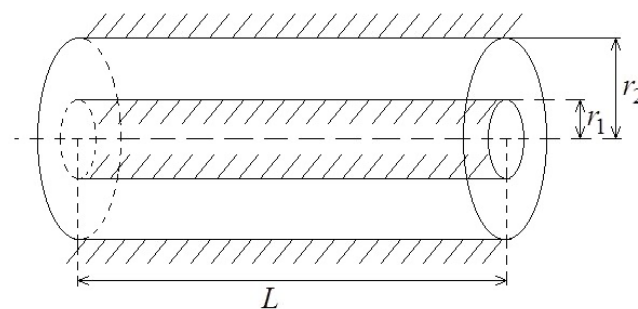


Рис. 1. Схема течения жидкости в кольцевом канале

¹Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-21-00915.

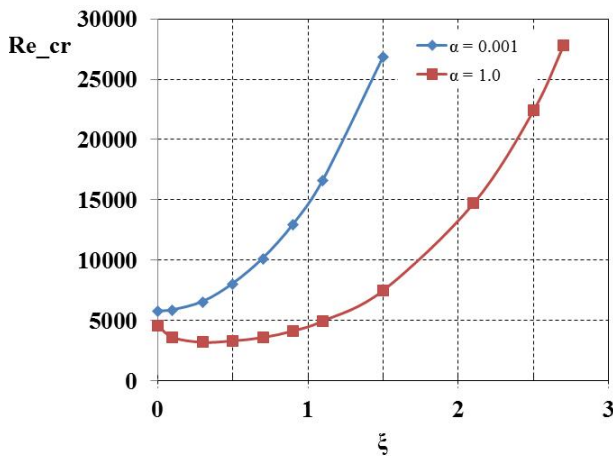


Рис. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса от ξ для $\alpha = 0,001$ и $\alpha = 1$

приближении в кольцевом канале:

$$\begin{aligned} & \mu_0 \left[\varphi^{IV} + \frac{2}{r} \varphi''' - \frac{3}{r^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi' \right) - 2k^2 \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) \right] - \\ & - ikRe \left[(u_0 - c) \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \varphi \right) \right] + \\ & + \left\{ k^4 + 2 \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{r^4} + ikRe \left[u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right] \right\} \varphi + \\ & + \mu_0' \left(2\varphi''' + \frac{3}{r} \varphi'' - \frac{3}{r^2} \varphi' + \frac{1}{r} \left(\frac{3}{r^2} - k^2 \right) \varphi \right) - \\ & - ik \left[\mu_0' \theta u_0''' + \left(2\mu_0'' \theta + 2\mu_0' \theta' + \frac{\mu_0' \theta}{r} \right) u_0'' + \right. \\ & \left. + \left(\mu_0''' \theta + 2\mu_0'' \theta' + \mu_0' \theta'' + \frac{\mu_0'' \theta}{r} + \frac{\mu_0' \theta'}{r} - \frac{\mu_0' \theta}{r^2} \right) u_0' \right] = 0 \end{aligned}$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0, \quad \varphi'(r_1) = \varphi'(r_2) = 0,$$

где r_2 и r_1 — внешний и внутренний радиусы канала, i — мнимая единица, $\mu = \exp(-\alpha T)$ — вязкость жидкости, k' — волновое число, Re — число Рейнольдса, φ — амплитуда возмущения радиальной компоненты скорости (собственная функция), u_0 — невозмущенная скорость, c — собственное значение.

Задача решалась численно с помощью спектрального метода разложения по полиномам Чебышева первого рода.

На Рис. 2 изображена зависимость критического числа Рейнольдса от параметра $\xi = r_2/r_1 - 1$ для $\alpha = 0,001$ и $\alpha = 1$. Первая точка линии, соответствующей $\alpha = 0,001$, имеет координаты (0,001; 5810). При столь малом значении параметра термовязкости α течение жидкости можно считать практически изотермическим. Кроме того, при столь же малом значении $\xi = 0,001$ можно считать канал приближённо плоским. Очевидно, полученное значение критического числа Рейнольдса $Re = 5810$ достаточно близко к значению $Re = 5772$, соответствующему классическому уравнению Орра-Зоммерфельда для плоского канала. При параметре $\alpha = 1$, течение термовязкой жидкости в неоднородном температурном поле проявляет свои особенности. В отличие от первого случая, в диапазоне $0,001 \leq \xi \leq 3,0$ кривая изменения критического значения числа Рейнольдса имеет немонотонный характер. Вначале происходит его уменьшение, а затем, с увеличением разности радиусов кривизны стенок тенденция к росту критического числа Рейнольдса, что соответствует квазиизотермическому случаю. Таким образом, при течении термовязких жидкостей в кольцевом канале наблюдается зона снижения порога перехода к турбулентному течению.

Список литературы

- [1] Drazin P.G. Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press. 2002. 278 p.
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // Journal of Fluid Mechanics. 1971. V. 50(4). P. 689–703.
- [3] Potter M.C., Graber E. Stability of plane Poiseuille flow with heat transfer // Physics of Fluids. 1972. V. 15(3). P. 387–391.
- [4] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. Some Features of Hydrodynamic Instability of a Plane Channel Flow of a Thermoviscous Fluid // Fluid Dynamics. 2019. V. 54(7). P. 978–982.
- [5] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42(9). P. 2211–2215.
- [6] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, V. 44, No. 5, p. 1778–1784. DOI: 10.1134/S1995080223050463



Квадратичный инвариант тензора скоростей деформаций контролирует нераскрытие шасси самолета

Овсянников В.М.

Российский университет транспорта, Москва

Введение

Открытие или неоткрытие шасси самолета при посадке контролирует величина квадратичного (второго) инварианта тензора скоростей деформаций, который исключен [1] из рассмотрения современной гидрогазодинамики. Приводится оценочный расчет нагрева конструкции в узкой щели при обтекании ее потоком воздуха с использованием квадратичного инварианта. Неравномерный нагрев внутренней поверхности щели может привести к заклиниванию механизма шасси.

Полное уравнение неразрывности со всеми тремя инвариантами для несжимаемой жидкости, выведенное Эйлером в 1752 г. [2, 3], имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0) I_2 + (t - t_0)^2 I_3 = 0$$

Здесь I_2 , I_3 — квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций. Уравнение неразрывности было переписано В.М. Овсяннико-

вым [4] в 2006 г. для сжимаемой жидкости в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + (t - t_0) \rho I_2 + (t - t_0)^2 \rho I_3 = 0$$

Произведя вывод волнового уравнения методом Лайтхилла акустической аналогии, получим волновое уравнение второго порядка по времени

$$\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2 + \partial^2 p / \partial z^2 - c_0^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \rho_0 I_2 + (\Delta t) \rho_0 2 I_3$$

Здесь c_0 — скорость звука, p — звуковое давление. Штрих в обозначении звукового давления опущен для упрощения обозначений. Чтобы провести оценки интенсивности генерации периодических колебаний, отбросим член с якобианом третьего порядка, чтобы получить стандартную форму неоднородного волнового уравнения второго порядка

$$c_0^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 - (\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2 + \partial^2 p / \partial z^2) = -\rho_0 I_2$$

$$I_2 = \partial(u, v) / \partial(x, y) + \partial(v, w) / \partial(y, z) + \partial(w, u) / \partial(z, x),$$

имеющего для давления решение типа запаздывающих потенциалов

$$p(\mathbf{r}, t) = [\rho_0 / (4\pi)] \int I_2 \Big|_{t-R/c} \mathbf{R}^{-1} dW$$

где $\mathbf{R} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r}_1 — радиус-вектор бегущей точки в области интегрирования. Проинтегрированное выражение берется в запаздывающий момент времени $t - R/c$. Цель статьи — показать, что квадратичный (второй) инвариант I_2 поля скорости описывает интенсивность нагрева воздуха в щели. Полная интенсивность генерации периодических колебаний может быть оценена по формуле

$$I[\text{Вт}/\text{м}^2] = p^2 / (c_0 \rho_0) = \rho_0 I_2^2 W^2 / (16\pi^2 c_0 r^2) \quad (1)$$

Здесь W — объем, в котором поле скорости имеет постоянное значение инварианта I_2 , ρ_0 — термодинамическая плотность воздуха, c_0 — скорость звука, r — расстояние, с которого фиксируется интенсивность звуковых колебаний. Величины в правой части формулы берутся в единицах системы СИ.

Сложилась ситуация, при которой полет самолета описывается хорошо изученным первым, линейным инвариантом I_1 , а открытие шасси для посадки самолета описывается вторым — квадратичным I_2 , не изученным в нужной мере инвариантом.

Эксперимент по нагреву воздуха в щелях при обтекании внешним потоком

В журнале МЖГ [5] описан эксперимент Елисева Ю.Б. и Черкез А.Я., поставленный в аэродинамической трубе с потоком воздуха с температурой торможения 20 °С, в котором произошло обугливание древесины внутри полости в деревянной модели, в которую затекал воздух. В теоретической части этой статьи нагрев правильно связывался с генерацией в щели волн давления, энергия которых переходит в тепло. Образец представлял собой деревянную дощечку, в которой была просверлена полость диаметром 1,6 см длиной 25 см. В результате обдува потоком воздуха с температурой торможения, не превышающей комнатную, наблюдался эффект обугливания дна полости и боковых поверхностей на расстоянии 1,6 см от дна, возникающего при сравнительно небольшом времени испытания порядка 10 минут. Температура возгорания дерева составляет около 300 °С. Можно согласиться с точкой зрения авторов статьи [5], что внутри полости воздух разогревается до таких высоких температур за счет перехода энергии волновых колебаний в тепловую энергию.

Расчетная оценка нагрева воздуха в щели

Были проведены расчеты полей скорости жидкости, втекающей и вытекающей из плоских уз-

ких углов различной степени раскрытия, полученные методом ТФКП. Общеизвестен расчет течения внутри прямого угла с $\alpha = 90^\circ$. Он получается с использованием комплексного потенциала вида $w = z^2$. Аналогично вычислен инвариант I_2 и совпадающий с ним якобиан для плоского угла между двумя плоскостями для угла $\alpha = 36^\circ$ с использованием комплексного потенциала $w = z^5$. Формула для якобиана получила такое выражение

$$J = -400 \frac{r^6 U^2}{a^8} \quad \text{для } \alpha = 36^\circ$$

Здесь U — скорость набегающего потока на расстоянии $a = 1$ от вершины угла вдоль оси x , расположенной вдоль одной из плоскостей плоского угла, r — текущее расстояние от вершины плоского угла.

Рассмотрим течение в полости, похожей на полость, исследованную в опыте работы [5]. Заменим ее полостью в форме пирамиды с углом между противоположными гранями $\alpha = 36^\circ$. В качестве значения якобиана поля скорости возвратного течения, образующегося внутри пирамиды, возьмем приведенное выше значение якобиана для двумерного течения между плоскостями, составляющими друг с другом 36° . Для расчета интенсивности звуковых колебаний, возникающих в потоке, используем формулу (1). Высота пирамиды равна a . Скорость втекания в нее набегающего потока воздуха равна U . Величину якобиана поля скорости будем оценивать по формуле

$$J = -400 \frac{r^6 U^2}{a^8}$$

Для оценочного расчета положим в дальнейшем $r = a$. Это означает некоторое завышение средней величины инварианта I_2 . Расчет объема пирамиды высотой a и углом раскрытия α дает такой результат для $\alpha = 36^\circ$

$$W = \frac{a}{3} \left(2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = a^3 \frac{4}{3} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = 0,142a^3$$

Площадь поверхности конуса для $\alpha = 36^\circ$

$$S = \left(2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 + 2a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left[a^2 + a^2 \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]^{0,5} \approx 1,108a^2$$

Мощность волновой энергии, выделяющаяся в полости при $\alpha = 36^\circ$, равна

$$N[\text{Вт}] = S[\text{м}^2] I \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] = S \frac{\rho_0 400^2 r^{12} U^4 W^2}{a^{16} 16\pi^2 c_0 r^2}$$

Вычислим выделяющуюся мощность для полости высотой $a = 0,1$ м при плотности воздуха

$\rho_0 = 1,25 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и скорости звука $c_0 = 300 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$$N[\text{Вт}] = \frac{1,108a^2 1,25(400^2)U^4 r^{12} a^6 0,142^2}{a^{16} 16 \cdot 9,9 \cdot 300r^2} \approx \frac{a^2 U^4}{10}$$

По этой формуле мощность выделяющейся в полости волновой энергии, превращающейся в тепловую, получится в Вт, если высоту пирамиды или глубину полости и скорость подставить в единицах системы СИ: м и м/с. Для скорости в аэродинамической трубе 20 м/с и глубине полости 0,1 м выделяющаяся тепловая мощность будет составлять 160 Вт. Это мощность сильной бытовой лампы накаливания. Если выделяющееся от нее тепло сосредоточить в тесной щели с деревянными стенками, то за 10–15 минут возможно обугливание и возгорание древесины.

Модель заклинивания шасси самолета перед посадкой

Выполненный Ю.Б.Елисеевым и А.Я.Черкез эксперимент в аэродинамической трубе [5] и приведенный выше оценочный расчет, использующий формулу интенсивности волнообразования, основанной на учете второго, квадратичного инварианта, показывает опасность наличия открывающихся створок на обшивке летательного аппарата со щелями, обдуваемыми воздухом. Повышение темпе-

ратуры за счет затекания в щели воздуха и местного расширения деталей конструкции может приводить к отказам механизмов или требованию повышенных усилий для срабатывания. Зазоры петель очень малы. И даже небольшое повышение температуры при различных коэффициентах температурного расширения соприкасающихся деталей может затруднить подвижность. Произойдет заклинивание или не произойдет — зависит от предшествующего режима обдува щели воздухом. Учет квадратичного инварианта может уберечь от аварии.

Список литературы

- [1] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1, М.: Наука. 1973. С. 536.
- [2] Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756-1757). P. 271-311 - Opera omnia, ser. II. V. 13. P. 1-369.
- [3] Эйлер Л. Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН / Пер. с латинского Е.В.Ивановой и В.М.Овсянникова.- 4-е изд., доп. М.: Спутник +. 2020. С. 203.
- [4] Овсянников В.М. Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости по времени течения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. Мат. и ее прил. Темат. обз., 2020. Т. 182. С. 95–100.
- [5] Елисеев Ю.Б., Черкез А.Я. Об эффекте повышения температуры торможения при обтекании газом глубоких полостей // МЖГ, 1971, № 3. С. 8–18.



Волновые движения и структура течения в вязких сжимаемых средах¹

Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Волновые движения и структура течения в вязких сжимаемых средах. Периодические движения жидкости очень разнообразны и многогранны. Эксперименты с высокой разрешающей способностью демонстрируют существование тонкой структуры на всех этапах периодических движений, возникающих в импакте капли [1]. Теоретические исследования показывают существование тонкой структуры в поверхностных течениях несжимаемых [2], [3] вязких сред. Настоящая работа посвящена исследованию периодических движений, возникающих в вязких слабосжимаемых средах.

Математическая формулировка задачи

Рассматривается двухслойная система вязких слабосжимаемых жидкостей в поле сил тяжести \mathbf{g} , верхняя из которых имеет меньшее значение равновесной плотности чем нижняя $\rho_{00}^a < \rho_{00}^o$. Здесь и

далее верхним индексом « o » обозначены величины, относящиеся к нижней жидкости, а индексом « a » - к верхней. Рассмотрение проводится в декартовой системе координат Oxz , в которой ось Oz направлена вертикально вверх, а ось Ox направлена вдоль поверхности раздела. Движение считается независимым от горизонтальной координаты y . Математическая формулировка задачи, определяющая поле скоростей $\mathbf{u}^{o,a}$, давление $P^{o,a}$, плотность $\rho^{o,a}$ записывается следующим образом:

$$z < \zeta : \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}^o - \nu^o \Delta \mathbf{u}^o + \frac{1}{\rho_{00}^o} \nabla P^o - \rho^o \mathbf{g} &= 0, \\ \partial_t \rho^o + \mathbf{u}^o \cdot \nabla \rho^o + \rho^o \operatorname{div} \mathbf{u}^o &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\rho^o = \rho_0^o(z) (1 - \alpha_P^o (P^o - P_0^o)), \quad \alpha_P^o = \frac{1}{\rho^o} \left(\frac{\partial \rho^o}{\partial P^o} \right)_S \quad (2)$$

$$z > \zeta : \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}^a - \nu^a \Delta \mathbf{u}^a + \frac{1}{\rho_{00}^a} \nabla P^a - \rho^a \mathbf{g} &= 0, \\ \partial_t \rho^a + \mathbf{u}^a \cdot \nabla \rho^a + \rho^a \operatorname{div} \mathbf{u}^a &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho^a = \rho_0^a(z) (1 - \alpha_P^a (P^a - P_0^a)), \quad \alpha_P^a = \frac{1}{\rho^a} \left(\frac{\partial \rho^a}{\partial P^a} \right)_S \quad (4)$$

Здесь $\nu^{o,a}$ — кинематическая вязкость, а уравнения состояния (2), (4) записаны в предположении малых девиаций давления и плотности независимой от колебаний температуры и концентрации

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-19-00598-П, «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>)

растворенных в жидкости солей. Обе среды предполагаются равномерно стратифицированными: $\rho_0^{o,a} = \rho_{00}^{o,a} \exp(-z/\Lambda^{o,a})$ с масштабами стратификации $\Lambda^{o,a}$. Основные уравнения гидродинамики (1) – (4) дополняются граничными условиями на границе раздела сред:

$$z = \xi : \quad \begin{aligned} \partial_t \xi + u^o \partial_x \xi &= w^o, \quad \partial_t \xi + u^a \partial_x \xi = w^a, \\ \mathbf{u}^o \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{u}^a \cdot \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P^o - 2\rho^o v^o \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}^o) &= \\ P^a - 2\rho^a v^a \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}^a) - \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho^o v^o (\boldsymbol{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}^o) + \mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}^o)) &= \\ \rho^a v^a (\boldsymbol{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}^a) + \mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}^a)) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \xi)}{|\nabla(z - \xi)|} = \left(\frac{-\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \right),$$

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}}, \frac{\partial_x \xi}{\sqrt{1 + (\partial_x \xi)^2}} \right)$$

Задача (1)–(7) решается методом разложения по малому параметру для малых колебаний. Линеаризованная задача позволяет получить дисперсионные соотношения, связывающие частоту периодических возмущений с волновым числом и другими параметрами задачи.

Решение задачи

Решение линеаризованной задачи (1) – (7) находится в виде периодических функций вида

$$\begin{pmatrix} u^{o,a} \\ w^{o,a} \\ \tilde{p}^{o,a} \\ \tilde{\rho}^{o,a} \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_m^{o,a} (\exp(ik_z^{o,a} z) + \Theta \exp(ik_l^{o,a} z)) \\ W_m^{o,a} (\exp(ik_z^{o,a} z) + \Theta \exp(ik_l^{o,a} z)) \\ P_m^{o,a} (\exp(ik_z^{o,a} z) + \Theta \exp(ik_l^{o,a} z)) \\ P_m^{o,a} (\exp(ik_z^{o,a} z) + \Theta \exp(ik_l^{o,a} z)) \\ A_m \end{pmatrix} \times \exp(ik_x x - i\omega t) \quad (8)$$

В решении (8) отражено, что периодическое движение состоит из волновых и лигаментных компонентов. Волновые компоненты $k_z^{o,a}$ определяются регулярными решениями дисперсионного соотношения, а лигаментные компоненты $k_l^{o,a}$ определяются сингулярными решениями дисперсионных

соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c^{o,a2} \Lambda^{o,a2}} \left[\omega (v^{o,a} (k_x^2 + k_z^{o,a2}) - i\omega) \times \right. \\ \times (-gk_x^2 \Lambda^{o,a} + \omega(i + k_z^{o,a} \Lambda^{o,a}) \times \\ \times (v^{o,a} (k_x^2 + k_z^{o,a2}) - i\omega)) + \\ \left. + e^{\frac{z}{\Lambda^{o,a}}} k_z^{o,a} \left((g + ic^{o,a2} k_z^{o,a2}) \times \right. \right. \\ \times (-gk_x^2 \Lambda^{o,a} + \omega(i + k_z^{o,a} \Lambda^{o,a}) \times \\ \left. \left. (v^{o,a} (k_x^2 + k_z^{o,a2}) - i\omega)) + \right. \right. \\ \left. \left. + c^{o,a2} k_x^2 \Lambda^{o,a} (N^{o,a2} (ik_z^{o,a} \Lambda^{o,a} - 1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega(iv(k_x^2 + k_z^{o,a2}) + \omega)) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка выражений (8) в линеаризованные граничные условия приводит к дисперсионным соотношениям, связывающим компонент волнового вектора k_x с частотой периодических возмущений. Выражение довольно громоздко и с учетом решений выражения (9) можно получить численные решения, определяющие дисперсионные характеристики полных решений в двухслойной системе вязких слабосжимаемых жидкостей.

Дополнительно были проанализированы дисперсионные соотношения периодических течений, возникающих в толще вязкой слабосжимаемой жидкости в трехмерной модели:

$$\begin{aligned} D_v(k) (\omega^2 D_v^2(k) - \omega N^2 D_v(k) + \\ + c^2 k_{\perp}^2 N_c^2 - c^2 \omega k^2 D_v(k)) = 0, \\ D_v(k) = \omega + ivk^2, k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \\ k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2, N^2 = \frac{g}{\Lambda}, \\ N_c^2 = N^2 - \frac{g^2}{c^2} \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) имеет решения:

$$k_z = \pm \sqrt{-k_{\perp}^2 + \frac{i\omega}{v}} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} k_{*z} = \pm \left(\frac{-(ivN^2 + 2v\omega(vk_{\perp}^2 - i\omega) + c^2(2ivk_{\perp}^2 + \omega))}{2v(ic^2 + v\omega)} - \right. \\ \left. \sqrt{\frac{-v^2 N^4 + 2vc^2(2vk_{\perp}^2 N_c^2 - i\omega N^2) + c^4 \left(\omega^2 + \frac{4ivN_c^2 k_{\perp}^2}{\omega} \right)}{2v(ic^2 + v\omega)}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$k_{*z} = \pm \left(\frac{-(ivN^2 + 2v\omega)(vk_{\perp}^2 - i\omega) + c^2(2ivk_{\perp}^2 + \omega)}{2v(ic^2 + v\omega)} + \sqrt{\frac{-v^2N^4 + 2vc^2(2vk_{\perp}^2 N_c^2 - i\omega N^2) + c^4 \left(\omega^2 + \frac{4ivN_c^2 k_{\perp}^2}{\omega} \right)}{2v(ic^2 + v\omega)}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Решение (13) описывает регулярный волновой компонент, а решения (11) – (12) описывают сингулярные лигаментные компоненты течения. Анализ показывает, что в модели двумерной жидкости решение (11) вырождается.

Заключение

Проанализированы дисперсионные соотношения, определяющие все компоненты периодического движения вязкой сжимаемой жидкости. Показано, что лигаменты, характеризующие тонкие компоненты течения сопровождают волновое движение во всех частотных диапазонах — от инфра-

низкочастотных гравитационных до высокочастотных звуковых волн. Предложена модель, позволяющая производить расчеты дисперсионных характеристик движения в системе вязкий слабосжимаемый океан — вязкая слабосжимаемая атмосфера. В трехмерной модели возникает дополнительный лигамент, который вырождается в модели двумерной жидкости. Таким образом, для полноты описания особенностей движения стоит использовать трехмерную модель.

Список литературы

- [1] Chashechkin Y. D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // *Axioms*. 2023. V. 12, № 4. P. 374.
- [2] Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11, № 8. P. 402
- [3] Очилов А. А., Чашечкин Ю. Д. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией // *Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом* // *Прикладная математика и механика*. 2023. Т. 87, № 3. С. 379–391



О лучевой теории волновых аттракторов в стратифицированной жидкости¹

Петров А.Г.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Несжимаемая жидкость находится в устойчивом статическом равновесии с плотностью, линейно растущей в направлении силы тяжести. Регулярные возмущения этого статического равновесия с некоторой частотой ω приводят к внутренним гравитационным волнам, энергия которых распространяется по прямым линиям — лучам, образующим фиксированный угол с вертикалью $\theta = \arccos(\omega/N)$, где N — частота Брента-Вяйсяля. При отражении от стенки направление луча меняется так, что его угол с вертикалью θ меняет знак, а абсолютная величина угла θ сохраняется. Таким образом, для простейшего исследования внутренних волн можно использовать лучевую модель. Существуют лабораторные и численные эксперименты, в которых волновой луч отражается от стенок бассейна, имеющего форму трапеции [1, 2]. В таком бассейне луч, последовательно отражаясь от стенок, принимает предельную устойчивую форму параллелограмма — волновой аттрактор [1–5]. Данное исследование посвящено аналитическому выводу координат вершин аттрактора при задан-

ных сторонах трапеции и угла θ , условиям сходимости, а также вывода необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять длины сторон трапеции, в которой образуются волновые аттракторы с одним отражением от каждой стороны.

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим бассейн в форме трапеции $ABCD$. Сторона AD направлена по вертикали, стороны AB и DC по горизонтали, их длины $AD = a$, $AB = b_1$, $DC = b$, $b_1 < b$. В декартовых осях X, Y вершины трапеции задаются координатами $A(0, a)$, $B(b_1, a)$, $C(b_2, 0)$, $D(0, 0)$ (Рис. 1, а).

Исследование аттракторов удобно провести на (d, τ) плоскости, введенной в [1] (см. Рис. 1, б). Равенство углов луча относительно вертикали сохраняется при растяжении плоскости относительно горизонтальной оси или относительно вертикальной оси. Поэтому преобразование $\bar{x} = 2x/b_2 - 1$, $\bar{y} = y\tau/a$, переводящее вершины трапеции $A(0, a)$, $B(b_1, a)$, $C(b_2, 0)$, $D(0, 0)$ на плоскости x, y в вершины трапеции $\bar{A}(-1, \tau)$, $\bar{B}(1, \tau)$, $\bar{C}(d, 0)$, $\bar{D}(-1, 0)$ на плоскости \bar{x}, \bar{y} . Координаты вершин аттрактора $M_0(x, a)$, $M_1(0, y)$, $M_2(z, 0)$, $M_3(b, u)$ в исходной трапеции $ABCD$ преобразуются в вершины $M_0(\bar{x}, \tau)$, $M_1(-1, \bar{y})$, $M_2(\bar{z}, 0)$, $M_3(\bar{b}, \bar{u})$ на преобразованной трапеции $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. Формулам координат аттрак-

¹Работа выполнена в рамках госзадания (AAAA-A20-120011690138-6).

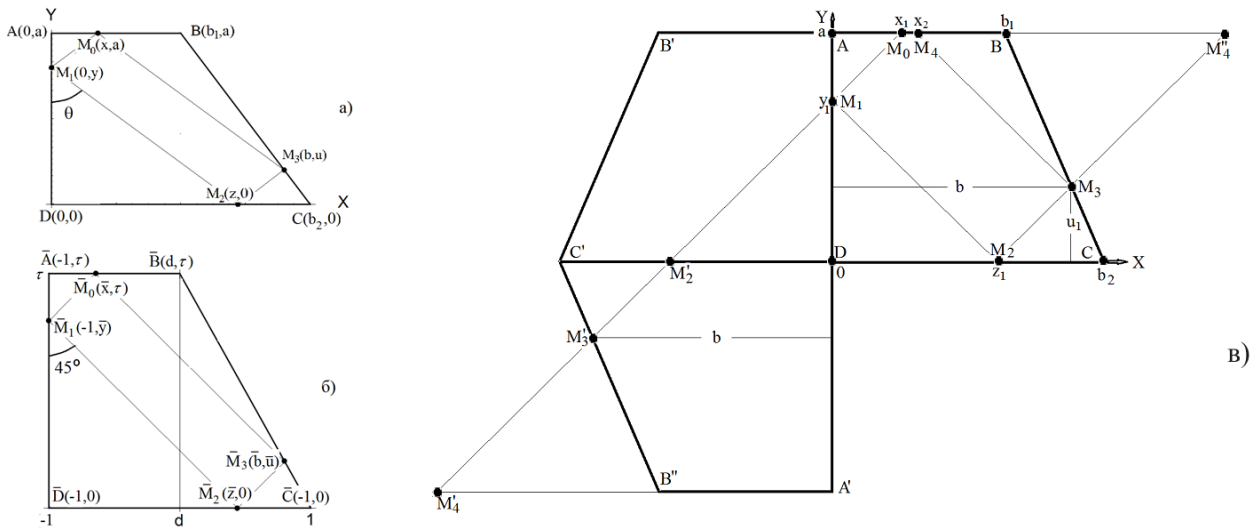


Рис. 1. К схеме лучевой теории волновых аттракторов

тора соответствуют координаты преобразованного аттрактора

$$\bar{x} = \frac{(-2 + \tau)\tau}{-1 + d} - 1, \quad \bar{y} = \frac{(1 + d - \tau)\tau}{-1 + d},$$

$$\bar{z} = \frac{(1 + d - \tau)\tau}{-1 + d} - 1, \quad \bar{u} = \frac{(-2 + \tau)\tau}{-1 + d}, \quad \bar{b} = \tau.$$

При этом преобразовании угол θ переходит в угол 45° , а параметры d и τ выражаются через стороны исходной трапеции и угол θ следующим образом: $d = 2b_1/b_2 - 1$, $\tau = 2a \operatorname{tg} \theta / b_2$. Поскольку $0 < b_1 < b_2$, то параметр d меняется на интервале $d \in (-1, 1)$.

Предлагается метод отражений [7]. Траектория луча с вершинами M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 , лежащих на сторонах трапеции (Рис. 1, в), состоит из четырех отрезков. Каждый отрезок траектории наклонен к вертикали под одним и тем же углом θ . Поэтому лучу соответствует прямая линия $M_0, M_1, M_2', M_3', M_4'$ на отраженных трапециях. Координаты начальной точки луча заданы $M_0(x_1, a)$. Решаются следующие задачи.

1) Определить координаты точек траектории луча M_1, M_2, M_3, M_4 .

2) Определить координаты аттрактора: траектории луча у которого начальная точка M_0 совпадает с конечной M_4 (Рис. 1, а).

3) Исследовать устойчивость аттрактора, то есть найти такие длины сторон трапеции $ABCD$, при которых при небольшом отклонении начальной точки от точки M_0 аттрактора, после каждого последующих отражениях от стенок трапеции луч приближался к предельной траектории аттрактора.

Методом отражений доказываются следующие теоремы [6].

Теорема 1. Координаты вершин аттрактора $M_0(x, a), M_1(0, y), M_2(z, 0), M_3(b, u)$ в трапециевидном бассейне со сторонами $a, b_1, b_2, b_1 < b_2$ определяются формулами

$$x = \frac{a \operatorname{tg} \theta (b_2 - a \operatorname{tg} \theta)}{b_2 - b_1}, \quad y = a \frac{b_1 - a \operatorname{tg} \theta}{b_1 - b_2},$$

$$z = a \operatorname{tg} \theta \frac{b_1 - a \operatorname{tg} \theta}{b_1 - b_2}, \quad u = a \frac{-b_2 - a \operatorname{tg} \theta}{b_1 - b_2},$$

$$b = a \operatorname{tg} \theta.$$

Теорема 2. Для того чтобы существовал аттрактор в трапеции $ABCD$, изображенной на Рис. 1, а), луч которого отражается от каждой стороны трапеции по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение

$$1 + |d| < \tau < 2, \quad d = 2b_1/b_2 - 1, \quad \tau = 2a(\operatorname{tg} \theta) / b_2.$$

Более общий результат для областей существования аттракторов $(1, n)$, луч которых отражается от горизонтальных сторон трапеции по n раз, тем же методом получен в [7][7]

$$\tau > \frac{d+1}{n}, \quad \tau < \frac{2}{n}, \quad \tau > 1-d.$$

Результат проверен методом трассировки лучей (Рис. 2)

Теорема 3. При последовательном отражении луча от стенок бассейна на верхней стороне образуется последовательность точек $M_0(x_1, a), M_4(x_2, a), M_8(x_3, a), \dots$, где x_n — геометрическая прогрессия:

$$x_n = x + (x_1 - x)q^{n-1}, \quad q = \frac{\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_2 - b_1}{a}.$$

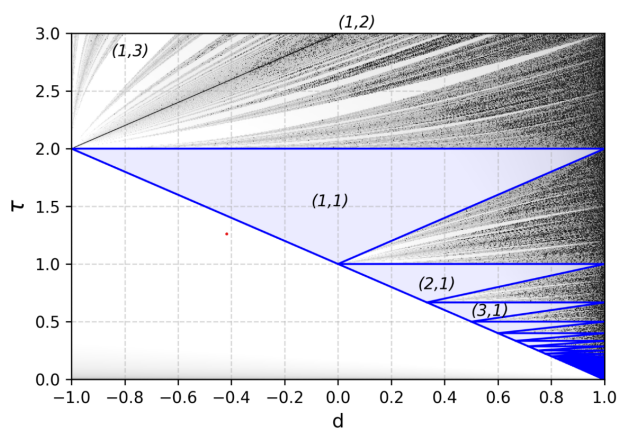


Рис. 2. Области существования волновых аттракторов, полученные методом трассировки лучей

Список литературы

- [1] *Maas L.R.M., Lam F.P.A.* Geometric focusing of internal waves // *J. Fl. M.* 1995, V. 300, p. 1–41.
- [2] *Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.P.A.* Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // *Nature* 1997, V. 388, p. 557–561.
- [3] *Brouzet C., Sibgatullin, I., Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T.* Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations // *J.Fl.M.* 2016, V. 3, p. 109–131.
- [4] *Brouzet C., Ermanyuk E., Joubaud S., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // *EPL Europhys. Lett.* 2016, V. 113.
- [5] *Boury S., Sibgatullin I., Ermanyuk E., Shmakova, N., Odier P., Joubaud S., Maas L.R., Dauxois T.* Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor // *J. Fluid Mech.* 2021, V. 926, p. A12.
- [6] *Петров А.Г.* Координаты волнового аттрактора в трапециевидном водном бассейне со стратификацией // *Доклады РАН. Физика Технические науки.* 2022. Т. 503. С. 18–23.
- [7] *Sibgatullin I., Petrov A.G., Xu X., Maas L.* On Wave Attractors: Coordinates and Saturation Time // *Symmetry* 2022, V. 14, p. 319. <https://doi.org/10.3390/sym14020319>



Собственные формы и собственные частоты резонатора гельмгольца периодического сечения¹

Пью Ко Ко, Байдулов В.Г.

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

В рамках длинноволнового приближения исследованы частоты и формы собственных колебаний газа в резонаторе Гельмгольца имеющего форму трубы периодического сечения. Задачи сводится к задаче Штурма–Лиувилля с краевыми условиями первого рода, решение которой проводится методом ускоренной сходимости. Проведен детальный анализ зависимостей собственных чисел и собственных функций от параметров трубы. Выявлен «автомодельный» тип зависимости собственной частоты для различных мод. Определены значения параметров периодичности трубы, при которых происходит резкое изменение собственной частоты.

При относительно небольших значениях параметра волнового числа трубы результаты работы согласуются с ранее выполненными исследованиями ККР1, ККР2, в рамках которых изучались собственные частоты и формы резонатора с единичным дефектом. Наличие дефекта большой амплитуды, когда размеры отверстия становятся малыми, приводит к локализации колебаний в одной из двух частей резонатора в зависимости от номера моды. Спектр колебаний, при этом, можно разделить на две части соответствующие спектрам двух взятых по отдельности частей резонатора. При этом в напряжения вызванные звуком в корпусе резонатора оказываются сосредоточены практически исключительно к месту расположения дефекта, где производные звукового потенциала, а соответственно

и скорость потока, будут стремиться к бесконечности при стремлении радиуса отверстия к нулю.

Рассмотренная в данной работе периодическая система дефектов приводит к тому, что при больших значениях волнового числа трубы звуковые колебания распространяются по всей ее длине даже в случаях, когда величина дефекта становится критически большой. Максимум их интенсивности будет сосредоточен в окрестности минимумов радиуса сечения трубы. Таким образом, в случае резонатора переменного сечения можно возникновение значительных звуковых нагрузок на корпус даже на больших расстояниях от узкого входного отверстия.

Список литературы

- [1] Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г. Собственные колебания акустического резонатора с локальной перегородкой // Докл. РАН. 2016. Т. 470, № 3. С. 279–282. Рр. 467–470. DOI: 10.1134/S1028335816090093.
- [2] Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Нестеров С.В. Зависимость собственных частот и форм колебаний идеального газа от параметров акустического резонатора // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 1. С. 52–64. DOI: 10.3103/S002565441701006X.

¹Работа выполнена по теме государственного задания (№ государственной регистрации 123021700055-6).



Интегро-дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью для профиля стационарной поверхностной волны

Руденко А.И.

«Калининградский государственный технический университет» ФГБОУ ВО «КГТУ», Калининград

Предположим, что на свободной поверхности идеальной однородной несжимаемой жидкости конечной глубины h сформировалась система стационарных нелинейных волн, которые движутся с постоянной скоростью [1, 2]. Рассмотрим двумерную постановку задачи. Систему отсчета совместим с движущейся волной, тогда течение, которое обусловлено волнами, будет установившимся, а, следовательно, свободную поверхность и дно можно принять за линии тока. Введем некоторые обозначения: $u = u(x), v = v(x)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости; $\eta = \eta(x)$ и c — профиль волны и среднее значение скорости течения; $u - iv = cw'(z)$, $z = x + iy, w = \phi + i\psi$ — комплексный потенциал скорости, (ϕ, ψ) — относительный потенциал и функция тока). Тогда кинематические условия на дне и на свободной поверхности примут вид: $\psi_{y=-h} = 0$, $\psi_{y=\eta(x)} = d$, d — динамическая глубина.

Динамическое условие получим с помощью интеграла Бернулли–Коши: $2^{-1}(u^2 + v^2) + g\eta(x) = P$, $y = \eta(x)$. Необходимо отметить что $P = \text{const}$,

которая требует определения. Область течения с помощью относительного комплексного потенциала скорости конформно отображается на полосу: $\psi \in (0, d)$. Тогда требуется определить функции $\eta(\phi)$, $y = \eta(\phi, \psi)$, которые удовлетворяют следующим граничным условиям (следствия из кинематического и динамического условий на свободной поверхности):

$$y(\phi, 0) = -h, y(\phi, d) = \eta(\phi), \quad (1)$$

$$(P - 2c^2g^{-1}\eta(\phi)) (y_\phi^2(\phi, d) + y_\psi^2(\phi, d)) = 1, \quad (2)$$

а также условиям нулевого среднего:

$$\langle \eta(\phi) \rangle = 0, \quad \langle y(\phi, \psi) - \psi \rangle = 0.$$

Для этого выразим обе частные производные в динамическом граничном условии (2) через $\eta(\phi)$. Первое выражается из (1) и имеет следующий вид:

$$y_\phi(\phi, d) = \eta'(\phi). \quad (3)$$

Для нахождения $y_\psi(\phi, d)$ следует отметить, что соответствие $V : y(\phi, 0) \rightarrow y_\psi(\phi, 0)$ является линейным интегро-дифференциальным оператором типа свертки. Для достижения цели достаточно определить его действие на косинусы. Далее найдем гармоническую функцию $y = \eta(\phi, \psi)$, которая

удовлетворяет граничным условиям: $y(\phi, 0) = 0$, $y(\phi, d) = \eta(\phi) = A \operatorname{sh}(kh) \cos(k\phi)$, где A — амплитуда основной гармоники, k — волновое число. Функция $y(\phi, \psi)$ будет иметь следующий вид:

$$y(\phi, \psi) = A \operatorname{sh}(kh) \operatorname{sh}(k\psi) \cos(k\phi) \operatorname{sh}^{-1}(kd).$$

Тогда получаем, что:

$$\begin{aligned} y_\psi(\phi, 0) &= V(A \operatorname{sh}(kh) \cos(k\phi)) = \\ &= kA \operatorname{sh}(kh) \operatorname{cth}(kd) \cos(k\phi). \end{aligned}$$

Поскольку $y(\phi, \psi) = \psi^+$ периодическая функция, то из свойств оператора V следует равенство: $y_\psi(\phi, 0) = 1 + V\eta(\phi)$. Подставим последнее равенство и (3) в (2), получаем нужное уравнение для профиля волны:

$$(P - 2\eta(\phi))((1 + V\eta(\phi))^2 + (\eta'(\phi))^2) = c^2 g^{-1}. \quad (4)$$

К (4) следует присоединить уравнение, определяющее зависимость x от ϕ , которое получается из соотношения для сопряженных гармонических функций: $x(\phi, \psi)$, $y(\phi, \psi)$, где ($x_\phi(\phi, \psi) = y_\psi(\phi, \psi)$), и имеет вид:

$$x'(\phi) = 1 + V\eta(\phi). \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) представляют собой самостоятельный интерес, например, в связи с возможностью сопоставить их с стационарным уравнением КдФ.

Список литературы

- [1] Зайцев А.А., Руденко А.И. К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости // ПМТФ. Т. 47. № 3. Новосибирск. 2006. С. 43–49.
- [2] Зайцев А.А., Руденко А.И., Алексеева С.М. Первый метод Стокса в задаче о волнах на поверхности жидкости конечной глубины. // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта, раздел Физико-математические и технические науки, №1 Калининград. 2020. С. 64–75.



Растекание тонкого слоя вязкой жидкости по твердой поверхности и гидравлический прыжок в поле продольной массовой силы

Смирнов К.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

При ударе вертикальной струи жидкости о твердую поверхность формируется течение тонкой пленки, и на некотором расстоянии от струи происходит резкий скачок толщины пленки. Такое явление называется гидравлическим прыжком, при этом происходит переход от «сверхкритического» к «докритическому» режиму течения. В сверхкритическом режиме скорость течения больше скорости распространения гравитационных волн по поверхности жидкости, а в докритическом — меньше. В рамках газогидродинамической аналогии гидравлический прыжок соответствует ударной волне [1]. В классической постановке задачи имеется вертикальная струя жидкости, ударяющаяся о плоский неподвижный диск; на некотором расстоянии от струи происходит резкий переход к медленному течению пленки большей толщины [2]; радиус прыжка не может быть определен в рамках модели идеальной жидкости, поскольку он определяется балансом инерционных, гравитационных и вязких сил [3]. В данной работе рассматривается влияние дополнительных продольных сил, ускоряющих течение жидкости, и изучается влияние этих сил на

положение и структуру прыжка. Рассматривается два случая: течение по сферической «шапочке» и течение на вращающемся диске.

Постановка задачи

Пусть вертикальная круглая струя несжимаемой жидкости падает в центр симметрии поверхности (центр сферической шапочки или центр диска соответственно), при этом ось струи совпадает с осью симметрии (Рис. 1). В случае со сферой роль массовой силы играет проекция компоненты силы тяжести за счет наличия кривизны у поверхности, а в случае течения на вращающемся диске — центробежная сила. Также на вращающемся диске нужно учитывать кориолисову силу, действующую в азимутальном направлении. Течение стационарно и осесимметрично, действие капиллярных сил несущественно, кроме небольшой области самого прыжка и края диска. Область вблизи оси симметрии, где происходит перестройка течения от вертикального к радиальному, а также прорастание пограничного слоя на всю толщину пленки, не рассматривается — вязкое течение считается развитым. Край диска также не рассматривается, краевая задача ставится на отдалении от струи и на некотором расстоянии от края диска.

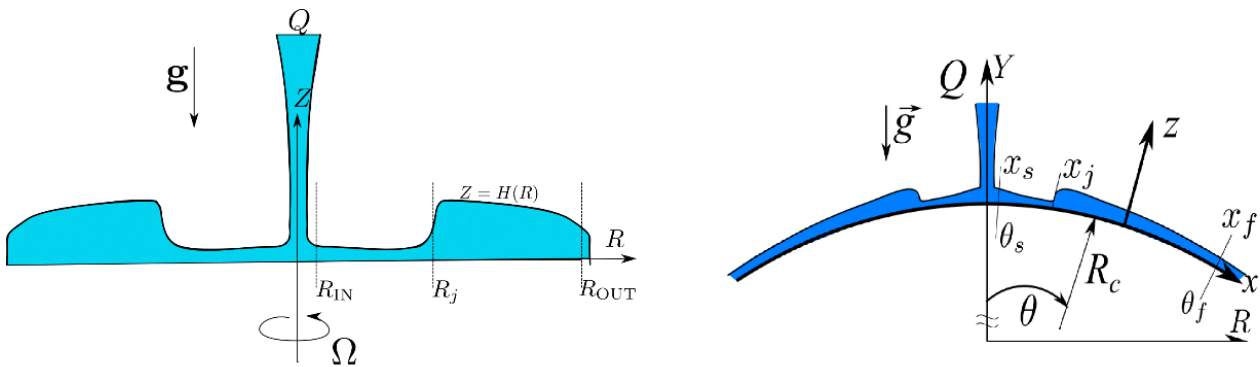


Рис. 1. Схема течения на вращающемся диске (слева) и на сфере (справа). Системы координат

Характерное значение расстояния до оси симметрии, на котором инерционные, вязкие силы и градиент гидростатического давления имеют один порядок, выражается [3] через расход жидкости Q , ускорение свободного падения g и коэффициент кинематической вязкости ν : $L = Q^{5/8} g^{1/8} \nu^{-3/8}$. В случае со сферой также предполагается, что радиус сферического сегмента R_c , по которому течет жидкость, много больше этой величины.

Для описания течения вводится ортогональная криволинейная система координат, связанная с твердой поверхностью, координатные линии совпадают с координатными линиями сферической системы координат (с центром в центре сферы) или цилиндрической системы координат (с центром в центре вращающегося диска).

Так как характерная толщина слоя $H = Q^{1/4} g^{-1/4} \nu^{1/4}$ много меньше масштаба продольной координаты L , используются уравнения тонкого слоя, распределение давления при этом является гидростатическим.

Постоянный профиль скорости

Дальнейшим упрощением модели является сведение уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для этого проводится осреднение уравнений вдоль толщины пленки в предположении о виде профиля скорости. Метод [4], который применен к задаче о гидравлическом прыжке в [3], предполагает, что профиль скорости имеет одну и ту же форму во всех сечениях.

Уравнения тонкого слоя, осредненные по толщине с учетом граничных условий непротекания и отсутствия трения на свободной поверхности, представляются в следующем виде. В обоих случаях уравнение неразрывности имеет вид: $urh = 1$.

Уравнение импульса же в случае сферы имеет вид:

$$C_1 u u' = \frac{1}{u^2 r} u' + \frac{1}{ur^2} + \alpha r - C_2 u^3 r^2.$$

Безразмерный параметр α соответствует кривизне твердой поверхности. Здесь u — средняя скорость в продольном направлении, r — продольная координата, h — толщина пленки, $1, 2$ — некоторые константы, выражающиеся через профиль скорости.

В случае течения на вращающемся диске имеем два уравнения импульса:

$$u u' - \omega^2 (1 + B_1 v + B_2 v) = \frac{1}{u^2 r} u' + \frac{1}{ur^2} - u^3 r^2,$$

$$v' + 2 \frac{v}{r} + \frac{1}{r} = -A u v r^2.$$

Безразмерный параметр ω соответствует угловой скорости вращения диска. v — азимутальная средняя скорость.

Граничное условие ставится при некотором малом значении r . В случае, если не существует решения задачи Коши, определенного при всех значениях координаты, строится разрывное решение, соответствующее объединению двух фазовых кривых, сопряженных с помощью условий на скачке, следующих из законов сохранения. Построена классификация решений в зависимости от значений параметра α или ω .

Показано, что в случае течения по сфере существует 2 критических значения α , разделяющих три различных типа решений: разрывное решение с прыжком, непрерывное решение с переходом из сверхкритического в докритический режим и всюду сверхкритическое решение; а в случае течения на вращающемся диске имеется 3 критических значения и соответственно 4 режима течения, представленных на Рис. 2.

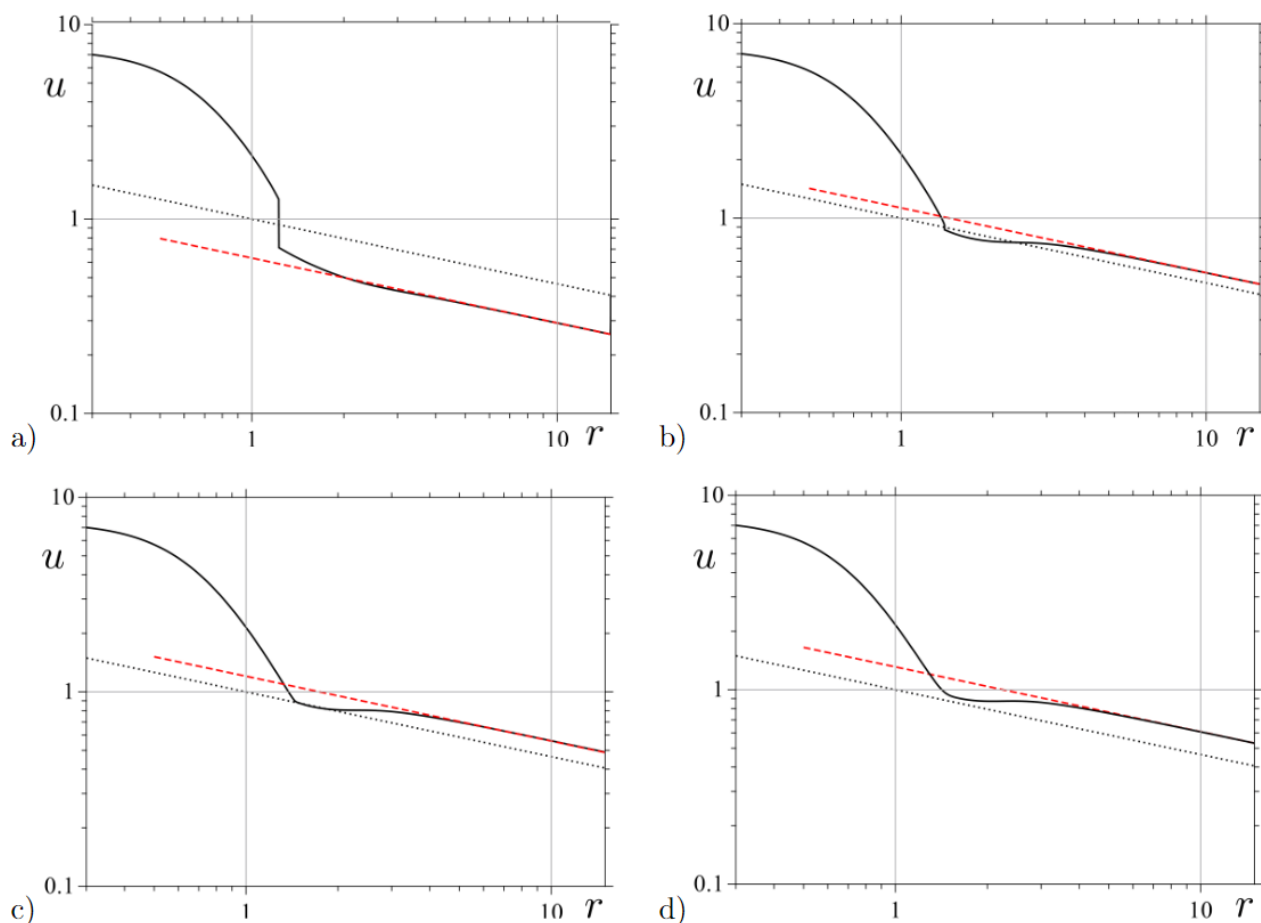


Рис. 2. Режимы течения на вращающемся диске. Красная линия показывает асимптотику при больших радиусах, серая линия – $Fr = 1$, разделяет сверхкритический и докритический режимы течения. а) – прыжок является разрывом, разделяет 2 режима течения, б), в) – существует локальная докритическая зона течения, выход из нее непрерывный, вход с помощью разрыва в первом случае и непрерывный во втором, д) – всюду сверхкритическое решение

Переменный профиль скорости

В случае течения по сфере также предложен подход с использованием переменного профиля скорости. Развитие течения от места падения струи сопровождается изменением профиля скорости: при малых значениях расстояния до оси на участке, где пограничный слой развит, для всех h наблюдается баланс вязких и инерционных сил, в этом случае имеется автомодельное решение [5], профиль скорости которого хорошо аппроксимируется кубической параболой; при больших значениях продольной координаты вязкие силы компенсируют независимые от поперечной координаты массовые силы, профиль скорости параболический. Для описания непрерывного течения во всей области в этом случае используется кубическая зависимость скорости от h с переменными коэффициентами;

условие на расход и граничные условия на твердой и свободной поверхности выделяют однопараметрическое семейство функций, описывающих профиль, параметр λ на этом семействе называется форм-фактором. Такой метод описания течений с гидравлическим прыжком применен в [6]. Использование форм-фактора позволяет разделять безотрывные течения и течения, имеющие локальные рециркуляционные зоны.

В качестве граничных условий используются равенство толщины слоя заданному значению во входном сечении и ограниченность решения на бесконечности. Структура уравнений такова, что решения соответствуют непрерывному изменению профиля скорости от автомодельного [5] к параболическому. Решение определено для всех r , прыжок определяется как точка с достаточно большим

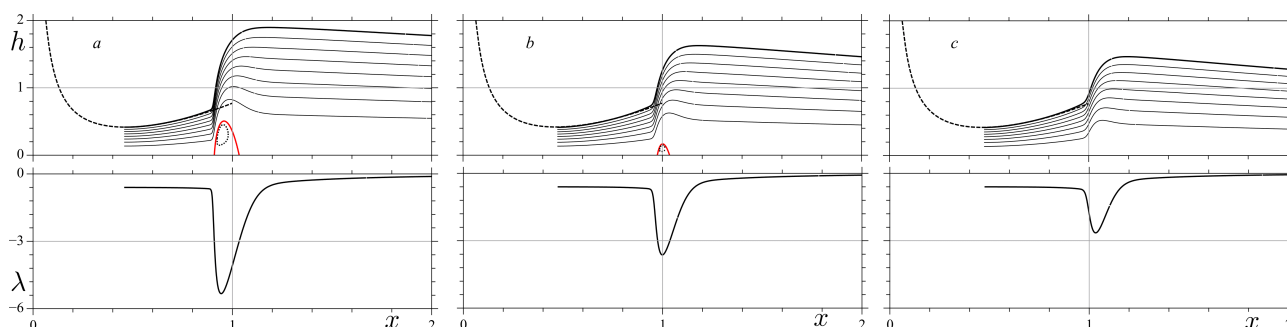


Рис. 3. Линии тока, граница рециркуляционных зон (красным цветом) для 3 различных параметров

значением $\frac{dh}{dx}$. При $\alpha = 0$ за прыжком образуется рециркуляционная зона. При увеличении параметра α размер рециркуляционной зоны уменьшается, прыжок смещается к периферии, что согласуется с результатами анализа на основе постоянного профиля скорости. Максимальное значение $\frac{dh}{dx}$ также уменьшается, что означает исчезновение прыжка. На рис. 3 приведены картины течений при различных значениях α , показывающие эволюцию течения.

Результаты качественного анализа и численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численного моделирования в рамках полных уравнений Навье–Стокса [7].

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.
- [2] Rayleigh On the theory of long waves and bores // Proc. R. Soc. Lond. A 1914. V. 90, № 619. P. 324–328.
- [3] Bohr T., Dimon P., Putkaradze V. Shallow-water approach to the circular hydraulic jump // J. Fluid Mech. V. 254. P. 635–648.
- [4] Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкой пленки вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
- [5] Watson E.J. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane // J. Fluid Mech. 1964. V. 20, № 3. P. 481–499.
- [6] Watanabe S., Putkaradze V., Bohr T. Integral methods for shallow free-surface flows with separation // J. Fluid Mech. 2003. V. 480. P. 233–265.
- [7] Saberi A., Teymourtash A.R., Mahpeykar M.R. Experimental and numerical study of circular hydraulic jumps on convex and flat target plates // European Journal of Mechanics – B // Fluids. 2020. V. 80. P. 32–41.



Форма гидравлического прыжка в плоской постановке¹

Сухов А.Д., Петров А.Г.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Течение в открытых каналах, как направление гражданского строительства изучается уже долгое время с помощью лабораторных, численных и натурных экспериментов. Гидравлический прыжок возникает в том случае, когда начинают доминировать силы инерции, а число Фруда $Fr = u / \sqrt{gh}$ становится много большим 1 [1]. Тогда уровень воды может резко возрасти, что в строительстве может использоваться в качестве механизма рассеивания энергии. При этом ключевыми параметрами для проектирования водных сооружений являются место, где происходит прыжок, его начальная глубина и протяженность прыжка. Пионером в данной области был французский ученый Беланджер, который экспериментально связал отношение двух высот прыжка к начальному числу Фруда [2]. Реллей [3] установил эту связь из законов сохранения расхода и импульса. В более поздних работах экспериментальных работах по гидравлическому прыжку [4–8] еще много раз были найдены основные параметры потока, такие как отношение высот прыжка, дли-

на прыжка, а главное в данных работах зачастую приводится и профиль прыжка, который позволяет произвести наиболее полное сравнение результатов теоретического и экспериментального исследования. Данное исследование посвящено исследованию профиля плоского гидравлического прыжка, то есть стационарного течения жидкости со свободной поверхностью в виде функции $h(x)$ и двумя горизонтальными асимптотами: $h(-\infty) = h_1$, $h(+\infty) = h_2$, где $h_1 < h_2$. На Рис. 1 представлена картинка, демонстрирующая постановку задачи.

Основная часть

В нашей работе мы применяем уравнения Буссинеска для каналов [9–11]

$$\begin{aligned} Q &= hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx}, \\ P &= \frac{gh^2}{2} + \frac{\dot{h}h^2}{3}, \quad \dot{h} = u \frac{d}{dx} \left(u \frac{dh}{dx} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений интегрируется следующим образом. Сначала интегрируем второе уравнение (1): $Qu + P + A_1 = 0$. Подставляя в него выражение для P и $u = Q/h$, получим

$$\frac{Q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} + \frac{hQ^2}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right) + A_1 = 0.$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 22-21-00833.

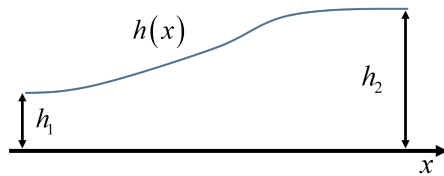


Рис. 1. Постановка задачи гидравлического прыжка

Если умножить это уравнение на $\frac{1}{h^2} \frac{dh}{dx}$, то его можно записать в виде производной

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{Q^2}{2h^2} + \frac{gh}{2} + \frac{Q^2}{6} \left(\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right)^2 - \frac{A_1}{h} \right] = 0.$$

Отсюда получаем полный интеграл системы. Из него можно выразить производную высоты поверхности по координате, как функцию от высоты поверхности.

$$(h')^2 = Pol(h) = 3 \left(1 + \frac{2}{Q^2} A_1 h + \frac{2}{Q^2} A_2 h^2 - \frac{gh^3}{Q^2} \right). \quad (2)$$

Кубический полином $Pol(h)$ имеет три корня. Если корни действительные $h_0 < h_1 < h_2$, то уравнение имеет следующий вид

$$h' = \pm \sqrt{Pol(h)},$$

$$Pol(h) = 3 \left(1 - \frac{h}{h_0} \right) \left(1 - \frac{h}{h_1} \right) \left(1 - \frac{h}{h_2} \right) \quad (3)$$

и определяет периодические волны, где h_1, h_2 — минимальная и максимальная высоты волны соответственно. В случае совпадения корней $h_0 = h_1$, мы получаем решения в виде уединенной волны (солитона). Корни h_1 и h_2 соответствуют низшей и высшей точкам волны. Расход выражается через из уравнений (2) и (3) путем приравнивания коэффициентов в полиноме при третьей степени таким образом: $Q^2 = gh_0 h_1 h_2 < gh_1 h_2 (h_1 + h_2) / 2$. Он точно меньше, чем расход в гидравлическом прыжке, который должен получаться, исходя из фундаментальных законов сохранения. Поэтому система уравнений (1) не применима для описания гидравлического прыжка. Его можно попытаться описать, дополнив уравнение силой f . Данная сила имеет физический смысл вихревых сопротивлений на свободной границе гидравлического прыжка и на дне.

$$Q = hu, \quad hu \frac{du}{dx} = -\frac{dP}{dx} - f, \quad P = \frac{gh^2}{2} + \frac{\dot{h}h^2}{3}. \quad (4)$$

Такой же подход применен в работе Гаврилюка [12], в которой сила берется пропорциональной

квадрату скорости. В этом случае уже проинтегрировать аналитически систему уравнений не удается, и она исследуется только численно. Мы же подберем силу, задав ее потенциал G так, чтобы сила не меняла полный импульс в системе, то есть должны выполняться законы сохранения. Покажем, что сила, определяемая по формуле

$$f = -\frac{dG}{dx},$$

$$G = \frac{Q^2}{h_1 h_2} \left(h^2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h^3}{h_1 h_2} \right) - \frac{gh^2}{2}. \quad (5)$$

с расходом $Q^2 = gh_1 h_2 (h_1 + h_2) / 2$ не меняет импульс системы.

Аналогичным образом можем получить производную высоты в новой системе уравнений.

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)^2 = 3 \left(1 - \frac{h}{h_2} \right)^2 \left(1 - \frac{h}{h_1} \right)^2. \quad (6)$$

Таким образом, мы можем описывать профиль гидравлического прыжка (Рис. 2) зная соотношения высот на бесконечностях. А само соотношение высот хорошо предсказывается, исходя из соотношения Беланджера [13, 14].

Список литературы

- [1] Hager W.H. Critical flow condition in open channel hydraulics // Acta Mechanica, 1985. V. 54(3). P. 157–179.
- [2] Belanger J.B. Essai sur la solution numerique de quelques problemes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes; [Essay on the numerical solution of some problems relative to steady flow of water] par m. J.-B. Belanger. chez Carilian-Goeury, libraire, des corps royaux des ponts et chaussees et des mines, 1828. (in French).
- [3] Rayleigh Lord On the Theory of Long Waves and Bore. Proc. Roy. Soc. A. 1914. 90, 324; Papers, 6, 250. Cambridge University Press.
- [4] Hager W.H., Hutter K. Approximate treatment of the plane hydraulic jump with separation approximate treatment of the plane hydraulic jump with separation zone above the flow zone above the flow zone // Journal of Hydraulic Research. 1983. V. 21(3). P. 195–204.
- [5] Schröder R. Ein Beitrag zur Frage der Energieumwandlung und Turbulenz diskontinuierlicher Wasserströmungen mit freier Oberfläche (A contribution to the question of energy dissipation and the turbulence of discontinuous water flow) 1957. (Doctoral dissertation, Ph. D. dissertation, Institute of Hydraulic Engineering and Water Resources Management, Technische Universität Berlin, Berlin (in German)).
- [6] Schröder R. Die turbulente Strömung im freien Wechselsprung. 1963. (In German).
- [7] Murzyn, F., Chanson, H. Free surface, bubbly flow and turbulence measurements in hydraulic jumps, 2007.
- [8] Wóycicki K. Wassersprung, Deckwalze und Ausfluss unter einer Schütze. Diss. ETH Zurich, 1951. (in German).
- [9] Benjamin T. B., Lighthill M. J. On cnoidal waves and bores. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. // Mathematical and Physical Sciences. 1954. V. 224(1159). P. 448–460.

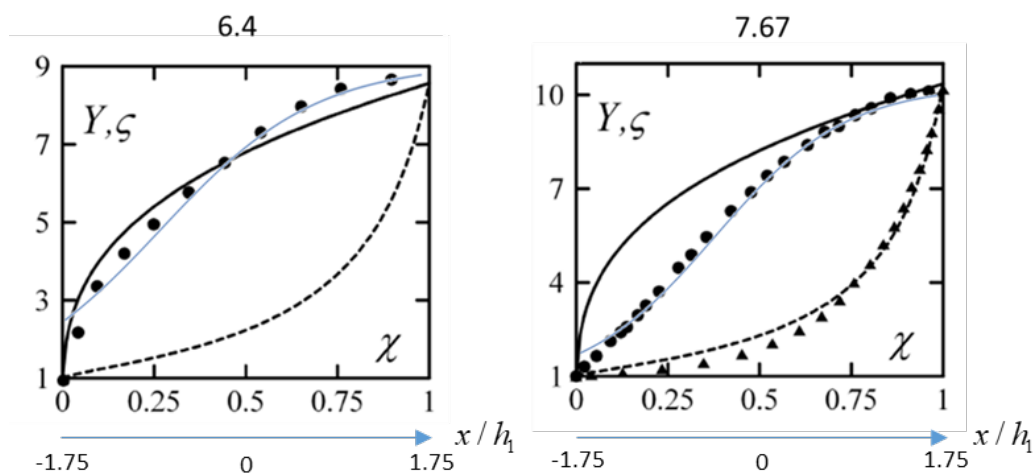


Рис. 2. Сравнение профиля прыжка с экспериментом и другой современной аналитической моделью с разными начальными числами Фруда (слева 6.4 и 7.67 справа). Черные точки – эксперимент [15], черная линия – аналитическая модель [15], черные треугольники – эксперимент (отделены точки безвихревой зоны) [15], черная пунктирная линия – аналитическая модель [15], синяя линия – наша модель

[10] Petrov A.G. Integrating the Long Wave equations in Kulikovskii–Drozdova Form // Dokl. Ross. Akad. Nauk. 2000. V. 373. P. 762–766.

[11] Petrov A.G. Integration of the Boussinesq Equations for Steady Channel and Jet Flows // Fluid Dynamics. 2007. Vol. 42, No. 6. P. 966–977.

[12] Richard, G. L., Gavriluk, S. L. The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows // Journal of Fluid Mechanics. 2013. V. 725. P. 492–521.

[13] Агроскин И.И. Гидравлика. М.–Л. 1964. 352 с. (in Russian).

[14] Khatsuria Rajnikant M. Hydraulics of spillways and energy dissipators. CRC Press, 2004.

[15] Castro-Orgaz O., Hager W. H. Classical hydraulic jump: Basic flow features // Journal of Hydraulic Research. 2009. V. 47(6). P. 744–754.



Квантовая турбулентность в терминах теории многих тел

Талалов С.В.

Тольяттинский государственный университет, Тольятти

В докладе рассматривается квантовое взаимодействие вихревых петель с внутренней структурой. Такая система рассматривается как модель квантовой турбулентности в среде без диссипации. Вихревые петли — замкнутые кривые $\mathbf{r}(\tau, \xi)$, эволюционирующие в пространстве в соответствии с уравнением:

$$\partial_t \mathbf{r}(t, s) = A \partial_s \mathbf{r}(t, s) \times \partial_s^2 \mathbf{r}(t, s) + B \left(\partial_s^3 \mathbf{r}(t, s) + \frac{3}{2} \left| \partial_s^2 \mathbf{r}(t, s) \right|^2 \partial_s \mathbf{r}(t, s) \right).$$

Второе слагаемое, добавленное к стандартному уравнению локальной индукции, описывает, как известно (см., например, [1]), поток внутри ядра вихря. Доклад основан на работах автора [2, 3], в которых показана применимость теории многих тел к описанию взаимодействия петель, включая их распад, соединение и пересоединение. Новый подход к квантованию отдельно взятого возмущенного вихревого кольца был предложен ранее в работах автора [4, 5]. В данных работах был также сделан обзор литературы по данным вопросам, который здесь, вследствие малого объема статьи, приводиться не будет.

В простейшем случае, когда мы рассматриваем только вихревые кольца с переменным, вообще говоря, радиусом, динамика кольца определяется переменными $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \omega$ и χ . Где \mathbf{p} — гидродинамический импульс, связанный с вихрем, \mathbf{q} — координаты центра кольца, а переменные ω и χ — осцилляторные переменные, такие, что радиус кольца $R^2 = R_0^2(\omega^2 + \chi^2)$. Величина R_0 определяет некий масштаб длин в теории, а величина $\arctan(\chi/\omega)$ определяет поток внутри ядра вихря.

В квантовом варианте единичный вихрь описывается состоянием в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{p,q} \otimes \mathbf{H}_b$, где $\mathbf{H}_{p,q}$ — пространство свободной бесструктурной 3D частицы (например, $L^2(R_3)$), а \mathbf{H}_b обозначает гильбертово пространство квантового гармонического осциллятора.

Данные переменные позволяют использовать инструменты квантовой теории многих тел для описания взаимодействия вихревых колец. Действительно, пусть

$$\mathbf{H}_N = \underbrace{\mathbf{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{H}_1}_N,$$

пространство N невзаимодействующих вихрей. В этом случае любой вектор $|\Phi^N\rangle \in \mathbf{H}_N$ может быть представлен в виде ($N \geq 1$)

$$|\Phi^N\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_N} \int \dots \int d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N f^N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \times \varphi_{n_1, \dots, n_N}^N |\mathbf{p}_1\rangle \dots |\mathbf{p}_N\rangle |n_1\rangle \dots |n_N\rangle,$$

где векторы $|\mathbf{p}_j\rangle$ — собственные для операторов $\hat{\mathbf{p}}_j$. Фоковское пространство определяется стандартным образом:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathbf{H}_N, \quad \mathbf{H}_0 = |0_{pq}\rangle \otimes |0_b\rangle = \mathbb{C}.$$

Полный гамильтониан системы взаимодействующих вихрей выбирается в виде

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{H}_0 + \hat{\mathbf{U}},$$

где \mathbf{H}_0 — свободный гамильтониан системы вихрей [2], а гамильтониан взаимодействия $\hat{\mathbf{U}}$ в общем случае имеет вид:

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varepsilon_{m,n} \hat{U}_{m \leftrightarrow n}.$$

Операторы $\hat{U}_{m \leftrightarrow n}$ определяют процессы взаимодействия (распада, пересоединения) вихрей в потоке. Каждый такой оператор описывает переход из состояния с m вихревыми кольцами в состояние с n вихревыми кольцами и обратно, обозначено как $m \leftrightarrow n$.

В цитированных работах автора обсуждаются возможные варианты явного вида таких операторов.

Например, для оператора $\hat{U}_{2 \leftrightarrow 2}(n_1, n_2, n'_1, n'_2)$ может быть выбран такой вид:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{2 \leftrightarrow 2}(n_1, n_2, n'_1, n'_2) &= \\ &= \delta_{n_1+n_2, n'_1+n'_2} \int \cdots \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 \times \\ &\quad \times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \times \\ &\quad \times \hat{a}^+(\mathbf{p}_1; n_1) \hat{a}^+(\mathbf{p}_2; n_2) \hat{a}(\mathbf{p}'_1; n'_1) \hat{a}(\mathbf{p}'_2; n'_2). \end{aligned}$$

Предложенный подход позволяет, в определенных случаях, вычислить статистическую сумму турбулентного потока:

$$Z = Tr \exp \left(-\frac{\hat{\mathbf{H}}}{k_B T} \right).$$

Список литературы

- [1] Алексеев С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.
- [2] Talalov S.V. Towards quantum turbulence theory: A simple model with interaction of the vortex loops // *Physical Review Fluids*, 2023, V. 8, p. 034607.
- [3] Talalov S.V. The turbulence development at its initial stage: A scenario based on the idea of vortices decay // *Physics of Fluids*, 2023, V. 35, p. 045132.
- [4] Talalov S.V. Small Oscillation of a Vortex Ring: Hamiltonian Formalism and Quantization // *Eur. Journ. Mech B/Fluids*, 2022, V. 92, p. 100–106.
- [5] Talalov S.V. Closed vortex filament in a cylindrical domain: Circulation quantization // *Physics of Fluids*, 2022, V.34, p. 041702-1 – 041702-4.



Критерий допустимости решений в виде бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега–Де Вриза–Бюршерса¹

Томашева А.М., Коломийцев Г.В., Шаргатов В.А.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Рассматриваются разрывные решения обобщенного уравнения Хопфа, соответствующего упрощенной модели среды (на крупных масштабах):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Интегральная форма этого уравнения имеет вид

$$\oint \varphi(v) dt - v dx = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) представляет собой разрыв, распространяющийся со скоростью W (ударную волну)

$$v(x - Wt) = \begin{cases} v_l & x - Wt < 0, \\ v_r & x + Wt > 0, \end{cases} \quad W = \frac{[\varphi(v)]}{[v]}, \quad (3)$$

где через v_r и v_l обозначены значения параметров v перед и за разрывом соответственно.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-11-20141.

Разрывное решение уравнения Хопфа в узкой зоне ударного перехода является непрерывной функцией, если учитываются мелкомасштабные процессы. В этом случае решение описывается обобщенным уравнением Кортевега–де Вриза–Бюршерса (КдВБ)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \quad v = v(x, t), \quad (4)$$

где $\mu, m = \text{const} > 0$ – коэффициенты диссипации и дисперсии соответственно.

Для некоторых наборов значений W и v_r существуют решения уравнения КдВБ в виде бегущей волны, которые близки к кусочно-постоянному решению интегрального уравнения (3) вне узкой зоны ударного перехода. Такие решения уравнения КдВБ называются стационарными структурами разрывов.

После переобозначений

$$v \rightarrow u + v_r, \quad t \rightarrow t\sqrt{m}, \quad x \rightarrow x\sqrt{m},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{m}}{\mu}, \quad \varphi(v) = f(v - u_r)$$

ставится задача на структуру разрывов (решение в виде бегущей волны):

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - Wt,$$

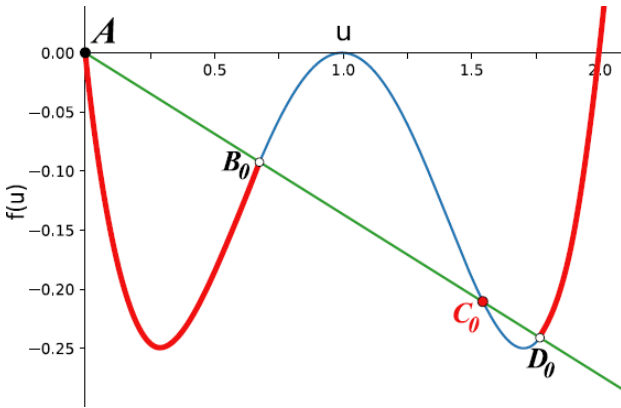


Рис. 1. $f(u)$. Выделенные интервалы – множество устойчивых разрывов со структурой. 0 – устойчивый особый разрыв

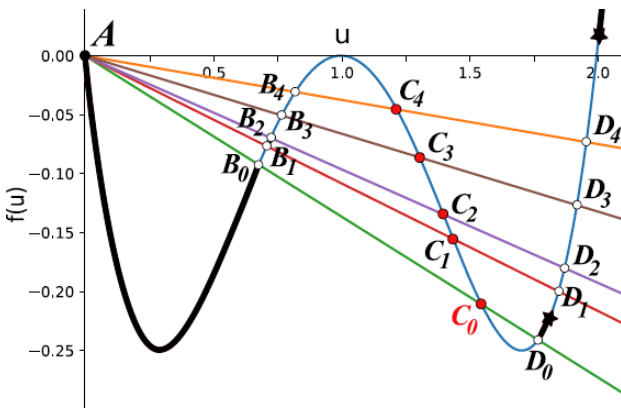


Рис. 2. $f(u)$. Множество допустимых разрывов

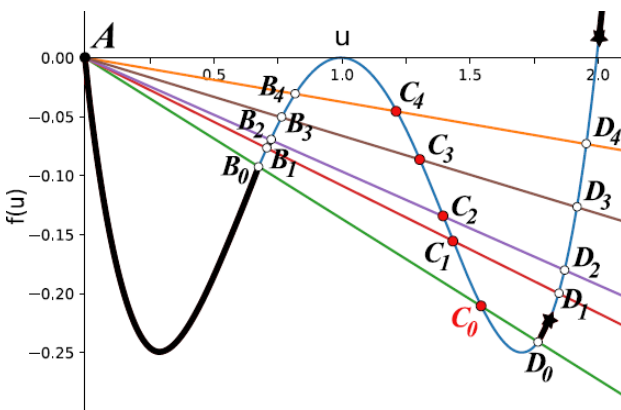


Рис. 3. $f(u)$ с четырьмя точками перегиба. Множество допустимых разрывов

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{du}{d\xi} = Wu - f(u)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u(\xi) = u_r \equiv 0.$$

В случае наличия диссипации и дисперсии множество решений в виде бегущих волн со струк-

турой состоит из классических и особых разрывов, для которых нарушается условие Лакса. Аналог задачи Римана о распаде разрыва для уравнения Хопфа может иметь неединственное решение, если все разрывы со структурой признать допустимыми.

Для признания разрывов в решении гиперболической модели допустимыми необходимо наличие у них структуры [1]. Кроме того, разрывы не должны обладать «распадной» неустойчивостью. Устойчивость разрывов исследуется методом функции Эванса.

В случае, когда функция потока $f(u)$ имеет две точки перегиба (Рис. 1), множество устойчивых разрывов со структурой состоит из особого разрыва C_0 , обладающего наименьшей скоростью, классических разрывов со скоростью и параметром u_l за разрывом меньше, чем у особого ($A - B_0$), и некоторого множества классических разрывов со скоростями и параметром за разрывом больше, чем у упомянутого особого разрыва (за D_0) [2, 3]. На графике множество таких разрывов обозначено черной жирной линией.

Множество допустимых разрывов (Рис. 2) включает в себя также разрывы, которые представляют собой пульсирующие с определенным периодом структуры, не распадающиеся на последовательность волн.

Для функции потока с четырьмя точками перегиба (Рис. 3) показано, что множество допустимых разрывов качественно строится тем же образом, что и для функции с двумя точками перегиба. Сформулирован общий критерий, позволяющий выделить допустимые разрывы при известных скоростях устойчивых особых разрывов. Таким образом, исчезает неединственность в решении аналога задачи Римана.

Исходя из полученных результатов, также сформулирована и доказана теорема, которая устанавливает зависимость монотонности структур особых разрывов от скорости W бегущей волны и значения параметра за разрывом u_l .

Список литературы

[1] Куликовский А.Г. о возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 268–303.

[2] Chugainova A.P., Il'ichev A.T., Kulikovskii A.G., Shargatov V.A. Problem of arbitrary discontinuity disintegration for the generalized Hopf equation: Selection conditions for a unique solution // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). 2017. V. 82, no. 3. P. 496–525.

[3] A.P. Chugainova, V.A. Shargatov, G.V. Kolomiitsev On the Instability of Monotone Traveling-Wave Solutions for a Generalized Korteweg–de Vries–Burgers Equation // J. Russian Journal of Mathematical Physics. 2022. Vol. 29, no. 3. P. 342–357.



О потере устойчивости течения аномально термовязкой жидкости и возникновение автоколебаний¹

Урманчев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

Исследование гидродинамических эффектов, связанных с температурной аномалией вязкости, то есть немонотонного изменения вязкости в зависимости от температуры, обусловлено необходимостью установления закономерностей течения жидкостей, как органической, так и неорганической природы, обладающих достаточно разнообразным молекулярным строением. Кроме фундаментальных аспектов, интерес к данной проблеме связан с возможностями практического применения таких жидкостей для решения различных технологических задач. Например, на основе сополимеров акриламида [1] или водных растворов метилцеллюлозы [2] созданы потокоотклоняющие реагенты для нефтедобывающей отрасли.

В представленной работе рассмотрены условия возникновения автоколебательных режимов при течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры) в кольцевых каналах с заданными условиями теплообмена на стенках. Течение такого рода жидкостей при наличии

градиентов температур, например, при втекании нагретой жидкости в охлаждаемый канал, сопровождается формированием вязкого барьера — локализованной области с вязкостью, соответствующей распределению температурного поля в канале. Некоторые особенности, касающиеся динамики потока в плоском канале, включая изменение расхода жидкости в зависимости от времени, впервые были описаны в статье [3]. Было выяснено, что гидродинамические параметры потока в канале определяются не только перепадом давления, но и интенсивностью теплообмена. Далее, по результатам численных исследований в работах [4] и [5] были обнаружены различные режимы ламинарного течения жидкостей с немонотонной зависимостью вязкости от температуры, определяемой гауссовой функцией, в плоском и кольцевом каналах, соответственно. В указанных работах критические условия теплообмена, при которых происходит скачкообразное изменение расхода жидкости.

Среди обнаруженных режимов наибольший интерес вызвали режимы, с осцилляционным механизмом установления потока. Естественно, возник вопрос о возможности существования и условиях возникновения неустановившихся режимов течения аномально термовязкой жидкости при задан-

¹Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00915)

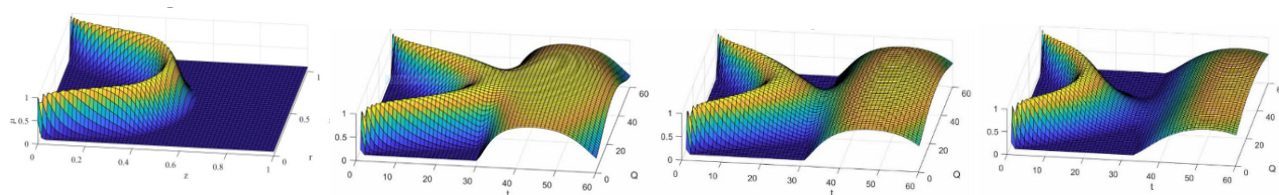


Рис. 1. Эволюция вязкого барьера при течении anomalно термовязкой жидкости в сечении кольцевого канала

ных стационарных условиях теплообмена и при фиксированном перепаде давления, в том числе и автоколебательных режимов. В этой связи, на основе анализа динамики вязкого барьера, проведённого на основе предыдущих исследований, была поставлена задача о течении anomalно термовязкой жидкости в кольцевом канале с теплообменом, скачкообразно меняющимся вдоль стенок.

В настоящей работе математическая постановка задачи предусматривала решение обобщённых уравнений Навье–Стокса с переменной вязкостью, которая задавалась аналитически в виде Гауссовой функции. Жидкость принималась несжимаемой с постоянными коэффициентами теплоёмкости и теплопроводности. Уравнения движения решались численно методом контрольного объёма совместно с уравнением неразрывности и уравнением для внутренней энергии в форме притока тепла. Граничные условия предусматривали втекание жидкости с достаточно высокой температурой, в то время как на стенках задавались условия для охлаждения потока, соответственно, с более низкой температурой. При этом в первой части ставились условия первого рода, а во второй — третьего.

При описанной постановке задачи, втекание нагретой жидкости в результате контакта с холодной жидкостью, уже содержащуюся в канале, вызывает образование вязкого барьера. Было принято во внимание, [3], что при постановке граничных условий первого рода вязкий барьер непосредственно примыкает ко входному сечению канала, а протяжённость его в процессе установления, сначала возрастает, но впоследствии может эволюционировать в зависимости от соотношения расхода и интенсивности теплообмена. При граничных условиях третьего рода, или, так называемых условиях Ньютона–Рихмана, изолинии вязкого барьера пересекают стенки канала [4] и [5], что вызывает большее сопротивление потоку со стороны вязкого барьера, так как расход напрямую связан с силами трения, возникающими на стенках канала и во втором случае их величина значительно больше.

В ходе численного моделирования удалось установить, что дальнейшие процессы определяются периодическим изменением структуры высоко-

вязкой зоны в канале. Вязкий барьер, первоначально образовавшийся в части канала с интенсивным теплообменом, перемещается вместе с потоком (Рис. 1, а). При этом в его внутренней области жидкость ещё достаточно горячая. Когда фронтальная поверхность вязкого барьера достигает отметки, где условия теплообмена резко снижаются, то, в результате возросшей роли теплообмена, создаются условия для образования высоковязкой зоны, которая охватывает значительную область второй части канала (Рис. 1, б). Этот факт, в свою очередь, приводит к резкому увеличению гидравлического сопротивления и, соответственно, уменьшению расхода. Затем теплообменные процессы инициируют восстанавливают первоначального состояния системы (Рис. 1, в). В завершение цикла происходит уменьшение температуры во второй части канала за счёт теплообмена, что приводит к снижению вязкости (Рис. 1, г) и восстановлению первоначального состояния вязкого барьера, близкого к тому, которое соответствовало начальным условиям задачи как на Рис. 2, а. После чего весь процесс повторяется, что и вызывает периодическое изменение расхода жидкости.

На Рис. 2 представлены графики, характеризующие динамику расхода жидкости при заданных параметрах поставленной задачи, это — незатухающие колебания (Рис. 2, а) и соответствующая им фазовая траектория (Рис. 2, б), которая, как и следовало ожидать, стремится к некоторой замкнутой кривой. Тот факт, что любая первоначально заданная точка на фазовой плоскости, независимо от того, находится она вовне или внутри кривой, стремится к ней, свидетельствует о том, что это — устойчивый предельный цикл.

Итак, рассмотренная здесь задача со ступенчатым изменением интенсивности теплообмена дала возможность обнаружить принципиально новый характер эволюции высоковязкой зоны. В первой половине канала интенсивность теплообмена поддерживалась максимальной, при этом для температуры ставились граничные условия первого рода. Во второй половине канала ставились условия третьего рода при различных значениях числа Нуссельта. В результате исследований были обна-

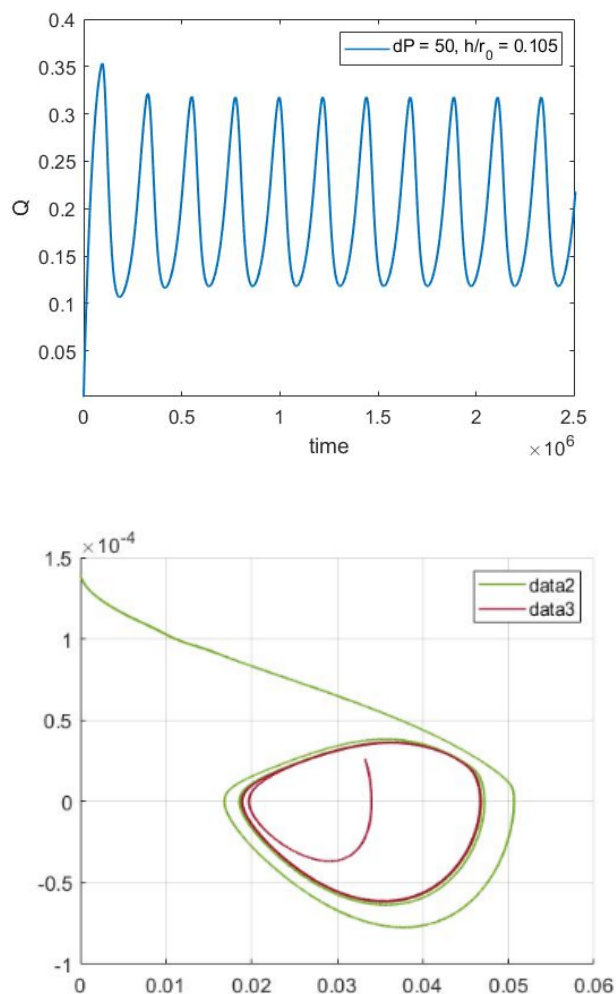


Рис. 2. Автоколебательный характер изменения расхода anomalно термовязкой жидкости в сечении кольцевого канала

ружены автоколебания, соответствующие изменению расхода жидкости. Характер осцилляций, судя по Рис. 2, а незначительно отличается гармонических, что свидетельствует об установлении нелинейных колебаний томсоновского типа [6]. Кроме того, было установлено, что область существования незатухающих колебаний определяется параметрами задачи, характеризующими перепад давления и отношение ширины канала к величине радиуса внутреннего цилиндра, а на границах указанной области замечены и слабо затухающие колебания расхода с весьма малым декрементом затухания. Таким образом, в пространстве указанных параметров мы можем выделить область, переход в которую приводит к потере устойчивости течения с постоянным расходом и вызывает периодическое изменение расхода с неизменной амплитудой.

Список литературы

- [1] Thomas A., Sahuc B., Abirov Zh., Mazbayev Ye. Polymer Flooding to Increase Oil Recovery at Light and Heavy Oil Fields // Oil and Gas Territory, 2017, No. 7–8, P. 58–67.
- [2] Алтунина Л.К., Кувшинов В.А., Кувшинов И.В., Стасьева Л.А., Чертенков М.В., Андреев Д.В., Карманов А.Ю. Увеличение нефтеотдачи пермо-карбоновой залежи высоковязкой нефти Усинского месторождения физико-химическими и комплексными технологиями (обзор) // Журнал СФУ. Химия. 2018. Т. 11. № 3. С. 462–476.
- [3] Урманчев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук, 2004, том 396, №2, с.204–207.
- [4] Uрманчев S., Kиреев V. The Transient Flow of Liquid with Non-Monotonous Temperature Dependent Viscosity in a Plane Channel // AIP Conference Proceedings, 2017, vol. 1906, 200009. 4p. (American Institute of Physics)
- [5] Киреев В.Н., Мухутдинова А.А., Урманчев С.Ф. О критических условиях теплообмена при течении жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры в кольцевом канале // Прикладная математика и механика, 2023, том 87, № 3, с. 369–378.
- [6] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 496 с.



Резонансные колебания газа в закрытой трубе с параболическим распределением температуры по радиусу¹

Фадеев С.А., Шайдуллин Л.Р.

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН, Казань

Колебания газа в замкнутых объемах с неоднородным распределением температуры являются широко распространенным процессом в различных приложениях и технических устройствах. Самовозбуждение колебаний в теплофизических системах, представляющее собой периодические по времени изменения гидродинамических и термодинамических параметров, является основой вибрационного горения [1–4]. Эффективность термоакустических устройств (тепловые двигатели, холодильники) зависит от амплитудных характеристик колебаний давления и скорости газа [5–7], поэтому необходимо дальнейшее проведение исследований колебаний газа при наличии температурного градиента.

Колебания газа в закрытой трубе описываются линеаризованной системой уравнений Навье–Стокса и уравнением энергии для стационарного температурного поля. Газ в трубе нагревается во всем объеме за счет объемной плотности теплового

потока Q . Расчеты проводились в осесимметричной геометрии с параметрами трубы длиной L и радиусом R , указанными в [8] и амплитудой смещения поршня $l_0 = 0.01$ мм. На первом этапе решалось уравнение энергии с граничными условиями Дирихле на боковой стенке и Неймана на поршне и закрытом конце трубы для нахождения фоновой температуры в трубе. На втором этапе решаются уравнения Навье–Стокса с прилипающими и изотермическими граничными условиями на боковой стенке и закрытом конце трубы. На поршне задается граничное условие для осевой компоненты скорости ωl_0 , где ω — циклическая частота колебаний газа.

Показано, что наличие объемной плотности теплового потока в трубе приводит к интенсификации колебаний. При возбуждении колебаний газа в трубе с неоднородным распределением температуры по радиусу профиль стоячей волны зависит от профиля температуры [9]. В связи с искривлением фазовых плоскостей скорость продольных колебаний газа в ядре потока приобретает зависимость от радиальной координаты [10]. По этой причине в ядре потока наблюдается, близкий к параболическому, радиальный профиль безразмерной амплитуды колебаний осевой компоненты скорости газа,

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-01169, <https://rscf.ru/project/23-79-01169/>

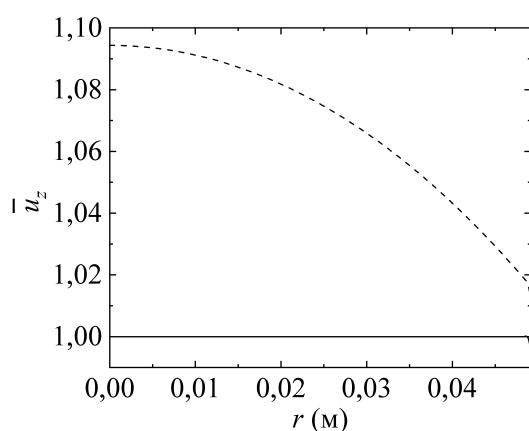


Рис. 1. Радиальное распределение безразмерной амплитуды колебаний осевой компоненты скорости газа в ядре потока (сечение $z = 0.5L$) при $Q = 0$ (сплошная линия) и $Q = 1$ кВт/м³ (штриховая линия)

как показано на рисунке 1, ($\bar{u}_z = u_z/u_0$, где u_0 — амплитуда колебаний скорости газа в ядре потока (сечение $z = 0.5L$) при $Q = 0$).

Для описания радиального распределения амплитуды колебаний скорости газа была подобрана аналитическая функция, что позволило провести анализ источника импульса, обусловленного вязкостью, в данном случае отвечающего за перенос импульса по радиусу [11]. Анализ показал, что наличие объемной плотности теплового потока в трубе со стенками, поддерживаемыми при постоянной температуре (температура стенок ниже средней температуры рассматриваемого объема) уменьшает абсолютное значение среднего, по сечению трубы, источника импульса, обусловленного вязкостью. Таким образом, увеличение амплитуды резонансных колебаний газа связано с уменьшением переноса импульса по радиусу и, соответственно, потерь, обусловленных вязкостью.

Заключение

Исследованы резонансные колебания газа в закрытой трубе с учетом объемной плотности теплового потока в рассматриваемом цилиндрическом объеме. При наличии объемной плотности теплового потока в трубе амплитуда колебаний осевой компоненты скорости газа приобретает, близкую к параболической, зависимость от радиальной координаты. Это ведет к увеличению амплитуды резонансных колебаний газа за счет уменьшения переноса импульса, обусловленного вязкостью.

Список литературы

- [1] Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. С. 500
- [2] Натанзон М.С. Неустойчивость горения. — М.: Машиностроение, 1986. С. 248
- [3] Мелких А.В., Селезнев В.Д. Автоколебания неизотермического течения вязкой жидкости в канале // ТВТ. 2008. Т. 46. № 1. С. 100 – 109.
- [4] Басок Б.И., Гоцуленко В.В. Автоколебания, возбуждаемые теплопроводом от потока нагретого газа // Труды МФТИ. 2018. Т. 10. № 4. С. 142 – 149.
- [5] Swift G.W. Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators. — New York: Springer, 2017. Pp.326
- [6] Biwa T., Sobata K., Otake S., Yazaki T. Observation of thermoacoustic shock waves in a resonance tube // J. of the Acoustical Society of America. 2014. V. 136(??). Pp. 965 – 968.
- [7] Alcock A.C., Tartibu L.K., Jen T.C. Experimental investigation of an adjustable standing wave thermoacoustic engine // Heat and Mass Transfer. 2019. V. 55. Pp. 877 – 890.
- [8] Gubaidullin D.A., Tkachenko L.A., Fadeev S.A., Shaidullin L.R. Resonance Oscillations of Gas in a Closed Tube in the Presence of a Heterogeneous Temperature Field // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. V. 43. No 5. Pp. 1110 – 1115.
- [9] Завершинский И.П., Коган Е.Я. Структуры газового разряда в акустическом поле // Физика плазмы. 1996. Т. 22. № 3. С. 281 – 288.
- [10] Hatsagortsyan K.Z., Galechyan G.A. Acoustic discontraction of gas discharge // Laser Physics. 1994. V. 4. No 3. Pp. 502 – 506.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.



Классификация структурных компонентов течений гетерогенных жидкостей¹

Чашечкин Ю.Д.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

В соответствии с принципами современной логики, включающей требование дефинитности объекта и метода исследования, основы механики текучих сред проанализированы согласованными методами инженерной математики и технической физики. Классификация компонентов периодических течений гетерогенных жидкостей и газов проведена с контролем выполнения условия совместности при решении системы фундаментальных уравнений. В единой постановке рассмотрены гравитационные поверхностные и внутренние, также капиллярные и акустические волны и сопутствующие семейства лигаментов. Приводятся примеры анализа картин течений в природных и лабораторных условиях.

Изучение течений жидкостей и газов, играющих важную роль в природных условиях, промышленных или транспортных технологиях, в биосфере, в данной работе проводится согласованными методами инженерной математики и технической физики. В соответствии с определениями [1], *инженерная математика* — аксиоматическое учение о принципах выбора содержания символов, правил операций и критериев контроля точности; *техническая физика* — эмпирико-аксиоматическое учение о природе в целом, структуре материи и всех видах ее изменений с оценкой погрешности. Жидкость и газ определяются как текучие среды, свойства которых описываются термодинамическими потенциалами и физическими величинами, кинетическими или другими физическими коэффици-

ентами [1]. Динамика и структура течений характеризуется полными решениями системы фундаментальных уравнений механики жидкостей, включающей уравнения состояния для потенциала Гиббса и плотности, уравнения переноса плотности, энергии и вещества с физически обоснованными граничными условиями — прилипания и непротекания вещества на твердой стенке, динамическим и кинематическим условием на свободной поверхности [2].

Под действием ряда факторов (атомно-молекулярного строения вещества, внешних полей — гравитационных, электрических и др.) термодинамические потенциалы и их производные — плотность, давление, температура, концентрация растворенных веществ и взвешенных частиц распределены неоднородно. Особо следует выделить неоднородность плотности $\rho = \rho(z)$ — естественную стратификацию, которая характеризуется масштабом $\Lambda = |d \ln z / dz|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом $T_b = 2\pi/N$ плавучести (ось z вертикальна, g — ускорение свободного

¹Работа выполнена в ИПМех РАН рамках Государственного задания АААА-А20-120011690131-7.

падения). Полная система фундаментальных уравнений механики вязких стратифицированных сжимаемых жидкостей или газов [1] здесь для краткости не приводится. Эффектами глобального вращения пренебрегается. Линеаризованная система в двумерном приближении имеет вид:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} - \frac{w}{\Lambda} + \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \\ \partial_t u - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho_{00}} \partial_x \tilde{P} = 0 \\ \partial_t v - \nu \Delta v + \frac{1}{\rho_{00}} \partial_y \tilde{P} = 0 \\ \partial_t w - \nu \Delta w + \frac{1}{\rho_{00}} \partial_z \tilde{P} + g \tilde{\rho} = 0 \\ \frac{1}{\rho_{00} c^2} \partial_t \tilde{P} - \frac{w g}{c^2} + \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Классификация компонентов проводится по результатам анализа решений алгебраической формы линеаризованной системы (1), которая образуется при подстановке в систему периодических функций вида $f \sim \exp(ikx - i\omega t)$ с комплексным волновым числом k и действительной положительной. Возникающее дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} D_v(k) (\omega^2 D_v^2(k) - \omega N^2 D_v(k) + \\ + c^2 k_{\perp}^2 N_c^2 - c^2 \omega k^2 D_v(k)) = 0, \\ D_v(k) = \omega + ivk^2, \\ k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \\ N^2 = \frac{g}{\Lambda}, \quad N_c^2 = N^2 - \frac{g^2}{c^2} \end{aligned} \quad (2)$$

содержит операторы общего и погранслоного типа в качестве общего множителя. Выбор величин $\tau_b = N^{-1}$ и $\delta_N^{gv} = (gv)^{1/3} N^{-1}$ в качестве масштабов времени и длины позволяет перевести (2) к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} (ik_*^2 \varepsilon + \omega_*) \left(k_{\perp*}^2 \left(\frac{\varepsilon}{\eta} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) + \omega_*^2 (ik_*^2 \varepsilon + \omega_*)^2 - \right. \\ \left. - \omega_* (ik_*^2 \varepsilon + \omega_*) - k_*^2 \omega_* \frac{\varepsilon}{\eta} (ik_*^2 \varepsilon + \omega_*) \right) = 0, \\ \varepsilon = \frac{\delta_g^v}{\delta_N^{gv}} = \frac{\sqrt{v/N}}{(gv)^{1/3} N^{-1}} = \frac{Nv^{1/3}}{g^{2/3}}, \quad \eta = \frac{\tau_c^v}{\tau_b} = \frac{Nv}{c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае высокочастотных колебаний $\omega \gg N$ дисперсионное соотношение для акустических волн принимает вид:

$$D_v(k) \left(D_v(k) \omega \left(D_v(k) \omega - c^2 k^2 \right) - g^2 k_{\perp}^2 \right) = 0. \quad (4)$$

Его решения для волн и лигаментов:

$$\begin{aligned} k_z = \pm \sqrt{-k_x^2 - \frac{c^2 \omega - 2iv\omega^2 + \sqrt{c^4 \omega^2 - \frac{4g^2 v k_x^2}{\omega} (ic^2 + v\omega)}}{2v(ic^2 + v\omega)}}; \\ k_z = \pm \sqrt{-k_x^2 - \frac{c^2 \omega - 2iv\omega^2 - \sqrt{c^4 \omega^2 - \frac{4g^2 v k_x^2}{\omega} (ic^2 + v\omega)}}{2v(ic^2 + v\omega)}}; \end{aligned} \quad (5)$$

переходят в традиционное выражение $\omega^2 = k^2 c_s^2$ в изотропной однородной идеальной среде.

В толще стратифицированной жидкости при $\omega \ll N$ решение (2) описывает распространение поперечных низкочастотных внутренних волн с дисперсионным соотношением:

$$D_v(k) (c^2 \omega i k^4 v - c^2 N^2 k_{\perp}^2 + c^2 k^2 \omega^2 + N^2 \omega D_v(k) + g^2 k_{\perp}^2) = 0, \quad (6)$$

Его решения также определяют внутренние волны и сопутствующие лигаменты:

$$\begin{aligned} k_z = \pm \sqrt{-k_x^2 - \frac{c^2 \omega - 2iv\omega^2 + \sqrt{c^4 \omega^2 - \frac{4g^2 v k_x^2}{\omega} (ic^2 + v\omega)}}{2v(ic^2 + v\omega)}}; \\ k_z = \pm \sqrt{-k_x^2 - \frac{c^2 \omega - 2iv\omega^2 - \sqrt{c^4 \omega^2 - \frac{4g^2 v k_x^2}{\omega} (ic^2 + v\omega)}}{2v(ic^2 + v\omega)}}; \end{aligned} \quad (7)$$

В пределе невязкой жидкости дисперсионное соотношение (6) упрощается:

$$c^2 k^2 \omega^2 - c^2 k_{\perp}^2 N^2 + N^2 \omega^2 + g^2 k_{\perp}^2 = 0,$$

и принимает вид:

$$k_z = \pm \sqrt{-k_{\perp}^2 + k_{\perp}^2 \frac{N^2 c^2 - g^2}{c^2 \omega^2} - \frac{N^2}{c^2}}; \quad (8)$$

включающий только внутренние волны полного решения (6).

В несжимаемой жидкости (8) переходит в известное выражение, не содержащее длину волны $\omega^2 = \sin^2 \theta \cdot N^2$, которое описывает геометрию волновых лучей, образующих крест «Святого Андрея». Волновые пучки наблюдались в экспериментах [3]. В опытах, выполненных теневыми методами на установках Лаборатории механики жидкостей ИП-Мех РАН [4][4], визуализированы и волновые пучки, и лигаменты — тонкие прослойки и оболочки волновых пучков [5].

Сохранение вещественных функций в описании периодических течений в слабодиссипативных средах позволяет строить полные решения линеаризованной и слабонелинейной формы системы фундаментальных уравнений [6], включающие все типы волн (инерционные, гравитационные, акустические). При этом волны описываются

регулярными компонентами решений, а лигаменты – сингулярно возмущенными функциями. Каждый вид течения определяется собственной частью полного дисперсионного соотношения. В эксперименте лигаменты регистрируются как высокоградиентные волокна и прослойки. Их существование обеспечивается структурированным строением вещества [7] и поддерживается механизмами конверсии доступной потенциальной внутренней энергии в активные формы.

Эксперименты проведены на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

Список литературы

- [1] *Chashechkin Y.D.* Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*, 2021, V. 10(4), p.286.
- [2] *Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A.* Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*, 2022, V. 11(8), p. 402.
- [3] *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. Мир: М. 1981. 600 с.
- [4] УИУ "ГФК ИПМех РАН": Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>
- [5] *Chashechkin Yu.D.* Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2018. V. 13(2), p. 1–29. <https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020>
- [6] *Chashechkin Yu.D.* Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics*. 2021. V. 9(6). p. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>
- [7] *Chashechkin Yuli D., Ilinykh Andrey Yu.* Fine flow structure at the miscible fluids contact domain boundary in the impact mode of free-falling drop coalescence // *Fluids*. 2023, V. 8(10), p. 269. <https://doi.org/10.3390/fluids8100269>



Оценка диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта в процессе движения жидкости¹

Юй Чжаокай

МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва

Введение

Экспериментальные данные Г.Н. Микишева и Н.Я. Дорожкина [1] по определению логарифмического декремента малых колебаний реальной жидкости дают значение на 40% большие, чем расчёты с использованием теории погранслоя. В монографии [2] показывается, что неучёт эффектов вблизи линии трёхфазного контакта (ЛТК) является одной из основных причин рассогласования. В статье [3] предложено, что в процессе движения жидкости угол смачивания изменяется, пропорциональный скорости движения линии трёхфазного контакта, и сформулировано краевое условие с учётом изменения угла смачивания на линии трёхфазного контакта. Но полученное условие справедливо только для движения жидкости в цилиндрических сосудах при угле смачивания, равном 90 градусов. В статье [4] разработан метод малого параметра для учёта диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта по аналогии с теорией пограничного слоя. В работе [5] построен численный алгоритм определения коэффициента демпфирования колебаний жидкости на основе метода конечных элементов. И

в [6] предложен приближённо-аналитический метод оценки влияния изменения угла смачивания на диссипацию энергии вблизи линии трёхфазного контакта.

Вывод граничного условия

Непосредственные наблюдения показывают, что жидкость в первый период колебаний смачивает стенку сосуда и при следующих циклах совершает движение по поверхности, покрытой плёнкой малой толщины. Именно в этой плоскости контакта возникают касательные напряжения трения. Непосредственные наблюдения показывают, что жидкость в первый период колебаний смачивает стенку сосуда и при следующих циклах движется по поверхности, покрытой плёнкой жидкости малой толщины. В плоскости контакта возникают касательные напряжения трения F_τ , пропорциональные касательной составляющей скорости $(\partial h / \partial t) / \sin \alpha_0$ и некоторому коэффициенту трения μ_γ .

При плескании жидкости движущаяся сила σ^* , вызванная отличием α^* динамического угла смачивания от статического (Рис. 1), уравновешивается F_τ :

$$F_\tau = -\mu_\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \frac{1}{\sin \alpha_0}, \quad \sigma^* = \sigma \alpha^* \sin \alpha_0,$$

$$F_\tau + \sigma^* = 0 \Rightarrow \alpha^* = \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по стипендиям Китая.

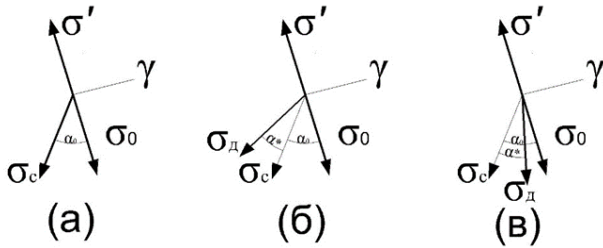


Рис. 1. Схема изменения угла смачивания жидкости: (а) – равновесие, (б) – жидкость движется в сторону газа, (в) – движется от стороны газа, где σ_0 и σ'_0 – поверхностное натяжение разделов жидкости–стенки и газа–стенки, σ_c и $\sigma_{дc}$ – статическое и динамическое поверхностное натяжение раздела жидкости–газа, их модули равны σ

Используя полученные результаты о возмущениях свободной поверхности в работе [7]], получено новое граничное условие с учётом изменения угла смачивания для произвольной формы сосуда:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma.$$

Параметр χ описывает форму стенки и свободной поверхности на ЛТК [8]. Из полученного граничного условия вытекают другие две модели движения ЛТК:

- 1) $\mu_\gamma = 0$, т.е. имеем условие о сохранении угла смачивания, как было показано в работах Н.Д. Копачевского: $\partial h / \partial e + \chi h = 0$ на γ ;
- 2) $\mu_\gamma \rightarrow \infty$, т.е. имеется модель неподвижной ЛТК: $h = 0$ на γ .

Формулировка задачи

Вариационная формулировка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости с учётом изме-

нения угла смачивания имеет вид:

$$\delta I = 0,$$

$$I = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n^2 + \nabla_\Gamma h_n \nabla_\Gamma h_n \right\} d\Gamma_0 + \chi \int_\gamma h_n^2 d\gamma + C_a \Omega_n \int_\gamma h_n^2 d\gamma + \int_\Omega \nabla \phi_n \nabla \phi_n d\Omega,$$

выражения числа Бонда B_0 , главной кривизны поверхности k_1 и k_2 , параметра линии трёхфазного контакта χ приведены в работе [9], где $\Omega_n = -\varepsilon_n + i\omega_n$ – комплексная частота колебаний жидкости, а ε_n – коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на ЛТК, C_a – число капиллярности, характеризующее соотношение вязкого трения и поверхностного натяжения:

$$C_a = \frac{\mu_\gamma}{\sin^2 \alpha_0 \sqrt{\rho l \sigma}} = \frac{\sqrt{\rho l^3 \omega_n^2 / \sigma}}{\rho l^2 \omega_n \sin^2 \alpha_0 / \mu_\gamma} = \frac{\omega_n^*}{Re_n^* \sin^2 \alpha_0}.$$

Обсуждение результатов

Из Рис. 2 следует, что число капиллярности C_a в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи линии контакта и коэффициент демпфирования ε_1 имеет один порядок как коэффици затухания вблизи стенки сосуда. А из выражения числа капиллярности C_a видно, что при маленьком угле смачивания α_0 и большом коэффициенте трения μ_γ число капиллярности C_a реальной жидкости может быть находится в этом диапазоне.

На Рис. 3 видно, что собственная частота ω_1 при C_a в диапазоне 10–100 монотонно увеличивается с повышением числа капиллярности. При $C_a \rightarrow 0$ собственная частота совпадает с численным значением частоты колебаний жидкости с граничным условием о сохранении угла смачивания α_0 , а при $C_a \rightarrow \infty$ частота ω_1 приближается к результатам при неподвижной ЛТК ($h = 0$ на γ).

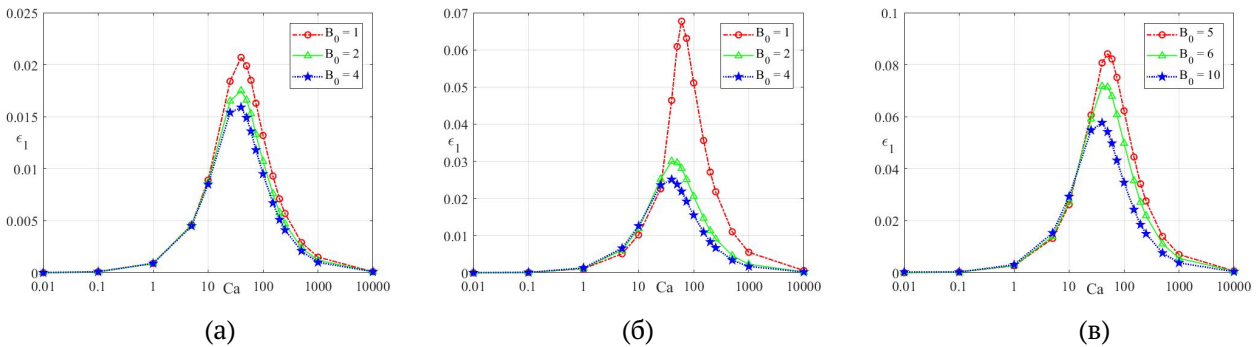


Рис. 2. Коэффициент затухания основного тона ε_1 в зависимости от числа капиллярности C_a и числа Бонда B_0 , (а) – $\beta = 20\%$, (б) – 50% и (в) – 80%

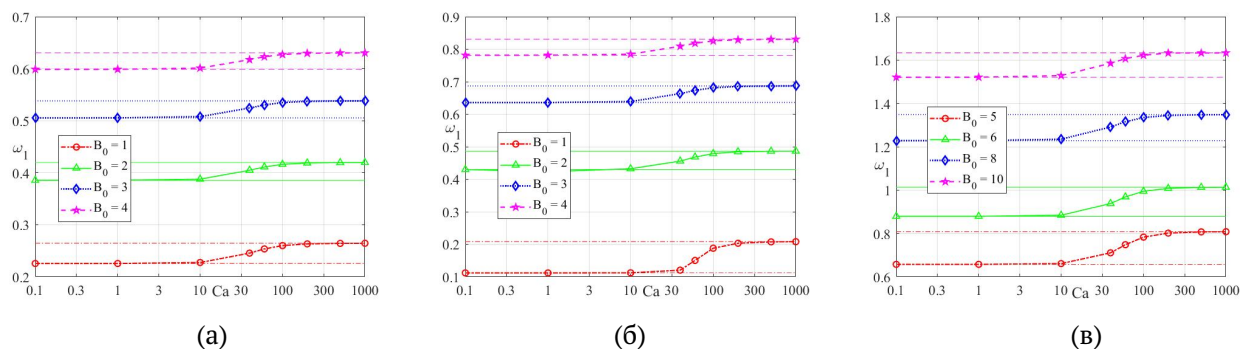


Рис. 3. Собственная частота основного тона ω_1 в зависимости от числа капиллярности Ca и числа Бонда B_0 , (а) – $\beta = 20\%$, (б) – 50% и (в) – 80%

Выводы

Введено новое граничное условие на линии трёхфазного контакта с учётом диссипации энергии, вызываемой изменением угла смачивания в процессе движения жидкости. После решения задачи о малых колебаниях маловязкой капиллярной жидкости с применением нового граничного условия получены комплексные числа с отрицательной вещественной частью и определены коэффициенты демпфирования колебаний жидкости вблизи линии трёхфазного контакта. Количественно оценено влияние числа Бонда B_0 , объёма жидкости β и введённого числа капиллярности Ca на значение коэффициента демпфирования вблизи линии трёхфазного контакта. Число капиллярности Ca в диапазоне 10–100 приводит к значительной диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта.

Автор выражает благодарность к.ф.-м. А.Н. Темнову и д.т.н. П.М. Шкапову за помощь в формулировке задачи и плодотворные обсуждения результатов работы.

Список литературы

- [1] Микишев Г.Н., Дорожкин Н.Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах // Механика и машиностроение. 1961. № 4.
- [2] Богоряд И.Б. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. Томск: Издательство Томского университета, 1980. 101 с.
- [3] Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // Journal of Fluid Mechanics. 1987. V. 179. P. 253?266.
- [4] Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // Journal of Fluid Mechanics. 1991. V. 222. P. 197?205.
- [5] Wang W. Study on liquid sloshing with small amplitude considering capillary effect (in Chinese). Dissertation for the degree of Doctor of Engineering. Beijing: Tsinghua University, 2008. 141 p.
- [6] Utsumi M. Slosh damping caused by friction work due to contact angle hysteresis // AIAA Journal. 2017. V. 55. No. 1. P. 179.
- [7] Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. О малых возмущениях равновесной поверхности капиллярной жидкости // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. № 4. С. 695?702.
- [8] Мышкис А. Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. Киев: Наукова Думка. 1992. 592 с.
- [9] Юй Чжаокай. Bimage1.ерсолновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом силы поверхностного натяжения. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2022, № 78. С. 151–165.



Две модели динамики лагранжевых частиц в канале вихревой трубы

Баширова К.И., Михайленко К.И.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматривается разделение потока дисперсных частиц по выходам из канала вихревой трубы. Численное моделирование проводится в пакете OpenFOAM. В частности, проводится сравнение скоростей, с которыми частицы покидают канал через горячую и холодную диафрагмы. Вихревые трубы могут применяться для разделения жидкостей и газов на фракции и их очистки от примесей. Например, они применяются для удаления из природного и попутного нефтяного газа излишков влаги.

В представленной работе проведено сравнение поведения частиц с различными моделями тензора напряжений: Лана и Харриса–Крайтона. Для этого использовалась модель вихревой трубы длиной 0.12 м и диаметром 0.016 м. В начальный момент времени давление в трубе составляет 10^5 Па, давление на входе — $6.5 \cdot 10^5$ Па. В трубу добавляются мелкодисперсные частицы диаметром 0.00001 м и плотностью 2526 кг/м³. Скорость инъекции частиц — 20000 частиц в секунду, начальная скорость каждой частицы составляет 15 м/с и направлена вдоль входных патрубков вихревой трубы. В качестве несущей фазы использован воздух.

Математическая модель

Влияние моделей тензора напряжений проверялось с использованием метода MP-PIC. Стандартная модель MP-PIC включает в себя систему уравнений для несущей фазы, состоящую из уравнений

неразрывности и импульсов [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_{(1)} v_{(1)i})}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial(\alpha_{(1)} v_{(1)j})}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_{(1)} v_{(1)j} v_{(1)i})}{\partial x_i} &= \\ &= -\frac{1}{\rho_{(1)}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \alpha_{(1)} g_j - \frac{F_{(21)i}}{\rho_{(1)}} \end{aligned}$$

где $\alpha_{(1)}$ — объемная концентрация газовой фазы; $v_{(1)i}$ — i -я составляющая вектора скорости газовой фазы; p — давление; $\rho_{(1)}$ — плотность газовой фазы; g_i — компоненты вектора ускорения свободного падения; $F_{(21)i}$ — функция межфазной передачи импульса; $i = 1, 2, 3$.

Для несомой гранулированной среды записывается уравнение для $f(x, v_{(2)}, m, t)$ — функции, определяющей распределение частиц, где $x, v_{(2)}, m$ — расположение, плотность и масса частицы, соответственно, t — время:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f v_{(2)i}}{\partial x_i} + \frac{\partial f A}{\partial v_{(2)i}} = 0$$

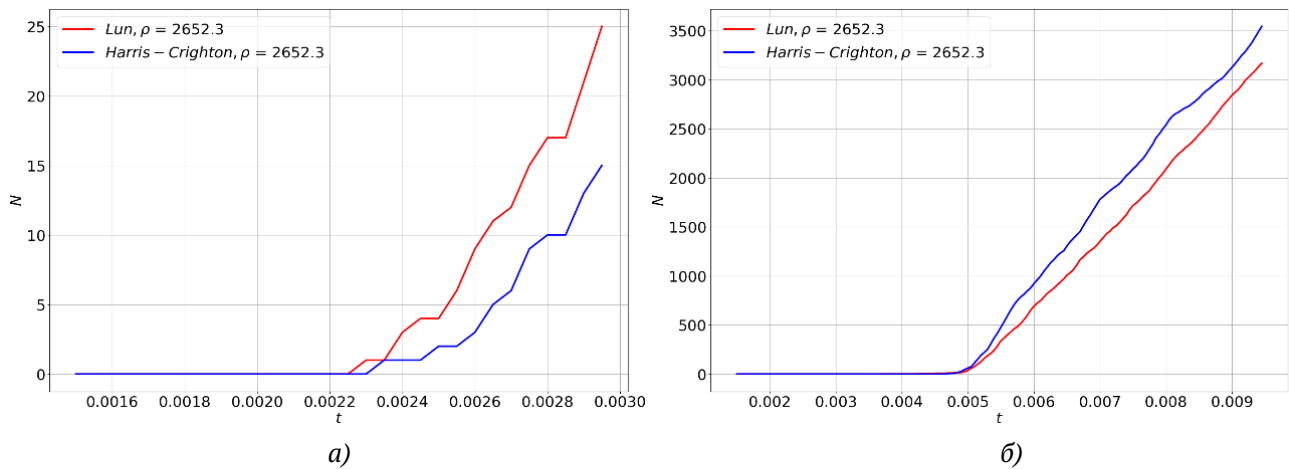


Рис. 1. Количество частиц, вылетевших из «горячего» выхода (а) и из «холодного» выхода (б)

Здесь $v_{(2)i}$ — i -я составляющая вектора скорости частиц; A — производная по времени от скорости твердых частиц:

$$A = D(v_{(1)} - v_{(2)}) - \frac{1}{\rho_{(2)}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g - \frac{1}{\alpha \rho_{(2)}} \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$$

где $D = C_d \frac{3 \rho_{(1)}}{8 \rho_{(2)}} \frac{|v_{(1)} - v_{(2)}|}{R}$ — функция переноса;

C_d — коэффициент переноса; $\rho_{(2)}$ — плотность частиц; R — радиус частиц; α — объемная концентрация частиц, τ — тензор изотропного напряжения, определяемый моделью Лана:

$$\tau = \left[\rho_{(2)} \alpha + \rho_{(2)} \alpha^2 (1 + e) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_{cp}} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \frac{1}{3} \sigma^2$$

или моделью Харриса–Крайтона:

$$\tau = P_{(2)} \frac{\alpha^\beta}{\max(\alpha_{cp} - \alpha, \omega(1 - \alpha))}$$

Здесь α_{cp} — объемная концентрация частиц при плотной упаковке, $e = 0.95$ — коэффициент восстановления; σ — среднеквадратическое отклонение для колебаний скорости; $P_{(2)} = 10$ Па — эмпирический коэффициент; $\beta = 2$ — безразмерный эмпирический коэффициент; ω — коэффициент для обеспечения вычислительной устойчивости.

Концентрация частиц в зависимости от функции распределения представлена в выражении:

$$\alpha_{cp} = \iint f \frac{m}{\rho_{(2)}} dm dv_{(2)}, \quad \alpha_{cp} + \alpha = 1$$

Для замыкания системы используется уравнение для функции межфазной передачи импульса:

$$F = \int f_m \left[D(v_{(1)} - v_{(2)}) - \frac{1}{\rho_{(2)}} \nabla p \right] dm dv_{(2)}$$

Приведенные уравнения решаются при помощи решателя пакета OpenFOAM — *denseParticleFoam*, который используется для моделирования динамики лагранжевых дисперсных частиц в жидкости или газе. Применимость метода для решения подобных задач показана в работе [2].

Результаты численного моделирования

На Рис. 1 представлено количество частиц, вылетевших из горячего и холодного выходов. Красным представлено количество, полученное при использовании модели Лана, синим — Харриса–Крайтона.

На Рис. 2 показана относительная разница количества частиц, полученных при использовании описанных выше моделей. Видно существенное различие между результатами моделирования.

В работах [3, 4] проведено сравнение экспериментальных данных с расчетными результатами, полученными при использовании моделей Лана и Харриса–Крайтона. Показано, что модель Лана лучше подходит для моделирования поведения частиц в случае отсутствия плотной упаковки. Это объясняется наличием большего количества эмпирических коэффициентов в модели Харриса–Крайтона. Кроме того, модель Лана позволяет учитывать изменения скорости частиц.

В представленной работе показано, что выбор модели тензора напряжений в гранулированной среде оказывает существенное влияние на скорость покидания канала вихревой трубы через диафрагмы и имеет непосредственное отношение к правильности оценки сепарации частиц в рассматриваемом устройстве. В дальнейших исследовани-

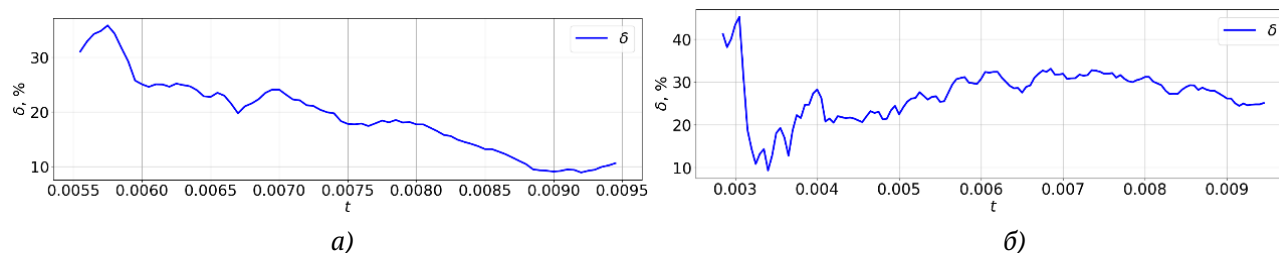


Рис. 2. Относительная разница количества частиц, вылетевших из «горячего» выхода (а) и из «холодного» выхода (б)

ях планируется сравнение с континуальной моделью гранулированной среды и с доступными экспериментальными данными для проверки полученных результатов.

Список литературы

- [1] Snider D.M. An In-compressible Three-Dimensional Multiphase Particle-in-Cell Model for Dense Particle Flows // *Journal of Computational Physics*. 2001. № 170. p. 523–549.
- [2] Баширова К.И. Моделирование осаждения закрученного потока разреженной гранулированной среды в цилиндрической области методом MP-PIC // *Многофазные системы*. 2021. Т. 16(3–4). С. 144–148.
- [3] Caliskan U., Miskovic S. A chimera approach for MP-PIC simulations of dense particulate flows using large parcel size relative to the computational cell size // *Chemical Engineering Journal Advances*. 2021. V. 5.
- [4] Lu S., Tan J.Z.Y., Maroto-Valer M.M. Investigation of CO₂ Photoreduction in an Annular Fluidized Bed Photoreactor by MP-PIC Simulation // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2022. № 61(8). p. 3123-3136.



Анализ подходов к моделированию диссипации звуковых волн в гидродинамике сглаженных частиц¹

Бурмистрова О.А., Маркелова Т.В., Арендаренко М.С., Стояновская О.П.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Гидродинамика сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) представляет собой численный метод аппроксимации нестационарных уравнений в частных производных. Основу метода составляет способ вычисления пространственных производных от функции, значения которой заданы в подвижных нерегулярно расположенных в пространстве узлах — лагранжевых частицах. Для аппроксимации уравнений по значениям функции, известной в узлах, строится гладкая интерполирующая функция с помощью ядра (функции радиального базиса), носитель которого охватывает несколько соседних частиц. Такой способ интерполяции означает, что пространственное разрешение метода (точность интерполирования и вычисления производных от интерполянта) определяется независимыми параметрами — размером ядра и расстоянием между модельными частицами, а также видом ядра.

В настоящее время численные модели меха-

ники сплошных сред на основе SPH интенсивно развиваются. Критерии подбора численного разрешения метода носят эмпирический характер. В работе предпринимается попытка получить такой критерий для параболических уравнений на основе классического метода вычислительной математики — дисперсионного анализа.

Дисперсионное соотношение для одномерного уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = A^2 u_{xx}$$

имеет вид

$$\omega = -iA^2 k^2,$$

где k — волновое число, ω — частота.

Рассмотрены четыре SPH-аппроксимации [?] данного уравнения. Для каждой аппроксимации получено дисперсионное соотношение. Среди четырех рассмотренных выделены две схемы, обеспечивающие сходимость численного решения при $K \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$ независимо друг от друга, где K — число радиусов сглаживания в длине волны, φ — величина, обратная количеству соседних частиц в радиусе сглаживания. Первая схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx_a}{dt} = u_a, & \rho = const \\ \frac{du_a}{dt} = A^2 \sum_b \frac{m}{\rho} (u_b - u_a) \frac{\partial^2 W(x_a - x_b)}{\partial x_a^2}, \end{cases} \quad (1)$$

¹Работа выполнена за счет средств гранта РФФ № 23-11-00142.

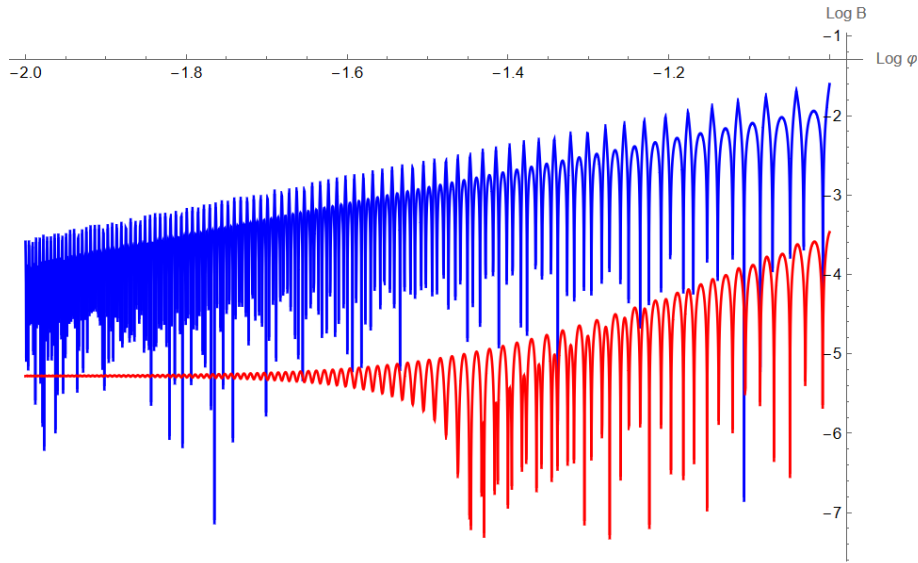


Рис. 1. Графики погрешности при фиксированном K для схемы (1) в двойном логарифмическом масштабе. Синяя линия соответствует ядру C2, красная — ядру C4

вторая — вид

$$\begin{cases} \frac{dx_a}{dt} = u_a, & \rho = const, \\ \frac{du_a}{dt} = A^2 \sum_b 2 \frac{m}{\rho} \frac{(u_a - u_b)}{x_a - x_b} \frac{\partial W(x_a - x_b)}{\partial x_a}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x_a — координата рассматриваемой частицы, x_b — координаты соседних частиц, ρ и m — плотность и масса одной частицы соответственно, W — ядро метода. Дисперсионное соотношение для схемы (1) имеет вид

$$\omega = -iA^2k^2 \sum_{j=0}^{[1/\varphi]} \frac{\varphi K^2}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi\varphi j}{K}\right) \tilde{W}_2(j\varphi),$$

для схемы (2) — вид

$$\omega = iA^2k^2 \sum_{j=1}^{[1/\varphi]} \frac{2K^2}{j\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi\varphi j}{K}\right) \tilde{W}_1(j\varphi).$$

Здесь \tilde{W}_1 и \tilde{W}_2 — первая и вторая производные безразмерного ядра \tilde{W} . Таким образом, дисперсионные соотношения для SPH-схем отличаются от дисперсионного соотношения уравнения Бюргера наличием в правой части соответствующего множителя.

Установлено, что для схем (1) и (2) порядок аппроксимации по φ определяется видом ядра и совпадает с его гладкостью. Аналогичный результат известен для гиперболических уравнений [2]. На Рис. 1 приведены графики погрешности фазовой

скорости $B(K, \varphi, W)$ схемы (1) при $K = 500$ и ядрах Вендланда гладкости 2 (C2)

$$\tilde{W}(q) = \begin{cases} \frac{5}{4}(1-q)^3(1+3q), & 0 \leq q < 1, \\ 0, & q \geq 1 \end{cases}$$

и гладкости 4 (C4)

$$\tilde{W}(q) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-q)^5(1+5q+8q^2), & 0 \leq q < 1, \\ 0, & q \geq 1. \end{cases}$$

На Рис. 2 приведены графики погрешности $B(K, \varphi, W)$ схем (1) и (2) при фиксированном $K = 1000$ и ядре Вендланда C2. Обнаружено, что погрешность фазовой скорости схемы (1) на порядки отличается от погрешности фазовой скорости схемы (2). Аналитические выводы подтверждены численными расчетами.

Список литературы

- [1] Fatehi R., Manzari M.T. Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives // Computers and Mathematics with Applications. 2011. № 61. P. 482–498.
- [2] Stoyanovskaya O.P., Lisitsa V.V., Anoshin S.A., Savvateeva T.A., Markelova T.V. Dispersion analysis of SPH as a way to understand its order of approximation // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. V. 438. P. 115495.

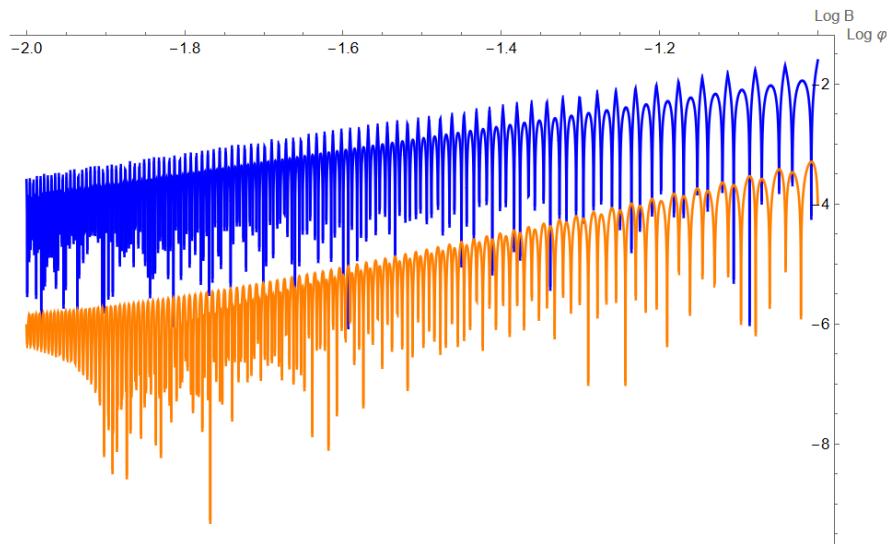


Рис. 2. Графики погрешности при фиксированном K и ядре S_2 для схемы (1) (синяя линия) и схемы (2) (оранжевая линия) в двойном логарифмическом масштабе



Двухпалубная структура пограничного слоя в трехмерной задаче обтекания малой неровности на поверхности пластины¹

Буров Н.А., Гайдуков Р.К.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Для задач обтекания жидкостями и газами поверхностей с малыми неровностями при больших значениях числа Рейнольдса Re широко известны асимптотические решения с двух- и трехпалубными структурами пограничного слоя [1–3]. Использование таких моделей позволяет избежать прямого численного моделирования (DNS) уравнений Навье–Стокса, которое является ресурсоемким [4] из-за наличия пространственной разномасштабности (обусловленной геометрией обтекаемой поверхности — наличием малых неровностей). В рамках такого подхода исходная система уравнений Навье–Стокса асимптотически редуцируется к серии более простых систем, которые уже не содержат нескольких разных пространственных масштабов.

Однако, несмотря на широкую известность теории многопалубных структур, трехмерные задачи в рамках нее практически не исследовались.

¹Исследование выполнено с использованием ресурсов суперкомпьютерного кластера НИУ ВШЭ. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

В данной работе исследуется задача обтекания вязкой несжимаемой жидкостью малой локализованной неровности произвольной формы (например, типа «горбик») на пластине в трехмерном случае (Рис. 1).

А именно, предполагается что поверхность пластины имеет вид

$$y_s = \varepsilon^{4/3} \mu((x - x_0)/\varepsilon, (z - z_0)/\varepsilon),$$

где $\varepsilon = Re^{-1/2}$ — малый параметр, а μ — некоторая гладкая локализованная в точке (x_0, z_0) функция, убывающая при стремлении аргументов к $\pm\infty$. На пластину набегают плоскопараллельный поток $u_\infty = (1, 0, 0)$, а неровность удалена от края пластины так, чтобы перед ней сформировался классический пограничный слой Прандтля. Такая геометрия (высота и ширина неровности) приводит к образованию двухпалубной структуры пограничного слоя (Рис. 1).

Рассматриваемая задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности $\langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}$, $\langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0$ с граничными условиями прилипания к обтекаемой поверхности y_s , $\mathbf{U}|_{y=y_s} = 0$ и согласования с набегающим потоком \mathbf{u}_∞ вдали от нее. Здесь $\mathbf{U} = (u, v, w)$ — вектор скорости, p — давление. С помощью мно-

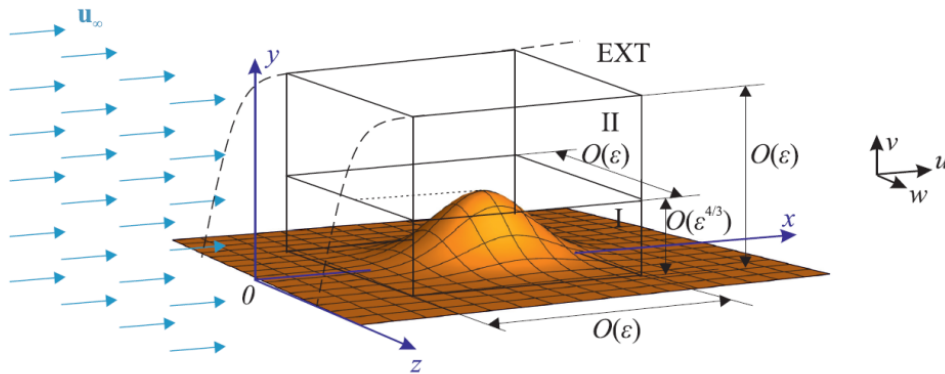


Рис. 1. Геометрия задачи и двухпалубная структура: I – тонкий погранслой, II – погранслоем Прандтля, EXT – область внешнего (потенциального) потока

гомасштабного асимптотического анализа [1], основанного на комбинации метода погранслойных разложений и метода построения локализованных решений, построено формальное асимптотическое решение с двухпалубной структурой пограничного слоя.

Теорема. Пусть $x_0, z_0 \geq \delta > 0$. Тогда асимптотическое решение задачи имеет вид

$$u = 1 + u_0^{\text{II}}(x, \tau) + \epsilon^{1/3} (u_1^{\text{I}}(\xi_1, \xi_2, 0) + u_1^{\text{II}}(\xi_1, \xi_2, \tau)) + O(\epsilon^{2/3}),$$

$$v = \epsilon^{2/3} (v_2^{\text{I}}(\xi_1, \xi_2, \theta) + v_2^{\text{II}}(\xi_1, \xi_2, \tau)) + O(\epsilon),$$

$$w = \epsilon^{1/3} w_1^{\text{I}}(\xi_1, \xi_2, \theta) + O(\epsilon^{2/3}),$$

$$p = p_0 + \epsilon^{2/3} p_2^{\text{II}}(\xi_1, \xi_2, \tau) + O(\epsilon),$$

где $\xi_1 = (x - x_0)/\epsilon$, $\xi_2 = (z - z_0)/\epsilon$, $\tau = y_w/\epsilon$, $\theta = y_w/\epsilon^{4/3}$, $y_w = y - y_s$ – переменная, которая «выравнивает» границу (т.е. в переменных (x, y_w, z) граница становится плоской), τ и θ – погранслойные переменные для II и I палуб соответственно.

Функция $u_0^{\text{II}} = u^* - 1$, $u_1^{\text{II}} = \mu(\partial u_0^{\text{II}}/\partial \tau)|_{x=x_0}$, где $u^* = f'(\tau/\sqrt{x})$, $f(\gamma)$ – функция Блазиуса. Функции $u_1^{\text{I}}, v_2^{\text{I}}, w_1^{\text{I}}$ определяются из соотношений

$$u^\dagger = u_1^{\text{I}} + u_1^{\text{II}}|_{\tau=0} + \theta \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{x=x_0, \tau=0},$$

$$v^\dagger = v_2^{\text{I}} + v_2^{\text{II}}|_{\tau=0}, \quad w^\dagger = w_1^{\text{I}},$$

где функции $u^\dagger, v^\dagger, w^\dagger$ являются решением краевой задачи для системы уравнений Прандтля с самоин-

дуцированным давлением:

$$\begin{cases} u^\dagger \left(\frac{\partial u^\dagger}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi_1} \frac{\partial u^\dagger}{\partial \theta} \right) + w^\dagger \left(\frac{\partial u^\dagger}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi_2} \frac{\partial u^\dagger}{\partial \theta} \right) + \\ + v^\dagger \frac{\partial u^\dagger}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi_1} \Big|_{\tau=0, x=x_0} - \frac{\partial^2 u^\dagger}{\partial \theta^2} = 0, \\ v^\dagger \frac{\partial w^\dagger}{\partial \theta} + w^\dagger \left(\frac{\partial w^\dagger}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi_2} \frac{\partial w^\dagger}{\partial \theta} \right) + \\ + u^\dagger \left(\frac{\partial w^\dagger}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi_1} \frac{\partial w^\dagger}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 w^\dagger}{\partial \theta^2} = 0, \\ \frac{\partial u^\dagger}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi_1} \frac{\partial u^\dagger}{\partial \theta} + \frac{\partial w^\dagger}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi_2} \frac{\partial w^\dagger}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\dagger}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$u^\dagger|_{\theta=0} = 0, \quad v^\dagger|_{\theta=0} = 0, \quad w^\dagger|_{\theta=0} = 0,$$

$$\frac{\partial u^\dagger}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0, x=x_0}, \quad (2)$$

$$u^\dagger|_{\xi_{1,2} \rightarrow \pm \infty} = \theta \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0, x=x_0},$$

$$w^\dagger|_{\theta \rightarrow \infty} = 0, \quad v^\dagger|_{\xi_{1,2} \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad w^\dagger|_{\xi_{1,2} \rightarrow \pm \infty} = 0.$$

Функция v_2^{II} является решением краевой задачи для уравнения типа Рэлея

$$u^*|_{x=x_0} \Delta_{\xi_1, \xi_2, \tau} v_2^{\text{II}} - v_2^{\text{II}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} \Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$v_2^{\text{II}}|_{\xi_{1,2} \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad v_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} = 0,$$

$$v_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = v^\dagger|_{\theta \rightarrow \infty}, \quad \Delta_{\xi_1, \xi_2, \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

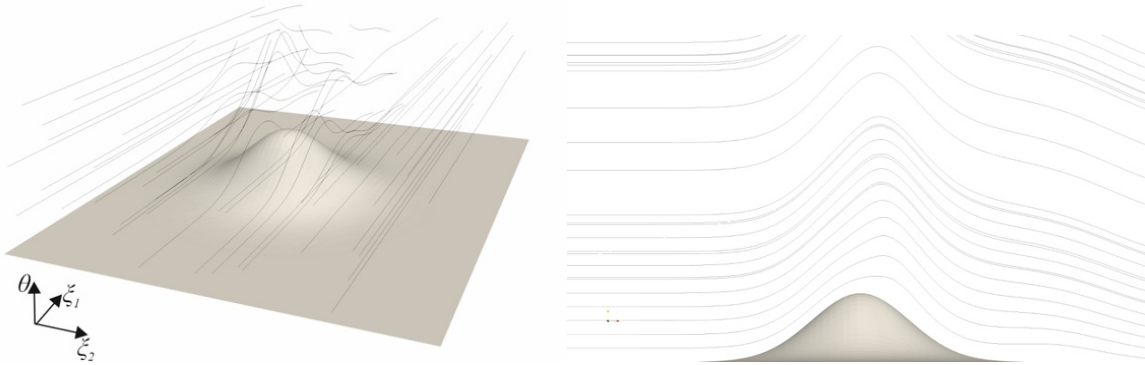


Рис. 2. Линии тока для функции для неровности h_1 , $A = 1$, $t = 0.75$

Давление p_2^Π определяется равенством:

$$p_2^\Pi = \int_{-\infty}^{\xi_2} \frac{\partial w_2^\Pi}{\partial \xi_1} d\xi_2,$$

где функция w_2^Π является решением краевой задачи для уравнения Пуассона

$$u^*|_{x=x_0} \Delta_{\xi_1, \xi_2} w_2^\Pi = \frac{\partial v_2^\Pi}{\partial \xi_2} \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \Big|_{x=x_0} - \frac{\partial^2 v_2^\Pi}{\partial \xi_2 \partial \tau} u^*|_{x=x_0},$$

$$w_2^\Pi|_{\xi_{1,2} \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \Delta_{\xi_1, \xi_2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}.$$

Отметим, что выражение для самоиндуцированного давления можно записать в виде:

$$\frac{\partial p_2^\Pi}{\partial \xi_1} \Big|_{x=x_0}^{\tau=0} = -v^+|_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\partial u_0^\Pi}{\partial \tau} \Big|_{x=x_0}^{\tau=0}. \quad (3)$$

Это равенство позволяет решать систему уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением (1), (2) независимо от остальных уравнений —

нужно знать лишь значение $f''(0)$, которое известно и приближенно равно 0.33.

Течение в области около неровности описывается задачей (1)–(3), которую будем решать численно с методом установления с помощью конечных разностей. Программная реализация алгоритмов моделирования выполнена на языке C++ с применением библиотек VTK (для визуализации) и CUDA (для распараллеливания явной разностной схемы). Моделирование проводилось для нескольких типов неровностей. В качестве первой была взята неровность типа «горбик», форма которой описывается как:

$$h_1(\xi_1, \xi_2) = A e^{(-\xi_1^2 - \xi_2^2)}, \quad A = const.$$

Для случая $A = 1$ (Рис. 2) получено, что спустя некоторое время после начала моделирования поток становится ламинарным и стационарным (последнее утверждение проверено вычисление сеточной нормы решения — она становится малой). При увеличении до $A = 3$ (Рис. 3) формируется зона отрыва пограничного слоя с вихревым течением. Отметим также, что неровность вытесняет поток преимущественно вверх, а не в стороны.

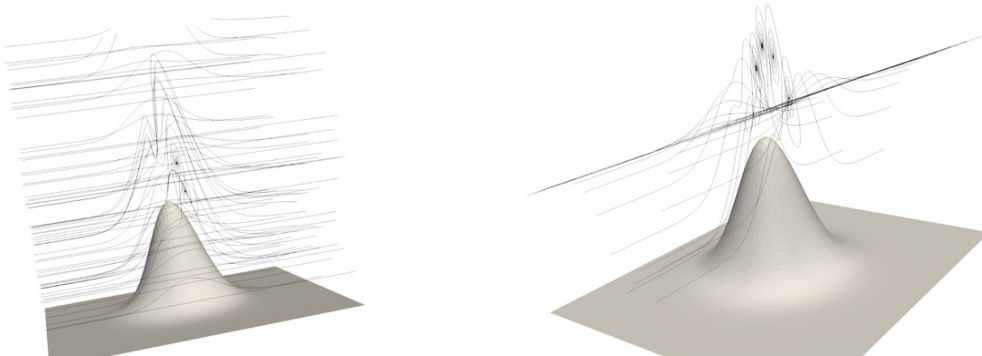


Рис. 3. Линии тока для функции для неровности h_1 , $A = 3$, $t = 1.0$

Список литературы

- [1] *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Double-deck structure of the boundary layer in problems of flow around localized perturbations on a plate // *Math. Notes*. 2015. V. 98. P. 561–571.
- [2] *Smith F.T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate / F. T. Smith // *Journal of Fluid Mechanics*. 1973. No. 57. P. 803–824.
- [3] *Yapaiparvi R.* Double-deck structure revisited // *European Journal of Mechanics – B / Fluids*. 2012. V. 31. P. 53–70.
- [4] *Gianmarco M., Kravtsova M., Ruban A., Sherwin S.* Triple-deck and direct numerical simulation analyses of high-speed subsonic flows past a roughness element // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. V. 774. P. 311–323.



Квазигазодинамические уравнения и опыт численного моделирования турбулентных течений

Елизарова Т.Г.* , Широков И.А.**

*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

**МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва

Актуальной проблемой вычислительной гидродинамики является разработка подходов, позволяющих однородным образом моделировать как ламинарные течения вязкого сжимаемого газа, так и процесс перехода этих течений в турбулентный режим с ростом числа Рейнольдса. В предлагаемом докладе обсуждается квазигазодинамическая система уравнений и возможности ее применения для решения подобного рода задач.

В плане практического применения квазигазодинамическая (КГД) система может рассматриваться как система уравнений Навье–Стокса (НС) с регуляризацией, что позволяет создать на ее основе эффективные конечно-разностные алгоритмы расчета течений газа и жидкости. Эти алгоритмы представляют собой условно-устойчивые однородные разностные схемы с аппроксимацией всех пространственных производных, включая конвективные слагаемые, с помощью центральных разностей. Отличающие КГД систему от системы уравнений НС τ -слагаемые выполняют роль регуляризатора и сглаживают нефизичные осцилляции решения.

При применении указанных алгоритмов к расчетам нестационарных течений были отмечены следующие свойства КГД алгоритма: нестационарное течение возникало без введения какого-либо малого возмущения в область расчета. Для доста-

точно малых значений параметра регуляризации τ и достаточно подробных сеток частота возникающих колебаний не зависела ни от величины τ , ни от шага пространственной сетки. Частоты рассчитанных колебаний и диапазоны параметров потока, характерные для появления или затухания этих колебаний, соответствовали известным экспериментальным закономерностям.

Теоретический анализ τ -слагаемых показал, что эти добавки вносят положительный вклад в производство энтропии системы и тем самым имеют диссипативный характер. В приближении пограничного слоя τ -слагаемые обращаются в ноль, и КГД уравнения в этом приближении совпадают с уравнениями Прандтля. Было показано, что для медленно меняющихся течений, к которым относятся ламинарные колебательные течения, величина добавочных слагаемых имеет порядок $O(\tau^2)$ и сказывается только на точности разностного решения. Однако для быстропеременных течений добавочные τ -слагаемые имеют порядок $O(\tau)$ и могут вносить существенный вклад в решение задачи. Именно такими течениями являются турбулентные течения.

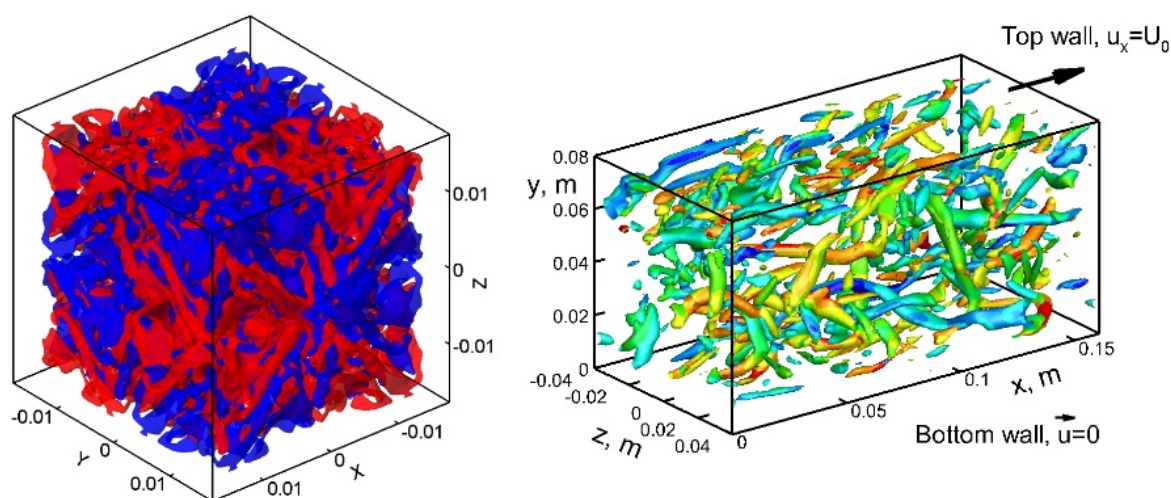


Рис. 1. Распад вихря Тейлора–Грина (слева), турбулентное течение Куэтта (справа)

В настоящее время для численного моделирования турбулентных течений в инженерных приложениях все большее место занимают LES модели. Эти модели представляют собой алгоритмы типа фильтра, где крупные вихревые образования, которые разрешаются сеткой, моделируются явно, а движения среды, масштаб которых не разрешается на имеющейся сетке, считаются осредненными. Последнее приводит к появлению в системе уравнений дополнительной диссипации. Введение такой подсеточной вязкости является способом включить в расчет сток энергии за счет ее диссипации на малых масштабах, которые не разрешаются пространственной сеткой. Чем больше разрешение сетки, тем меньшая часть энергии моделируется подсеточными моделями. Поэтому для относительно грубых сеток качество численного решения определяется используемой моделью подсеточной диссипации. Одной из наиболее успешных подсеточных моделей считается модель Смагоринского. Величина диссипации в этой модели пропорциональна шагу сетки h , а в роли фильтра выступает шаг сетки.

Связывая в КГД модели значение параметра регуляризации τ с шагом пространственной сетки h в виде $\tau \sim h/c$, где c — локальная скорость распространения малых возмущений в газе, мы можем рассматривать τ -вязкость как новый вариант подсеточной диссипации, которая сглаживает, или осредняет пульсации газодинамических величин на пространственно–временных масштабах порядка шага сетки. Подсеточная диссипация в КГД модели принципиально отличается от турбулентной вязкости типа Смагоринского, а именно: τ -

слагаемые имеют другую математическую структуру, и входят не только в уравнения для импульса и энергии, но и в уравнение неразрывности. Последнее моделирует турбулентную диффузию массы, которая является неотделимой составной частью турбулентного перемешивания. На твердой стенке τ -слагаемые обращаются в ноль. Указанные свойства КГД алгоритма открывают широкие возможности и делают этот алгоритм перспективным для прямого численного моделирования турбулентных течений.

В качестве примеров рассмотрены дозвуковые течения сжимаемого газа: распад вихря Тейлора–Грина и турбулентное пристеночное течение Куэтта (Рис. 1). Показано, что КГД модель позволяет в рамках единого алгоритма описать как ламинарный, так и турбулентный режимы течения. При этом для ламинарных течений τ -слагаемые выполняют роль регуляризатора и оказываются малыми, а для турбулентных эти слагаемые не малы и играют роль турбулентной диссипации. Также рассмотрены дозвуковое обтекание осесимметричного каплевидного тела с турбулизатором и сверхзвуковая недорасширенная струя, включающая турбулентные зоны (Рис. 2).

Список литературы

- [1] Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
- [2] Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
- [3] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М.: Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.

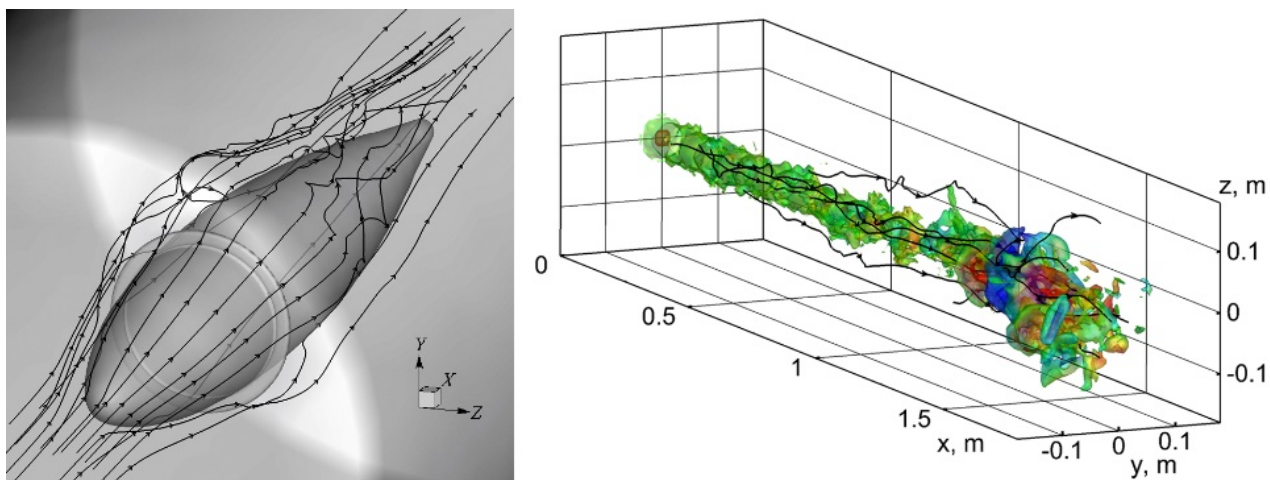


Рис. 2. Обтекание каплевидного тела с турбулизатором (слева), сверхзвуковая недорасширенная струя (справа)

- [4] *Елизарова Т.Г., Никольский П.Н.* Численное моделирование ламинарно–турбулентного перехода в течении за обратным уступом // Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 4. С. 31–40.
- [5] *Shirokov I.A., Elizarova T.G.* Simulation of laminar–turbulent transition in compressible Taylor–Green flow basing on quasi-gas dynamic equations // Journal of Turbulence. 2014. V. 15(10). P. 707–730.
- [6] *Елизарова Т.Г., Широков И.А., Попов М.В.* О возможностях квазигазодинамической модели для численного анализа сверх-

звукового турбулентного течения межзвездного газа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 9. 21 с.

- [7] *Елизарова Т.Г., Широков И.А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.
- [8] *Широков И.А., Елизарова Т.Г.* Моделирование нестационарного дозвукового обтекания осесимметричного тела с турбулизатором // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29(1). С. 37–44.



Вычислительные алгоритмы для моделирования двухфазных сред с химическими реакциями и лазерным излучением¹

Пескова Е.Е.

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет, Саранск

Разработка малотоннажных установок для конверсии природного газа в непредельные углеводороды является актуальной проблемой современных химических технологий. Одним из основных этапов разработки является математическое моделирование физико-химических процессов в среде, позволяющее достаточно точно изучить основные характеристики и динамические эффекты в реакторе. Настоящий доклад посвящен разработке вычислительных алгоритмов для исследования процессов конверсии природного газа с лазерным излучением и каталитическими наночастицами в трубчатом реакторе.

Математическая модель представляет собой уравнения переноса массы газовых компонент смеси, уравнения переноса каждой фракции частиц, уравнение переноса импульса, уравнение для энтропии газа и частиц, уравнение для переноса лазерного излучения, эллиптическое уравнение для давления [1]. Система уравнений записана в цилиндрической системе координат и представляет

собой трехмерную задачу, сведенную к осесимметричной форме. Модель содержит некоторые особенности: числа Маха достаточно малы (порядка 0.001), при этом газ не может быть признан несжимаемым, поскольку активно протекающие в некоторых областях реактора химические реакции приводят к резким изменениям объема и температуры, что влечет отличие дивергенции вектора скорости от нуля. К особенностям течения также можно отнести сочетание разномасштабных процессов: быстрых химических реакций и диссипативных процессов.

Разработка эффективных вычислительных алгоритмов для моделирования подобных процессов является нетривиальной задачей. Явные схемы, отвечающие потребностям высокопроизводительных вычислений, требуют крайне малого шага по времени, а неявные схемы теряют свою эффективность за счет существенной нелинейности правой части системы. В настоящей работе используется алгоритм расщепления по физическим процессам [2] как эффективное средство решения задач, учитывающих процессы разной природы. Интегрирование уравнений химической кинетики, уравнения для интенсивности излучения, уравнения для температуры частиц проведено с использова-

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00202, <https://rscf.ru/project/23-21-00202/>

нием неявного трехстадийного метода семейства Рунге–Кутты пятого порядка точности [3]. Расчет конвективных потоков проведен с использованием потоков Русанова [4] и WENO-схем [5]. Расчет диссипативных потоков проведен по схеме с центральными разностями. Давление в области рассчитывается итерационным методом Якоби.

Поскольку решаемая система уравнений представляет собой смешанную задачу из уравнений параболического и эллиптического типа, шаг интегрирования по времени определяется диффузионными членами, что зачастую определяет большие значения времени расчетов практических задач. Для обхода этой сложности для интегрирования диссипативных членов нами был исследован метод локальных итераций, итерационные параметры для которого вычисляются через упорядочение корней полиномов Чебышева [6]. Таким образом, нам удалось избавиться от ограничения на шаг интегрирования по времени, связанного с диссипативными процессами. Вычислительные эксперименты показали сходимость построенного алгоритма. При проведении сравнительного анализа с алгоритмом, в котором диффузионные потоки рассчитываются по схеме с центральными разностями, получено увеличение шага интегрирования

по времени и уменьшение времени счета более чем в двадцать раз.

На основе разработанного алгоритма проведено исследование осесимметричного течения газа и наночастиц в нагретой трубе с химическими реакциями и лазерным излучением. Получены картины распределения основных компонент смеси и газодинамические характеристики.

Список литературы

- [1] *Snytnikov V.N., Peskova E.E., Stoyanovskaya O.P.* Mathematical Model of a Two-Temperature Medium of Gas-Solid Nanoparticles with Laser Methane Pyrolysis // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023. V. 15. № 5. P. 877 -- 893.
- [2] *Марчук Г.И.* Методы расщепления // М.: Наука. 1988.
- [3] *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems // Berlin: Springer-Verlag. 1996.
- [4] *Русанов В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1961. Т. 1. № 2. С. 267--279.
- [5] *Shu C.W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // *ICASE Report*. 1997. № 97-65. P. 79.
- [6] *Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.* Об одном подходе к интегрированию по времени системы уравнений Навье–Стокса // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020. Т. 60. № 2. С. 267–280.



Моделирование недорасширенной сверхзвуковой струи: ударно-волновые структуры и турбулентность

Широков И.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва

Разработка и валидация методов компьютерного моделирования струйных течений представляется важной задачей, поскольку подобные течения широко распространены. В работе приведены результаты применения численного алгоритма, основанного на регуляризованных, или квазигазодинамических (КГД) уравнениях к моделированию ударно-волновых структур, возникающих в недорасширенной сверхзвуковой газовой струе, при этом моделирование проводится в трехмерной постановке.

В работе [1] приведены экспериментальные результаты, полученные в лабораторных условиях при исследовании истечения воздушных струй в область неподвижного воздуха. Полученные в этих работах осевые профили давления и числа Маха могут служить эталонными данными при валидации методов компьютерного моделирования. В экспериментах наблюдается порядка 10 ударно-волновых структур («бочек»), возникающих при струйных течениях на нерасчетных режимах. Разностные алгоритмы часто не позволяют в нестационарном течении разрешить наблюдаемое в эксперименте число «бочек». Примененный в данной работе КГД алгоритм позволяет приблизить численный расчет к данным эксперимента. Кроме того, КГД алгоритм позволяет проводить прямое моделирование турбулентных областей, возникающих при втекании струи в область неподвижного газа.

Основой для постановки задачи в настоящей работе является один из вариантов эксперимен-

тальной постановки из [1]. Струя круглого сечения втекает в область, имеющую форму прямоугольного параллелепипеда, заполненную неподвижным газом при нормальных условиях. Диаметр струи на входе $D = 0.0508$ м. Газ считаем совершенным, постоянная адиабаты $\gamma = 1.4$, газовая постоянная $R = 287$ Дж/(кг·К), число Прандтля $Pr = 0.737$.

Согласно [1], число Маха на срезе сопла составляет $Ma = 2$, число Маха полностью расширенной струи $Ma_j = 2.236$. Используя изоэнтропические формулы, можно рассчитать параметры газа на срезе сопла: давление $p_0 = 146495$ Па, плотность $\rho_0 = 3.13418$ кг/м³, температура $T_0 = 162.861$ К. В неподвижной области давление $p_1 = 101325$ Па, плотность $\rho_1 = 1.20433$ кг/м³, температура $T_1 = 293.15$ К. Степень нерасчетности струи $p_0/p_1 = 1.46$. Число Рейнольдса, вычисленное по начальной вязкости μ_0 , размеру сопла D и начальной скорости $Ma \cdot c_0$, составляет $Re = 7 \cdot 10^6$.

В качестве математической модели используем КГД уравнения [2], реализованные на равномерной кубической сетке. На диаметр струи на входе приходится от 10 до 30 ячеек сетки. Использу-

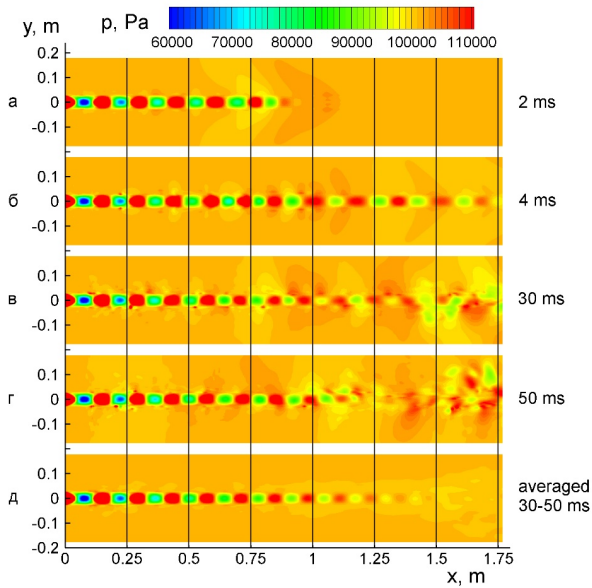


Рис. 1. Мгновенные (а–г) и осредненные от 30 до 50 мс (д) уровни давления в осевом сечении

ем явную схему с центральными разностями по пространству. На равномерной пространственной сетке аппроксимация будет иметь второй порядок точности, по времени схема имеет первый порядок точности. В зависимости от варианта расчета, машинное время составляет от 30 мин до 20 часов, при использовании от 96 до 128 процессорных ядер комплекса K-100 [3] (реализованы параллельные вычисления на основе стандарта MPI).

На Рис. 1 показаны рассчитанные мгновенные уровни давления в сечении $z = 0$ для моментов времени 2, 4, 30, 50 мс, и осредненные от 30 до 50 мс уровни давления, полученные при 10 ячейках

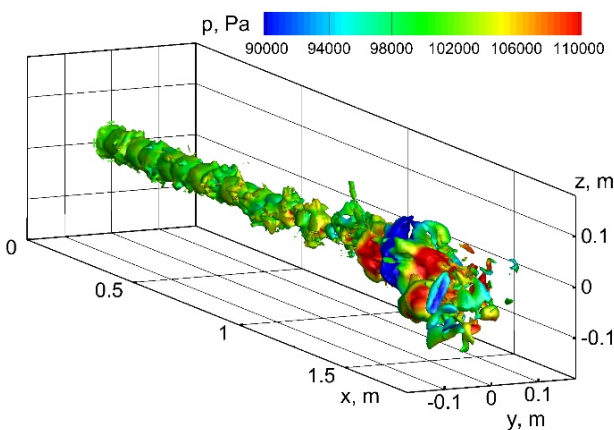


Рис. 2. Мгновенные (слева) и осредненные от 30 до 44 мс (справа) уровни давления, нанесенные на изоповерхности модуля градиента давления при 44 мс

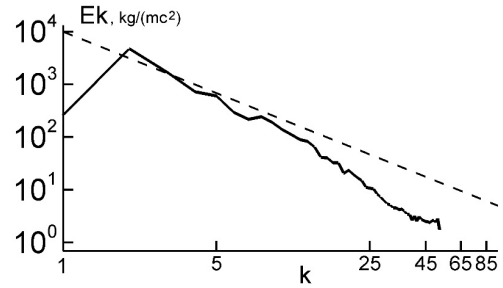


Рис. 3. Энергетический спектр удельной кинетической энергии турбулентной зоны струи при 44 мс (сплошная кривая), прямая с угловым коэффициентом $-5/3$ (пунктир)

на диаметр струи. На Рис. 2 приведены уровни давления, нанесенные на изоповерхности градиента давления при 44 мс в неосредненном виде.

На Рис. 3 сплошной линией показан спектр удельной кинетической энергии нестационарного участка струи, соответствующего Рис. 2. Видно, что применяемый в настоящей работе численный метод позволяет моделировать спектр пульсаций на части инерционного интервала. На Рис. 4 приведены осевые профили осредненного давления: экспериментальные данные [1] и результаты моделирования на основе КГД алгоритма на различных сетках. Результаты на более подробных сетках (кривые 3 и 4) показывают достаточно хорошее соответствие эксперименту.

Автор выражает благодарность профессору Т.Г. Елизаровой за большую помощь в постановке задачи.

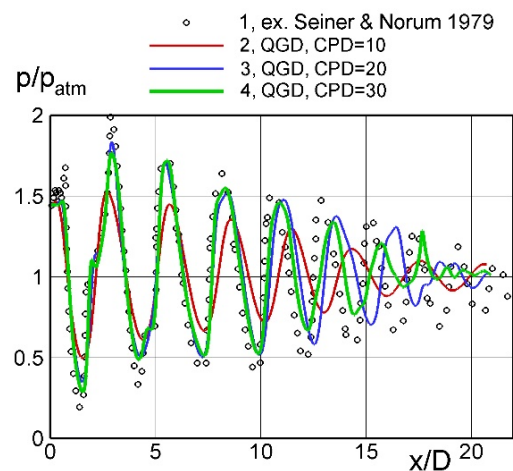


Рис. 4. Осевые профили осредненного нормированного давления, символы 1: эксперимент [1], кривые 2–4: расчеты

Список литературы

- [1] *Seiner J.M., Norum T.D.* Experiments of shock associated noise on supersonic jets // AIAA 12th fluid and plasma dynamic conference. July 23-25, 1979. <https://doi.org/10.2514/6.1979-1526>
- [2] *Елизарова Т.Г., Широков И.А.* Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.
- [3] K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <https://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>



Коллапс кавитационных пузырьков, расположенных в вершинах правильных многогранников¹

Аганин А.А., Халитова Т.Ф.

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН, Казань

Введение

Кавитация используется во многих приложениях для решения таких практических задач, как ультразвуковая очистка, доставка лекарств в клетки, разрушения камней в почках и т.д. Коллапс пузырьков в жидкости вблизи твердого тела может оказывать на него негативное воздействие, такое как эрозия, износ и разрушение. В литературе наиболее изученным является сильное сжатие одиночного пузырька. В случае кластера пузырьков динамика каждого из них может существенно зависеть от соседних пузырьков. По сравнению с одиночным пузырьком пузырьки в кластере могут интенсивнее перемещаться, сильнее воздействовать на поверхности тел, иметь другие степени сжатия. Прямые численные модели на основе уравнений динамики жидкости и газа в частных производных в случае кластера пузырьков требуют больших затрат компьютерного времени [1]. В связи с этим при исследовании таких задач вводились дополнительные упрощения и применялись дискретные модели [2], модели сплошной двухфаз-

ной среды [3], методы граничных элементов [4]. Однако при оценке степеней сжатия и нагрева содержимого пузырьков (максимальных значений температуры и давления в пузырьках), такие модели могут давать большие погрешности. В данной работе применяется подход, в котором сочетаются преимущества дискретных моделей (вычислительная эффективность) и прямого численного моделирования (адекватность).

Особенности коллапса кавитационных пузырьков

Рассматривается совместный коллапс N сферических кавитационных (паровых) пузырьков в воде с давлением p_0 и температурой T_0 . Центры пузырьков находятся на сферической поверхности радиусом R_{cl} в вершинах правильных многогранников (Рис. 1 а)). Начало коллапса (момент времени $t = 0$) физически соответствует моменту перехода от расширения к сжатию паровых пузырьков, образованных лазерным или искровым пробоем жидкости. Поэтому при $t = 0$ скорость пара в пузырьках и окружающей жидкости принимается равной нулю, а давление в пузырьках p_{b0} равным давлению насыщенного пара воды $p_S(T)$ при $T = T_0$. Имеем $p_{b0} < p_0$, так что коллапс пузырьков обусловлен разницей давлений $p_0 - p_{b0}$. В настоящей работе начальный радиус пузырьков

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00100.

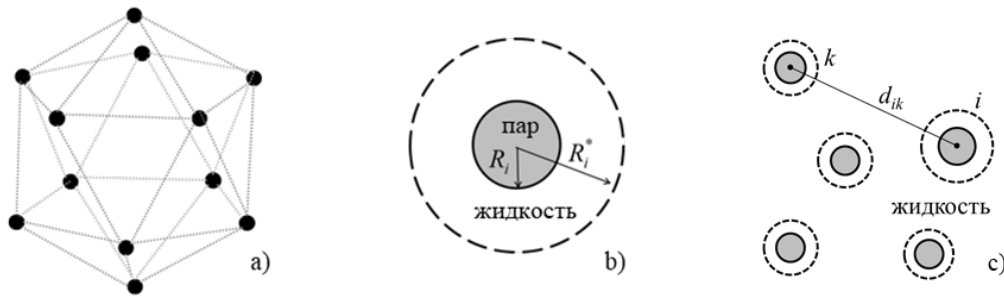


Рис. 1. а) кластер пузырьков с центрами в вершинах икосаэдра ($N = 12$), б) i -й пузырек кластера и окружающий его слой жидкости, в) фрагмент кластера пузырьков

$R_{i0} \approx 2$ мм, а радиус кластера $R_{cl} = 10R_{i0}$, где i — номер пузырька.

Используется математическая модель совместного коллапса кавитационных пузырьков, являющаяся комбинацией модели динамики одиночного кавитационного пузырька [5] и дискретной модели совместной динамики пузырьков в кластере [1]. Модель динамики одиночного кавитационного пузырька [5] применяется для описания динамики пара в пузырьках (т.е. в областях $r_i \leq R_i$) и динамики жидкости в окружающих пузырьки слоях $R_i \leq r_i \leq R_i^*$ (Рис. 1 б)). Здесь r_i — расстояние до центра i -го пузырька, R_i — радиус i -го пузырька, R_i^* — радиус внешней границы слоя. В этой модели учитывается теплопроводность пара и жидкости, вязкость и сжимаемость жидкости, испарение и конденсация на поверхности пузырька, поверхностное натяжение, применяются широкодиапазонные уравнения состояния пара и жидкости. Дискретная модель совместной динамики пузырьков в кластере [1] используется для описания динамики жидкости вне окружающих пузырьки слоев $R_i \leq r_i \leq R_i^*$. Перемещение и деформации пузырьков не учитываются, что приемлемо при достаточно больших расстояниях между пузырьками, когда $\max(R_i/d_{ik})^2 \ll 1$, где d_{ik} — расстояние между центрами i -го и k -го пузырьков (Рис. 1 в)). Расстояние между пузырьками d_{ik} в процессе сжатия полагается постоянным (равным стороне правильного многогранника). Жидкость вдали от пузырьков считается слабо сжимаемой. При этом роль пузырьков играют области $r_i \leq R_i^*$, а роль радиусов этих «пузырьков» играют внешние границы $r_i = R_i^*$.

Рис. 2 а) демонстрирует временные зависимости радиуса пузырьков кластера в том случае, когда пузырьки расположены в вершинах додекаэдра, и временную зависимость радиуса одиночного пузырька при коллапсе и последующем расширении в

варианте с температурой жидкости $T_0 = 20$ °С и ее давлением $p_0 = 20$ бар. Видно, что продолжительность коллапса одиночного пузырька и пузырьков кластера сильно различается. Это свидетельствует о значительном влиянии взаимодействия пузырьков.

Из Рис. 2 б) следует, что и радиальные распределения давления в пузырьках и окружающем их слое жидкости в конце коллапса также различаются. Давление в одиночном пузырьке и пузырьках кластера во втором и третьем из представленных моментов времени является пространственно неоднородным. Отметим, что в конце сжатия давление в пузырьках в кластере в форме додекаэдра оказываются ниже, чем в одиночном пузырьке, что характерно для больших значений давления жидкости p_0 .

Рис. 3 иллюстрирует случай коллапса пузырьков при $T_0 = 20$ °С, $p_0 = 1$ бар. С ростом N масса пузырьков в конце коллапса уменьшается, так что пузырьки сжимаются до меньшего объема и максимум давления в пузырьках (p_{bmax}) оказывается несколько больше (Рис. 3 а)). При этом с ростом N на большей части коллапса скорость сжатия пузырьков уменьшается и лишь в конце коллапса несколько возрастает. На рис. 3 б) видно, что максимум скорости сжатия пузырьков ($|\dot{R}|_{max}$) с повышением количества пузырьков незначительно повышается (на несколько процентов).

Из Рис. 3 б) следует, что при давлении жидкости $p_0 = 1$ бар степени сжатия пузырьков в кластере оказываются выше, чем в одиночном пузырьке. Рис. 3 в) также свидетельствует, что максимальное давление в пузырьках кластера с увеличением радиуса кластера стремится к соответствующему значению в одиночном пузырьке. Это означает, что влияние взаимодействия между пузырьками становится меньше.

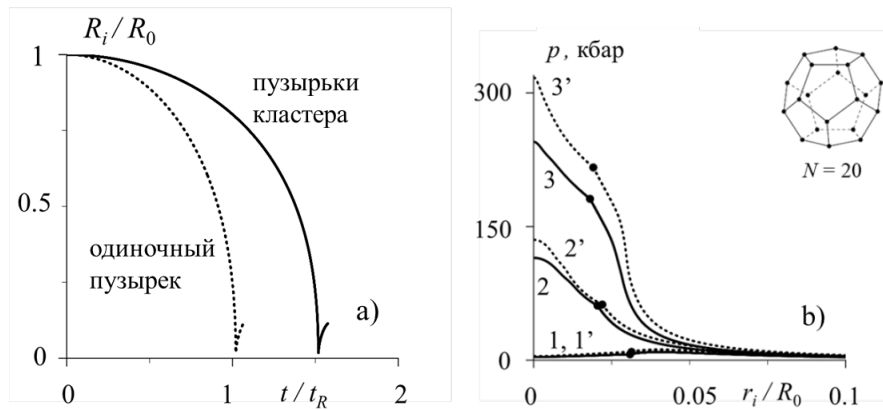


Рис. 2. а) изменение радиуса одиночного пузырька и пузырьков кластера с $N = 20$ при коллапсе при $T_0 = 20$ °С, $p_0 = 20$ бар, t_R – время коллапса пустого пузырька в несжимаемой жидкости, б) изменение радиальных профилей давления в пузырьке и окружающей жидкости в три момента времени финальной стадии сжатия пузырьков (точки соответствуют поверхности пузырьков, сплошные линии – пузырькам кластера, пунктирные – одиночному пузырьку)

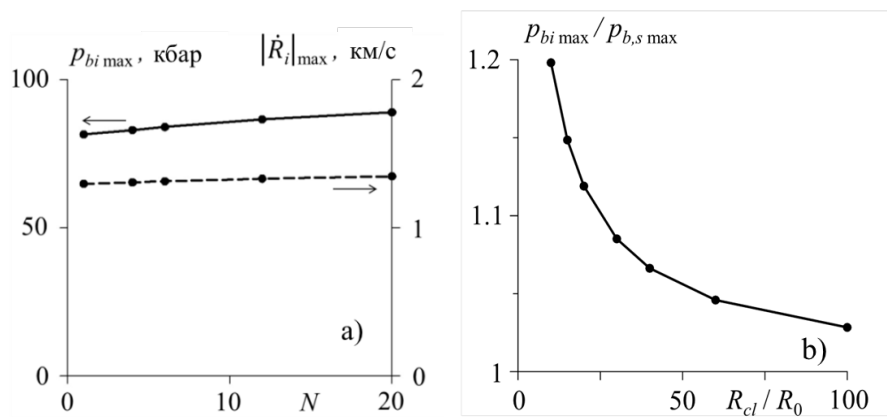


Рис. 3. а) зависимости максимального давления ($p_{bi \max}$) в пузырьках и максимальной скорости сжатия пузырьков ($|\dot{R}_i|_{\max}$) от их числа N в кластере и б) зависимость максимального давления ($p_{bi \max}$) в пузырьках кластера, отнесенного к максимальному давлению ($p_{b,s \max}$) в одиночном пузырьке от R_{cl}/R_0 при $N = 20$ в случае коллапса при $T_0 = 20$ °С, $p_0 = 1$ бар

Список литературы

- [1] Tiwari A., Pantano C., Freund J. Growth-and-collapse dynamics of small bubble clusters // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. V. 775. Pp. 1–23.
- [2] Ida M. et al. Suppression of cavitation inception by gas bubble injection: a numerical study focusing on bubble-bubble interaction // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 76. P. 046309.
- [3] Wang Y.-C., Brennen C. E. Shock wave development in the collapse of a cloud of bubbles // *ASME Cavitation and Multiphase Flow Forum*. 1994. V. 194. Pp. 15–19.
- [4] Blake J. R. et al. Acoustic cavitation: the fluid dynamics of non-spherical bubbles // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 1999. V. 357. Pp. 251–267.
- [5] Нигматулин Р.И., Аганин А.А. и др. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // *ДАН*. 2014. V. 458(3). Pp. 282–286.



Волны давления в трубе, заполненной жидкостью, содержащей пузырьковую зону в виде цилиндра¹

Агишева У.О., Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В данной работе численно изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей пузырьковую область в виде цилиндра. По результатам численных расчетов проанализирована зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от начального содержания пузырьков. Построены карты зон максимального значения давления для рассматриваемых задач в зависимости от величины начального объемного содержания на плоскости «объемное содержание – протяженность пузырьковой области».

Введение

Особенности распространения волн в пузырьковой жидкости связаны с совокупным взаимодействием нелинейных, дисперсионных и диссипативных эффектов. В жидкости с пузырьками свойства практически несжимаемой жидкости, являющейся несущей фазой, кардинально меняются при небольшом по объему (а тем более по массе) добавлении газа (пузырьков), являющегося дисперсной фазой. Особенность пузырьковых жидкостей обусловлена их высокой статической сжимаемостью при сохранении высокой плотности, близкой к плотности жидкости, что в свою очередь приводит к малой равновесной скорости звука. Интересной особенностью пузырьковой жидкости в дина-

мических процессах является проявление инерции жидкости при изменении объема смеси за счет сжатия или расширения пузырьков [1]. Интерес к пузырьковым кластерам в жидкости обусловлен, в частности, созданием гидроакустических аналогов лазерных систем, которые сначала могут поглощать внешнее воздействие, а потом переизлучать эту энергию с существенным увеличением амплитуды и возможной концентрацией энергии в заданном направлении [2].

Данная работа является продолжением исследований из [3–5] и в ней рассмотрена динамика волн в цилиндрическом канале с содержащей пузырьковую область в форме цилиндра (Рис. 1). Анализируется зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера, а также от начального объемного содержания пузырьков.

Постановка задачи

Рассмотрим двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержа-

¹Исследование выполнено за счет средств гранта РНФ № 21-11-00207 (<https://rscf.ru/project/21-11-00207/>).

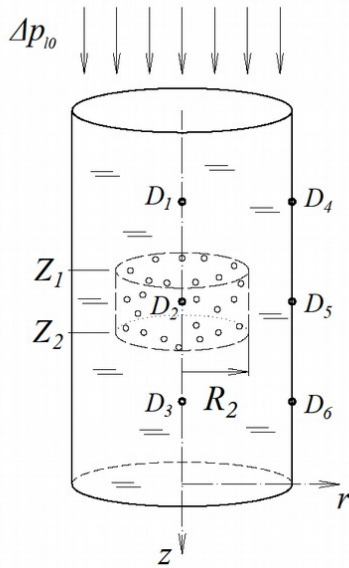


Рис. 1. Схема задачи. Z_1 и Z_2 – координаты кластера, R_2 – внешний радиус кластера. D_1 – D_6 – мнимые датчики

щей область в форме цилиндра, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью, Рис. 1. Волновое движение в канале инициируется мгновенным повышением давления на границе $z = 0$ на некоторое амплитудное значение Δp_{10} и поддерживается все время расчета. Требуется определить динамику волнового процесса в канале при $t > 0$.

Для описания волнового движения, принимая общие допущения для пузырьковых жидкостей, используется система макроскопических уравнений

масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии [6].

Результаты расчетов

Зависимость максимального давления на оси и стенке трубы от протяженности пузырьковой области представлена на Рис. 2. Отметим, когда амплитуда первоначальной волны типа «ступенька» равна 0.3 МПа. Из представленных рисунков видно, что максимальное значение давления в канале регистрируется на оси канала для обоих рассмотренных случаев, хотя и на стенке присутствует небольшое увеличение давления. Видно, что для случая объемного содержания 10^{-2} на оси регистрируется давление, которое превышает начальное более чем в 50 раз, а для случая объемного содержания 10^{-3} данная величина достигает значения всего порядка 24. Это связано с различием скорости распространения звука в пузырьковой жидкости для рассматриваемых объемных содержаний. Для 10^{-2} скорость распространения звука порядка 110 м/с, когда для 10^{-3} она достигается порядка 440 м/с. Также можно заметить, что для рассмотренных величин для объемного содержания 10^{-2} существует ярко выраженный пик (когда протяженность пузырьковой области равна 0.05 м), где фиксируется максимальное значение. Справа и слева от этого пика картина фиксации максимального значения давления имеет симметричную картину. Для случая 10^{-3} данный пик смещается правее.

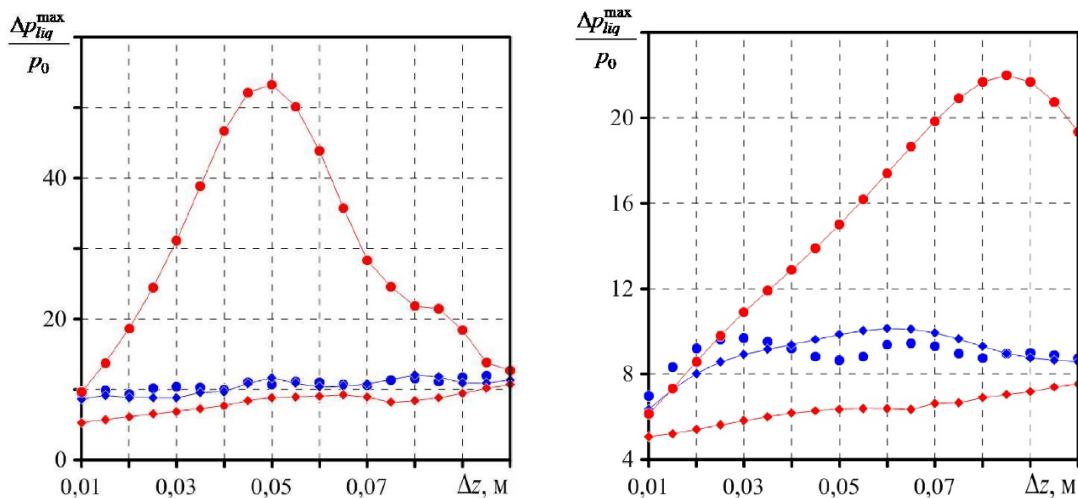


Рис. 2. Зависимость максимального давления на оси и внешней стенке трубы от протяженности пузырьковой области Δz . Символы \bullet соответствуют центру канала, \blacklozenge – стенке канала. Красным цветом представлен сплошной цилиндр, синим – область в форме проколотого цилиндра. Левый рисунок для объемного содержания пузырьков 10^{-2} , правый – 10^{-3}

Список литературы

- [1] *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987. 386 с., 464 с.
- [2] *Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вшивков В.А. и др.* Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Докл. РАН. 2001. Т. 381(6). С. 773–776.
- [3] *Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Агишева У.О.* О фокусировке волн давления в тороидальном пузырьковом кластере // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27(1). С. 9–17.
- [4] *Галимзянов М.Н.* Динамика импульсного сигнала в цилиндрическом канале с жидкостью, содержащем сферический пузырьковый кластер // Вестник Башкирского университета. 2022. Т. 27(2). С. 275–286.
- [5] *Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н., Кочанова Е.Ю.* Динамика волны да-физический журнал. 2023. Т. 96(4). С. 1008–1016.
- [6] *Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю.* Взаимодействие волны давления в цилиндрическом канале со сферическим пузырьковым кластером // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64. № 2(378). С. 96–104.



Фрагментация заряженных капель воды после гравитационного отрыва от сопла¹

Андросенко В.Н.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Влияние внешнего электрического поля на картину течения и структуру оторвавшейся капли жидкости было установлено еще в ранних экспериментах [1, 2]. В условиях, когда капля в процессе отрыва приобретает электрический заряд, её дальнейшее развитие идёт по пути не только изменения формы, но и деления на отдельные фрагменты, число и форма которых зависит от величины напряжённости электрического поля, формирующего заряд [3].

В настоящей работе приводятся результаты опытов по высокоскоростной видеорегистрации падения капли воды, оторвавшейся под собственным весом от сопла диаметром 1 мм.

Опыты проведены на стенде «Моделирования динамики капельных течений в электрическом поле» [3] из состава комплекса «ГФК ИПМех РАН» [?].

Для возможности регистрации момента падения капли был разработан прибор, устанавливаемый на стенд и позволяющий после падения капли выдать на систему регистрации и высокоскорост-

ную видеокамеру сигнал с длительностью 100 мс через настраиваемое время задержки.

Запускающий импульс формируется на основе перекрытия лазерного луча падающей каплей и изменения сигнала фотодиода, который меняется соответственно изменению интенсивности падающего на него излучения. Фотодиод и лазерный диод расположены на расстоянии 60 мм от места пересечения с падающей каплей для предотвращения электрического пробоя через прибор. Запускающий импульс длительностью 100 мс формируется с плавно настраиваемой временной задержкой в диапазоне от 0 до 560 мс, необходимой для синхронизации момента пролета капли в поле зрения объектива скоростной камеры с её запуском.

В данном эксперименте капля приобретала заряд в электрическом поле, которое создавалось источником высокого напряжения $U = 0 - 30$ кВ, приложенного к металлизированному наконечнику сопла (аноду) и алюминиевому электроду (катоде), помещенному в приемный резервуар. В настоящих опытах высота падения капли равнялась 50 м. Скорость видеосъемки — 5000 к/с.

В отсутствии электрического поля ($U = 0$) отрыв капли идёт по классическому сценарию [3]: между маточной жидкостью (у сопла) и каплей формируется тонкая перемычка, нижний конец которой (примыкающий к капле) истончается быстрее

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

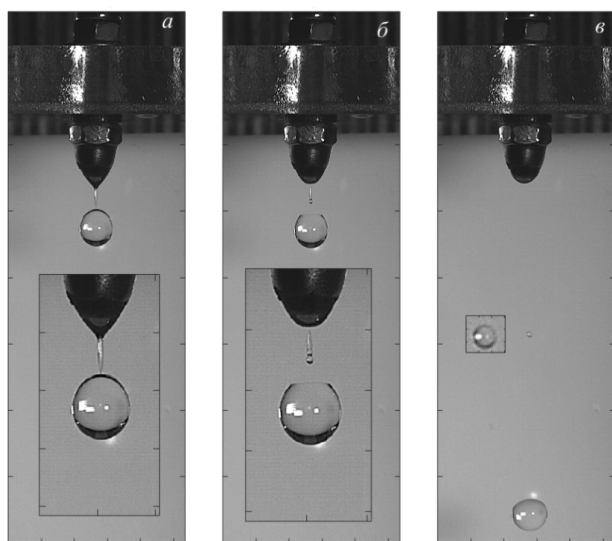


Рис. 1. Отрыв капли воды при $U = 0$ кВ. Время от момента полного отрыва, $a-v$: $t = -1.4, 0, 72$ мс. Деление на основном фото (X и Y) – 5 и 10 мм, на вставках (X и Y) $a, б$ – 5 мм, $в$ – 0.5 мм

верхнего (Рис. 1а). В результате капля отделяется от перемычки, которая приобретает форму фигуристой сосульки (Рис. 1б), но затем сворачивается в компактное тело – спутник – и продолжает падение вместе с основной каплей (Рис. 1в). Формы капли и спутника непрерывно меняются, становясь в отдельные моменты сферическими (Рис. 1в, вставка).

Приложенное напряжение приводит к изме-

нению сценария отрыва и формы отрывающейся капли, однако радикальные изменения начинаются при напряжении свыше 10 кВ. На Рис. 2 показан случай $U = 16$ кВ. Здесь, в отличие от нулевого напряжения, отрыв начинается со стороны маточной жидкости (Рис. 2а), и к этому моменту капля и перемычка составляют единое тело в форме булавы. «Булава» превращается в сложный комплекс, нижняя часть которого оформляется в виде капли, а верхняя (перемычка) представляет собой многозвенный набор из бусинок, диаметр которых уменьшается в направлении капли (Рис. 2б, вставка).

Ещё через 0.6 с. происходит полный отрыв капли от нижнего конца перемычки. К этому моменту перемычка теряет целостность – от неё отделяется группа нижних бусинок (Рис. 2в), и после серии превращений к моменту 18.2 мс основная масса перемычки стягивается в компактный объём, а нижние бусинки образуют отдельный небольшой фрагмент в форме шара (Рис. 2г, вставка).

Остаток перемычки (Рис. 2б, вставка) представляет собой периодическую структуру, в которой, как следует из пространственного спектра (Рис. 3), наиболее выделяются два масштаба – 0.3 и 0.4 мм.

При данной величине напряжения ($U = 16$ кВ) последующие отрывы происходят с примерно постоянным периодом, который существенно короче, чем в отсутствие электрического поля. Однако начальные геометрические параметры «булавы» не повторяются, что порождает многообразие структур, образующихся при её распаде.

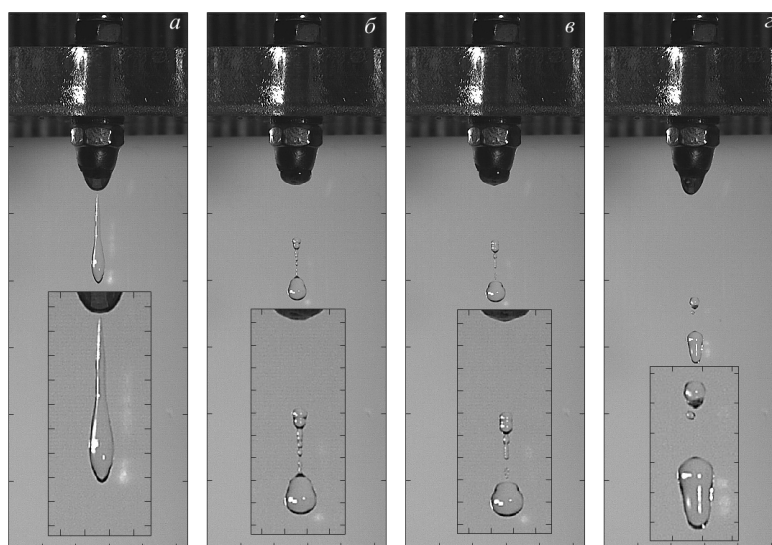


Рис. 2. Отрыв капли воды при $U = 16$ кВ. Время – от момента отрыва верхнего конца, $a-г$: $t = 0, 7.4, 8, 18.2$ мс. Деление на основном фото (X и Y), 5 и 10 мм, на вставках (X и Y) – 2 мм

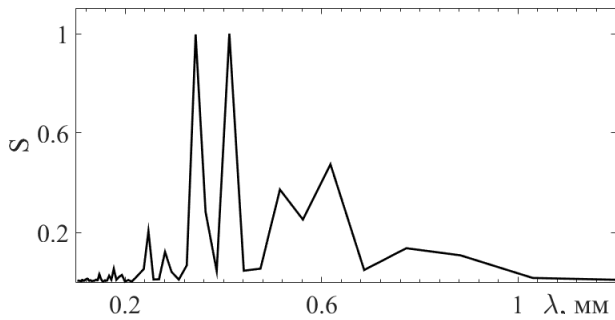


Рис. 3. Спектр масштабов структуры перемычки на вставке Рис. 2б

Список литературы

- [1] *Zeleny J.* The electrical discharge from liquid points, and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces // *Physical Review*. 1914. V. 3(2). P. 69–91. doi:10.1103/physrev.3.69.
- [2] *Zeleny J.* On the conditions of instability of electrified drops, with application to the electrical discharge from liquid points // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1914. V. 18. part 1. p. 71. DOI:https://doi.org/10.1103/PhysRev.3.69.
- [3] *Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е., Андросенко В.Н.* Моделирование влияния электрического поля на капельные течения // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т. 24, вып. 4.



Моделирование микровзрывного распада двухжидкостных капель¹

Антонов Д.В.* , Зубрилин И.А.** , Сажин С.С.***,**** , Скрипов П.В.***** , Стрижак П.А.* , Яновский Л.С.*****

*Томский политехнический университет, Томск

**Самарский национальный исследовательский университет, Самара

***Университет Брайтон, Брайтон, Великобритания

****Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

*****Институт теплофизики Уральского отделения РАН, Екатеринбург

*****Центральный институт авиационного моторостроения, Москва

В работе приведены результаты исследования процессов микро-взрывной фрагментации двухжидкостных капель типичных для различных энергетических и топливных технологий жидкостей.

Экспериментальная методика

Для исследования процессов микро-взрывной фрагментации составных многокомпонентных капель использовались типичные для различных энергетических и топливных технологий жидкости: керосин (Jet A-1), дистиллированная вода (ГОСТ 6709-72). Объемная концентрация компонентов при проведении экспериментов составляла 90 об. % керосина и 10 об. % дистиллированная вода. Выбор компонентов состава, а также их концен-

траций обусловлен тем, что в предыдущих исследованиях [1] для данной топливной композиции зарегистрированы условия устойчивой реализации процессов микровзрыва и паффинга в широком диапазоне температур (450...850 К) и размеров капель (0.5...1.5 мм). Методика генерации составных капель вода/керосин аналогична использованной в [2]. На Рис. 1 показаны типичные видеокдры нагрева, испарения и распада составных капель вода/керосин.

Для исследования время паффинга композитных капель воды/керосина применялся экспериментальный стенд, аналогичный представленному в [3]. При проведении экспериментов регистрировалось время задержки начала распада составных многокомпонентных капель. Систематические погрешности определения времени паффинга не превышали ± 1 мкс. Случайные погрешности определялись в виде доверительных интервалов по формуле $\Delta = t(\alpha_c, n) \cdot S$, где $t(\alpha_c, n)$ — коэффициент Стьюдента, зависящий от числа n (число измерений) и

¹Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (Грант № 23-69-10006, <https://rscf.ru/project/23-69-10006>).

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
© Антонов Дмитрий Владимирович, dva14@tpu.ru
© Зубрилин Иван Александрович, zubrilin.ia@ssau.ru
© Сажин Сергей Степанович, S.Sazhin@brighton.ac.uk
© Скрипов Павел Владимирович, pavel-skrupov@bk.ru
© Стрижак Павел Александрович, pavelspa@tpu.ru
© Яновский Леонид Самойлович, yanovskiy@ciam.ru

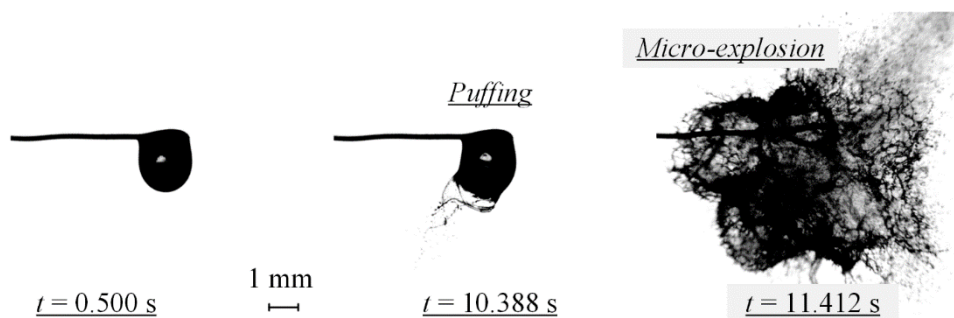


Рис. 1. Типичная динамика паффинга/микровзрыва в экспериментах. Капля композита керосин/вода с начальным радиусом $R_{d0} \approx 1$ мм и объемной долей воды $V_{w0} \approx 10$ об. % помещалась в муфельную печь с атмосферным давлением, температура $T_g \approx 573$ К

выбранной величины доверительной вероятности α_c (принималось 0.95), S — среднеквадратичное отклонение. Для всех экспериментальных точек, представленных на зависимостях в настоящей работе, проводилось не менее 5–10 экспериментов при идентичных условиях (температуре газа и начальных размерах капель).

Результаты экспериментального исследования

На Рис. 2 представлены зависимости время паффинга/микровзрыва каплей воды/керосина (τ_p) от температуры газа (T_g) (a — $R_{d0} = 1$ мм, объемное содержание воды 10 %) и начальных радиусов каплей (R_{d0}) (b — $T_g = 573$ К, объемное содержание воды 10 %) при эксперименте (синяя сплошная кривая) и при моделировании, предполагающей, что паффинг/микровзрыв начинается, когда температура на границе раздела вода/керосин ста-

новится равной температуре нуклеации воды (зеленая пунктирная кривая). Получено удовлетворительное (в пределах доверительного интервала) согласие результатов экспериментов и прогнозируемых времен задержек микро-взрывного распада в диапазоне температур газа (473–573 К) и начальных размеров каплей (0.5–0.6 мм). С увеличением температуры газа и начальных размеров каплей рассогласование между теорией и экспериментом увеличивалось, что связано главным образом со смещением водяного ядра относительно центра в экспериментах. Подробно влияние данного эффекта обсуждалось в [4].

Для регистрации средней температуры воды в каплях вода/керосин при нагреве до распада использован метод Planar Laser Induced Fluorescence (PLIF). Для реализации метода PLIF использованы: высокоскоростная видеокамера, макрообъектив, светофильтр для нейтрализации избыточно-

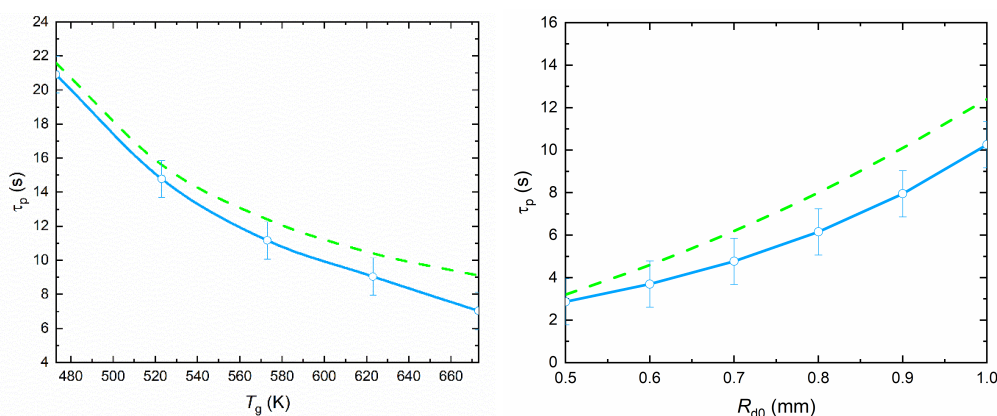


Рис. 2. Время до паффинга/микровзрыва каплей воды/керосина (τ_p) в зависимости от температуры газа (T_g): (a) — $R_{d0} = 1$ мм, объемное содержание воды 10 %) и начального радиуса каплей (R_{d0}) (b) — $T_g = 573$ К, объемное содержание воды 10 %), наблюдаемое экспериментально (синяя сплошная кривая) и предсказанное моделью, предполагающей, что вспучивание/микровзрыв начинается, когда температура на границе раздела вода/керосин становится равной температуре зародышеобразования воды (зеленая пунктирная кривая)

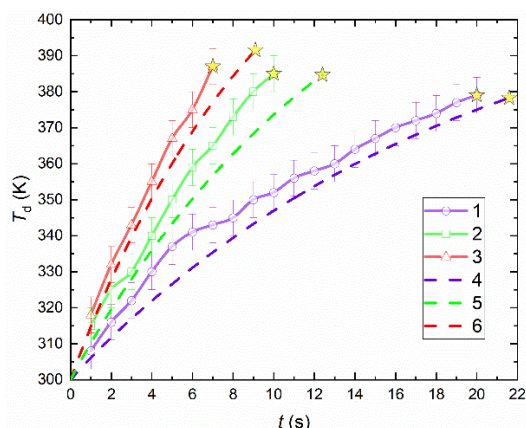


Рис. 3. Результаты экспериментальных измерений средней температуры воды в составе каплей вода/керосин ($R_{d0} = 1$ мм, объемная доля воды 10 об. %) при $T_{gas} = 473$ К (1), 573 К (2) and 673 К (3) (сплошные линии) и результаты моделирования при $T_{gas} = 473$ К (4), 573 К (5) and 673 К (6) (пунктирные линии)

го лазерного излучения, флуоресцентный краситель Rhodamine B, непрерывный лазер, коллиматор для формирования лазерного ножа с варьируемым углом раскрытия, персональный компьютер с ПО Davis. В процессе проведения эксперимента капли вода/керосин рассекались по оси симметрии (через центр масс) лучом непрерывного лазера. Полученные видеокadres с изображением капля вода/керосин регистрировались высокоскоростной видеокамерой и обрабатывались с применением ПО Davis. Толщина лазерного ножа составляла 0.05 мм. Обеспечивалась минимальная постоянная плотность лазерного излучения в измерительной области. При больших значениях тол-

щины лазерного ножа последний мог оказывать существенное влияние на характеристики прогрева капли. Измерения проводились не менее чем для 20–30 значений температур газов в диапазоне от 473 К до 673 К с целью получения калибровочной кривой при удовлетворительной точности. На Рис. 3 приведены результаты экспериментальных измерений средней температуры воды в составе капля вода/керосин при $T_{gas} = 473$ К, 573 К and 673 К (сплошные кривые) и результаты моделирования (пунктирные кривые). Получено удовлетворительное согласования результатов моделирования и эксперимента по изменению средней температуры водяного ядра во времени, отклонения не превышают 5 %. Причинами отклонения результатов моделирования от экспериментов являются: сдвиг водяного ядра относительно центра в экспериментах, наличие дополнительного подвода тепла за счёт лазерной подсветки, наличие примесей в виде твердых частичек и газовых пузырьков, выступающих в роли готовых центров парообразования.

Список литературы

- [1] Antonov D.V., Piskunov M.V., Strizhak P.A. Breakup and explosion of droplets of two immiscible fluids and emulsions // Int. J. Therm. Sci. 2019. V. 142. P. 30–41.
- [2] Antonov D.V., Kuznetsov G.V., Strizhak P.A., Rybdylova O., Sazhin S.S. Micro-explosion and autoignition of composite fuel/water droplets // Combust. Flame. 2019. V. 210. P. 479–489.
- [3] Antonov D.V., Nyashina G.S., Strizhak P.A., Romanov D.S. Micro-explosive droplet fragmentation of environmentally promising coal-water slurries containing petrochemicals // Fuel. 2021. V. 283. No. 118949.
- [4] Castanet G., Antonov D.V., Strizhak P.A., Sazhin S.S. Effects of water subdroplet location on the start of puffing/micro-explosion in composite fuel-water droplets // Int. J. Heat Mass Transf. 2022. V. 186. No. 122466.



Моделирование динамики капли на основе уравнений Навье–Стокса–Кана–Хилларда¹

Галеева Д.Р.*, Киреев В.Н.**,**

*Уфимский университет науки и технологий, Уфа

**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Во многих сферах деятельности актуальна проблема разрушения стойких эмульсий типа «вода в масле» [1]. Поэтому изучение поведения капель одной вязкой жидкости в другой под действием различных физических полей (тепловых, акустических, электромагнитных) представляет научный интерес.

Поведение капли может моделироваться разными методами: методом Volume of fluid (VOF) или уравнениями Навье–Стокса–Кана–Хилларда [2], которые были признаны многообещающим подходом для моделирования несмешивающихся многофазных потоков. Эта модель сочетает в себе фазовую динамику уравнения Кана–Хилларда [3] с гидродинамикой уравнения Навье–Стокса.

В настоящей работе рассматривается деформация капли, движущейся в потоке вязкой жидкости, в плоском канале. Поле двухфазного течения моделируется путем решения уравнений Навье–Стокса в одножидкостной постановке, а для отслеживания деформации границы капли используется уравнение Кана–Хилларда, в котором граница раздела

сред имеет малую, но конечную толщину:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) &= -\nabla p + \\ + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) \right) &- \kappa \eta \nabla \varphi, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varphi &= \nabla \cdot (M(\varphi) \nabla \eta), \end{aligned}$$

где \vec{u} — вектор скорости, p — давление, φ — переменная фазового поля, ρ и μ — плотность и динамическая вязкость, η — химический потенциал, $M(\varphi)$ — функция мобильности, κ — коэффициент поверхностного натяжения.

Модель фазового поля характеризуется введением вспомогательной функции φ — переменной фазового поля, которая локализует отдельные фазы [4]:

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{вне капли,} \\ -1, & \text{внутри капли.} \end{cases}$$

Для задания химического потенциала используется следующее выражение:

$$\eta = (\varphi^3 - \varphi) - \varepsilon^2 \Delta \varphi,$$

где ε — толщина оболочки капли.

¹Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 19-11-00298.

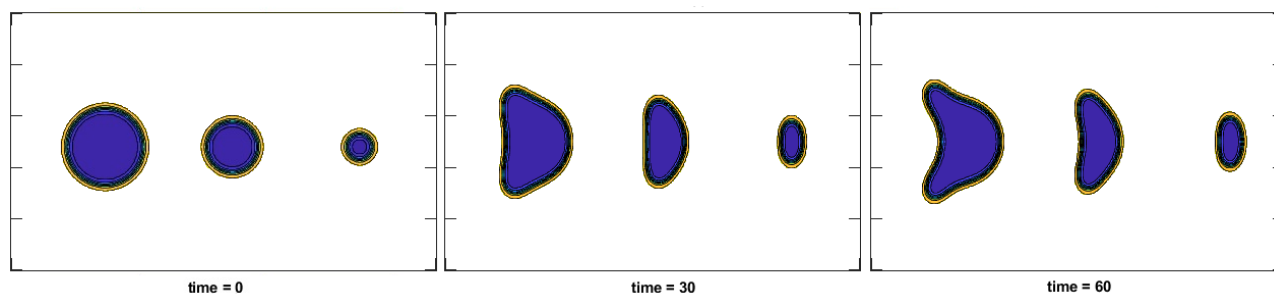


Рис. 1. Деформация капель разного радиуса под действием параболического поля скорости в различные моменты времени

На поверхности капли задаются два граничных условия:

$$\nabla\varphi \cdot \vec{n} + \|\nabla\varphi\| \cos \alpha = 0,$$

$$\nabla\eta \cdot \vec{n} = 0.$$

В начальный момент времени капля имеет форму круга радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) и задается уравнением:

$$\varphi = \tanh \left(\frac{R - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\sqrt{2}\varepsilon} \right).$$

Численное решение уравнений математической модели осуществлялось с использованием метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE [5], который был модифицирован для расчета переменной фазового поля [6].

На рис. 1 показаны результаты тестового расчета по деформации трех капель разных радиусов с течением времени под действием параболического поля скорости. Видно, что в соответствие с

физическими представлениями степень деформации капли зависит от ее радиуса.

Список литературы

- [1] Тухбатова Э.Р., Мусин А.А., Юлмухаметова Р.Р., Ковалева Л.А. Исследование влияния тепловой конвекции на процесс разрушения водонефтяной эмульсии при СВЧ воздействии // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22(4). С. 930–935.
- [2] Lovric A., Dettmer W.G., Peri D. Low order finite element methods for the Navier-Stokes-Cahn-Hilliard equations // arXiv:1911.06718].
- [3] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy // The Journal of Chemical Physics. 1958. 28(2). P. 258–267.
- [4] Vorobev A., Prokopen S., Lyubimova T. Phase-field modelling of a liquid/liquid immiscible displacement through a network of capillaries // Journal of Computational Physics. 2020. V. 421. P. 109–147.
- [5] Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости // М.: МЭИ, 1984. 145 с.
- [6] Li Y., Jeong D., Shin J., Kim J. A conservative numerical method for the Cahn-Hilliard equation with Dirichlet boundary conditions in complex domains // Computers and Mathematics with Applications. 2013. V. 65(1). P. 102–115.



Слияние свободно падающей капли с покоящейся принимающей жидкостью: энергетика и структура течений¹

Есина Е.В., Чашечкин Ю.Д.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Проведена цветная фото- и видеорегистрация картины течения, возникающего в процессе слияния свободно падающей капли с покоящейся жидкостью при комнатной температуре. Прослежена деформация свободной поверхности и картины переноса вещества в различных режимах. Обсуждаются механизмы распада капли на волокна в импактном режиме. Параметризация процессов проводится на основе полной системы фундаментальных уравнений с физически обоснованными граничными условиями.

Массовость исследований капельных течений (по данным SCOPUS число ежегодных публикаций по теме «Drop impact» превышает тысячу) объясняется рядом причин — фундаментальностью темы, объединяющей классическую и атомно-молекулярную физику, развитием вычислительной и экспериментальной техники, ростом числа практических применений научных результа-

тов в технологиях био-, нефте-, химический, металлургической, фармацевтической и других отраслей промышленности. Научной основой проводимых экспериментов служит система фундаментальных уравнений механики жидкостей, включающая уравнения неразрывности, переноса импульса, энергии и вещества [1] с уравнениями состояния для потенциала Гиббса и плотности вязкой стратифицированной сжимаемой жидкости с физически обоснованными граничными условиями [2]. Анализ системы с учетом условия совместности обеспечивает вывод дисперсионных соотношений для волн и дополняющих лигаментов в слабо диссипативных средах в линейном и слабонелинейном приближениях [2, 3].

Теория течений жидкости развивается в модели сплошной среды. Реальные жидкости и газы состоят из атомов и молекул, которые образуют объединения различного состава. Регистрируются ассоциаты, комплексы, клатраты, кластраты, войды с отдельными атомами, кластеры и другие группы со связями физической и химической природы с линейными размерами от десятков нано- до микрометра и временем существования — от пикодо десятков секунд. Энергия непрерывно эволюционирующих компонентов структуры, которая накапливается при их формировании и освобож-

¹Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П). Эксперименты проведены на стендах УИУ «ГФК ИПМех РАН».

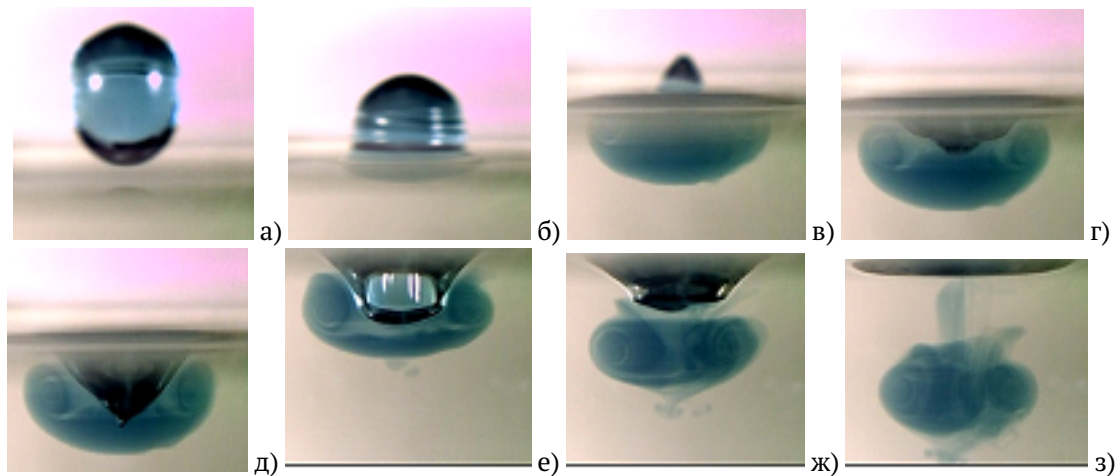


Рис. 1. Слияние капли разбавленного раствора чернил (1:1000) с водой в интрузивном режиме ($D = 4.3$ мм, $U = 0.34$ м/с, $En_{\sigma} = 4 \mu\text{J}$, $En_k = 2.24 \mu\text{J}$, $Re = 1460$, $Fr = 2.8$, $We = 6.7$, $Bo = 2.5$, $Oh = 0.0018$, $R_{En} = En_k/En_{\sigma} = 0.57$, $R_W = 5 \cdot 10^4$): а)–з) – $t = -1.75, 3, 11, 14.5, 16.25, 20.5, 28, 38.5$ мс

дается при разрушении, обеспечивает текучесть сред. Конверсия внутренней энергии обеспечивает формирование лигаментов — быстрых тонких струек (пелены, ручейков, триклов) во всех видах течений.

Полная система уравнений и граничных условий определяет размерные параметры задачи: потенциалы Гиббса капли G_d , воздушной среды G_a и принимающей жидкости G_t , плотности сред $\rho_{d,a,t}$, кинематическая $\nu_{d,a,t}$ и динамическая вязкости; коэффициенты диффузии κ_d и поверхностного натяжения: полный σ_d^a и нормированный $\gamma_d^a = \sigma_d^a/\rho_d$, эквивалентный диаметр D , площадь поверхности S_d , объем V , масса M , контактная скорость капли U ; доступная потенциальная поверхностная энергия (ДППЭ) $En_{\sigma} = \sigma_d^a S_d$, кинетическая энергия $E_k = MU^2/2$, потенциальная энергия в гравитационном поле с ускорением свободного падения g .

Полная энергия падающей капли $E_d = E_p + E_k + E_{\sigma}$ складывается из потенциальной энергии E_p , экстенсивной кинетической энергии с дифференциалом $dE_k = 0.5\rho U^2 dV$, а также доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) распределенной в приповерхностном шаровом слое толщиной в размер молекулярного кластера $\delta_{\sigma} \sim 10^{-6}$ см массой M_{σ} .

Отношения физических величин образуют наборы собственных временных и пространственных масштабов, определяющих требования к методике измерений, а также безразмерные параметры — числа Рейнольдса $Re_d = UD/\nu_d$, Шмидта $Sc = \nu/\kappa_d$, Вебера $We_d = \rho U^2 D/\sigma_d^a$, Бонда $Bo = gD^2/\gamma_d^a$, Онезорге $Oh_d = \nu_d/\sqrt{\gamma_d^a D}$, Фруда $Fr_d = U^2/gD$, которые используются при описании течений.

Атомно–молекулярные процессы преобразования ДППЭ и передачи кинетической энергии капли характеризуются отношениями компонентов энергии $R_{En} = En_k/En_{\sigma}$ и их плотностей $R_W = En_k M_{\sigma}/En_{\sigma} M$. Доля поверхностной энергии в полном балансе в условиях данных опытов меняется в широких пределах. В то же время, отношение плотностей поверхностной и кинетической энергии всегда большое.

Методика экспериментов и обработки данных разрабатывалась с учетом критерия регистрации крупномасштабных компонентов капельных течений — интрузий, каверны, венца, всплеска, капиллярных волн, и выделения тонких компонентов — первичных брызг, шипов и волокон. Опыты выполнены на стендах Уникальной исследовательской установки УИУ «ГФК ИПМех РАН» с применением фото- и видеотехники [4].

Выборка видеок кадров, иллюстрирующая последовательную перестройку картины течения в интрузивном режиме слияния капли раствора чернил с водой, когда кинетическая энергия капли меньше ДППЭ, приведена на Рис. 1. Тонкое радиальное течение при первичном контакте жидкостей убирает разделяющие свободные поверхности, остатки которых выносятся на периферию течения. При этом в жидкости формируется непрерывное распределение плотности.

Выступающий остаток капли в сформировавшейся единой среде плавно перетекает в равновесное состояние, жидкость капли вливается в толщу принимающей жидкости и формирует линзовидное окрашенное пятно. С задержкой около $\Delta t = 10$ мс образуется быстро растущая коническая ка-

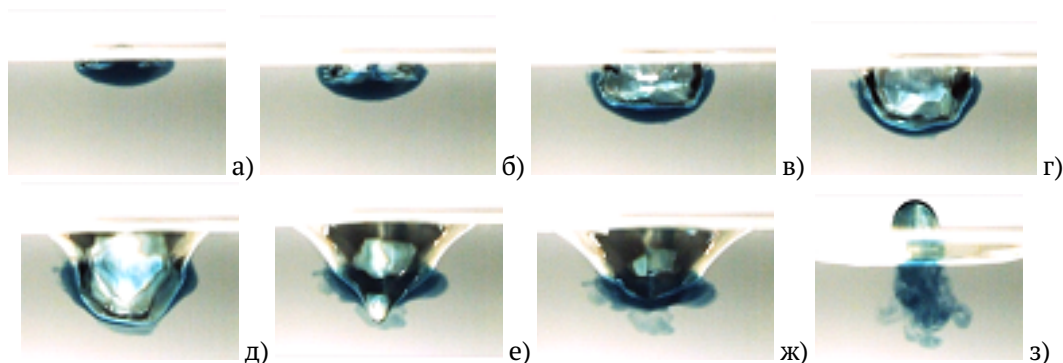


Рис. 2. Слияние капли разбавленного раствора чернил (1:800) с водой в импактном режиме ($\mu = 0.01$ г/см·с, $\rho = 1$ г/см³, $\sigma = 73$ г/с², $D = 4.3$ мм, $U = 1.0$ м/с, $En_\sigma = 4.2\mu\text{J}$, $En_k = 20.8\mu\text{J}$, $Re = 4300$, $Fr = 24$, $We = 60$, $Bo = 2.5$, $Oh = 0.0018$, $R_E = 4.95$, $R_W = 1.7 \cdot 10^{-4}$): а)–з) – $t = 3.5, 5.25, 9.0, 11.5, 18, 23.5, 25.25, 43.5$ мс

верна, которая трансформирует пятно в тороидальное кольцо и сбрасывает его толщу жидкости. Далее кольцо погружается под действием сил плавучести.

В выборке, приведенной на Рис. 2, каверна начинает формироваться с момента первичного контакта, если кинетическая энергия капли превосходит ДППЭ. При этом жидкость капли частично распределяется по поверхности каверны и венца в форме отдельных волокон, образующих линейчатые и ретикулярные формации, частично просачивается в толщу жидкости в форме тонких волокон. Волокна, разделенные прослойками принимающей жидкости, образуют слой жидкости промежуточной плотности, примыкающий к дну каверны.

Постепенно диффузия сглаживает тонкое волокнистое распределение плотности в слое. Одновременно формируются границы промежуточного слоя. При коллапсе каверны и начале формирования всплеска стенку каверны продавливают тонкие струйки в узлах ретикулярной формации. При этом в принимающей жидкости формируется новая система волокнистых петель (Рис. 2 з)).

Картина волокнистого распределения вещества капли в пелене на вершине венца, шипов и облака брызг на начальном этапе слияния капли чернил с водой приведена на Рис. 3 а).

Оценка скорости брызг по длине штрихов, которые рассматриваются как размазанные изображения летящих капелек, показывает, что ее значение больше чем на порядок превосходит скорость капли.

По мере развития течения высота венца растет, число и длина шипов уменьшается, диаметры капелек на их вершинах увеличиваются. Сложная картина распределения пигмента в капельках — следствие вовлечения в быстрое течение обеих контактирующих жидкостей. Наличие пигмента отмечается на всей поверхности венца. Быстрые струйки с повышенным содержанием пигмента оставляют яркие тонкие следы на поверхности венца. Сохранение четкости линейчатой структуры течения по мере эволюции течения — свидетельство стабильности азимутального положения быстрых окрашенных струек на границе области контакта сливающихся жидкостей, которые выносят окра-

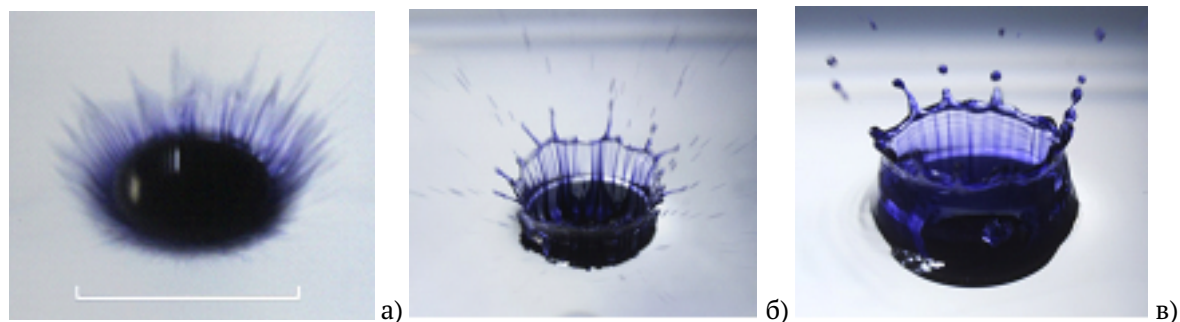


Рис. 3. Эволюция венца и поля брызг при погружении капли чернил ($D = 0.42$ см, $U = 3.9$ м/с, $Re = 16800$, $Fr = 390$, $We = 930$, $Bo = 2.4$, $Oh = 0.0018$, метка – 0.5 см)

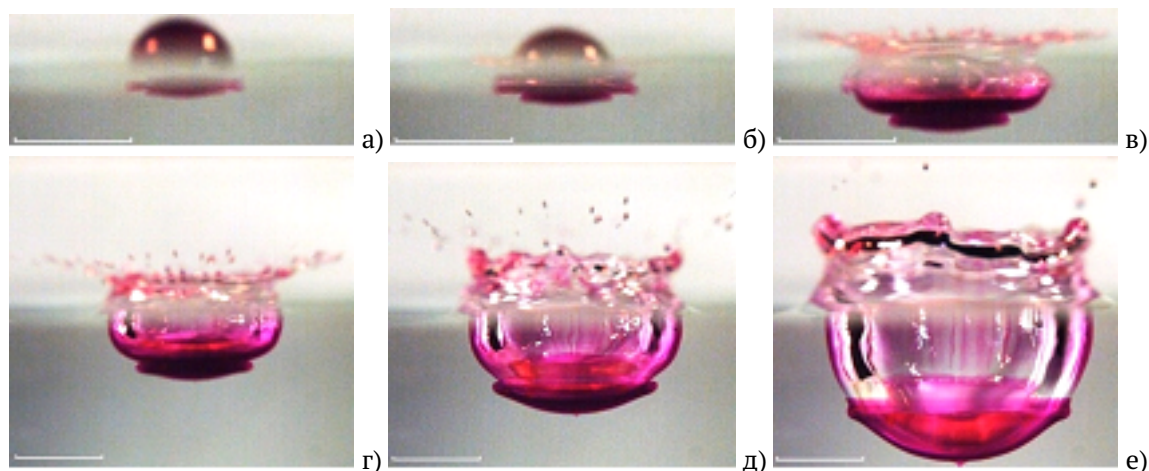


Рис. 4. Картина растекания капли разбавленного раствора перманганата калия (1:100) в воде ($\rho_d = 1.0 \text{ г/см}^3$, $\sigma_d^a = 73 \text{ г/с}^2$, $\nu_d = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$, $D = 4.3 \text{ мм}$, $U = 3.1 \text{ м/с}$, $E_\sigma = 4.2 \mu\text{J}$, $E_k = 200 \mu\text{J}$, $Re = 13300$, $Fr = 230$, $We = 570$, $Bo = 2.5$, $Oh = 0.0018$, $R_{En} = E_{nk}/E_{n\sigma} = 48$, $R_W = 1.66 \cdot 10^{-3}$): а)-е) – $t = 0.25, 0.5, 1.25, 2.25, 4.0, 8.25 \text{ мс}$

шенное вещество из области слияния, где идет уничтожение свободных поверхностей контактирующих жидкостей.

Яркость окраски прозрачного раствора перманганата калия в воде позволяет одновременно проследить эволюцию базовых структурных компонентов картины слияния жидкостей в импактном режиме — промежуточного слоя, каверны, венца, пелены, шипов и облака брызг. Выборки из видеофильма течения представлены на Рис. 4. Быстро растекающаяся жидкость распределяет вертикальную компоненту импульса падающей капли и формирует плоское дно каверны, к центру которого примыкает узкий слой растущих вертикальных волокон в принимающей жидкости. По мере роста глубины каверны ее форма скругляется, промежуточный слой становится структурно выделенным. Постепенно диффузия выравнивает распределение плотности в слое, который сохраняет свою идентификацию. На последнем кадре выделяются вертикальные волокна в центральной части каверны, более плотно окрашенная нижняя часть и «шапочка» промежуточного слоя, покрывающая дно.

Как показывает анализ полученных оптических изображений течений, возникающих в процессе растекания свободно падающей капли, в формировании структуры течения важную роль играют процессы переноса и трансформации энергии жидкостей, обеспечивающие прямую передачу энергии в течения тонкого масштаба — лигаменты. Именно лигаменты, сингулярно возмущенные компоненты полного решения линеаризованной [1, 2]

и слабо нелинейной системы фундаментальных уравнений механики жидкостей [3], обеспечивают причинную связь между компонентами течений различной природы — струйками, всплеском, венцом каверной, газовыми пузырьками, пакетами поверхностных и акустических волн, физические свойства, пространственные и временные масштабы которых заметно отличаются.

Актуальной задачей теоретической и экспериментальной гидродинамики становится изучение нелинейных моделей течений с учетом всей совокупности компонентов — и крупных (волн, вихрей, струй) и тонких лигаментов.

Авторы благодарны к.ф.-м.н. А.Ю. Ильиных за помощь в проведении экспериментов.

Список литературы

- [1] Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10(4). P. 286.
- [2] Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11(8). P. 402.
- [3] Chashechkin Yu. D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics*. 2021. V. 9(6). P. 586.
- [4] Чашечкин Ю.Д. Акустика и гидродинамика импакта капли: два режима излучения звуковых пакетов // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2023. V. 1(106). P. 23–43.
- [5] Chashechkin Yu.D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // *Axioms*. 2023. V. 12(4). P. 374.



Тонкие структуры картины быстрого переноса вещества капли, свободно падающей в глубокую жидкость, в интрузивном и импактном режимах¹

Ильиных А.Ю.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Методами высокоскоростной видеорегистрации экспериментально прослежена эволюция тонкой картины переноса вещества при импакте свободно падающей капли в покоящейся принимающей жидкости в интрузивном, импактном и переходном режимах, которые задаются энергетическими параметрами задачи. Проанализированы картины течения в боковой и фронтальной проекциях. Основное внимание в работе уделено тонкоструктурным механизмам переноса вещества капли. Рассматриваются макроскопические механизмы переноса энергии течением со скоростью u и волнами с групповой скоростью c_g , а также микроскопический атомно-молекулярный перенос (медленный диссипативно-диффузионный, и быстрый, обусловленный уничтожением свободных поверхностей контактирующих жидкостей и конверсии доступной потенциальной поверхностной энергии

(ДППЭ) в другие формы [1]). Быстрые процессы преобразования ДППЭ в другие формы на кольцевой границе области слияния жидкостей способствуют формированию тонких струек и генерации капиллярных волн в принимающей жидкости [2].

В число размерных параметров задачи входят условия эксперимента (диаметр $D = 0.42 \div 0.45$ см и скорость в момент контакта $U = 0.34 \div 4.3$ м/с (высота свободного падения $h = 1 \div 200$ см), ускорение свободного падения g и физические свойства взаимодействующих сред: плотности $\rho_{d,t,e}$ кинематические $\nu_{d,t,e}$ и динамические $\eta_{d,t,e}$ вязкости, коэффициенты поверхностного натяжения σ_d^a, σ_t^a и их отношения, где индекс d соответствует капле, t — принимающей жидкости, e — среде, в которой происходит взаимодействие (воздух). В работе оценивались кинетические $E_k = MU^2/2$ и поверхностные $E_\sigma = \sigma S_d$ энергии капель. Температуры жидкостей и среды считаются равными. Набор безразмерных параметров задачи включает числа Рейнольдса $1450 < Re < 18000$, Фруда $2.8 < Fr < 450$, Бонда $Bo = 2.39$, Онезорге $Oh = 0.0018$, Вебера $6.7 < We < 1100$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598-П «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

ния переноса массы, импульса и энергии, а также потенциал Гиббса с дополнительными членами для поверхностного и приповерхностного слоев [3]. Поверхностная энергия равномерно распределена в тонком слое толщиной порядка размера молекулярного кластера $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$ см. При слиянии контактирующих жидкостей за время $\Delta t_\sigma = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$ с происходит аннигиляция приповерхностных слоев с трансформацией высвобожденной энергии (малой по значению, но большой по плотности) в другие формы — в выражении для потенциала Гиббса $dg_s = -sdT + VdP + \sigma dS_b + \mu_n dN_n$ исчезает дополнительный член σdS_b , зависящий от коэффициента поверхностного натяжения, дифференциала площади контактируемой поверхности.

Опыты выполнены на стенде ТБП, входящем в состав комплекса «УНУ ГФК ИПМех РАН». Капли чистой воды и водных растворов перманганата калия, медного купороса, железного купороса, ализариновых чернил, поваренной соли или пищевой соды падали в стеклянный бассейн, заполненный частично дегазированной водопроводной водой. На основе анализа большого числа проведенных опытов в широком диапазоне значений высот (скоростей в момент контакта, кинетических энергий) свободно падающих капель картины переноса вещества разделяются на режимы, которые определяются отношением кинетической и потенциальной энергии: интрузивный для $E_k < E_\sigma$, режим всплеска при $E_k > E_\sigma$ и переходный $E_k \approx E_\sigma$.

Для интрузивного режима, который наблюдается при малых контактных скоростях и, характерно плавное втекание вещества капли с образованием кольцевой тонкоструктурированной области с масштабами петлистых структур $\Delta l_\varphi = 0.5$ и 0.3 мм у поверхности принимающей жидкости (Рис. 1, а), а в толще жидкости — компактного объема (интрузии), опережающего формирование газовой поло-

сти (каверны) на время 10–12 мс (Рис. 1, б, в) [4]. Первичный контакт происходит без образования брызг и выраженной пелены. Группы кольцевых капиллярных волн наблюдаются как на поверхности остатка погружающейся капли $\lambda_d = 0.3 \div 0.5$ мм, так и на поверхности принимающей жидкости $\lambda_d = 0.5 \div 0.8$ мм (от области слияния к вершине капли и радиально). Каверна конической и полусферической формы продвигается в толщу жидкости и отесняет интрузию от свободной поверхности. Интрузия трансформируется в сферический вихрь с примыкающими петлистыми структурами, радиально сосредоточенными в кольцевой структурированной области на поверхности принимающей жидкости.

Для импактного режима слияния характерны большие скорости капель, каверна начинает формироваться практически с момента первичного контакта, вслед за тонкой переходной областью мелкомасштабных возмущений, включающих вещество капли, которое также распределяется по поверхности жидкости в виде вихрей, отдельных волокон, образующих линейчатые и сетчатые картины на поверхности каверны и венца и, далее, вытянутых петлистых структур. Волокнистый характер распределения пигмента сохраняется в ходе последующей эволюции течения [5]. Степень выраженности отдельных структурных компонентов течений зависит от параметров задачи, в частности — контактной скорости капли, коэффициента диффузии, относительной разности физических величин (вязкость, плотность, коэффициент поверхностного натяжения).

В области перехода от режима интрузии к импактному при сохранении выраженной опережающей интрузии сокращается время задержки начала формирования каверны. В форме дна интрузии выражены шероховатости размахом до $\Delta r_i \sim 0.1$ мм.

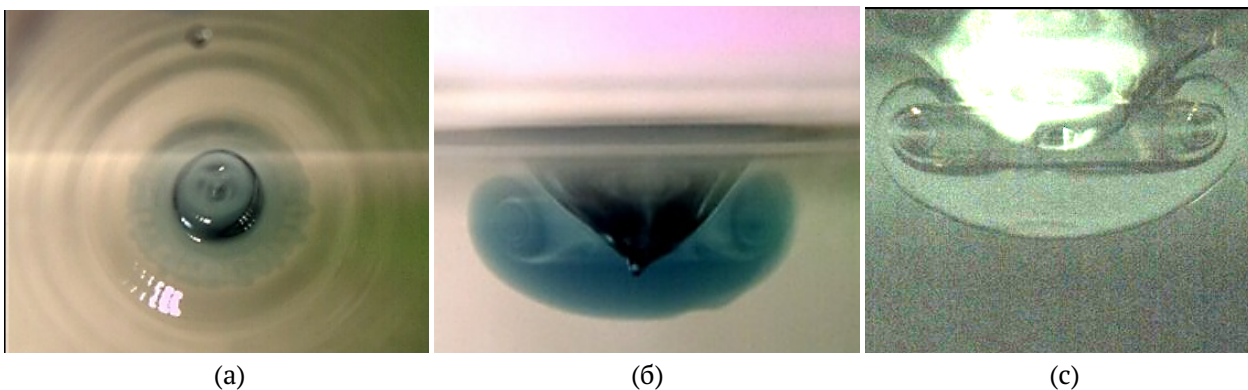


Рис. 1. Картина течений в режиме интрузии ($U = 0.34$ м/с, $E_\sigma = 4$ мкДж, $E_k = 2.24$ мкДж): а) радиальные петли (вид сверху), б, в) трансформация интрузии в вихревое кольцо при импакте капли чернил и раствора соды

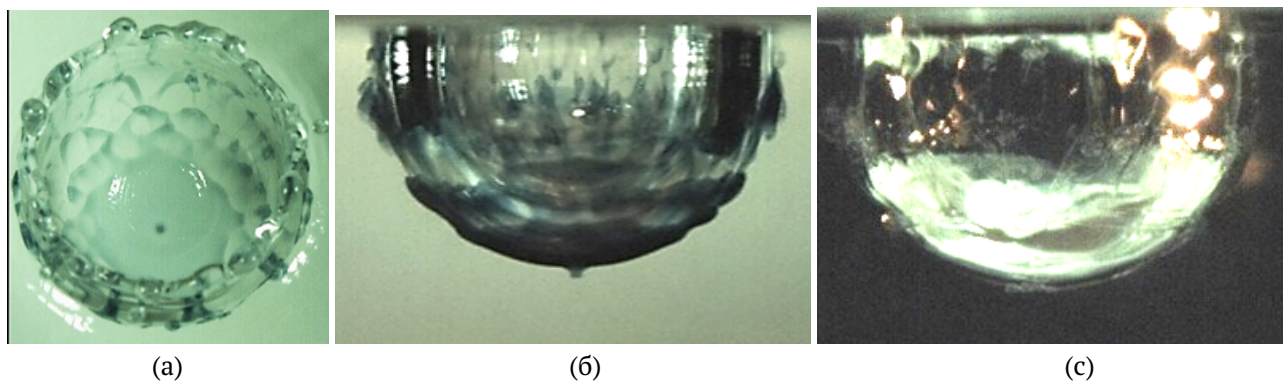


Рис. 2. Картина течений в режиме импакта ($U = 3.1$ м/с, $E_k = 200$ мкДж, $E_\sigma = 4.2$ мкДж): а) сетчатая картина распределения вещества (вид сверху), б, в) тонкий переходный слой на границе каверны

Начальная скорость формирования каверны и ее максимальные размеры увеличиваются с увеличением контактной скорости капли, при этом скорость интрузии практически не меняется, что приводит к опережению фронта каверны и трансформации интрузии в тонкий переходный слой, покрывающий поверхность каверны. Заострение дна каверны покрывает собственная окрашенная оболочка толщиной ~ 1.5 мм. Положение нижней кромки интрузии изменяется монотонно со временем: при большой высоте падения на всем интервале наблюдений, а при малых высотах — до момента начала интенсивного схлопывания каверны, прилегающий к поверхности интрузии.

Заключение

В капельных течениях проявляется действие нескольких механизмов передачи энергии с собственными временными и пространственными масштабами, как макроскопических — с течениями и гравитационно-капиллярными, так и микроскопических — диффузионных и быстрой конверсии ДППЭ в другие формы. Наиболее заметно

действие конверсии ДППЭ при слиянии существующих и формировании новых свободных поверхностей. Различие картин течений в интрузивном и импактном режимах связано с особенностями действия механизмов переноса импульса и энергии в окрестности подвижной границы пятна контакта [5].

Список литературы

- [1] Чашечкин Ю.Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2021. Т. 1. № 94. С. 73–92.
- [2] Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Формирование системы наклонных петель в течениях импакта капли // Доклады РАН. 2021. Т. 499. № 1. С. 48–57.
- [3] Chashechkin Yu.D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. 2021. V. 9. No. 586.
- [4] Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // ДАН. 2021. Т. 496. № 1. С. 45–50.
- [5] Chashechkin Yu.D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // Axioms. 2023. V. 12, Iss.4, 374.



Перенос вещества составной капли в интрузивном и импактном режимах¹

Ильиных А.Ю., Хайирбеков Ш.Х.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Исследование переноса вещества импакта капли в глубокой жидкости продолжается более полутора сотен лет, начиная с работ [1, 2] где был рассмотрен процесс формирования многоярусной системы вихревых колец, и остается актуальным ввиду теоретической обоснованности и ряда прикладных задач: методы обеспечения противопожарной безопасности [3], химической, нефтехимической и биологической промышленности. Повышение пространственного и временного разрешения экспериментальной техники, применение коротких импульсов видимого и рентгеновского диапазона, применение химически активных веществ позволяют проследить наиболее тонкие и быстрые компоненты картин течения импакта капли [4].

В большинстве экспериментальных, численных и теоретических работ рассматривается импакт однородных капель (невязких [5], вязких [6], суспензий для различных значений чисел подобия). Для регистрации процесса переноса вещества капли в экспериментальных исследованиях капельная жидкость трассируется пигментами [5, 6] или

мелкими частичками. В реальных технологических процессах [7] капли могут быть образованы несмешивающимися жидкостями: составными (ядро и оболочка) или составленными, когда все компоненты имеют границу жидкость–газ.

В формировании структуры течений важная роль принадлежит процессам передачи, трансформации и диссипации энергии. В задачах импакта однородных капель в зависимости от энергетических параметров задачи выделяются три режима переноса вещества капли в принимающей жидкости [8]. При малых контактных скоростях, когда кинетическая энергия капли меньше доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) $E_\sigma > E_k$, плавно втекающая капля образует компактную интрузию чечевицеобразной формы в толще жидкости и окрашенное кольцо на свободной поверхности. Формирования каверны у поверхности принимающей жидкости начинается с задержкой в 10–12 мс. В ходе дальнейшей эволюции течения интрузия трансформируется в погружающееся вихревое кольцо, порождающее каскад вторичных вихрей.

При больших контактных скоростях, когда кинетическая энергия капли много больше ДППЭ $E_k > E_\sigma$, каверна начинает формироваться с момента первичного контакта. В области контакта сред формируются тонкий опережающий каверну

¹Работа выполнена по теме Государственного задания (№ государственной регистрации 123021700044-0).

переходный слой, толщина которого стремительно уменьшается по мере развития каверны, и быстрые струйки, растекающиеся в тонком слое в окрестности следа уничтожаемой контактной поверхности, на дне каверны и стенках венца. Волокнистые следы струек образуют характерные линейчатые и сетчатые структуры на поверхности жидкости. Непрерывно перестраивающаяся волокнистая картина распределения вещества длительное время сохраняется в толще принимающей жидкости.

В данной работе экспериментально прослежены картины распределения вещества составных капель (состоящих из двух несмешивающихся жидкостей: ядро и оболочка) по деформированной поверхности принимающей жидкости в импактном и интрузивном режимах.

Размерные параметры задачи включают физические параметры четырех взаимодействующих сред (вместо трех в классической постановке задачи), которые характеризуются термодинамическими и кинетическими параметрами, а также условиями опытов. К физическим параметрам задачи относятся: плотности (воздуха ρ_a , внутренне и внешней каплей ρ_{ed} , ρ_{id} и принимающей жидкости ρ_t), четыре кинематических v_d^n , v_d^s , v_a , v_t и динамических вязкостей μ_d^n , μ_d^s , μ_a , μ_t ; шесть полных $\sigma_{d,n}^s$, $\sigma_{d,n}^a$, $\sigma_{d,s}^a$, σ_t^a , $\sigma_t^{d,n}$, $\sigma_t^{d,s}$ коэффициентов поверхностного натяжения для поверхностей раздела сред, коэффициенты диффузии вещества $\kappa_t^{d,n}$, $\kappa_t^{d,s}$ в принимающей жидкости, условия опытов (эквивалентные диаметры D_n и D_s и скорость капли U в момент первичного контакта или высота свободного падения H).

В экспериментах методом коаксиальных трубок создавались капли ализариновых чернил диаметром $D \sim 0.5$ см, покрытые выраженной масляной пленкой подсолнечного масла, которые затем свободно падали с высоты $H = 1 \div 60$ см в глубокую чистую воду.

При взаимодействии смешивающихся жидкостей вещество капли распределяется дискретным

образом по возмущенной поверхности принимающей жидкости, собирается в тонких линейчатых элементах — лиганентах [5, 9]: вертикальных линейчатых структурах в верхнем ряду короны и сетчатой структуре на поверхности каверны. Картина распределения вещества составных капель иная. В короткое время порядка $\Delta t_s \sim 10^{-10}$ с при контакте принимающей жидкости и внешней капли уничтожается поверхностный слой толщиной в несколько молекулярных кластеров $\delta_s \sim 10^{-8}$ см. За более длительное время $\Delta t_\sigma = \delta_\sigma / U \sim 10^{-8}$ с происходит уничтожение приповерхностных слоев и взаимодействие жидкостей в пятне контакта. ДППЭ трансформируется в другие формы, в частности в энергию новых компонентов течений.

В режиме интрузии составных ядерных капель короткий промежуток времени (до 4 мс) сохраняется оболочка, капля погружается как твердое тело с незначительными деформациями (Рис. 1, а). После разрыва оболочки (Рис. 1, б) вещество ядра начинает просачиваться в воду в форме интрузии с короткими кольцевыми возмущениями на ее поверхности (Рис. 1, в) и трансформируется в компактный погружающийся объем (Рис. 1, г).

При слиянии ядерных составных капель с водой в режиме интрузии движение ядерного вещества происходит по возмущенной поверхности каверны и венца, покрытых веществом оболочки (подсолнечного масла), распределенной тонким слоем по деформированной поверхности принимающей жидкости. Картина распределения ядерного вещества капли не гладкая, состоит из ряда секторов, образованных линиями, располагающимися от дна каверны к вершине шеврона венца, внутри секторов периодически расположены горизонтальные периодические полосы с шагом 0.5 мм (Рис. 2, а).

Изменение освещенного вдоль одного из секторов картина распределения вещества ядерной капли при слиянии с водой в режиме импакта представлено на Рис. 2, б.

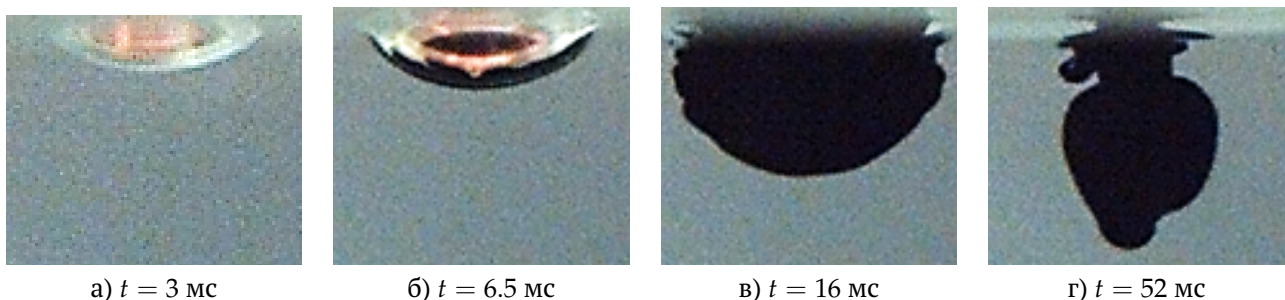


Рис. 1. Основные этапы эволюции картины течения при импакте составной капли с чернильным ядром и масляной оболочкой

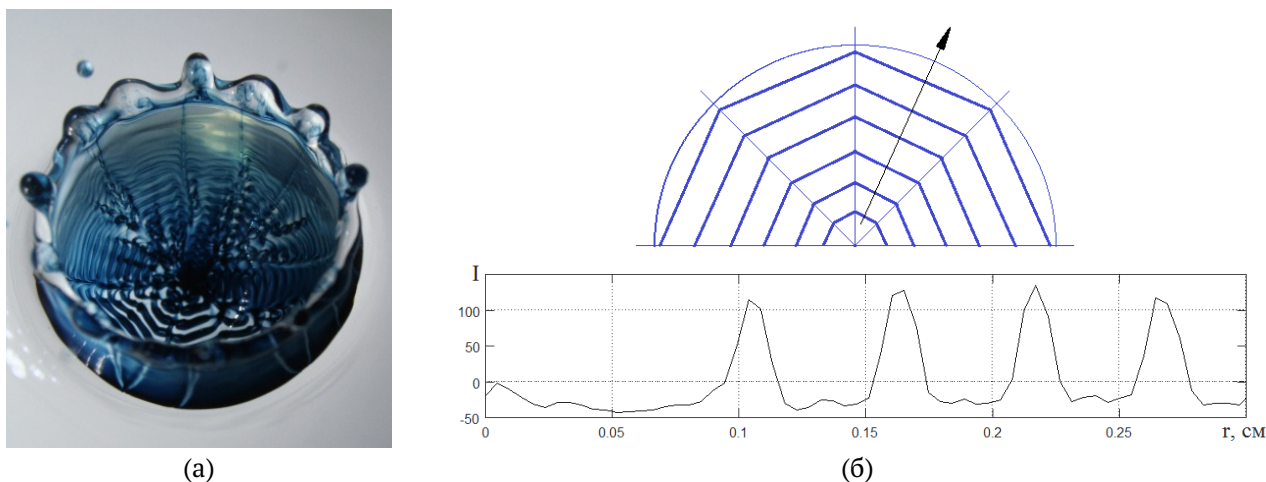


Рис. 2. Картина распределения вещества составной капли (капля чернил в масляной оболочке): а) результаты эксперимента, б) модель (верхний рисунок) и оценка масштабов структур

Заключение

Детали картины распределения вещества составной капли существенно отличаются от распределения капли однородной: сетчатая структура сменяется секторальной с тонкими горизонтальными периодическими структурами — лигаментами. Периодические окрашенные структуры указывают на возмущенность поверхности, по которой распределяется вещество внутренней капли.

Список литературы

- [1] *Rogers W.B.* On the formation of rotating rings by air and liquids under certain conditions of discharge // *Am. J. of Sci. and Arts.* 1858. 2nd Ser. V. 5. Art. 33. P. 246–258.
- [2] *Thomson J.J., Newall H.F.* On the formation of vortex rings by drops falling into liquids, and some allied phenomena // *Proc. R. Soc. London.* 1885. V. 29. P. 417–436.
- [3] *Lan M., Wang X., Zhu P., Chen P.* Experimental Study on the Dynamic Process of a Water Drop with Additives Impact upon Hot Liquid Fuel Surfaces // *Energy Procedia.* 2015. V. 66. P. 173–176.
- [4] *Lee J.S., Park S.J., Lee J.H., Weon B.M., Fezzaa K., Je H.J.* Origin and dynamics of vortex rings in drop splashing // *Nat. Commun.* 2015. V. 6. 8187.
- [5] *Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика погружающейся капли: линейчатые структуры на поверхности венца // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2017. № 2. С. 152–164.
- [6] *Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Гидродинамика погружающейся капли: несмешивающиеся жидкости // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* 2020. № 2. С. 19–27.
- [7] *Hsieh W.-D., Lin S.-Y., Chen R.-H., Lin T.-H.* Burning behavior of gas-in-oil compound drops // *Combust. Sci. Technol.* 2010. V. 183. pp. 51.
- [8] *Chashechkin Yu.D., Ilinykh A. Y.* Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // *Axioms.* 2023. V. 12, Iss.4, 374.
- [9] *Chashechkin Yu.D.* Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // *Mathematics.* 2021. V. 9. No. 586.



Эволюция тонкой структуры картины распределения вещества составной оболочечной капли в принимающей жидкости на начальном этапе процесса слияния¹

Ильиных А.Ю., Хайирбеков Ш.Х.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Интерес к импакту капли обусловлен глубоким научным содержанием явления, а также широким спектром приложений в промышленности. Нынешний уровень развития вычислительной техники пока еще не позволяет провести прямое численное моделирование капельных течений на основе систем фундаментальных уравнений механики жидкостей [1]. В связи с этим исследование импакта капли в значительной степени полагается на эксперимент. В опытах расширяется диапазон частот зондирующего излучения, включающий и радио-, и световые и рентгеновские волны, улучшается временное и пространственное разрешение регистрирующей аппаратуры, совершенствуются программы обработки информации.

Список технологий, использующих составные капли в химической, фармацевтической, пищевой, металлургической и других массовых отраслях про-

мышленности быстро расширяется. Составные капли, образующиеся при попадании капель воды в расплавленный металл, нагретый выше температуры Лейденфроста, служат дополнительным источником возникновения пожаров при промышленных авариях [2]. Одним из перспективных направлений считается создание новых видов топлив, в которых составные капли содержат воду, добавки, воздух или горючие газы [3]. Осцилляции составных капель активно изучаются аналитическими методами.

В зависимости от соотношения $R_{En_{\sigma}}^{En_k}$ кинетической энергии капли $En_{k,d}$ в момент контакта капли с принимающей жидкостью и доступной потенциальной поверхностной энергии (ДППЭ) $En_{\sigma,d}$ картины переноса вещества капли качественно разделяются на две группы. В интрузивном режиме слияния [4], когда кинетическая энергия капли меньше поверхностной, $R_{En_{\sigma}}^{En_k} = En_{k,d}/En_{\sigma,d} < 1$, капля плавно втекает в толщу жидкости, а каверна образуется с задержкой в несколько миллисекунд. В импактном режиме, при $R_{En_{\sigma}}^{En_k} \gg 1$, капля растекается по поверхности каверны и венца тонкими струйками (триклами, лигаментами), следы которых образуют

¹Эксперименты проведены на стенде ТБП УИУ «ГФК ИПМех РАН» при финансовой поддержке РФФ (проект 19-19-00598-П).

линейчатые и сетчатые структуры, состоящие из треугольных и многоугольных ячеек [5]. На начальном этапе слияния тонкие струйки, содержащие вещество капли, пронизывают дно каверны и поступают в толщу принимающей жидкости в виде отдельных волокон, образующих моховидный слой под дном каверны.

В зависимости от пространственной структуры многожидкостные капли традиционно именуется *составными* (*compound*), в которых капли одной жидкости заключены в другой жидкости и *составленные* (*composed*). В составных каплях все контактные поверхности непрерывные и замкнутые. В составленных каплях на контактных поверхностях существуют замкнутые линии и отдельные точки контакта трех сред. В двухкомпонентных составных каплях (компаунд, ядерных или оболочечных) с внешней средой контактирует только одно вещество, в составленных (дуальных, парных или янус-каплях в зарубежной литературе) — оба.

В отличие от классической постановки задачи слияния однородной капли, размерные параметры, участвующие в описании слияния составной капли, включают физические параметры уже не трех, а четырех контактирующих сред — принимающей жидкости, воздуха, внутреннего ядра и внешней оболочки капли. Принадлежность параметра обозначается индексами для принимающей жидкости t , воздуха a , ядра d^n и оболочки d^s , капли, соответственно. В число основных размерных параметров входят плотности $\rho_d^n, \rho_d^s, \rho_a, \rho_t$, четыре кинематических $\nu_d^n, \nu_d^s, \nu_a, \nu_t$ и динамических вязкостей $\mu_d^n, \mu_d^s, \mu_a, \mu_t$; шесть полных $\sigma_{d,n}^s, \sigma_{d,n}^a, \sigma_{d,s}^a, \sigma_t^a, \sigma_t^{d,n}, \sigma_t^{d,s}$ и шесть соответствующих коэффициентов поверхностного натяжения, нормированных на плотность $\gamma_{d,n}^s, \gamma_{d,n}^a$,

$\gamma_{d,s}^a, \gamma_t^a, \gamma_t^{d,n}, \gamma_t^{d,s}$ для поверхностей раздела сред; эквивалентные диаметры D_n и D_s , площади поверхности S_d^n и S_d^s , объемы V_d^n и V_d^s ; массы M_d^n и M_d^s ядра и оболочки; ДППЭ $En_{\sigma,d}^{n,s} = \sigma_{d,s}^{n,s} S_d^n$ и $En_{\sigma,d}^{s,d} = \sigma_{d,s}^{s,a} S_d^s$; коэффициенты диффузии вещества ядра и оболочки капли в принимающей жидкости $\kappa_t^{d,n}, \kappa_t^{d,s}$, а также контактная скорость капли U , которая движется как целое, ее полная масса $M_d = M_d^n + M_d^s$, кинетическая энергия капли $En_{k,d} = M_d U^2 / 2$ и ее компонентов — ядра $En_k^n = M_d^n U^2 / 2$ и оболочки $En_k^s = M_d^s U^2 / 2$.

Отношения характерных масштабов одинаковой размерности задают набор традиционных безразмерных параметров процесса, включающий числа Рейнольдса $Re = UD/\nu$, Фруда $Fr = U^2/gD$, Бонда $Bo = gD^2/\gamma_{d,s}^a$, Онезорге $Oh = \nu/\sqrt{\gamma D}$ и Вебера $We = DU^2/\gamma_{d,s}^a$, которые применяются для сравнения условий проведенных опытов.

В проведенных опытах ядро капли состояло из разбавленных ализариновых чернил, оболочка — подсолнечное масло. Положение ядра в каплях строго не регулировалось и менялось от опыта к опыту. Полученные составные капли имели наружный диаметр $D = 5.0$ мм, толщина масляного слоя лежала в диапазоне $0.2 < \Delta l_s < 1.1$ мм.

В отличие от растекания смешивающихся жидкостей в импактном режиме здесь (Рис. 1, а) в первые $\Delta t = 2$ мс после контакта не наблюдается интенсивного образования лигаментов.

По поверхности жидкости растекается масляный слой. После отрыва капельки происходит капиллярное сжатие остатка шипа и начинается стягивание масляной пленки. При этом слой окрашенной жидкости преобразуется в последовательность

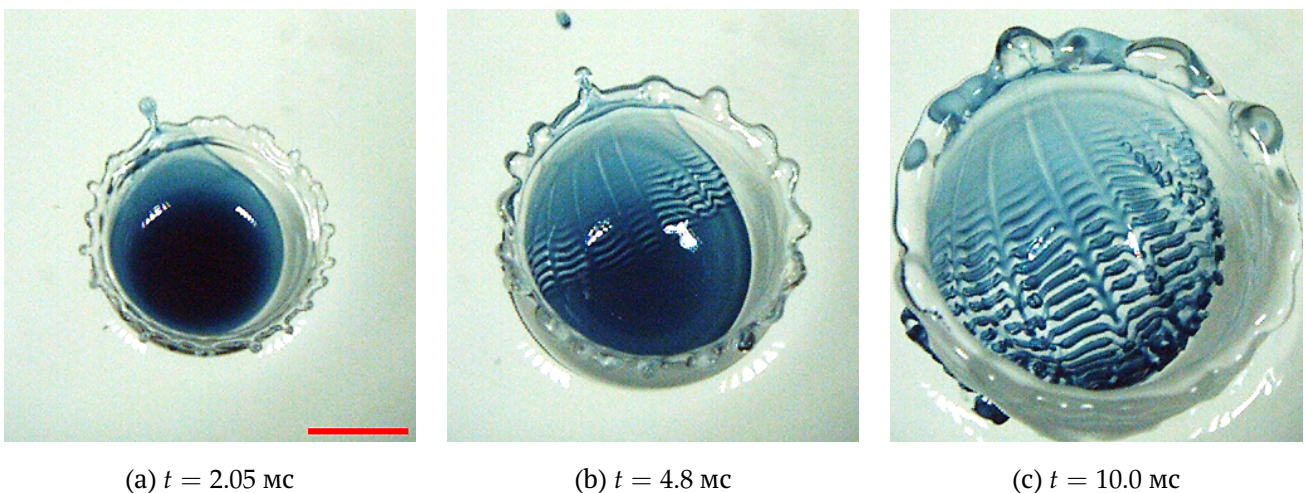


Рис. 1. Падение составной капли в воду. $H = 44$ см. Маркер — 5 мм

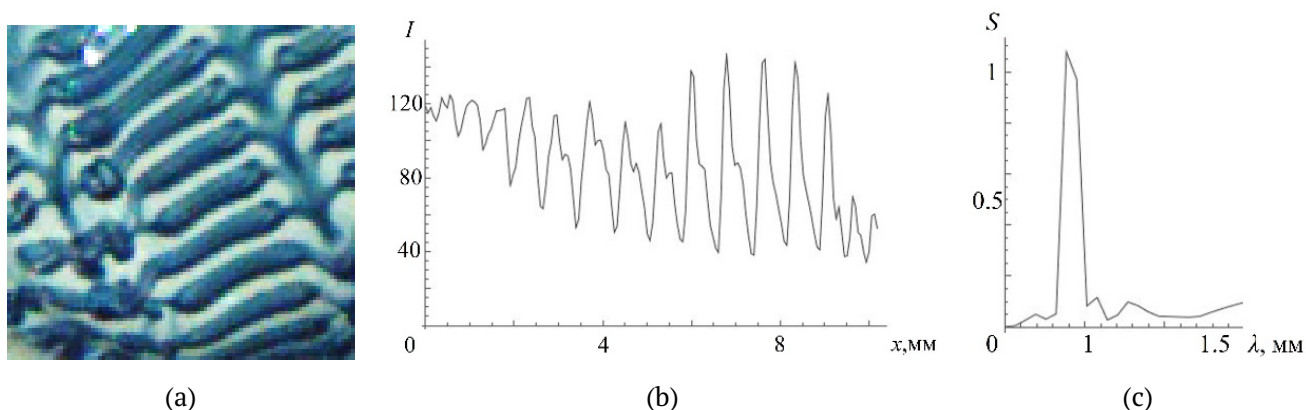


Рис. 2. а) Увеличенный вид решетки на Рис. 1, с чернильными валиками; б) распределение относительной освещенности I поперек валиков; с) его спектр S

тонких поперечных волокон (Рис. 1, б). По мере изменения геометрии каверны происходит быстрая трансформация картины течения. Вначале становятся все более выраженными продольные полосы, в их окрестности появляются кольцевые структуры, на периферии образуются двойные петли (Рис. 1, с). Отдельные элементы картины течения Рис. 1, с приведены на Рис. 3, а в увеличенном формате. Наличие вторичных пиков на Рис. 2, б говорит о присутствии волокон и связанных с ними менее и более плотно окрашенных областей на более малых масштабах (внутри валиков), что согласуется с прямыми наблюдениями на увеличенном изображении.

Общая структура картины течения сохраняется при уменьшении контактной скорости капли. Иллюстрирующие выборки из видеофильма приведены на Рис. 3 (в данном опыте капля падала

с высоты $H = 30$ см). Сравнение картин течений, приведенных на Рис. 1 показывает, что полосчатые структуры в следе сливающейся составной кадры в импактном режиме образуются в обоих опытах. Сохраняются характерные размеры и время развития структуры $\sim 8-15$ мс.

Дальнейшие опыты показали, что симметрия течения существенно зависит от положения ядра относительно внешнего контура падающей капли (Рис. 4).

Просветление изображения выделяет сложную и регулярную внутреннюю структуру распределения пигментированной жидкости, в которой выражены яркие петли, оконтуривающие области более слабо окрашенной жидкости (Рис. 4, с). Тонкие волокна просматриваются внутри светлых пятен во всей окрашенной области течения.

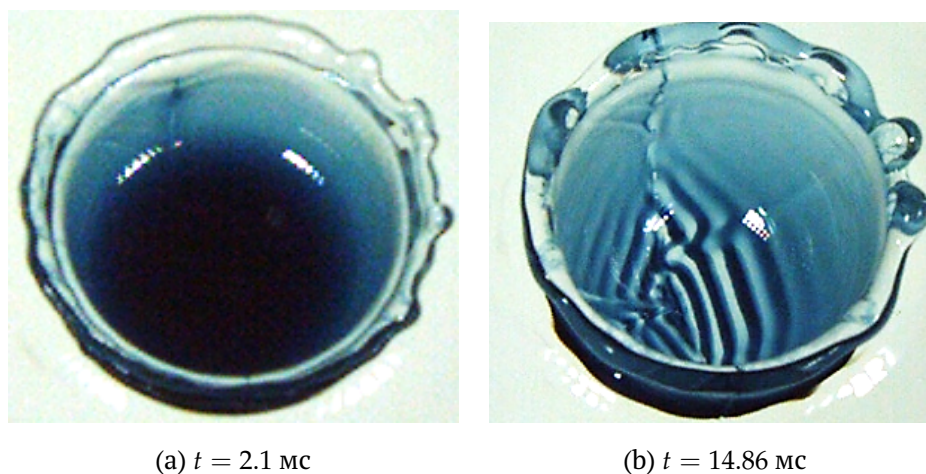


Рис. 3. Распределение вещества составной чернильно-масляной капли в воде

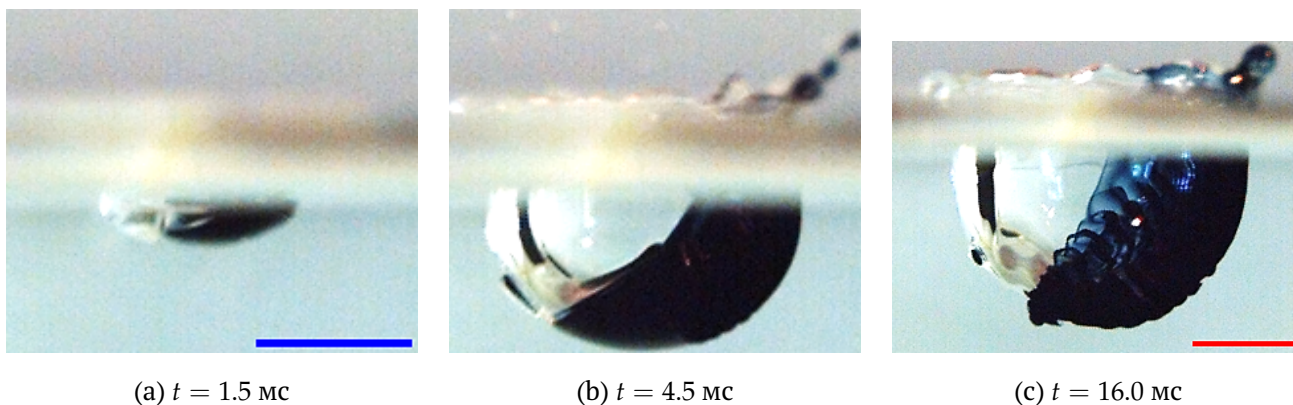


Рис. 4. Распределение вещества составной капли в воде. Маркеры – 5 мм

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
- [2] Чашечкин Ю.Д. и др. Группы брызг импакта капли воды, свободно падающей в расплавленный металл // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 498. С. 22–26.
- [3] Hsieh W.-D., Lin S.-Y., Chen R.-H., Lin T.-H. Burning behavior of gas-in-oil compound drops // Combust. Sci. Technol. 2010. V. 183. p. 51.
- [4] Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Задержка формирования каверны в интрузивном режиме слияния свободно падающей капли с принимающей жидкостью // Доклады РАН. 2021. Т. 496.
- [5] Chashechkin Yu.D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // Axioms. 2023. V. 12(4). p. 374. <https://doi.org/10.3390/axioms12040374>



Динамика воздушного пузырька на твердой поверхности при воздействии ультразвука

Кучинский М.О. *, Любимова Т.П. **, Рыбкин К.А. *, Садовникова А.Д. *, Галишевский В.А. *

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

**Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь

Введение

Поведение пузырька в жидкости под действием ультразвука (УЗ) активно изучается на протяжении последних десятилетий ввиду большого количества эффектов, возникающих как на поверхности пузырька, так и в объеме жидкости или вблизи твердой поверхности [1]. В акустическом поле ультразвуковой волны на воздушные пузырьки действуют силы Бьеркнеса, которые приводят к пульсациям поверхности пузырька (первичная сила) и его поступательному движению в пространстве (вторичная сила), что, в частности, приводит к коалесценции пузырьков и ультразвуковой дегазации жидкости [2].

Если пузырёк, который подвергается воздействию УЗ, находится вблизи твердой поверхности, то он может закрепиться на ней, в этом случае контактный угол будет зависеть как от характеристик колебаний пузырька, так и от степени шероховатости поверхности и ее структуры [3, 4].

В настоящей работе экспериментально исследуется динамика уединенного воздушного пузырька в дистиллированной воде вблизи и на твердых поверхностях различной степени смачиваемости, с возможным его закреплением и удержанием на твердой поверхности под действием УЗ.

Экспериментальная установка и методика обработки измерений

В экспериментах использовалась оргстеклянная кювета, имеющая форму параллелепипеда, с размерами $103 \times 103 \times 195$ мм³ (Рис. 1 — слева). В центральной части кюветы строго горизонтально закреплялись исследуемые пластины (5) из материалов с различной степенью гидрофильности (кварцевое стекло, акрил, тефлон). В нижней части кюветы располагался 28 кГц источник УЗ (2). Эксперименты проводились в дистиллированной воде при нормальных условиях. Пузырек размером около 1 мм создавался при помощи калиброванного стеклянного капилляра и шприцевого насоса.

Для регистрации изменения краевого угла смачивания поверхности использовались SSD камера Basler acA1920-155um (4) и коллимированный источник контрольного света Telecentric HP illuminator (3), оснащенный телецентрическими макрообъективами. С использованием высокоскоростной ка-

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
© Кучинский Михаил Олегович, kat6chinsky@gmail.com
© Любимова Татьяна Петровна, lubimova@psu.ru
© Рыбкин Константин Анатольевич, k.rybkin@gmail.com
© Садовникова Анастасия Денисовна, anastasiia3006@mail.ru

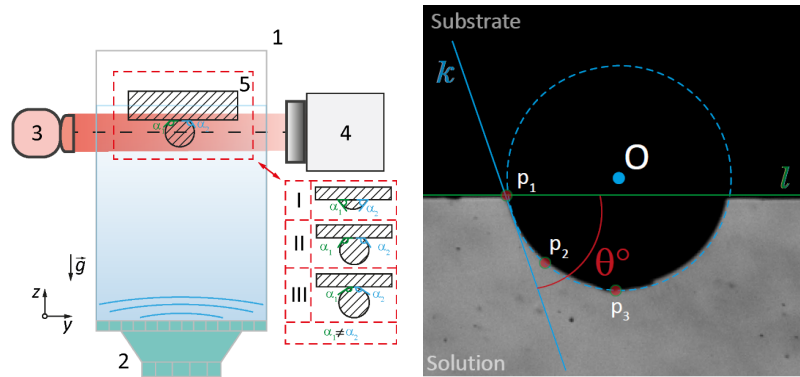


Рис. 1. Слева – схема экспериментальной установки; справа – изображение в процессе программной обработки

меры Basler A504кs была проведена серия коротких экспериментов для изучения характеристик колебаний пузырька и для их сравнения с теоретическими данными. Полученные в экспериментах фотографии обрабатывались с помощью алгоритма на Python, разработанного на основе тангенциального метода измерения краевого угла (Рис. 1 – справа). На первом этапе производилась бинаризация изображения, чтобы на изображении остался только контур пузырька на поверхности пластины, затем черному цвету присваивалось значение 0, белому – 1. Далее на картинке определялась линия пластины (l) и максимальное отклонение от нее, соответствующее верхней точке пузырька (p_3), после чего производился поиск крайней (p_1) и промежуточной (p_2) точек на границе пузырька. Далее по трем точкам записывались уравнения окружности, касательной в крайней точке пузырька. Затем из уравнения прямой, идущей вдоль пластины, и уравнения касательной (k) вычислялся краевой угол θ , °.

Результаты и выводы

Как показали эксперименты, проведенные с пластинами из кварцевого стекла (угол смачивания $130^\circ \div 145^\circ$, гидрофильная поверхность), после формирования пузырек не закрепляется на твер-

дой поверхности. Ультразвуковое воздействие приводит к колебаниям поверхности пузырька, его периодическому отскоку от твердой поверхности и дрейфу вдоль пластины в область низкого акустического давления, образовавшегося в результате изменения акустического импеданса на границе раздела сред и интерференции звуковых волн (Рис. 2).

При проведении экспериментов с пластинами из оргстекла (поверхность со средней степенью гидрофобности – краевой угол лежит в диапазоне $92^\circ \div 102^\circ$) и тефлона (гидрофобная поверхность с краевым углом $65^\circ \div 75^\circ$) зафиксировано, что пузырек также смещается в область низкого акустического давления, однако в этом случае отрыва от пластины (как в случае с гидрофильной поверхностью) не происходит, пузырек закрепляется и может дрейфовать по ней лишь на небольшие расстояния от места первоначального закрепления. Далее с использованием высокоскоростной камеры производилась регистрация параметров пузырька (контактный угол и высота). На Рис. 3 показаны колебания контактного угла на поверхности оргстекла при воздействии ультразвука. Результаты экспериментов по определению частоты собственных колебаний пузырька (Рис. 4) совпадают с теоретическим значением [5].

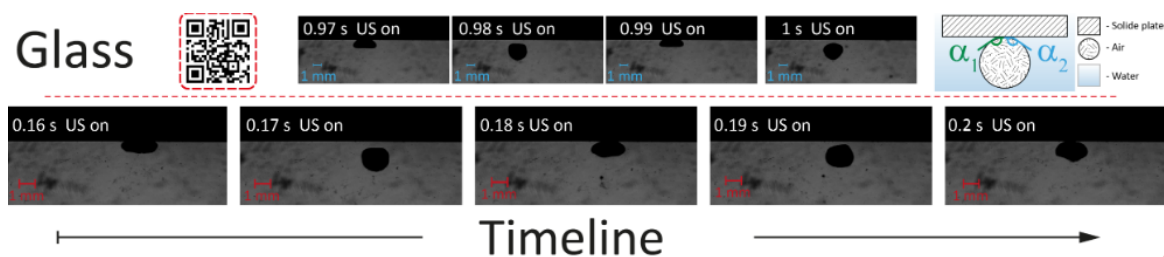


Рис. 2. Колебания пузырька на поверхности кварца под воздействием ультразвука с дальнейшим отрывом от пластины и деформацией поверхности пузырька в направлении распространения волны

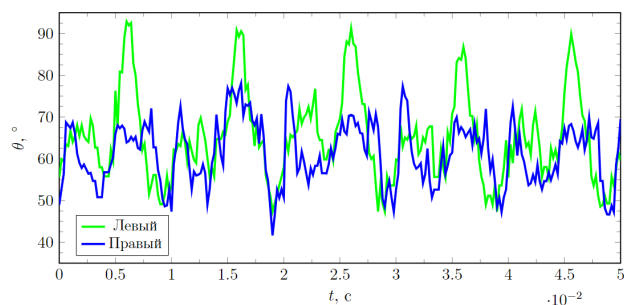


Рис. 3. Колебания контактного угла на оргстекле под воздействием ультразвука. Синяя кривая — правый краевой угол, зеленая — левый краевой угол

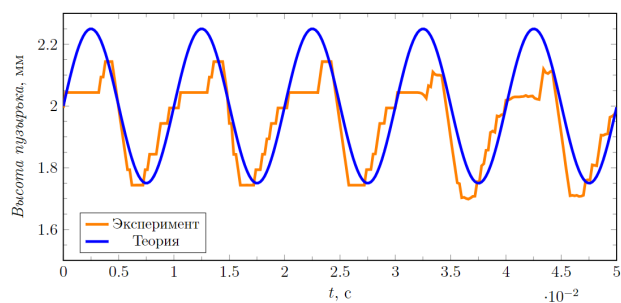


Рис. 4. Колебания высоты пузырька на тефлоне под воздействием УЗ, сопоставление экспериментальных (оранжевая кривая) и теоретических (синяя кривая) данных

Список литературы

- [1] Ding D., Bostwick J. B. Oscillations of a partially wetting bubble // *Journal of Fluid Mechanics*. 2022. Т. 945. С. А24.
- [2] Yoshida K., Fujikawa T., Watanabe Y. Experimental investigation on reversal of secondary Bjerknes force between two bubbles in ultrasonic standing wave // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011. Т. 130. №. 1. С. 135–144.
- [3] Wang T. et al. Droplet Wetting Propagation on a Hybrid-Wettability Surface // *Langmuir*. 2021. Т. 37. №. 39. С. 11646–11656.
- [4] Brutin D. et al. Sessile drop in microgravity: creation, contact angle and interface // *Microgravity Science and Technology*. 2009. Т. 21. С. 67–76.
- [5] Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. Resonance oscillations of a drop (bubble) in a vibrating fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Т. 909. С. А18.



Динамика отрыва от сопла заряженных капель¹

Прохоров В.Е.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва

Процесс отрыва капли изучается в рамках многих направлений фундаментальной науки и, в то же время, является ключевым процессом многих технологий. Потребности промышленности, сельского хозяйства, медицины и других отраслей в сочетании с огромным научным интересом стимулировали развитие теории, методики и техники экспериментальных исследований. Солидная часть работ посвящена каплям, обладающим электрическим зарядом. В настоящей работе по данным высокоскоростной визуализации гравитационного отрыва капли исследуется динамика геометрических параметров структурных элементов, образующихся при распаде капли, которая перед отрывом приобретает электрический заряд с помощью внешнего источника высокого напряжения.

Опыты выполнены на установке «Моделирование динамики капельных течений в электрическом поле» [1] из состава комплекса «ГФК ИПМех РАН» [2]. Капля отрывалась от сопла и свободно падала в кювету с водой высоты 50 см. На дне кюветы располагался алюминиевый лист, к которому подведен отрицательный полюс высоковольтного

источника; положительный полюс соединен с металлическим наконечником сопла.

На Рис. 1а-г капли показаны в момент первичного отрыва от перемычки. При нулевом напряжении ($U = 0$) вытекающая из сопла жидкость постепенно формируется в виде собственно маточной жидкости (примыкающей к соплу), перемычки и капли (Рис. 1а). Нижний конец перемычки быстро истончается, после чего происходит отрыв капли. Сходный сценарий повторяется ($U = 8$ кВ, Рис. 1б) и при подаче напряжения, при условии, что оно не превышает определенной величины – в данных опытах 14 кВ. В последнем случае отрыв происходил у верхнего конца перемычки вместе с формирующейся каплей (Рис. 1в), которая в дальнейшем отделялась от истончающегося нижнего конца перемычки [1]. С ростом напряжения ($U = 16$) капля в момент отрыва становится булавообразной (Рис. 1г), а далее в ее средней части возникает быстро сужающаяся перетяжка, которая разрывается, разделяя каплю на остаток перемычки и собственно каплю [1].

В предположении, что отрывающиеся комплексы „перемычка-капля“ представляют собой тела вращения, построены их контуры (Рис. 1д) и вычислены объемы по методике [3]. Из Рис. 1д видно, что с ростом напряжения в растёт размер перемычки и одновременно уменьшается размер капли. При этом суммарный объем комплексов „перемычка-капля“ уменьшается с увеличени-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-19-00598-П “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”)

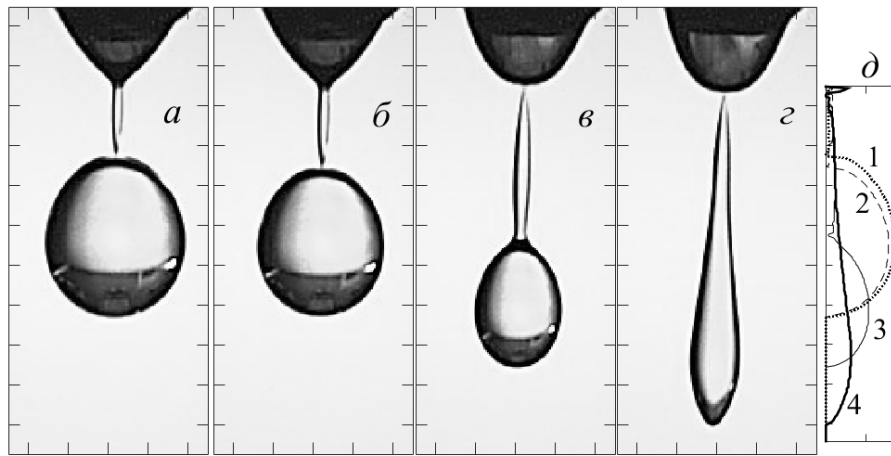


Рис. 1. Гравитационный отрыв капли воды от сопла под действием высокого напряжения. а-г: $U = 0, 8, 14, 16$ кВ. д: 1-4 правые половины контуров „перемычка-капля“ а-г в прямоугольных координатах. Деление по осям $X, Y - 2$ мм

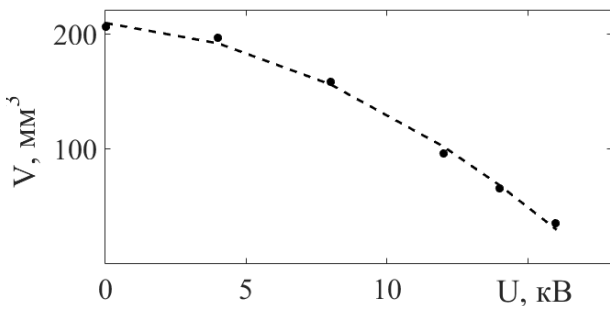


Рис. 2. Объем жидкости, отрывающейся от сопла в диапазоне напряжений $U = 0 - 16$ кВ. Точки – эксперимент, кривая – аппроксимация.

ем напряжения от 0 до 16 кВ (Рис. 2). Экспериментальные точки хорошо описываются квадратичной аппроксимацией, в данных опытах $V = p_1 U^2 + p_2 U + p_3$, где $p_1 = -0.56, p_2 = -2.17, p_3 = 209.3$.

Динамику движения структурных элементов заряженной капли – перемычки и собственно капли после их разделения иллюстрирует Рис. 3.

Верхний конец перемычки перемещается относительно равномерно, его координата во времени аппроксимируется полиномом $Z_1 = 0.7t + 8.5$ (Рис. 3а, кривая 1). Его скорость на участке 0-10 мс флуктуирует вблизи среднего значения 0.7 м/с (Рис. 3б, кривая 1).

Движение нижнего конца – неравномерное (Рис. 3а, кривая 2) и аппроксимируется двумя временными зависимостями – линейной $Z_b = 0.75t + 15.3$ ($t \leq 3.2$ мс) и квадратичной $Z_b = 0.04t^2 +$

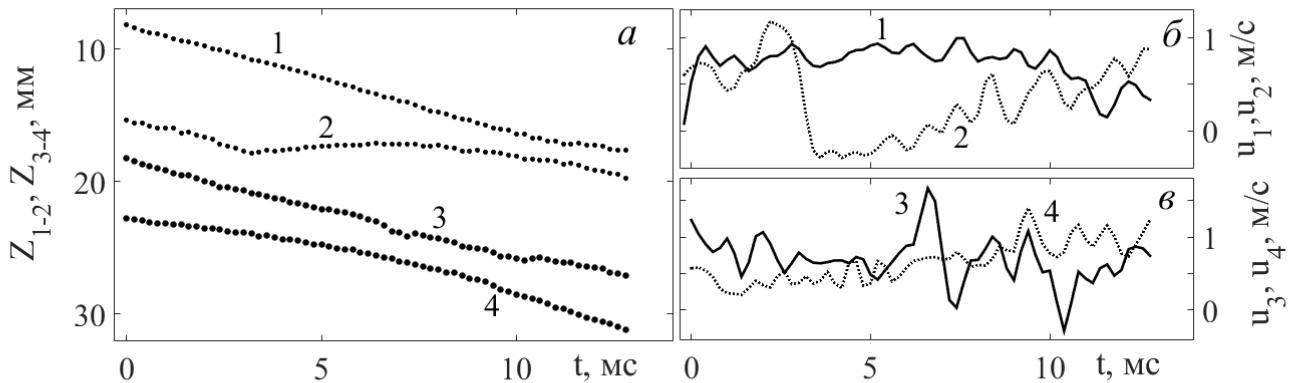


Рис. 3. Отрыв заряженной капли. а – Положение верхнего и нижнего концов перемычки (1 и 2) и капли (3 и 4). б и в – вертикальные скорости верхних (1 и 3) и нижних (2 и 4) концов перемычки. Время – от момента отрыва нижнего конца перемычки.

$0.52t + 18.8$ ($t > 3.2$ мс). График мгновенной скорости движения (Рис. 3б, кривая 2) свидетельствует о чередовании быстрых и медленных флуктуаций положения нижнего конца, отражающих сложную динамику тонких процессов в остатке перемычки. В диапазоне 4.5–10.5 мс заметны осцилляции скоростей обоих концов, пики и впадины которых совпадают по времени (Рис. 3б, кривые 1 и 2).

Перемещение верхней и нижней кромок капли (Рис. 3а) после ее отделения от перемычки: аппроксимируется слабонелинейными полиномами, соответственно, $-0.013t^2 + 0.86t + 18.26$ (Рис. 3а, кривая 3) и $0.04t^2 + 0.18t + 23.0$ (Рис. 3а, кривая 4). Вследствие различия в знаках ускорений (квадратичные члены) кромки сначала сближаются до момента $t_c = 7.0$ мс, а затем расходятся.

Скорости опускания нижней и верхней кромок капли на этом временном отрезке сильно различаются по величине и по характеру осцилляций

(Рис. 3в). В основном обе кромки движутся вниз, хотя и крайне неравномерно, но при этом верхняя на отдельных временных интервалах (вблизи 7.0 и 10.0 мс) меняет направление на противоположное. В обеих кривых на интервале 8–13 мс выделяются почти синхронные флуктуации скорости на основной частоте 600 Гц (по данным спектрального анализа).

Список литературы

- [1] Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Визуализация картины течения импакта свободно падающей капли при генерации звуковых пакетов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23. № 5.
- [2] УИУ «ГФК ИПМех РАН: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере: site <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>.
- [3] Prokhorov V.E. Acoustics of oscillating bubbles when a drop hits the water surface // Phys. Fluids. 2021. V. 33. p. 083314.



Фрагментация капли воды при ударе о диск¹

Рожков А.Н., Федюшкин А.И.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Работа посвящена исследованию деформации и фрагментации капель жидкости при их столкновении с масками и фильтрами, защищающими от зараженных капель воздуха. Кашель и чихание вызывают выброс капель слюны и бронхиальной слизи. Многие вирусы, в том числе COVID-19, живут только в жидкой среде, поэтому актуально исследование динамики и фрагментации капель. В данной работе экспериментально и численно локально столкновение капли с маской или фильтром моделируется ударом капли о небольшое препятствие. Исследования позволяют качественно проследить фрагментацию ротовой и бронхиальной жидкостей и их превращение в количество мельчайших капель, распространяющих инфекцию в воздухе. В реальности примерно такие же значения числа Вебера возникают, когда зараженные капли попадают на маски и фильтры.

Столкновение капли с диском

Фрагментация капли и образование мелких вторичных капель прослежено на примере столкновения капли воды с препятствием в виде диска [1, 2]. При столкновении капли с дискообразным препятствием формируется всплеск, образованный тонкой круглой жидкой ламеллой, ограниченной круглой краевой струей (Рис. 1, 2). Всплеск сначала расширяется (диаметр краевой струи d увеличивается), а затем схлопывается, как показано на Рис. 2. При увеличении скорости удара v_i краевая струя начинает распадаться на вторичные капли, которые являются потенциальными переносчиками инфекции. Образование капель (разбрызгивание) происходит, как при расширении всплеска, так и при его сжатии, и вторичные капли могут двигаться в

противоположных направлениях.

На Рис. 3 показаны экспериментальные траектории краевых струй $d(t)$ для различных высот падения капель h . Здесь же представлены зависимости максимального диаметра всплеска d_{max} от ударного числа Вебера $We_i = \rho v_i^2 d_i / \gamma$ (использованы стандартные обозначения). Данные экспериментов свидетельствуют, что переход к разрушению всплеска происходит в интервале чисел Вебера $We_i \in (137, 206)$.

Численное моделирование

Характер растекания капли определяется соотношением и взаимодействием сил инерции и поверхностного натяжения [1]. Задача характеризуется безразмерными числами Рейнольдса $Re_i = \rho v_i d_i / \mu$ и числом Вебера $We_i = \rho v_i^2 d_i / \gamma$, где ρ — плотность, v_i — скорость падения капли, d_i — диаметр капли, μ — вязкость, и γ — коэффициент поверхностного натяжения. Для капель воды задавались следующие свойства: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность, $\mu = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ и $\gamma = 0.072 \text{ Н/м}$. Математиче-

¹Работа выполнена в рамках государственного задания № 123021700044-0 и гранта РФФИ 23-19-00451

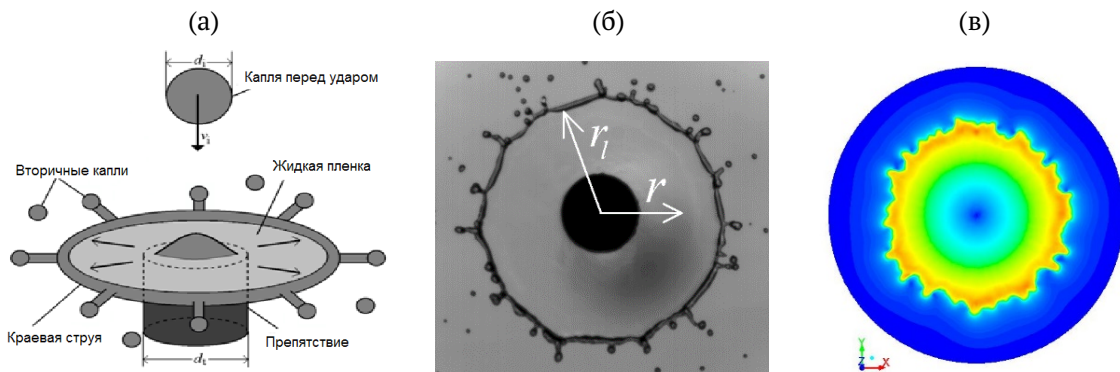


Рис. 1. (а) – схема движения капли, (б, в) – растекание капли воды ($v_i = 3.87$ м/сек), (б) – эксперимент, (в) – 3D моделирование (изолинии модуля скорости)

Время	$h = 0.18$ м ($v_i = 1.88$ м/с, $We_i = 137$)	$h = 0.27$ м ($v_i = 2.30$ м/с, $We_i = 206$)	$h = 0.35$ м ($v_i = 2.62$ м/с, $We_i = 267$)	$h = 0.65$ м ($v_i = 3.57$ м/с, $We_i = 496$)
2 мс				
4 мс				
6 мс				

Рис. 2. Вид сверху на столкновение капли воды диаметром $d_i = 2.8$ мм с дискообразной мишенью диаметром $d_t = 4$ мм (черный круг) для различных высот падения капель h . Капли имеют скорость удара $v_i = 1.88, 2.30, 2.62$ и 3.57 м/с ($We_i = 137, 206, 267$ и 496)

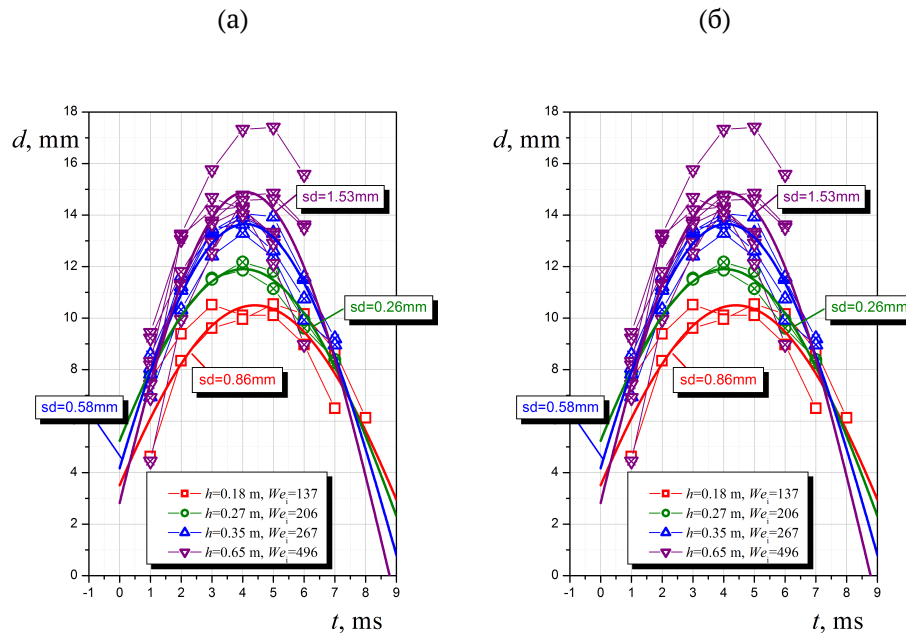


Рис. 3. (а) Диаметр всплеска d как функция времени t . Всплеск образуется в результате падения капли диаметром 2.8 мм с разной высоты h на дискообразную мишень. sd – стандартное отклонение экспериментальных точек от соответствующих аппроксимирующих кривых (утолщенные линии). (б) Отношение максимального диаметра всплеска d_{\max} и начального диаметра капли $d_i = 2.8$ мм, как функция числа Вебера We_i [1, 2]. На Рис. (а) и (б) крестиками отмечены точки, соответствующие разрушению всплеска с образованием вторичных капель

ская модель основана на решении 2D и 3D уравнений Навье–Стокса методом контрольных объемов для двухфазных жидкостных систем «воздух-жидкость» с использованием VOF метода. Подробнее математическая модель описана в работах авторов [3]. На рис. 4 представлены результаты 3D моделирования растекания капли воды. Для реальных ротовых и бронхиальных капель на водной основе типичного диаметра $d_i = 100$ мкм и скорости удара порядка $v_i = 10$ м/с число Вебера удара порядка $We_i = 139$. Следовательно, оценки свидетельствуют $We_i \gg 1$ и $Re_i \gg 1$. Поэтому столкновение контролируется исключительно инерцией и капиллярностью, в то время как влияние всех других факторов несущественно [1]. Численные результаты предсказывают разбрызгивание в диапазоне чисел Вебера $We_i \in (137, 206)$ в соответствии с результатами экспериментов и оценками натуральных условий [4].

Заключение

Результаты исследований показали, что распространение инфекции может происходить из-за распада капель при ударе о твердые препятствия в реальных природных условиях (in-situ). Переход

к разбрызгиванию капли жидкости на вторичные капли происходит при числах Вебера $We_i > We_i^*$, где $We_i^* \in (137, 206)$. Капли биологических жидкостей сталкиваются с материалом масок и фильтров примерно с одинаковыми числами Вебера $We_i \approx 100$. Таким образом, исследуемые процессы фрагментации капель в лабораторном эксперименте, и происходящие в реальности, имеют одни и те же механизмы. Данные исследования позволяют проследить фрагментацию ротовой и бронхиальной жидкостей и их превращение в количество мельчайших капель, распространяющих инфекцию в воздухе.

Список литературы

- [1] Rozhkov A., Prunet-Foch B., Vignes-Adler M. Dynamics of a liquid lamella resulting from the impact of a water drop on a small target // Proc. R. Soc. Lond. 2004. V. A 460. P. 2681–2704.
- [2] Федюшкин А.И., Рожков А.Н. Критерий растекания/разбрызгивания капли при ударе о твердую мишень // 7-ая Международная научная конференция-школа молодых ученых "Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах Москва, 20 – 22 октября 2021 года, ИПМех РАН Москва, С. 230–233.
- [3] Федюшкин А.И., Рожков А.Н. Математическое моделирование и численные методы. 2020. Т. 26. № 2. С. 46–58.
- [4] Rozhkov A., Prunet-Foch B., Fedushkin A., Vignes-Adler M. Fragmentation of water drops in collision with a small obstacle // Atomization and Sprays. 2023. V. 33. No 10. P. 1–15.



Экспериментальное исследование импульсного ультразвукового воздействия на воздушные пузырьки в жидкости

Садовникова А.Д.* , Любимова Т.П.** , Рыбкин К.А.* , Кучинский М.О.* , Галишевский В.А.*

* Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

** Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН, Пермь

Введение

При движении пузырька в акустическом поле на него действуют силы Бьеркнеса, которые приводят к пульсациям его поверхности и поступательному движению, что может привести к процессу коалесценции [1]. Действие сил Бьеркнеса также может привести к процессу кластеризации пузырьков – образованию агломератов в узлах и пучностях стоячей волны. Добавление в раствор таких химических веществ как sodium dodecyl sulfate (SDS) и NaCl ингибирует процесс коалесценции: совместное воздействие ультразвука и поверхностно-активных веществ увеличивает электростатическое отталкивание и воздействует на оболочку пузырька, делая ее более плотной, что затрудняет процесс коалесценции и способствует образованию пузырьков кластеров [2].

Цель работы состоит в исследовании влияния УЗ и химических веществ на процесс генерации

пузырьков и в изучении эффектов, возникающих в такой системе при импульсном воздействии УЗ в присутствии растворенных реагентов.

Экспериментальная установка и методика обработки измерений

Экспериментальная установка включала в себя кювету сложной геометрической формы, которая была изготовлена из акрила толщиной 3 мм (Рис. 1 – слева). Для генерации пузырьков применялись асимметрично смачиваемая мембрана, водяной насос, воздушный компрессор. Насос создавал сдвиговый поток жидкости, срывающий воздушные пузырьки с поверхности мембраны, таким образом происходила их генерация в правой части кюветы, после этого пузырьки попадали под действие УЗ (28 кГц) в центральной части и снова вместе с жидкостью – в магистраль насоса.

Пузырьки регистрировались с помощью двух камер: SSD камеры Basler acA1920-155um и высокоскоростной камеры Basler A504kc. С использованием высокоскоростной камеры Basler A504kc была проведена серия коротких экспериментов для более детального изучения эффектов, происходящих с пузырьками под действием УЗ в растворе. На ос-

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского РАН
© Садовникова Анастасия Денисовна, anastasiia3006@mail.ru
© Любимова Татьяна Петровна, lubimova@psu.ru
© Рыбкин Константин Анатольевич, k.rybkin@gmail.com
© Кучинский Михаил Олегович, kat6chinsky@gmail.com

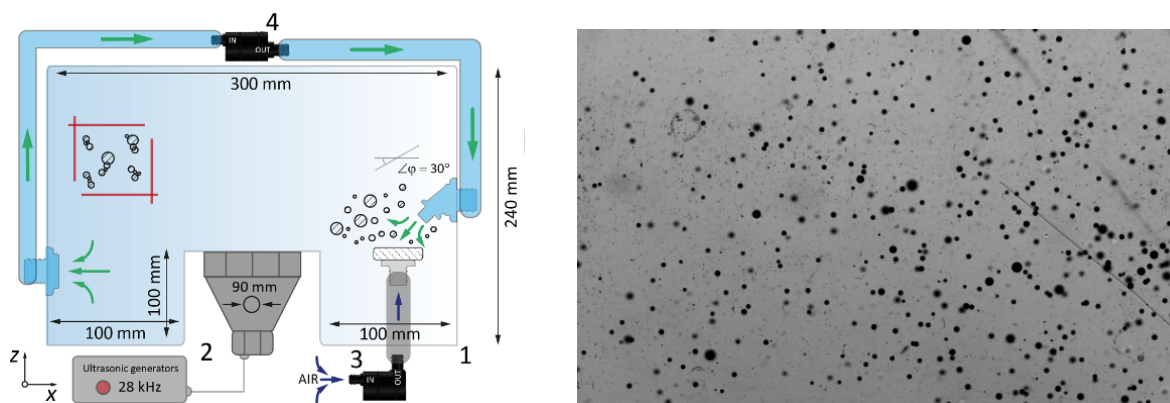


Рис. 1. Слева – схема экспериментальной установки; справа – изображение, полученное в процессе программной обработки

нове данных, полученных в ходе экспериментов, производилась компьютерная обработка изображений, по результатам которой строились гистограммы распределения пузырьков (Рис. 2).

Результаты

Для регистрации размеров и количества генерируемых пузырьков с помощью SSD камеры были проведены эксперименты при различных концентрациях SDS без использования УЗ. На построенных в результате программной обработки гистограммах видно, что при увеличении концентрации от 0 до 3.5 ммоль/л наблюдается уменьшение среднего диаметра пузырьков при одновременном увеличении их количества (Рис. 2 – слева).

Затем была проведена серия экспериментов в растворе с фиксированной концентрацией SDS (1.5 ммоль/л) с использованием УЗ источника частотой 28 кГц (Рис. 2 – справа). После включения УЗ пузырьки объединяются, осаждаются на стен-

ках кюветы и совершают поступательное движение в направлении распространения УЗ волны. В момент отключения источника ультразвука происходит разрушение сформировавшихся структур (Рис. 3 – слева) с образованием большого количества микропузырьков. Если произвести повторное включение источника ультразвука, пузырьки заново группируются и движутся вверх под действием подъемной силы.

В результате эксперимента с использованием высокоскоростной камеры было выявлено, что под действием УЗ пузырьки в растворе образуют кластеры, которые движутся в направлении распространения волны. В момент отключения источника происходит радиальное разрушение образовавшихся агломератов вследствие прекращения действия сил Бьеркнеса; разрушившийся кластер приобретает форму кольца, соосного с направлением распространения УЗ волны, и продолжает движение (Рис. 3 – справа).

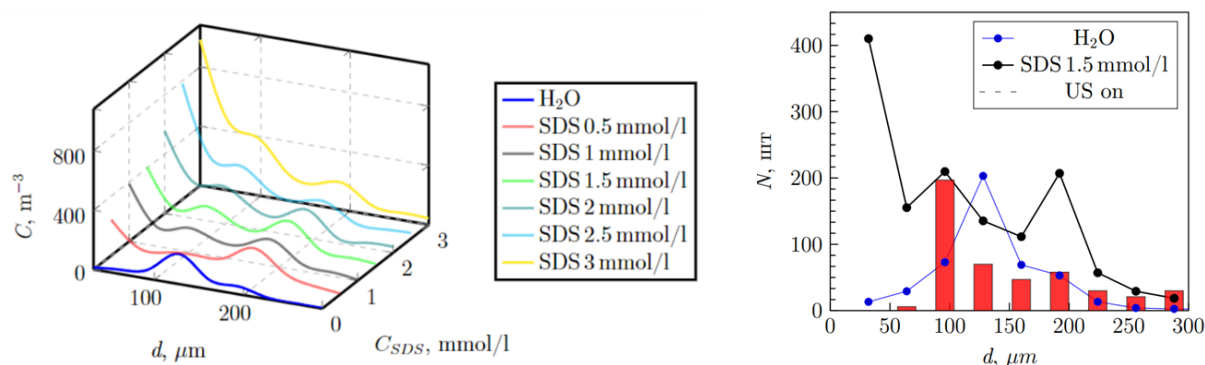


Рис. 2. Слева – распределение воздушных пузырьков по диаметру в растворах с различными концентрациями SDS [3]; справа – распределение воздушных пузырьков по диаметру при концентрации SDS 1.5 ммоль/л и включенном источнике УЗ

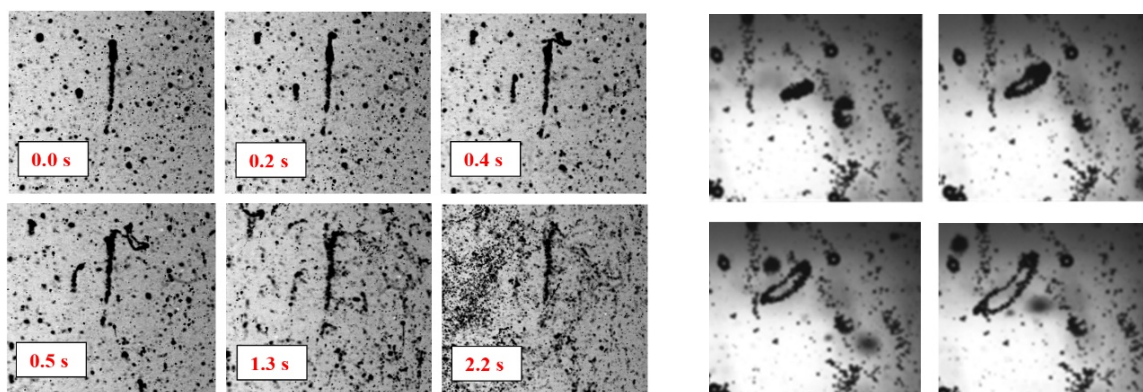


Рис. 3. Разрушение образовавшихся под действием УЗ кластеров при концентрации SDS 1.5 ммоль/л в момент отключения источника: слева – на стенке кюветы; справа – в объеме жидкости

В дальнейшем предполагается проведение экспериментов при импульсном воздействии УЗ с различными концентрациями SDS и NaCl, а также регистрация зон кавитационной активности и распределения акустического давления в рассматриваемой установке с использованием метода foil test.

Список литературы

- [1] *Yoshida K., Fujikawa T., Watanabe Y.* Experimental investigation on reversal of secondary Bjerknes force between two bubbles in ultrasonic standing wave // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011. V. 130(1), p. 135–144.
- [2] *Lee J. et al.* Influence of surface-active solutes on the coalescence, clustering, and fragmentation of acoustic bubbles confined in a microspace // *The Journal of Physical Chemistry C*. 2007. V. 111(51), p. 19015–19023.
- [3] *Lyubimova T. et al.* Investigation of Generation and Dynamics of Microbubbles in the Solutions of Anionic Surfactant (SDS) // *Microgravity Science and Technology*. 2022. V. 34(4), p. 74.



Численное моделирование динамики скоплений твёрдых частиц¹

Тукмаков Д.А.

Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН, Казань

Одной из развивающихся областей механики жидкости, газа и плазмы является динамика неоднородных сред [1–10], отличающаяся от классической гидродинамики [11]. В ряде случаев возникает необходимость моделировать течения неоднородных сред, движущихся в электрическом поле [4–10, 12]. В работе [4] сопоставляются результаты физического эксперимента и численные расчёты динамики электрически заряженной газовой смеси без учета взаимного влияния компонент смеси. Публикация [5] посвящена усовершенствованию технологии электрических фильтров, очищающих газовые выбросы промышленных предприятий от дисперсных примесей. Из рассмотренных работ следует, что в различных исследованиях динамики электрически заряженных неоднородных сред изучаются совокупность как электрофизических, так и гидродинамических процессов. Для совершенствования технологий и устройств, работающих с электрически заряженными газовыми смесями, необходимо выявление закономерностей динамики таких сред в электрических и аэродина-

мических полях. В данной работе для массовых и поверхностных плотностей заряда дисперсной компоненты рассматривается влияние плотности материала частиц на интенсивность скоростного скольжения компонент смеси. Математическая модель учитывала взаимодействие компонент смеси в процессе распространения ударной волны малой интенсивности на электрически заряженную газозвесь. В работе предполагалось, что электрическое поле формировалось заряженными дисперсными частицами.

Для описания динамики электрически заряженной газозвеси применялась математическая модель, реализующая континуальный подход моделирования в которой учитывается влияние компонент гетерогенной среды друг на друга [1, 2, 6–10]. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье–Стокса [11, 13] для вязкого, сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [6–10]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V^k}{\partial t} + \nabla^i(\rho V^k V^i + \delta_{ik} p - \tau_{ik}) &= -F_k + \alpha \nabla^k p \\ \frac{\partial(e)}{\partial t} + \nabla^i(V^i(e + p - \tau_{ii}) - V^k \tau_{ki} - \lambda \nabla^i T) &= \\ &= -Q - |F_k|(V^k - V_1^k) + \alpha \nabla^k(p V^k) \end{aligned} \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-21-00363 «Моделирование процесса осаждения капель двухфазной газожидкой среды».

Тензоры вязких напряжений записываются следующим образом:

$$\tau_{11} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{22} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right),$$

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учетом взаимодействия компонент смеси:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 V_1) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_1 V_1^k}{\partial t} + \nabla^i (\rho_1 V_1^i V_1^k) = F_k + F_{Ck} - \alpha \nabla^k p \quad (2)$$

$$\frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \nabla^k (e_1 V_1^k) = Q$$

Здесь p , ρ , u , v — давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей x и соответственно; T , e — температура и полная энергия газа; ρ_1 , T_1 , e_1 , u_1 , v_1 — средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы в направлении осей x , y . Температура несущей среды находится из уравнения $T = (\gamma - 1)(e/\rho - 0.5(u^2 + v^2))/R$, где R — газовая постоянная несущей фазы, μ — вязкость газа, λ — теплопроводность газа, γ — постоянная адиабаты. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_1 = \rho_1 C_p T_1$, где C_p — удельная теплоемкость единицы массы вещества дисперсной фазы, средняя плотность дисперсной фазы вычисляется из выражения $\rho_1 = \alpha \rho_{10}$, где α — объёмное содержание дисперсной фазы являющееся функцией временной и пространственных переменных, ρ_{10} — физическая плотность материала дисперсной компоненты смеси остающаяся постоянной величиной, F_k — пространственные составляющие силы аэродинамического сопротивления, F_{Ck} — пространственные составляющие силы Кулона, действующей на частицы. Q — поток тепла между компонентами смеси. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона. В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газ-взвеси (массовая или поверхностная), отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды [12]:

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho_E}{\epsilon \epsilon_0}, \quad E = -\nabla \phi,$$

$$\Delta^2 \phi = -\frac{\rho_E}{\epsilon \epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Ф/м.} \quad (3)$$

$$\rho_E = \alpha \rho_{10} \cdot q_m, \quad \rho_E = S \cdot q_s = \frac{\alpha}{3r} \cdot q_s,$$

$$F_{Cx} = -\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_{Cy} = -\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Здесь ρ_E — плотность заряда, q_i — удельный заряд единицы массы m или площади s твердой фракции, ϕ — потенциал электрического поля, $\epsilon = 1$ — относительная диэлектрическая проницаемость воздуха, ϵ_0 — абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха. Система уравнений (1–2) интегрировалась явным конечно-разностным методом Мак–Кормака второго порядка точности [13]. Для подавления численных осцилляций применялась схема нелинейной коррекции сеточной функции [14, 15].

Система уравнений дополнялась соответствующими начальными и граничными условиями. При расчёте течений двухфазной смеси для составляющих скорости несущей среды и дисперсной компоненты задавались однородные граничные условия Дирихле, на всех поверхностях. Для остальных динамических функций смеси на боковых поверхностях канала задавались однородные граничные условия Неймана, согласно методике конечно-разностного моделирования динамики сжимаемого теплопроводного газа [13] и методике моделирования динамики, взвешенной в сжимаемом теплопроводном газе, дисперсной компоненты с изменяющейся «средней плотностью» и энергией [2, 3].

Уравнение Пуассона [12–16], описывающее потенциал электрического поля (3), решалось методом конечных разностей с помощью итерационной схемы метода установления [16] на сгенерированной для газодинамических расчётов сетке, с целью учесть влияние силы Кулона при решении уравнений динамики двухфазной среды, а также учесть распределение «средней плотности» дисперсной фазы в узлах разбиения физической области при решении уравнения Пуассона.

Список литературы

- [1] Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. Москва: Наука. 1978. С.464.
- [2] Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недр. 2003. С. 284.
- [3] Федоров А. В., Фомин В.М., Хмель Т.А. Волновые процессы в газ-взвешах частиц металлов. Новосибирск. 2015. С. 301.
- [4] Tadaa Y., Yoshioka S., Takimoto A., Hayashi Y. Heat transfer enhancement in a gas –solid suspension flow by applying electric field// International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 93. P. 778–787.
- [5] Чекалов Л.В., Гузаев В.А., Смирнов М.Е. Повышение эффективности электрофильтров тепловых электростанций путём совершенствования осадительных электродов// Электрические станции. 2021. № 7. С. 48–54.

- [6] Тукмаков Д. А., Ахунов А. А. Численное исследование влияния электрического заряда дисперсной фазы на распространение ударной волны из чистого газа в запылённую среду // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2020. № 3. С. 183–192.
- [7] Тукмаков А. Л., Тукмаков Д. А. Численное исследование влияния параметров дисперсных частиц на осаждение твердой фазы электрически заряженной полидисперсной газозвеси // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. № 1. С. 90–102.
- [8] Тукмаков Д. А. Сопоставление математических моделей динамики электрически заряженных газозвесей для различных концентраций дисперсной компоненты // Прикладная информатика. 2022. № 1. С. 39–54.
- [9] Тукмаков Д. А. Сопоставление численных моделей динамики электрически заряженных газозвесей с массовой и поверхностной плотностями зарядов для различных дисперсностей частиц // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2022. № 3. С. 43–56.
- [10] Тукмаков Д. А., Тукмакова Н. А. Численное исследование межкомпонентного скоростного скольжения в электрически заряженной и нейтральной газозвеси в двумерной нестационарной постановке с вязкой несущей средой // Физическое образование в ВУЗах. 2023. Т. 29. № 1. С. 123–134.
- [11] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Москва: Издательство «Дрофа», 2003. С. 784.
- [12] Сальянов Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий. М., Наука, 1997. С. 240
- [13] Fletcher C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics Springer-Verlang, Berlin et al., 1988. Pp. 504.
- [14] Тукмаков А. Л. Численное моделирование акустических течений при резонансных колебаниях газа в закрытой трубе // Авиационная техника. 2006. № 4. С. 33–36.
- [15] Музафаров И. Ф., Утюжников С. В. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа // Математическое моделирование. 1993. № 3. С. 74–83.
- [16] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т. 2, М.: Наука, 1977. С. 401.



Оценка коэффициента сопротивления тороидальных пузырей

Чашников Е.А., Никулин В.В.

ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Введение

Тороидальный пузырь является разновидностью вихревых колец, движущихся в жидкости, в ядре которых находится газ [1]. Известно, что для однофазных вихревых колец сила сопротивления пренебрежимо мала [2]. В тоже время на тороидальный пузырь помимо силы плавучести действует сила сопротивления [3, 4]. Как показано в [4], учет сопротивления с постоянным коэффициентом сопротивления позволяет рассчитать зависимость радиуса тора от времени с средним отклонением теории от эксперимента не более 3%, когда среднее отклонение без учета сопротивления составляет от 8% до 13% по мере движения. Однако полученные данные не позволяли предсказать величину коэффициентов сопротивления в зависимости от параметров колец, что, возможно, было бы полезно в задачах по переносу жидкости тороидальным пузырем. Явление переноса жидкости пузырями в форме сферического сегмента исследуется на протяжении нескольких десятков лет и имеет широкий спектр применения в различных отраслях промышленности [5–7]. Идея применения в этом направлении тороидальных пузырей нова и связана

с тем, что по сравнению со сферическими пузырями тороидальные пузыри способны захватывать и переносить жидкость не только в сдвиговом слое близ границы, но и в атмосфере вихря [8]. В [8] также показано, что объем атмосферы тороидального пузыря пропорционален его радиусу в третьей степени. Таким образом без учета силы сопротивления ошибка при расчете объема переносимой жидкости может достигать 30%.

В настоящей работе тороидальные пузыри создавались путем инъекции вертикально вверх струи воздуха в воду. Нагнетаемый компрессором воздух подавался на механический клапан, установленный на дне резервуара из оргстекла, в течение короткого времени τ . Механический клапан под избыточным давлением открывался, и происходила импульсная инъекция струи воздуха в резервуар. Резервуар имеет размеры $0,5 \times 0,5$ м и 1,5 м в высоту. Давление принимало значения 3, 4, 5 и 6 бар. Длительность τ определялась временем открытого состояния электромагнитного клапана Festo и изменялось от 14 до 50 мс под управлением программируемой логической платы Arduino. Объем инжектируемого воздуха измерялся путем его захвата в специальное воронкообразное устройство, установленное в верхней части резервуара. В проведенных экспериментах объем варьировался от 6,6 до 72 см³. Расстояние от сопла до нижнего

края воронкообразного устройства составляло 1 м. Регистрация проводилась теневым методом на скоростную камеру MotionXtra HG-100K с частотой кадров 60 к/с и экспозицией 750 мкс. По изображениям при каждом пуске измерялись зависимости радиуса тора, пройденного пути и скорости от времени. Видеоизображения обрабатывались в среде Matlab. Подробное представление процесса обработки изложено в [4, 9].

Расчетные формулы

Используемые далее параметры длины, времени и циркуляции обезразмерены на r_0 , $(r_0/g)^{1/2}$, $(gr_0^3)^{1/2}$ соответственно, где r_0 равен радиусу сферы, содержащей тот же объем воздуха, что и тороидальный пузырь.

Коэффициент сопротивления C_d определялся аналогично методике, предложенной в [4]. Она заключается в подборе C_d методом наименьших квадратов при сравнении экспериментальной зависимости и численного решения задачи Коши:

$$\frac{dR}{dt} = -C_1 \frac{[\ln(C_2 R \sqrt{R}) - 1/2]^2}{R^2 \sqrt{R}} + \frac{C_3}{R}, \quad (1)$$

$$R(0) = R_0,$$

где $C_1 = \sqrt{6} \Gamma C_d / (48\pi^2 \sqrt{\pi})$, $C_2 = 4\sqrt{6\pi}$, $C_3 = 1/(2\pi\Gamma)$, R — радиус тора, Γ — циркуляция. Численное решение производилось методом Гаусса 6 порядка. Точка отсчета была установлена на расстоянии $15r_0$ от сопла. Выражение для циркуляции Γ имеет вид:

$$\Gamma = 4\pi R V \left[\ln \left(4\sqrt{6\pi} R \sqrt{R} \right) - 1/2 \right]^{-1} \quad (2)$$

В работах [3, 10] показано, что не происходит заметного изменения циркуляции по мере движения, поэтому она считается константой. Можно определить число Фруда как квадрат обезразмеренной циркуляции, поскольку он не изменяется по мере движения и в тоже время характеризует отношение сил инерции к силам плавучести:

$$Fr = \frac{\Gamma^2}{gr_0^3} = \frac{V^2 R^2}{gr_0^3} 4\pi \left[\ln \left(4\sqrt{6\pi} R \sqrt{R} \right) - 1/2 \right]^{-1} \quad (3)$$

Обсуждение и результаты

Из Рис. 1 следует, что коэффициент сопротивления убывает с ростом числа Фруда или безразмерной циркуляции. Эту зависимость можно аппроксимировать степенной функцией в виде: $C_d(Fr) = 541,18Fr^{-2,004}$.

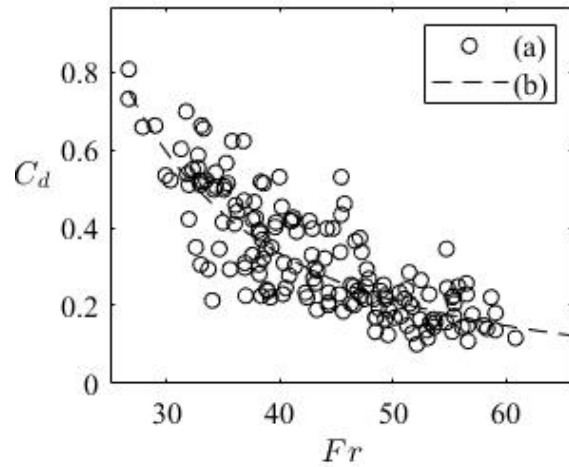


Рис. 1. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Фруда: (а) — эксперимент, (б) — аппроксимация $C_d(Fr) = 541,18Fr^{-2,004}$

На Рис. 2(а) и 2(б) изображены систематические отклонения экспериментального радиуса от рассчитанного при $C_d = 0$ и $C_d = C_d(Fr)$ соответственно. По осям ординат отложено отношение модуля разности теории и эксперимента по отношению к эксперименту, т.е. $\frac{|\Delta R|}{R} = \frac{|R_{\text{теор.}} - R_{\text{эксп.}}|}{R_{\text{эксп.}}}$. Видно, что среднее значение отклонения при $C_d = C_d(Fr)$ (Рис. 2(б), штрих-линия) лежит значительно ниже нежели те, что получены без учета силы сопротивления (Рис. 2(а), штрих-линия), и не превышает 3–4%. Таким образом, предложенная аппроксимация позволяет исключить эмпирический параметр, коэффициент сопротивления, из расчетов.

Список литературы

- [1] Pedley T. The toroidal bubble // Journal of Fluid Mechanics. 1968, V. 32(1), p. 97–112.
- [2] Sullivan I., Niemela J., Hershberger R., Bolster D., Donnelly R. Dynamics of thin vortex rings // Journal of Fluid Mechanics. 2008, V. 609, P. 319–347. doi:10.1017/S0022112008002292
- [3] Vasel-Be-Hagh A.R., Carriveau R., Ting D. S.K., Turner J.S. Drag of buoyant vortex rings // Physical Review E. 2015, V. 92(4), p. 043024
- [4] Chashnikov E.A., Nikulin V.V. Application of Shadow Visualization to Study the Drag of Toroidal Bubbles // Scientific Visualization. 2023, V.15(3), p. 50–57. DOI: 10.26583/sv.15.3.06
- [5] Natsui S., Nashimoto R., Nakajima D., Kikuchi T., Suzuki R.O. Column and film lifetimes in bubble-induced two-liquid flow // Physical Review E, 2018, V. 97, p.062802.
- [6] Jardyn-Pérez L., Amaro-Villeda A., Gonzalez-Rivera C., Trapaga G., Conejo A., Ramirez-Argbez M. Introducing the Planar Laser-Induced Fluorescence Technique (PLIF) to Measure Mixing Time in Gas-Stirred Ladles // Metallurgical and Materials Transactions B. 2019, V. 50. doi: 10.1007/s11663-019-01631-y.

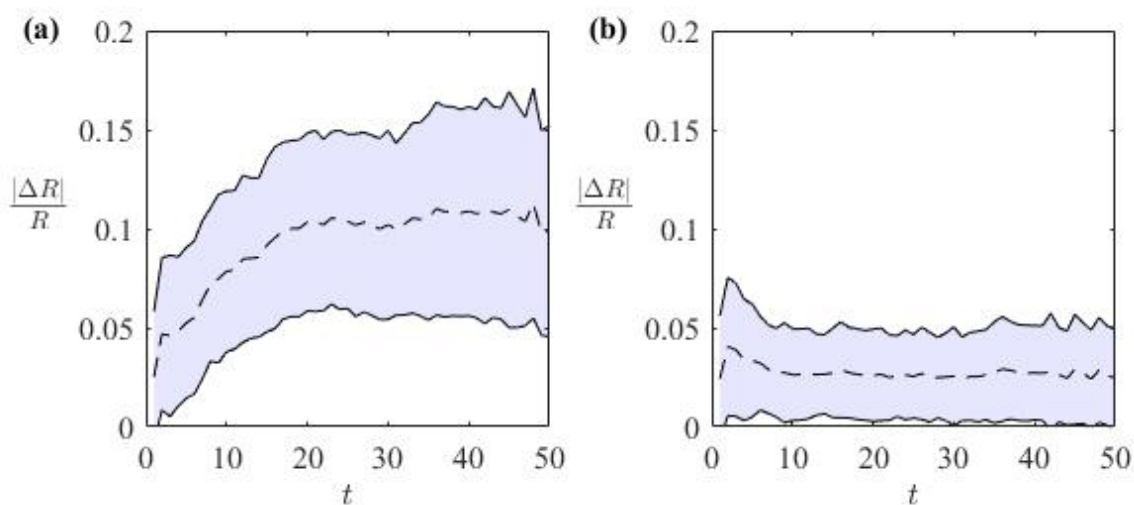


Рис. 2. Относительное отклонение теории от эксперимента, где $\frac{|\Delta R|}{R} = \frac{|R_{\text{теор.}} - R_{\text{эксп.}}|}{R_{\text{эксп.}}}$, штрих-линия – среднее значение по всем экспериментам за временной интервал равный 1, цветом выделена область стандартного отклонения: (a) без учета силы сопротивления, (b) с $C_d(\text{Fr}) = 541,18\text{Fr}^{-2,004}$

[7] Rydberg J. (Ed). Solvent Extraction Principles and Practice, Revised and Expanded (2nd ed.). CRC Press. 2004. <https://doi.org/10.1201/9780203021460>

[8] Moon E., Song M., Kim D. Liquid entrainment of the toroidal bubble crossing the interface between two immiscible liquids // Journal of Fluid Mechanics. 2023, V. 966, p. A27. doi:10.1017/jfm.2023.457

[9] Chashnikov E.A., Nikulin V.V. Determination of the Parameters of a Vortex Ring with an Air Core in a Liquid by Computer Processing of Video Images // Scientific Visualization. 2021. V. 13(3), p. 66–74. DOI: 10.26583/sv.13.3.07

[10] Vassel-Be-Hagh A. R., Carriveau R., Ting D. S.-K. A balloon bursting underwater // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 769, p. 522–540.

Содержание

Гидродинамические модели и устойчивость, волны, колебания

Агеев А.И., Осипцов А.Н.

Автомодельные режимы установившегося стекания степенной жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности85–87

Аллилуева А.И.

Коротковолновые асимптотические решения линеаризованных уравнений мелкой воды над резко меняющимся дном88

Андросенко В.Н., Котов М.А., Соловьев Н.Г., Шемякин А.Н., Якимов М.Ю.

Влияние индуцированных неоднородностей плотности газа на стабильность плазмы непрерывного оптического разряда89–92

Байдулов В.Г.

Об управлении параметрами колебания поплавка в неоднородной жидкости 93

Баренгольц С.А., Зубарев Н.М., Кочурин Е.А.

Электрогидродинамическая неустойчивость границы расплавленного металла в условиях сильного электрического поля 94–96

Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н., Люлин Ю.В.

Теоретическое и экспериментальное исследование течений с испарением на термокапиллярной границе раздела: особенности моделирования, анализ характеристик 97–99

Белоножко Д.Ф.

К расчету неустойчивости заряженной поверхности неоднородной жидкости 100–101

Вин Ко Ко, Темнов А.Н.

Нелинейные колебания двухслойной жидкости при угловых колебаниях цилиндрической полости 102–104

Гайдуков Р.К., Данилов В.Г.

Эффективный подход к математическому моделированию задач обтекания с фазовыми переходами 105–107

Денисова И.В., Солонников В.А.

Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухслойной сжимаемой жидкости 108–110

Епифанов В.П., Гусева Е.К.

Вынужденные колебания ледяных дисков при ударе 111–112

Ермишина В.Е., Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.

Уединенные волны в многослойной стратифицированной жидкости 113–114

Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.

Подавление турбулентности неравномерным во времени вращением 115–117

Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э., Сороковых Д.Е.

Уменьшение турбулентных пульсаций скорости при модуляции скорости вращения 118–120

- Звягинцева Е.А., Кудымова Е.М., Власова О.А., Козлов В.Г.**
Устойчивость столбика Тейлора–Праудмана,
создаваемого движущейся во вращающейся жидкости сферой 121–123
- Звягинцева Е.А., Кудымова Е.М., Романец В.Я., Козлов В.Г.**
Движение легкого сферического тела и жидкости во вращающейся полости 124–126
- Золотухина А.А., Миненков Д.С.**
Асимптотические решения одномерного псевдодифференциального уравнения
для водяных волн над неровным дном с учетом отражения от вертикальной стенки 127
- Кожурина П.И., Томашева А.М., Горкунов С.В., Коломийцев Г.В.**
Линейная устойчивость фильтрационного течения газа
и двух несмешивающихся жидкостей 128–130
- Козлов В.Г., Зимасова А.Р., Козлов Н.В.**
Динамика слоя вязкой жидкости на внутренней границе
горизонтальной цилиндрической полости при модуляции скорости вращения 131–133
- Колбнева Н.Ю.**
Влияние эффекта релаксации вязкости на капиллярные осцилляции
излучающей заряженной капли 134–136
- Коломийцев Г.В., Горкунов С.В., Кожурина П.И., Томашева А.М.**
Исследование устойчивости бегущих волн в двухфазных потоках жидкости
в пористой среде методом функции Эванса 137–139
- Минаев С.С., Дац Е.П.**
Эволюционные уравнения, описывающие гидродинамическую неустойчивость пламени 140–142
- Миненков Д.С., Вотякова М.М.**
Асимптотики длинных распространяющихся волн
в одномерном бассейне с пологими берегами 143
- Михайлов Е.А., Таранюк А.А.**
Решение задачи об электровихревом течении между плоскостями
при различных граничных условиях 144–146
- Нестеров С.В., Калиниченко В.А.**
Поверхностные волны в круговом цилиндре с возвышением на дне 147–149
- Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф.**
Влияние параметров течения термовязкой жидкости в кольцевом канале
на изменение критического числа Рейнольдса 150–151
- Овсянников В.М.**
Квадратичный инвариант тензора скоростей деформаций
контролирует нераскрытие шасси самолета 152–154
- Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д.**
Волновые движения и структура течения в вязких сжимаемых средах 155–157
- Петров А.Г.**
О лучевой теории волновых аттракторов в стратифицированной жидкости 158–160
- Пью Ко Ко, Байдулов В.Г.**
Собственные формы и собственные частоты резонатора гельмгольца периодического сечения 161

- Руденко А.И.**
Интегро-дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью
для профиля стационарной поверхностной волны 162–163
- Смирнов К.В.**
Растекание тонкого слоя вязкой жидкости по твердой поверхности
и гидравлический прыжок в поле продольной массовой силы 164–167
- Сухов А.Д., Петров А.Г.**
Форма гидравлического прыжка в плоской постановке 168–170
- Талалов С.В.**
Квантовая турбулентность в терминах теории многих тел 171–172
- Томашева А.М., Коломийцев Г.В., Шаргатов В.А.**
Критерий допустимости решений в виде бегущей волны
для обобщенного уравнения Кортевега–Де Вриза–Бюршерса 173–174
- Урманчеев С.Ф.**
О потере устойчивости течения аномально термовязкой жидкости
и возникновение автоколебаний 175–177
- Фадеев С.А., Шайдуллин Л.Р.**
Резонансные колебания газа в закрытой трубе
с параболическим распределением температуры по радиусу 178–179
- Чашечкин Ю.Д.**
Классификация структурных компонентов течений гетерогенных жидкостей 180–182
- Юй Чжаокай**
Оценка диссипации энергии вблизи линии трёхфазного контакта
в процессе движения жидкости 183–185
- Вычислительные методы гидродинамики**
- Баширова К.И., Михайленко К.И.**
Две модели динамики лагранжевых частиц в канале вихревой трубы 186–188
- Бурмистрова О.А., Маркелова Т.В., Арндаренко М.С., Стояновская О.П.**
Анализ подходов к моделированию диссипации звуковых волн
в гидродинамике сглаженных частиц 189–191
- Буров Н.А., Гайдуков Р.К.**
Двухпалубная структура пограничного слоя в трехмерной задаче
обтекания малой неровности на поверхности пластины 192–195
- Елизарова Т.Г., Широков И.А.**
Квазигазодинамические уравнения и опыт численного моделирования
турбулентных течений 196–198
- Пескова Е.Е.**
Вычислительные алгоритмы для моделирования двухфазных сред
с химическими реакциями и лазерным излучением 199–200
- Широков И.А.**
Моделирование недорасширенной сверхзвуковой струи:
ударно-волновые структуры и турбулентность 201–203

Капли и пузырьки**Аганин А.А., Халитова Т.Ф.**Коллапс кавитационных пузырьков,
расположенных в вершинах правильных многогранников 204–206**Агишева У.О., Галимзянов М.Н.**Волны давления в трубе, заполненной жидкостью,
содержащей пузырьковую зону в виде цилиндра 207–209**Андросенко В.Н.**

Фрагментация заряженных капель воды после гравитационного отрыва от сопла 210–212

Антонов Д.В., Зубрилин И.А., Сажин С.С., Скрипов П.В., Стрижак П.А., Яновский Л.С.

Моделирование микровзрывного распада двухжидкостных капель 213–215

Галеева Д.Р., Киреев В.Н.

Моделирование динамики капли на основе уравнений Навье–Стокса–Кана–Хилларда 216–217

Есина Е.В., Чашечкин Ю.Д.Слияние свободно падающей капли с покоящейся принимающей жидкостью:
энергетика и структура течений 218–221**Ильиных А.Ю.**Тонкие структуры картины быстрого переноса вещества капли,
свободно падающей в глубокую жидкость, в интрузивном и импактном режимах 222–224**Ильиных А.Ю., Хайирбеков Ш.Х.**

Перенос вещества составной капли в интрузивном и импактном режимах 225–227

Ильиных А.Ю., Хайирбеков Ш.Х.Эволюция тонкой структуры картины распределения вещества составной оболочечной
капли в принимающей жидкости на начальном этапе процесса слияния 228–231**Кучинский М.О., Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Садовникова А.Д., Галишевский В.А.**

Динамика воздушного пузырька на твердой поверхности при воздействии ультразвука 232–234

Прохоров В.Е.

Динамика отрыва от сопла заряженных капель 235–237

Рожков А.Н., Федюшкин А.И.

Фрагментация капли воды при ударе о диск 238–240

Садовникова А.Д., Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Кучинский М.О., Галишевский В.А.Экспериментальное исследование импульсного ультразвукового воздействия
на воздушные пузырьки в жидкости 241–243**Тукмаков Д.А.**

Численное моделирование динамики скоплений твердых частиц 244–246

Чашников Е.А., Никулин В.В.

Оценка коэффициента сопротивления тороидальных пузырей 247–249