

ISSN: 2658–5782

Номер 1–2

2022

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Обзор исследований лаборатории МТТ за 2020–2022 годы

Шакирьянов М.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В статье приводится обзор научных исследований лаборатории «Механика твердых тел» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН за 2020–2022 годы. Все исследования опубликованы в виде статей (в списке литературы исключением являются две работы, зарегистрированные в Реестре программ для ЭВМ) в известных отечественных и/или зарубежных научных журналах по механике. В течении рассматриваемых трех лет был решен ряд новых задач аэрогидроупругости и получены важные результаты динамического поведения тонкостенных элементов конструкций, взаимодействующих с внешней и внутренней сплошными средами. В частности, в статической и динамической постановках рассмотрен линейный изгиб консольного стержня, нагруженного всесторонним давлением и продольной силой. Определены области притяжения прогиба к верхнему и нижнему равновесным положениям двухопорной трубы при ее пространственных изгибно-вращательных колебаниях. Изучено взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода. Исследовано влияние внутренней и внешней присоединенных масс сплошных сред на частоту собственных колебаний трубы, движущейся с ускорением в поперечном направлении. Вычислены собственные частоты изгибных колебаний защемленного по концам стержня микро- и нанометрового поперечного сечения. Из решения обратной задачи по измененным значениям собственных частот найдены координата и величина присоединенной массы. Также рассмотрены линейные колебания микро- и наноструны с изменяющимся давлением в газовой среде с учетом поверхностных эффектов. С использованием молекулярно-динамической модели с сокращенным числом степеней свободы рассчитаны собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок различного диаметра в условиях плоского деформированного состояния. Кроме того, часть работ была посвящена изучению явления всплытия подводного газового трубопровода и определению его параметров арочного выброса. Представленные в настоящем обзоре научные статьи расположены в хронологическом порядке. По всем статьям даны их краткие содержания и сформулированы основные выводы.

**Ключевые слова:** стержень, трубопровод, микро- и нанорезонаторы, собственные частоты, поверхностные эффекты, плоский и пространственный изгиб, вибрация опор

### 1. Введение

Работа сотрудников лаборатории в указанном выше отрезке времени была направлена на реализацию тем государственного задания «Развитие теории прямых и обратных задач устойчивости и колебаний в аэрогидроупругих системах» (№ 0246-2019-0088), грантов РФФИ «Динамика тонкостенных элементов конструкций при действии ударного и пульсационного давления» (№ 18-01-00150)

и РФФИ «Развитие теории деформирования микро-нанопластинок, пленок с учетом поверхностных эффектов» (№ 22-21-00578).

### 2. Публикации 2020 года

Линейная устойчивость упругой цилиндрической оболочки, содержащей несжимаемую идеальную жидкость, при ударе по торцу в осевом направлении в предположении о мгновенном установлении сжатия по всей длине рассмотрена в [1]. Основное внимание уделяется анализу волнообразования в условиях контактного взаимодействия с

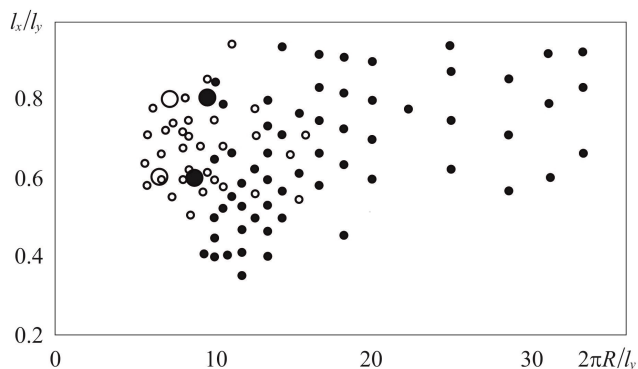


Рис. 1. Сравнение отношений размеров волн, образующихся на поверхности оболочки, пустой (светлые кружочки) и заполненной водой (темные кружочки)

жидкостью. Приводятся также результаты экспериментального исследования волнообразования в оболочке с жидкостью и без жидкости. Дается сравнение их с теоретическими данными. Показано уменьшение размеров волн по окружности и длине оболочки, содержащей жидкость, по сравнению с пустой оболочкой.

На рис. 1 приведено сравнение отношений размеров волн, образующихся на поверхности оболочки, пустой (светлые кружочки) и заполненной водой (темные кружочки). Размеры волн по окружности обозначены через  $l_y$ , а по длине оболочки —  $l_x$  ( $R$  — радиус оболочки). Результаты носят качественный характер и показывают уменьшение размеров волн для оболочки с водой по сравнению со случаем пустой оболочки (или отношений размеров  $l_x/l_y$  и числа волн по окружности  $2\pi R/l_y$ ). Разброс экспериментальных данных объясняется в основном наличием начальных отклонений от идеальной цилиндрической формы оболочки. Имеется качественное соответствие данных эксперимента и теории (светлые и темные кружочки больших размеров). По теории число полуволн по длине пустой оболочки равно  $\sqrt{N/(2N_E)}$ , а с жидкостью  $\sqrt{3N/(5N_E)}$ , где  $N_E$  — критическое значение продольной силы;  $N$  — сила удара по торцу оболочки.

В работе [2] определены собственные частоты изгибных колебаний проволоки с поперечным сечением микро- и наноразмеров. Показано значительное влияние на спектр частот поверхностных эффектов, связанных с различием упругих характеристик основного объема резонатора и приповерхностного слоя, а также среднего давления среды типа легкого газа на поверхность резонатора.

Обзор исследований по трем подходам в решении задач идентификации локальных дефектов стержней и трубопроводов и смежных задач дается

в [3]. В первом подходе локальные дефекты моделируются условиями сопряжения, во втором — дельта функциями, входящими в дифференциальное уравнение, в третьем подходе продольные полости и трещины моделируются непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью. В первой части обзора представлены работы, посвященные идентификации дефектов распределенных механических систем с помощью собственных частот, а также с помощью проходящих и отраженных волн. Вторая часть обзора посвящена работам, использующим второй и третий подходы — моделирование дефектов дельта функциями и непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью.

Влияние условий закрепления по контуру круглой пластины, находящейся под давлением, на ее осесимметричный изгиб изучено в [4]. Принимаются уточненные значения поперечной распределенной силы, зависящей от давления газа и разностей площадей выпуклой и вогнутой поверхностей. Учитывается также сила сжатия срединной поверхности, возникающая в результате обжатия пластины по толщине. Определены прогибы в линейной и нелинейной постановках

В [5] рассматриваются динамика жидкости в цилиндрической емкости и импульсное воздействие на днище при ударе по ее верхнему концу. Изучается случай, когда при ударе в столбе жидкости возле днища возникает кавитация. Исследование проводится в условиях известных экспериментов по разрушению бутылки в результате удара по ее верхнему концу. Применяются одномерные модели гидродинамики, линейной акустики и несжимаемой жидкости. Уравнения гидродинамики рассчитываются классическим методом С.К. Годунова. Изменение ускорения днища описывается кусочно-постоянной функцией, а кавитация моделируется одиночной кавитационной полостью в виде цилиндрического слоя между днищем и столбом жидкости. Кавитация возникает при падении давления жидкости ниже давления насыщенного пара. Показывается, что разрушение бутылки в экспериментах происходит вследствие гидроудара, вызванного коллапсом кавитационной полости. Влияние волн в столбе жидкости на его удар по днищу незначительно. При уменьшении давления на внешней поверхности жидкости от атмосферного ударное воздействие на днище убывает. Устанавливается также оптимальная высота столба жидкости для достижения больших давлений на днище.

Изгибные колебания трубопровода под действием переменного давления транспортируемой

жидкости и вертикального колебательного движения опор исследованы в [6, 7]. Одна из опор трубопровода неподвижна относительно основания, другая — может скользить по нему. Течением жидкости внутри трубопровода пренебрегается. Учитывается взаимное влияние продольной и окружной деформаций, внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии трубы. Рассмотрена первая форма колебаний. Отдельно изучены нелинейные вынужденные, параметрические колебания и их взаимодействие. Для амплитуд колебаний получены приближенные аналитические формулы. Приводится сравнение результатов приближенно-аналитического и численного решений.

В [8] представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения.

На основе предположения о начальной деформированной форме трубопровода без начальных напряжений в [9] определено критическое усилие сжатия. Трубопровод находился под действием внутреннего и внешнего давлений, сжимающей силы. По трубопроводу протекает жидкость с заданной плотностью. Учитывались осесимметричное расширение трубы и ее продольное укорочение, изменение температуры стенки трубы. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей под действием вышеуказанных факторов.

В [10] рассмотрено напряженно-деформированное состояние (НДС) трубы, оболочки и пленки из неоднородного упругого материала под действием внутреннего давления. Решение задачи представлено гипергеометрическими рядами. Приводятся результаты вычислений для толстостенной неоднородной трубы, неоднородной оболочки и очень тонкой неоднородной оболочки. Аналитическое решение эффективно при анализе напряженно-деформированного состояния цилиндра с тонким неоднородным слоем. Показано, что в неоднородном цилиндре радиальные напряжения и перемещения меньше, чем в однородном. Установлено, что тангенциальные напряжения в неоднородной оболочке по радиусу уменьшаются в большей степени.

Собственные изгибные колебания кровеносного сосуда с движущейся кровью, находящегося под

действием растягивающей силы и давления в сосуде, исследованы в [11]. Учитываются силы инерции кровеносного сосуда, кориолисовы и центробежные силы, обусловленные движением крови. Определяются волновые числа, при использовании граничных условий находится частотное уравнение. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной параметр, относительную массу крови на единицу длины кровеносного сосуда и, как следствие, массовый расход крови по кровеносному сосуду.

В [12] дано обоснование учета воздействия эквивалентного продольного осевого усилия  $S_x$ , зависящего от параметров эксплуатации трубопровода (внутреннего давления  $p_0$  и температурного перепада  $\Delta t$ ) и совместных деформаций трубы с грунтом. В первой постановке задачи о НДС трубопровода учитывается воздействие  $S_x$ , а во второй постановке задачи этим воздействием пренебрегается. Задачи решены методом конечных элементов в перемещениях. Расчетным путем показано, что за счет действия  $S_x$  при значениях параметров эксплуатации:  $p_0 = 9,0$  МПа;  $\Delta t = 29,0$  °С значения экстремальных изгибных напряжений увеличиваются в два раза по сравнению с соответствующими характеристиками НДС трубопровода для случая пренебрежения воздействием  $S_x$ . Из решения задачи в первой постановке найдены критические значения параметров эксплуатации, определяющих потерю устойчивости трубопровода.

В [13] приведены решения прямой и обратной задач о продольных колебаниях стержня с переменной площадью поперечного сечения. Закон изменения площади сечения моделируется в виде экспоненциальной функции от многочлена степени  $n$ . Метод реконструкции данной функции основан на представлении фундаментальной системы решений прямой задачи в виде ряда Маклорена по переменным  $x$  и  $\lambda$ . Представлены примеры решения для различных функций сечения и различных краевых условий. Показано, что для восстановления  $n$  неизвестных коэффициентов многочлена требуется  $n$  собственных значений, причем решение двойственно. Однозначное решение получено только для случая упругого закрепления на одном из концов стержня. С помощью «зашумления» входных данных произведена численная оценка погрешности метода. Показано, что погрешность нахождения переменной площади сечения менее 1 % при погрешности собственных значений продольных колебаний не более 0,0001.

Внешнее и внутреннее сопротивления сплошных сред при ускоренном движении трубопровода рассмотрены в [14]. Недеформируемый трубопро-

вод бесконечной длины, окруженный идеальной несжимаемой жидкостью, движется с ускорением перпендикулярно своей оси. Трубопровод имеет круговое поперечное сечение. Транспортируемая газожидкостная среда в трубе включает в себя граничащие области с двумя фазами: жидкой и газовой. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области. Влиянием сил гравитации на поперечные движения частиц сред пренебрегается. Получена формула, определяющая суммарную присоединенную массу трубопровода. Числовые расчеты выполнены при конкретных значениях входных параметров. Результатам вычислений дан анализ.

Влияние внутреннего переменного давления на изгибные колебания трубопровода на двух опорах исследовано в [15, 16]. Транспортируемая среда в трубопроводе состоит из жидкой и газовой фаз. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области. Скоростью течения газа пренебрегается. Учитывается влияние ускорения движения трубопровода в поперечном направлении на изменение давления в жидкости. Получены численное и приближенное аналитическое решения нелинейного дифференциального уравнения установившихся изгибных колебаний трубы. Рассмотрен конкретный числовой пример и дан анализ результатов вычислений.

В [17] представлена задача, определяющая вид граничного условия на правом конце стержня по собственным частотам его колебаний. Учитываются также поперечные колебания стержня. Предполагается, что левый конец стержня зажат, а правый конец недоступен для визуального осмотра. На правом конце стержня может быть представлено одно из десяти типов граничных условий: заземленное, закрепленное, свободный конец, ролик, пять видов упругого крепления и инерционный элемент на конце стержня. Граничные условия на правом конце стержня можно определить по трем частотам собственных колебаний. Преимущество и новизна данной работы заключается в использовании минимального количества собственных частот для решения задачи. Также оценивается погрешность результата. Стержни переменного сечения используются во многих деталях и механизмах. Например, конические стержни нашли широкое применение в ударных механизмах. Прочность таких деталей непосредственно зависит от собственных частот колебаний.

В [18] рассмотрен метод, позволяющий численно найти переменное сечение упругого стержня

по собственным частотам продольных колебаний. Предполагается, что площадь поперечного сечения изменяется вдоль оси и описывается экспоненциальной функцией от многочлена степени  $n$ . Граничное условие на левом конце жесткое, а на правом — упругое. Показано, что для определения  $n$  неизвестных коэффициентов функции сечения требуется  $n$  собственных частот.

### 3. Публикации 2021 года

Области притяжения прогиба к верхнему и нижнему равновесным положениям двухопорного трубопровода при его пространственных колебаниях определяются в [19, 34]. Предполагается, что опоры совершают вертикальные высокочастотные колебания с равными амплитудами и фазами. Используются нелинейные уравнения изгиба и углового движения трубопровода вокруг оси, проходящей через опоры. Для решения задачи применяется теория движения маятника Капицы. В случае превалирующего влияния внутреннего давления в трубе над ее весом на значение  $W_0$  статического прогиба средней точки пролета для определения угла  $\theta_1$  поворота плоскости изгиба вблизи положений динамического равновесия получено уравнение

$$\sin \theta_1 \left[ \pi g (k^2 + W_0^2) + 2W_0 (s_0 \Omega)^2 \cos \theta_1 \right] = 0,$$

$$W_0 = W_p + W_g \cos \theta_1,$$

где  $k^2 = \pi \rho [(R+h)^4 - R^4] / m$ ,  $m = \rho_0 F_0 + \rho F$ ,  $F_0 = \pi R^2$ ,  $F = \pi [(R+h)^2 - R^2]$ ;  $R$ ,  $h$ ,  $\rho$ ,  $\rho_0$  — внутренний радиус, толщина стенки, плотности материала трубы и заполняющей ее жидкости;  $W_p$  и  $W_g$  — составляющие статического прогиба, обусловленные внутренним давлением и весом трубы;  $g$  — гравитационное ускорение;  $s_0$ ,  $\Omega$  — амплитуда и циклическая частота колебаний основания.

Из равенства  $\sin \theta_1 = 0$  следуют корни 0 и  $\pi$ , которые представляют собой нижнюю и верхнюю точки притяжения. При  $\sin \theta_1 \neq 0$  равенство нулю выражения в квадратных скобках с учетом значения  $W_0$  дает

$$\cos \theta_1 = - \frac{\pi g (W_p + W_g \cos \theta_1)}{2 (s_0 \Omega)^2} \times \left( 1 + \frac{k^2}{(W_p + W_g \cos \theta_1)^2} \right).$$

Этим уравнением определяется то значение угла  $\theta_1$ , выше которого изогнутый вверх трубопровод имеет тенденцию к медленному движению к вертикальному положению (к верхней

точке  $\theta_1 = \pi$ ). Ниже этого значения  $\theta_1$  изогнутый трубопровод опускается к естественному нижнему положению ( $\theta_1 = 0$ ).

Установлено, что преобладающее влияние на изгиб внутреннего давления среды в трубопроводе над его весом и превышение момента сил вибрации опор над моментом сил гравитации обуславливают наличие верхнего и нижнего равновесных положений и соответствующих областей притяжения. При вертикальных колебаниях опор рассмотрен случай преобладающего влияния на изгиб внутреннего давления. Предполагается, что вибрации опор происходят с малой амплитудой по сравнению со статическим прогибом и с большой частотой по сравнению с низшей частотой его изгибных колебаний. Условие равенства момента распределенных по длине трубопровода сил гравитации и момента сил вибрации опор определяет границу областей выпучивания к нижнему и верхнему положениям. Около этой границы мало влияние на изгиб центробежных и кориолисовых сил. В рамках принятых приближений нет влияния высших форм изгибных колебаний трубопровода на границу областей притяжения. Предельные значения областей притяжения получаются при малой гравитации и сильной вибрации опор или при большой гравитации и слабой вибрации. В случае преобладания сил веса над распределенной силой от внутреннего давления имеется только нижнее положение равновесия. Сильное влияние на поведение системы оказывает значение критического внутреннего давления, при достижении которого труба между опорами испытывает выпучивание (по линейной теории). Необходимым, но недостаточным условием существования верхнего положения динамического равновесия является превышение внутреннего давления над его критическим значением.

Линейный изгиб консольного стержня, находящегося под всесторонним давлением и продольной силой, в статической и динамической постановках рассмотрен в [20]. Учитывается поперечная распределенная сила на стержень, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности. Сжимающая сила может быть неизменного направления и изменяющейся при изгибе. В частности, следящая сила образуется в результате действия давления на концевое сечение стержня. Дается сравнение с классической задачей об устойчивости. Изучены особенности одновременного действия сил неизменного и изменяющегося направлений.

В [21] рассматривается радиальная динамика однослойной углеродной нанотрубки при динамическом сжатии в линейной постановке. Применяется

уравнение изгибной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки (кругового кольца), основанное на гипотезах Кирхгоффа. Привлекается эффективный параметр, полученный сравнением собственных частот в рамках молекулярной динамики и теории упругих оболочек. Прикладываемое внешнее давление изменяется ступенчато и далее остается постоянным в пределах рассматриваемого времени. В зависимости от отношения этого давления к критическому значению статического давления изучаются режимы колебательного движения и экспоненциального возрастания прогиба. Эти величины представляются также через число атомов углерода, образующих круговое кольцо.

Собственные частоты изгибных колебаний резонатора с прямоугольным сечением на шарнирных опорах определены в [22]. Учитывается поверхностный эффект, обусловленный взаимодействием давления газа и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей резонатора. Изучено изменение спектра частот при наличии на поверхности резонатора присоединенной сосредоточенной и равномерно распределенной масс. Из решения обратной задачи определяются присоединенные массы по изменению собственных частот. Указанный первый поверхностный эффект дает увеличение собственных частот для одних материалов и уменьшение для других. Он приводит к изменению эффективных жесткостей при растяжении–сжатии и изгибе. В случае круглой проволоки ввиду увеличения ее удельной поверхности усилие растяжения  $N$  и изгибающий момент имеют вид (первый поверхностный эффект):

$$N = K_* \varepsilon, \quad M = D_* \kappa, \quad K_* = K(1 + \beta), \\ D_* = D(1 + 2\beta), \quad \beta = \frac{4E_s}{Ed},$$

где  $K$  и  $D$  — жесткости без учета поверхностного эффекта;  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  — продольная деформация и изменение кривизны осевой линии при изгибе;  $d$  — диаметр проволоки;  $E$  и  $E_s$  — модули упругости основного объема и поверхностного слоя. В этой модели не вводятся на рассмотрение толщина поверхностного слоя (поэтому  $E$  и  $E_s$  имеют разные размерности). Наибольшее внимание уделено анализу влияния второго поверхностного эффекта на изгиб, устойчивость и колебания пластин, пленок микро- и нанопроволок и струн. Он определяется числом Ильгамова  $\frac{p_m}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2$  в выражении распределенной поперечной нагрузки на пластину при ее цилиндрическом изгибе:

$$q = p_1 - p_2 + \frac{p_m}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2, \quad p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2),$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давления, действующие на поверхности пластины.

В [23] определены собственные частоты изгибных колебаний заземленного по концам стержня микро- и нанометрового поперечного сечения. Учитывается поверхностный эффект, обусловленный взаимодействием давления газа и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей стержня, появляющейся при изгибе. Рассмотрено изменение спектра частот при наличии на поверхности резонатора присоединенной сосредоточенной и равномерно распределенной масс. Из решения обратной задачи определяются координата и величина присоединенной массы по изменению собственных частот.

Линейные колебания микро- и наноструны при изменении давления в газовой среде рассмотрены в [24]. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый эффект обусловлен различием упругих свойств в поверхностном слое и в объеме материала. В зависимости от используемого материала эффективная жесткость при растяжении может быть выше или ниже обычной жесткости. Второй эффект обусловлен взаимодействием давления среды и разности площадей выпуклой и вогнутой сторон круглой поверхности, возникающей при отклонении от прямой. Эти эффекты выражаются безразмерными параметрами. Решение определяется в зависимости от заданного закона изменения давления во времени. Показано, что с ростом давления происходят уменьшение амплитуды и увеличение частоты колебаний, которые связаны с вакуумированием. В обратной задаче определяется закон изменения давления, а также параметр первого эффекта.

С использованием молекулярно-динамической модели с сокращенным числом степеней свободы в [25] рассчитаны собственные частоты изгибных колебаний УНТ различного диаметра в условиях плоского деформированного состояния. Показано, что теория тонких цилиндрических оболочек дает высокую точность в оценке частот малоамплитудных собственных колебаний даже для УНТ относительно малого диаметра. Показано, что с ростом амплитуды частота собственных колебаний уменьшается, что согласуется с литературными данными. Полученные результаты необходимы для дизайна терагерцовых резонаторов на основе УНТ и высокоточных наносенсоров массы и силы, основанных на эффекте электромеханической связи, который проявляют УНТ.

В [26] рассмотрена краевая задача для круглой пластины под действием двустороннего давления газа. В соотношениях задачи используется уточнен-

ное выражение для поперечной распределенной силы. Сила складывается из среднего избыточного давления и разности давлений, действующих на обе поверхности пластины, а также из искривления, возникающего при изгибе. Показано влияние граничных условий на значения прогиба, а также учтено усилие сжатия срединной поверхности, возникающее в результате уменьшения толщины пластины. Исследован линейный и нелинейный осесимметричный изгибы.

Результаты расчета технологического режима работы газовой скважины в глубокозалегающих месторождениях со сложными горно-геологическими условиями приведены в [27]. Совместно решены задачи гидравлики и температуры потока газа по скважине, теплопроводности горной породы. Дифференциальное уравнение движения потока газа зависит от распределения температуры по глубине скважины, а дифференциальное уравнение сохранения энергии — от распределения давления по глубине скважины. Поэтому при их решении аналитическим методом используется метод последовательных приближений: на начальном этапе при решении уравнения движения газа используется среднее значение температуры, а при решении температурной задачи потока газа — найденное распределение давления по глубине скважины. В численном методе решения задачи система дифференциальных уравнений движения потока газа в скважине и сохранения энергии интегрируется совместно с дифференциальным уравнением в частных производных (двумерное уравнение теплопроводности), описывающим изменение температуры горной породы. Система дифференциальных уравнений решена методом Рунге–Кутты с помощью специальной встроенной функции MathCAD. Обработка применяемых в расчетах результатов эксперимента осуществляется с помощью статистической математической модели. Результаты решения аналитическими и численными методами, расчеты по инженерным формулам (функции давления и температуры потока газа, а также замеренные значения этих характеристик) представлены в виде графиков функций давления и температуры по глубине скважины. В тестовом примере представлен расчет технологического режима работы скважины Р-1 Комсомольского (Пяку–Пуровского) месторождения.

В [28] по заданным частотам продольных колебаний неоднородного прямолинейного стержня определяется функция изменения его плотности. Предполагается, что плотность изменяется вдоль оси стержня и описывается полиномиальной функцией. Такой подход позволяет установить закон

изменения плотности по конечному набору собственных частот.

Программа для ЭВМ, позволяющая вычислять внешнюю и внутреннюю присоединенные массы трубопровода, приведена в [29].

Последовательность применения численного метода Рунге–Кутты, преобразования Фурье и отображений Пуанкаре при рассмотрении нелинейных изгибных колебаний трубопровода с учетом внутренней присоединенной массы представлена программой для ЭВМ [30].

#### 4. Публикации 2022 года

Низшая частота изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом определяется в [31]. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности пластины контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

В [32] рассмотрены линейные колебания микро- и наноструны с изменяющимся давлением в газовой среде. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый обусловлен различием упругих свойств в приповерхностном слое и в основном объеме материала. В зависимости от материала эффективная жесткость на растяжение может быть больше или меньше, чем обычная жесткость. Второй эффект обусловлен наличием разности сил давления среды на выпуклой и вогнутой сторонах круговой поверхности, появляющейся при отклонении от прямой линии. Эти эффекты определяются безразмерными параметрами. Решение находится в зависимости от заданного закона изменения давления по времени. Повышение давления приводит к уменьшению амплитуды и повышению частоты колебаний. С вакуумированием связаны увеличение амплитуды и уменьшение частоты. В обратной задаче определяется закон изменения давления, а также параметр первого эффекта.

Простейшая модель всплытия пролета подводного газового трубопровода между двумя опорами разработана в [33]. Учитываются вес трубопровода с транспортируемой средой, выталкивающая сила воды, поперечные распределенные силы, обусловленные давлениями на внутреннюю и внешнюю поверхности, изменением кривизны осевой линии при изгибе, а также уменьшение давления воды и

газа на стенки трубы при ее подъеме. Рассматривается линейный статический изгиб. Модель описывает подъем трубопровода до положения, когда его верхняя часть совпадает с поверхностью воды. Определены условия всплытия трубопровода.

В [35] дается обзор исследований взаимодействия давлений на обе стороны тонкой упругой пластины и цилиндрической оболочки и изменения кривизны их срединной поверхности при изгибе. Влияние среднего давления устанавливалось до сих пор через уточнение распределенной поперечной силы в известных уравнениях изгиба длинной цилиндрической оболочки. В данной работе это влияние учитывается при выводе уравнения изгиба с волнообразованием по окружности и отсутствию волн по ее длине.

Определение параметров трубы при формировании арочного выброса рассмотрено в [36]. Учитывается взаимное влияние изгиба трубопровода, внутреннего и внешнего давлений, действия сил сжатия, течения жидкости по трубопроводу с заданной плотностью, осесимметричного расширения трубы и ее продольного сжатия, изменения температуры стенки трубы, образования арочных выбросов. Упругий трубопровод закреплен на зажимных скользящих опорах, не препятствующих протеканию жидкости внутри трубопровода вдоль его оси. На опорах и прогиб, и угол поворота равны нулю. Трубопровод подвергается продольному сжатию. Сила сжатия, давление внутри и снаружи трубопровода и скорость течения жидкости по трубопроводу изменяются независимо друг от друга. В работе рассматривается статическое взаимодействие неустойчивостей в зависимости от силы сжатия, внутреннего и внешнего давлений, скорости течения жидкости, осесимметричного расширения трубы и изменения температуры стенки трубы. Жесткость на изгиб, растягивающие усилия и внешнее гидростатическое давление стабилизируют трубопровод, а силы сжатия, внутреннее гидростатическое давление, движение жидкости с любой скоростью внутри трубопровода и повышение температуры стенки трубы дестабилизируют его. С увеличением предела текучести материала трубопровода и расстояния между опорами растет и допустимая амплитуда арочного выброса. При увеличении внутреннего давления трубопровода допустимая амплитуда арочного выброса имеет тенденцию к снижению.

#### 5. Заключение

Результаты решения представленных выше новых задач устойчивости и колебаний в аэрогидроупругих системах прежде всего имеют практи-



ческий интерес. Они могут найти применение в энергетике, нефтегазовой промышленности, технологических машинах, вакуумной, авиационной и ракетно-космической технике, медицине. В частности, результаты изучения собственных изгибных колебаний кровеносного сосуда могут быть использованы для акустического метода определения скорости крови и ее массового расхода.

Цель исследований, в частности, заключается в определении значений параметров системы трубопровод–транспортируемый продукт–вибрирующие опоры, при достижении которых возникают опасные режимы колебаний. На этапе проектирования эти данные позволяют предусмотреть защитные мероприятия. Постоянное и переменное внутреннее и внешнее давления могут приводить к среднему перемещению трубопровода (как нелинейный эффект). Например, явление всплытия подводного газового трубопровода, более тяжелого, чем выталкивающая сила воды, объясняется одновременным действием температурного расширения, осевого сжатия, поперечной распределенной нагрузки, обусловленной взаимодействием давления газа и воды и кривизной осевой линии. Такое равновесное положение сооружения является недопустимым для его эксплуатации. До сих пор не разработан механизм всплытия трубопровода вследствие изменения гидростатического давления при его подъеме и колебаний давления газа, что отмечено в литературе. Часть результатов, относящихся к нанозлемам, необходима для дизайна терагерцовых резонаторов на основе углеродных нанотрубок и высокоточных наносенсоров массы и силы, основанных на эффекте электромеханической связи.

## Список литературы

- [1] Ильгамов М.А. Устойчивость цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом ударе // Изв. УНЦ РАН. 2020. № 2. С. 14–19.  
DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-2-14-19
- [2] Ильгамов М.А. Спектр частот проволочного микро- и нанорезонатора // ДАН. Физика, Технические науки. 2020. Т. 494. С. 17–20.  
DOI: 10.31857/S2686740020050089
- [3] Ахтямов А.М., Ильгамов М.А. Обзор исследований по идентификации локальных дефектов стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 3–15.  
DOI: 10.31857/S0235711920020042
- [4] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Dependence of axisymmetric bending of a circular plate on boundary conditions and pressure on its surface // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. Vol. 41, No. 7. P. 1216–1221.  
DOI: 10.1134/S1995080220070197
- [5] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Мустафин И.Н. Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2020. Т. 162. Кн. 1. С. 27–37.  
DOI: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37
- [6] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Вынужденные и параметрические колебания трубопровода // Изв. УНЦ РАН. 2020. № 3. С. 5–11.  
DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11
- [7] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 6. С. 66–69.  
DOI: 10.15372/PMTF20200608
- [8] Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 12–18.  
DOI: 10.31857/S0568528120020073
- [9] Хакимов А.Г. К статической устойчивости трубопровода // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, Вып. 4. С. 612–617.  
DOI: 10.21883/JTF.2020.04.49086.214-19
- [10] Хакимов А.Г., Беляев А.Б., Шакирьянов М.М., Мухаммадеев В.Р. К расчету трубы из неоднородного упругого материала // Вестник УГАТУ. 2020. Т. 24, № 1(87). С. 25–31.  
eLIBRARY ID: 42909040
- [11] Тимербулатов В.М., Тимербулатов Ш.В., Хакимов А.Г. Определение массового расхода крови в кровеносном сосуде по собственным частотам изгибных колебаний // ДАН РАН. Физика, Технические науки. 2020. Т. 492, № 1. С. 88–91.  
DOI: 10.31857/S2686740020030116
- [12] Бахтизин Р.Н., Зарипов Р.М., Коробков Г.Е., Масалимов Р.Б. Оценка влияния внутреннего давления, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода // Записки Горного института. 2020. Т. 242. № 2. С. 160–168.  
DOI: 10.31897/PMI.2020.2.160
- [13] Утяшев И.М., Айтбаева А.А., Юлмухаметов А.А. Определение закона изменения сечения стержня по собственным частотам колебаний // Изв. УНЦ РАН. 2020. № 4. С. 19–24.  
DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-19-24
- [14] Шакирьянов М.М., Юлмухаметов А.А. Внешняя и внутренняя присоединенные массы трубопровода // Известия УНЦ РАН. Механика. 2020. № 3. С. 12–16.  
DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-12-16
- [15] Shakiryaynov M.M., Yulmukhametov A.A. Effect of an Internal Attached Mass on Nonlinear Pipeline Oscillations // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49, No. 9. Pp. 1–8.  
DOI: 10.3103/S1052618820090113
- [16] Yulmukhametov A.A., Shakiryaynov M.M., Utyashev I.M. Bending vibrations of the pipeline under the influence of the internal added mass // AIP Conference Proceedings 2288, 030093 (2020).  
DOI: 10.1063/5.0028885
- [17] Aitbaeva A.A., Utyashev I.M. Identification of the rod end fixing by natural frequencies of transverse vibration // International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM). Samara, Russia. 2020. Pp. 1–5.
- [18] Utyashev I.M., Yulmukhametov A.A., Aitbaeva A.A. The inverse problem of the oscillation of a rod with a variable cross section // Journal of Physics: Conference Series. 2288, 030093 (2020).  
DOI: 10.1088/1742-6596/1697/1/012088
- [19] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // ДАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 496. С. 55–59.  
DOI: 10.31857/S2686740021010053
- [20] Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость консольного стержня под действием давления на его поверхности и продольной силы // Известия РАН. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 77–88.  
DOI: 10.31857/S0572329921040061

- [21] Дмитриев С.В., Ильгамов М.А. Радиальная реакция углеродной нанотрубки на динамическое давление // ДАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 501. С. 8–13.  
DOI: [10.31857/S2686740021060080](https://doi.org/10.31857/S2686740021060080)
- [22] Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7, No. 2. Pp. 977–983.  
DOI: [10.22055/JACM.2021.36470.2848](https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848)
- [23] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Зависимость спектра частот микро- и нанорезонатора от давления и присоединенной массы // Контроль. Диагностика. 2021. Т. 24, № 6. С. 58–64.  
DOI: [10.14489/td.2021.06.pp.058-064](https://doi.org/10.14489/td.2021.06.pp.058-064)
- [24] Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic oscillations of micro- and nanostrings in gaseous medium // Fluid Dynamics. 2021. Vol. 56, No. 8. Pp. 1062–1069.  
DOI: [10.1134/S0015462821080073](https://doi.org/10.1134/S0015462821080073)
- [25] Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С. Собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок // Журнал технической физики. 2021. Т. 91, Вып. 11. С. 1732–1738.  
DOI: [10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21](https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21)
- [26] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. On the Effect of Average Pressure on a Nonlinear Boundary Value Problem for a Circular Plate // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1982–1988.  
DOI: [10.1134/S1995080221080138](https://doi.org/10.1134/S1995080221080138)
- [27] Хайруллин Б.А., Шарафиев Э.А., Пономарев А.И., Зарипов Р.М. Расчет технологического режима работы газовой скважины с учетом реальных свойств потока газа и теплообмена с горной породой // 72-я научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых УГНТУ. Сб. материалов конференции. 2021. УГНТУ. Т. 2. С. 132.
- [28] Utyashev I.M. Determination of the variable density of the rod from natural frequencies of longitudinal vibrations // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 2099 012049.  
DOI: [10.1088/1742-6596/2099/1/012049](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2099/1/012049)
- [29] Юлмухаметов А.А., Шакирьянов М.М. Программа для вычисления внешней и внутренней присоединенных масс трубопровода, транспортирующего жидкость или газ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021668941; заявл. 11.11.2021; регистрация в Реестре программ для ЭВМ 22.11.2021.  
eLIBRARY ID: [47434316](https://elibrary.ru/47434316)
- [30] Юлмухаметов А.А., Шакирьянов М.М. Нелинейные изгибные колебания трубопровода с учетом внутренней присоединенной массы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669592; заявл. 10.11.2021; регистрация в Реестре программ для ЭВМ 30.11.2021.  
eLIBRARY ID: [47434976](https://elibrary.ru/47434976)
- [31] Ильгамов М.А., Хакимов А.А. Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // Известия РАН. МТТ. 2022. № 3. С. 88–96.  
DOI: [10.31857/S0572329922030084](https://doi.org/10.31857/S0572329922030084)
- [32] Ильгамов М.А., Утяшев И.М. Непериодические колебания микро- и наноструны в газовой среде // ПММ. 2022. Т. 86, Вып. 1. С. 66–76.  
DOI: [10.31857/S0032823522010052](https://doi.org/10.31857/S0032823522010052)
- [33] Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16.  
DOI: [10.31857/S2686740022030087](https://doi.org/10.31857/S2686740022030087)
- [34] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения упругого равновесия трубопровода с вибрирующими опорами // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 3. С. 183–192.  
DOI: [10.15372/PMTF20220318](https://doi.org/10.15372/PMTF20220318)
- [35] Ильгамов М.А. Влияние среднего давления на изгиб длинной цилиндрической оболочки // Изв. УНЦ РАН. 2022. № 3. С. 5–11.  
DOI: [10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11](https://doi.org/10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11)
- [36] Khakimov A.G. Determining Pipeline Parameters during the Formation of Arched Ejection // 15th International Conference on Mechanics. Resource and Diagnostics of Materials and Structures. Procedia Structural Integrity. 2022. V. 40. Pp. 214–222.  
DOI: [10.1016/j.prostr.2022.04.029](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.029)



## Review of research solid mechanics laboratory for 2020–2022

Shakir'yanov M.M.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center RAS, Ufa

The article presents an overview of the research of the Laboratory of Solid Mechanics IMech UFRS RAS for 2020-2022. All studies were published as articles (there are two exceptions in the list of references, registered in the Register of Computer Programs) in well-known domestic and (or) foreign scientific journals on mechanics. During the three years under consideration, a number of new problems of aerohydroelasticity were solved and important results were obtained on the dynamic behavior of thin-walled structural elements interacting with external and internal continuous media. In particular, the linear bending of a cantilever rod loaded with all-round pressure and longitudinal force is considered in static and dynamic formulations. The areas of attraction of the deflection to the upper and lower equilibrium positions of a two-support pipe during its spatial bending-rotational vibrations are determined. The interaction of forced and parametric vibrations of the pipeline has been studied. The influence of the internal and external added masses of continuous media on the frequency of natural vibrations of a pipe moving with acceleration in the transverse direction is studied. The eigenfrequencies of bending vibrations of a micro- and nanometer-sized rod clamped at the ends are calculated. From the solution of the inverse problem for the changed values of natural frequencies, the coordinate and magnitude of the added mass are found. Linear oscillations of micro- and nanostrings are also considered when the pressure in a gaseous medium changes, taking into account surface effects. Using a model of molecular dynamics with a reduced number of degrees of freedom, the eigenfrequencies of bending vibrations of carbon nanotubes (CNTs) of different diameters are calculated under conditions of a plane-deformed state. In addition, part of the work was devoted to the study of the phenomenon of the ascent of an underwater gas pipeline and the determination of its buoyancy parameters.

The scientific articles presented in this review are arranged in chronological order. For all articles, their summary is given and the main conclusions are formulated.

**Keywords:** rod, pipeline, micro- and nanoresonators, natural frequencies, surface effects, plane and spatial bending, vibration of supports

### References

- [1] Ilgamov M.A. [Stability of a cylindrical shell with liquid under axial impact] // *Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]*. 2020. No. 2. Pp. 14–19 (in Russian).  
DOI: [10.31040/2222-8349-2020-0-2-14-19](https://doi.org/10.31040/2222-8349-2020-0-2-14-19)
- [2] Ilgamov M.A. Frequency spectrum of a wire micro- and nanoresonator // *Doklady Physics*. 2020. V. 65, No. 9. P. 326–329.  
DOI: [10.1134/S1028335820090049](https://doi.org/10.1134/S1028335820090049)
- [3] Akhtyamov A.M., Ilgamov M.A. Overview of local rod defect detection studies // *Journal of machinery manufacture and reliability*. 2020. V. 49, Is. 2. Pp. 87–97.  
DOI: [10.3103/S1052618820020041](https://doi.org/10.3103/S1052618820020041)
- [4] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Dependence of axisymmetric bending of a circular plate on boundary conditions and pressure on its surface // *Lobachevskii journal of mathematics*. 2020. Vol. 41, No. 7. P. 1216–1221.  
DOI: [10.1134/S1995080220070197](https://doi.org/10.1134/S1995080220070197)
- [5] Aganin A.A., Ilgamov M.A., Mustafin I.N. [Shock cavitation of a liquid in a cylindrical container] // *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskiye nauki. [Scientific notes of Kazan University. Series: physical and mathematical sciences]*. 2020. V. 162, No. 1. Pp. 27–37 (in Russian).  
DOI: [10.26907/2541-7746.2020.1.27-37](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.27-37)
- [6] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. [Forced and parametric oscillations of the pipeline] // *Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]*. 2020. No. 3. Pp. 5–11 (in Russian).  
DOI: [10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11](https://doi.org/10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11)
- [7] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. Interaction between forced and parametric vibrations of a pipeline // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020. V. 61, No. 6. P. 964–967.  
DOI: [10.1134/S0021894420060085](https://doi.org/10.1134/S0021894420060085)
- [8] Khakimov A.G. Flow around a Circular Cylindrical Shell // *Fluid Dynamics*. 2020. V. 55, No. 2. P. 154–161.  
DOI: [10.1134/S001546282002007X](https://doi.org/10.1134/S001546282002007X)

- [9] Khakimov A.G. Static Stability of a Pipeline // *Technical Physics*. 2020. V. 65, No.4. P. 587–592.  
DOI: [10.1134/S106378422004012X](https://doi.org/10.1134/S106378422004012X)
- [10] Khakimov A.G., Belyaev B.A., Shakir'yanov M.M., Muhamadeev V.R. [To the calculation of a pipe from an inhomogeneous elastic material] // *Vestnik UGATU*. [Bulletin of USATU]. 2020. V. 24, No. 1 (87). Pp. 25–31 (in Russian).  
eLIBRARY ID: 42909040
- [11] Timerbulatov V.M., Timerbulatov S.V., Khakimov A.G. Determination of the mass-flow rate of blood vessel using natural frequencies of flexural vibrations. *Doklady Physics*. V. 65, No. 5. 2020. P. 190–193.  
DOI: [10.1134/S1028335820050110](https://doi.org/10.1134/S1028335820050110)
- [12] Bakhtizin R.N., Zaripov R.M., Korobkov G.E., Masalimov R.B. [Assessment of internal pressure effect, causing additional bending of the pipeline] // *Записки Горного института*. [Notes of the Mining Institute]. 2020. V. 242, No.2. Pp. 160–168 (in Russian).  
DOI: [10.31897/PMI.2020.2.160](https://doi.org/10.31897/PMI.2020.2.160)
- [13] Utyashev I.M., Aitbaeva A.A., Yulmuhametov A.A. [Determination of the law of change in the cross section of the rod by natural vibration frequencies] // *Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN*. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2020. No. 4. Pp. 19–24 (in Russian).  
DOI: [10.31040/2222-8349-2020-0-4-19-24](https://doi.org/10.31040/2222-8349-2020-0-4-19-24)
- [14] Shakir'yanov M.M., Yulmuhametov A.A. [External and internal attached masses of the pipeline] *Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN*. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2020. No. 3. Pp. 12–16 (in Russian).  
DOI: [10.31040/2222-8349-2020-0-3-12-16](https://doi.org/10.31040/2222-8349-2020-0-3-12-16)
- [15] Shakir'yanov M.M., Yulmukhametov A.A. Effect of an Internal Attached Mass on Nonlinear Pipeline Oscillations // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020. Vol. 49, No. 9. Pp. 1–8.  
DOI: [10.3103/S1052618820090113](https://doi.org/10.3103/S1052618820090113)
- [16] Yulmukhametov A.A., Shakir'yanov M.M., Utyashev I.M. Bending vibrations of the pipeline under the influence of the internal added mass // *AIP Conference Proceedings* 2288, 030093 (2020).  
DOI: [10.1063/5.0028885](https://doi.org/10.1063/5.0028885)
- [17] Aitbaeva A.A., Utyashev I.M. Identification of the rod end fixing by natural frequencies of transverse vibration // *International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM)*. Samara, Russia. 2020. Pp. 1–5.
- [18] Utyashev I.M., Yulmuhametov A.A., Aitbaeva A.A. The inverse problem of the oscillation of a rod with a variable cross section // *Journal of Physics: Conference Series*. 2288, 030093 (2020).  
DOI: [10.1088/1742-6596/1697/1/012088](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1697/1/012088)
- [19] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. Dynamic equilibrium positions of bent pipeline with vibrating supports // *Doklady Physics*. 2021. V. 66, No. 2. P. 51–54.  
DOI: [10.1134/S1028335821020026](https://doi.org/10.1134/S1028335821020026)
- [20] Ilgamov M.A. Bending and stability of the cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force // *Mechanics of Solids*. 2021. V. 56, No. 4. P. 495–504.  
DOI: [10.3103/S0025654421040087](https://doi.org/10.3103/S0025654421040087)
- [21] Dmitriev S.V., Ilgamov M.A. The radial response of a carbon nanotube to dynamic pressure // *Doklady Physics*. 2021. V. 66, No. 12. P. 336–340.  
DOI: [10.1134/S102833582112003X](https://doi.org/10.1134/S102833582112003X)
- [22] Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2021. Vol. 7, No. 2. Pp. 977–985.  
DOI: [10.22055/JACM.2021.36470.2848](https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848)
- [23] Ilgamov M. A., Khakimov A.G. [Dependence of the frequency spectrum of micro- and nano- resonators on pressure and attached mass] // *Kontrol'. Diagnostika*. [Control. Diagnostics]. 2021. V. 24, (6). P. 58–64 (in Russian).  
DOI: [10.14489/td.2021.06.pp.058-064](https://doi.org/10.14489/td.2021.06.pp.058-064)
- [24] Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic oscillations of micro- and nanostrings in gaseous medium // *Fluid Dynamics*. 2021. Vol. 56, No. 8. Pp. 1062–1069.  
DOI: [10.1134/S0015462821080073](https://doi.org/10.1134/S0015462821080073)
- [25] Dmitriev S.V., Sunagatova I.R., Ilgamov M.A., Pavlov I.S. Natural frequencies of bending vibrations of carbon nanotubes // *Technical Physics*. 2022. V. 67, No. 1. P. 7–13.  
DOI: [10.1134/S1063784222010042](https://doi.org/10.1134/S1063784222010042)
- [26] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. On the Effect of Average Pressure on a Nonlinear Boundary Value Problem for a Circular Plate // *Lobachevskii journal of mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1982–1988.  
DOI: [10.1134/S1995080221080138](https://doi.org/10.1134/S1995080221080138)
- [27] Khairullin B.A., Sharafiev E.A., Zaripov R.M. Ponomarev A.I. [Calculation of the technological mode of operation of a gas well, taking into account the real properties of the gas flow and heat exchange with rock] // *72-ya nauchno-tehnicheskaya konferentsiya studentov, aspirantov i molodykh uchenykh UGNTU*. Sb. materialov konferentsii. [72nd Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists of USPTU. Sb. conference materials]. 2021. UGNTU. V. 2. P. 132 (in Russian).
- [28] Utyashev I.M. Determination of the variable density of the rod from natural frequencies of longitudinal vibrations // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 2099 012049.  
DOI: [10.1088/1742-6596/2099/1/012049](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2099/1/012049)
- [29] Yulmukhametov A.A., Shakir'yanov M.M. [A program for calculating the external and internal attached masses of a pipeline transporting liquid or gas] // *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2021668941; zayavl. 11.11.2021; registratsiya v Reyestre programm dlya EVM 22.11.2021*. [Certificate of state registration of the computer program No. 2021668941; dec. 11.11.2021; registration in the Register of computer programs on 22.11.2021] (in Russian).  
eLIBRARY ID: 47434316
- [30] Yulmukhametov A.A., Shakir'yanov M.M. [Nonlinear Flexural Vibrations of a Pipeline Taking into Account the Internal Attached Mass] // *Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2021669592; zayavl. 10.11.2021; registratsiya v Reyestre programm dlya EVM 30.11.2021*. [Certificate of state registration of the computer program No. 2021669592; dec. 10.11. 2021; registration in the Register of computer programs on 30. 11. 2021. (in Russian).  
eLIBRARY ID: 47434976
- [31] Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence pressure on the lowest oscillation frequency of a plate. // *Mech. Sol.* V. 57, No. 3. 2022. P. 524–531.  
DOI: [10.3103/S0025654422030141](https://doi.org/10.3103/S0025654422030141)
- [32] Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic Oscillations of Micro- and Nanostrings in a Gaseous Medium // *Fluid Dynamics*. 2021. V. 56, No. 8. Pp. 1062–1069.  
DOI: [10.1134/S0015462821080073](https://doi.org/10.1134/S0015462821080073)
- [33] Ilgamov M.A. Model of underwater pipeline flotation // *Doklady Physics*. 2022. V. 67, No. 5. Pp. 123–127.  
DOI: [10.1134/S1028335822050020](https://doi.org/10.1134/S1028335822050020)
- [34] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. Positions of elastic equilibrium of a pipeline with vibrating supports // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022. V. 63, No. 3. P. 533–541.  
DOI: [10.1134/S002189442203018X](https://doi.org/10.1134/S002189442203018X)
- [35] Ilgamov M.A. Effect of mean pressure on the bending of a long cylindrical shell // *Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN*. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2022. No. 3. Pp. 5–11 (in Russian).  
DOI: [10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11](https://doi.org/10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11)
- [36] Khakimov A.G. Determining Pipeline Parameters during the Formation of Arched Ejection // *15th International Conference on Mechanics. Resource and Diagnostics of Materials and Structures*. *Procedia Structural Integrity*. 2022. V. 40. Pp. 214–222.  
DOI: [10.1016/j.prostr.2022.04.029](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.04.029)