

ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2022

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Распад топологического солитона в линейном дефекте доменной структуры закрученного нематика

Делев В.А.

ИФМК УФИЦ РАН, Уфа

В данной работе исследуется распад топологического солитона в осциллирующем линейном дефекте электроконвективной структуры (доменов Вильямса), возникающей в закрученном на $\pi/2$ нематическом жидком кристалле. В отличие от планарно ориентированных нематиков гидродинамические потоки в доменах закрученного нематика носят геликоидальный характер, так как кроме тангенциальной компоненты скорости имеется и аксиальная составляющая, направление которой противоположно в соседних доменах. Эта особенность приводит к образованию устойчивых локализованных протяженных образований — линейных дефектов, — ориентированных нормально к доменам Вильямса. С увеличением приложенного напряжения в линейных дефектах возникают доменные zig-zag осцилляции. Границами между zig и zag состояниями являются классические дислокации. Обнаружено, что дислокация, двигаясь вдоль ядра дефекта, распадается на антидислокацию и две дислокации. В отличие от случая планарно ориентированных нематиков, дислокации не изолируются друг от друга невозмущенными роллами, а остаются «связанными» гидродинамическими потоками в пределах ядра линейного дефекта. Предполагается, что расщепление дислокации происходит в результате возникновения локальной неустойчивости ориентационной твист-моды директора \mathbf{n} из-за ее сильной связи со скоростью гидродинамического потока. В рамках уравнения синус–Гордона, при наличии диссипативного слагаемого и пространственных возмущений, рассматривается механизм распада топологического солитона (кинка) на антисолитон и два солитона.

Ключевые слова: нематический жидкий кристалл, нематик, электроконвекция, домены Вильямса, твист-мода, линейный дефект, дислокация, уравнение синус–Гордона, кинк

1. Введение

Одним из наиболее распространенных сценариев перехода от упорядоченного состояния к пространственно-временному хаосу в неравновесных системах связан с процессами образования и взаимодействия топологических дефектов (defects mediated turbulence, topological turbulence) [1]. Как правило, топологические дефекты появляются спонтанно в различных неравновесных системах с большим аспектным соотношением [2]. При этом нарушается когерентность пространственных структур, которые могут образовываться в этих системах. Наиболее часто изучаемыми примерами являются термоконвекция Рэлея–Бенара [3], электроконвекция в нематических жидких кристаллах (НЖК, нематик) [4–7] и др.

В достаточно протяженных двумерных системах с увеличением надкритичности вначале развивается фазовая турбулентность¹ [8], а затем, в результате пинчевания фазы, рождаются пары топологических дефектов и возникает топологическая турбулентность или хаос дефектов [9]. Механизм образования пары топологических дефектов-дислокаций является универсальным для многих систем, где могут образовываться пространственно-упорядоченные структуры [10].

¹Автор использует термин «фазовая турбулентность», значение которого в гидродинамике не имеет четкого определения. Для читателей настоящего журнала предлагаем формулировку, данную в работе Б. Шраймана [Shraiman B.I. Order, Disorder, and Phase Turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 57, No. 3. Pp. 325–328. DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.325]: «Фазовая турбулентность — явление, связанное с временной эволюцией протяженных пространственных структур».

Аналогичным образом следует трактовать и термин «топологическая турбулентность»: это турбулентность, обусловленная дефектами. [Прим. ред.]

Однако в случае изотропных сред исследование динамики и взаимодействия отдельных пар топологических дефектов является весьма сложной задачей, так как экспериментально реализовать идеально упорядоченные структуры с малой плотностью дефектов весьма затруднительно. Здесь, как правило, образуются конвективные валы (роллы) с различными направлениями их оси, а плотность образующихся при этом дефектов достаточно велика [3].

НЖК характеризуются наличием ориентационного упорядочения молекул удлиненной формы, которые имеют тенденцию устанавливаться параллельно некоторой общей оси, характеризующейся единичным вектором — директором \mathbf{n} , в то же время дальний порядок в расположении центров масс молекул отсутствует [5–7]. Поэтому в системе электроконвекции НЖК ситуация иная. Наличие осевой анизотропии позволяет получить практически идеальные и достаточно протяженные структуры параллельных роллов — доменов Вильямса.

Динамика и взаимодействие дислокаций в электроконвективных структурах планарно ориентированных НЖК достаточно хорошо изучены как экспериментально, так и теоретически [11–14]. Результаты этих работ свидетельствуют о важной роли дефектов при усложнении пространственно-временной динамики доменных структур в НЖК с увеличением приложенного напряжения. В частности установлено, что механизм отбора оптимального волнового числа при формировании доменных структур как в изотропной, так и в анизотропной среде, непосредственно связан с процессами рождения и аннигиляции дислокаций. Поведение дислокаций в системе электроконвекции в приближении слабой надкритичности хорошо описывается амплитудным уравнением Гинзбурга–Ландау [12–14].

Типичными элементарными дефектами электроконвективных структур в НЖК являются дислокации с топологическими зарядами $S = \pm 1$. Дефект с топологическим зарядом $S = \pm 1$ соответствует скачку фазы на $\pm 2\pi$ в структуре доменов Вильямса, т.е. его сингулярность определяется лишним (или недостающим) пространственным периодом при обходе замкнутого контура вокруг его ядра [14].

Топологический дефект характеризуется условием

$$\oint dl \nabla \phi(x, t) = \pm 2\pi S,$$

где ϕ — фаза параметра порядка; целое $S \neq 0$ — сила, или топологический заряд дислокации.

Как показано в [14], при определенной скорости увеличения приложенного к ЖК-ячейке напряжения дислокации могут образовывать в пространстве новые локализованные квазистационарные состояния с более низкой симметрией. Как правило, такое состояние зарождается вблизи ядра классической дислокации и распространяется вдоль линии, нормальной к доменам Вильямса. При этом возникающий *линейный дефект* с «размытым» ядром имеет такой же топологический заряд как и исходная дислокация. Кроме того, локализованное состояние может возникать спонтанно в результате развития модуляционной неустойчивости как простой сдвиг доменов на половину пространственного периода π друг относительно друга без образования дислокаций. Поэтому такое искажение доменной структуры получило название *линии скачка фазы* [14]. С увеличением приложенного напряжения указанные типы линейных образований в планарно ориентированных НЖК становятся неустойчивыми. При этом линейные дефекты распадаются на нечетное число (не менее трех) дислокаций, а линии скачка фазы — на четное число (не менее двух) дислокаций с противоположными топологическими зарядами $S = \pm 1$. В обоих случаях суммарный топологический заряд сохраняется [14].

Подобные стационарные линейные локализованные деформации наблюдаются и в доменных структурах закрученных на $\pi/2$ НЖК [15, 16]. При определенной скорости увеличения приложенного напряжения их длина L увеличивается и может достигать размеров ЖК-образца (Рис. 1(a)). Здесь гидродинамические потоки несут геликоидальный характер, т.к. наряду с тангенциальной компонентой скорости v_t , имеется и аксиальная составляющая v_a , направление которой противоположно в соседних доменах. Из-за сильной связи ориентации директора \mathbf{n} (твист-мода) со скоростью гидродинамического потока в роллах закрученных НЖК такие линейные образования являются достаточно устойчивыми [17]. При дальнейшем увеличении напряжения в ядрах линейных дефектов возникают доменные *zig-zag* осцилляции (Рис. 1(b)).

Необходимо подчеркнуть, что для описания дислокаций в НЖК кроме амплитудного подхода [12–14] может быть использована модель Френкеля–Конторовой (ФК) [18]. Если в стандартной модели ФК пренебречь эффектами дискретности, то получится хорошо известное уравнение синус–Гордона (УСГ) для функции смещения u :

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0. \quad (1)$$

Данное уравнение является полностью интегри-

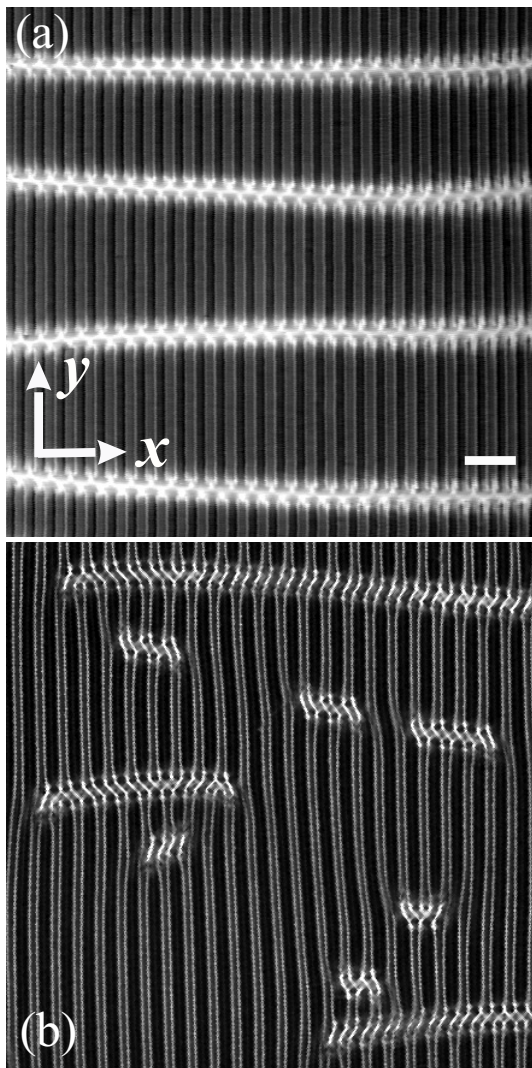


Рис. 1. Стационарные линейные локализованные образования в закрученном на $\pi/2$ нематике при напряжении $U = 5.6$ В и частоте $f = 30$ Гц (а); линейные осциллирующие дефекты при $U = 12.5$ В и $f = 30$ Гц (б); масштаб 100 мкм

руемым и было одним из первых обнаруженных уравнений с многосолитонным решением, а первое приложение УСГ нашло в физике для построения упрощенных моделей дислокаций в металлах. УСГ (1) имеет ряд аналитических решений [19]. Одним из них, является топологический солитон, или кинк:

$$u(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \left(\sigma \frac{x - x_0 + v(t - t_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right], \quad (2)$$

где $\sigma = \pm 1$ — топологический заряд кинка; $0 \leq v \leq 1$ — скорость движения кинка; величина x_0 характеризует положение кинка в момент времени $t = t_0$.

Топологические солитоны и модель ФК имеют

множество приложений в физике конденсированного состояния. Например, в физике твердого тела они описывают доменные стенки в ферромагнетиках и сегнетоэлектрических материалах, дислокации в кристаллах, волны зарядовой плотности, межфазные границы в металлических сплавах, динамику вихрей в длинных джозефсоновских контактах и т.д. [18].

В настоящее время солитоны разбиваются на два больших класса. Первый из них — консервативные солитоны (КС), — существующие в системах с пренебрежимо слабой диссипацией, роль которой сводится в основном к ограничению времени жизни солитона. КС распространяются с постоянной скоростью, не изменяя своей формы, благодаря балансу дисперсионных и нелинейных эффектов. Некоторые уединенные волны ведут себя как частицы при упругих столкновениях, что и побудило Забуски и Крускала ввести термин «солитон» [20]. Второй класс — автосолитоны, или диссипативные солитоны (ДС), — возникают благодаря балансу притока и оттока энергии [21, 22]. ДС при столкновении демонстрируют, как правило, неупругие взаимодействия.

Анизотропные среды, такие как НЖК, предлагают особенно богатые возможности для экспериментального изучения солитонов, которые могут описываться в рамках модели синус–Гордона [23, 24]. Так УСГ нашло успешное применение для описания дислокаций при электроконвекции в закрученных на $\pi/2$ НЖК [25]. Установлено, что в зависимости от длины линейного дефекта наблюдается различная динамика и взаимодействие дислокаций, а средняя длина возникающих линейных дефектов может контролироваться приложенным напряжением [25–28]. В то же время поведение и взаимодействие элементарных дислокаций в осциллирующих линейных дефектах доменов Вильямса до сих пор остается мало изученным.

В данной работе исследуется динамика и распад дислокации в осциллирующем линейном дефекте электроконвективной структуры (доменов Вильямса), возникающей в закрученном на $\pi/2$ НЖК. Обнаружено, что при движении по ядру дефекта дислокация распадается на антидислокацию и две дислокации. Предполагается, что расщепление дислокаций происходит в результате возникновения локальной неустойчивости внутренней твист-моды директора \mathbf{n} закрученного НЖК, когда гидродинамические потоки в линейных дефектах перестают быть стационарными и возникают «зиг-заг» осцилляции. В рамках возмущенного УСГ рассматривается возможный механизм распада топологического солитона — кинка.

2. Методика эксперимента

В качестве НЖК использовался 4-*n*-метоксибензилиден-*n*-бутиланилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из SnO₂. Поверхность подложек с электродами покрывалась слоем ориентанта — полиимида AL1254 (JSR Corp. Japan), — который затем натирался в одном направлении для создания однородной планарной ориентации директора **n**. Толщина ЖК-ячейки размером 16 × 12 мм задавалась майларовыми прокладками $d \simeq 20$ мкм. После её заполнения нематиком и формирования однородной планарной ориентации, верхняя подложка медленно поворачивалась относительно нижней по часовой стрелке на угол $\pi/2$ так, что во всем слое НЖК возникла однородно закрученная ориентация директора **n** (Рис. 2). К ЖК-слою прикладывалось переменное напряжение U с частотой $f_U = 30$ Гц. Критическое напряжение возникновения доменов Вильямса составляло $U_c = 5.6$ В. При этом их ось ориентирована перпендикулярно директору **n** в середине слоя НЖК и составляет углы -45° и 45° с ориентацией директора соответственно на верхней и нижней подложках. Направления гидродинамических потоков в доменах определялись путем анализа движений пробных частиц диаметром 2 ÷ 3 мкм, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany), а их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением 720 × 576 пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

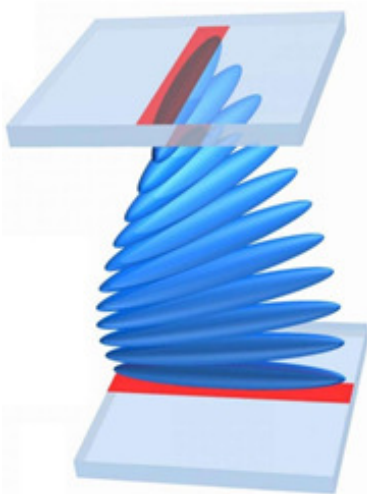


Рис. 2. Схематическое изображение молекул в закрученном на $\pi/2$ слое НЖК

3. Результаты и обсуждение

Изображение электроконвективной структуры в НЖК представляет собой пространственно-периодические модуляции интенсивности прошедшего через ячейку с НЖК света. Эти модуляции соответствуют локальным изменениям оптической анизотропии $\langle \Delta n(t) \rangle$ под действием внешнего электрического поля. При критическом напряжении электроконвекции в слое НЖК возбуждаются гидродинамические вихревые движения в виде роллов. Вихревое движение ориентирует НЖК особенно сильно в области максимального градиента скорости, т.е. в центре вихревых шнуров — доменов Вильямса. Образующиеся цилиндрические вихри играют роль линз, фокусирующих свет в светлые линии [4]. В итоге формируется изображение в виде темных и светлых полос — доменов Вильямса (Рис. 3)

Рассмотрим структуру линейного стационарного дефекта с диссоциированным ядром в доменной структуре закрученного НЖК с учетом особенностей гидродинамики течений (Рис. 3).

На Рис. 3 стрелками показаны направления аксиальных компонент скорости конвективных потоков v_a в доменах вблизи ядра линейного дефекта; тонкими пунктирными линиями — перераспределение потоков в ядре дефекта; светлые оптические линии соответствуют центрам доменов (осям роллов), вокруг которых наблюдалось геликоидальное движение частиц [17]. Поэтому пространственный период структуры определяется как $T = 2\lambda$. При этом непрерывность потоков в дефекте обеспечивается как замыканием сонаправленных аксиальных компонент скорости v_a через ядро, так и их замыканием с противоположно направленными потоками в соседних доменах. При напряжениях $U \lesssim 7.4$ В потоки конвективного течения в доменах являются стационарными.

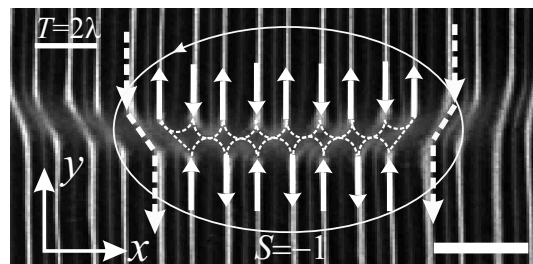


Рис. 3. Изображение линейного дефекта с диссоциированным ядром в доменной структуре закрученного НЖК при $U = 6.5$ В и $f = 30$ Гц. Масштаб 100 мкм

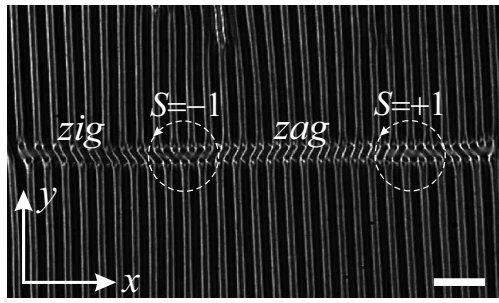


Рис. 4. Линейный осциллирующий дефект в закрученном на $\pi/2$ НЖК при $U = 7.6$ В и $f = 30$ Гц (b). Границей zig и zag областей являются дислокации с топологическими зарядами $S = \pm 1$. Масштаб 100 мкм

С увеличением приложенного напряжения обе компоненты скорости потока анизотропной жидкости в доменах v_t и v_a возрастают и при $U > 7.4$ В линейный дефект теряет устойчивость. Однако, в отличие от планарно ориентированного НЖК [14], ядро дефекта не распадается сразу на отдельные дислокации, а сначала начинает осциллировать. При этом наблюдается поочередное периодическое во времени переоткрытие доменов с направленными потоками анизотропной жидкости то влево (zig), то вправо (zag) и движение жидкости в ядре дефекта приобретает пульсирующий характер. Затем происходит образование zig и zag областей, осциллирующих в противофазе. Одновременно между границами zig и zag областей возникают дислокации с топологическими зарядами $S = \pm 1$ (Рис. 4). При этом, в отличие от случая планарно ориентированных нематиков, дислокации не изолируются друг от друга невозмущенными роллами, а остаются «связанными» гидродинамическими течениями в пределах ядра линейного дефекта.

Дальнейшая динамика дислокаций устанавливается таким образом, чтобы в ядре нестационарного линейного дефекта обеспечивалась непрерывность геликоидального потока анизотропной жидкости.

Далее проследим за динамикой дислокации с топологическим зарядом $S = +1$ в ядре линейного дефекта $L = 6T$ и исследуем процесс ее распада (Рис. 5). Заметим, что в модельных представлениях дислокация с топологическим зарядом $S = +1$ соответствует кинку, а антидислокация с $S = -1$ — антикинку. Дислокация с $S = +1$ движется слева направо по ядру линейного дефекта с скоростью $v \simeq 13$ мкм/с (Рис. 5(a)–(c)). При достижении правого края дефекта наблюдается ее распад на антидислокацию и две дислокации. По-видимому, расщепление дислокаций происходит в результате возникновения локальной неустойчивости твист-

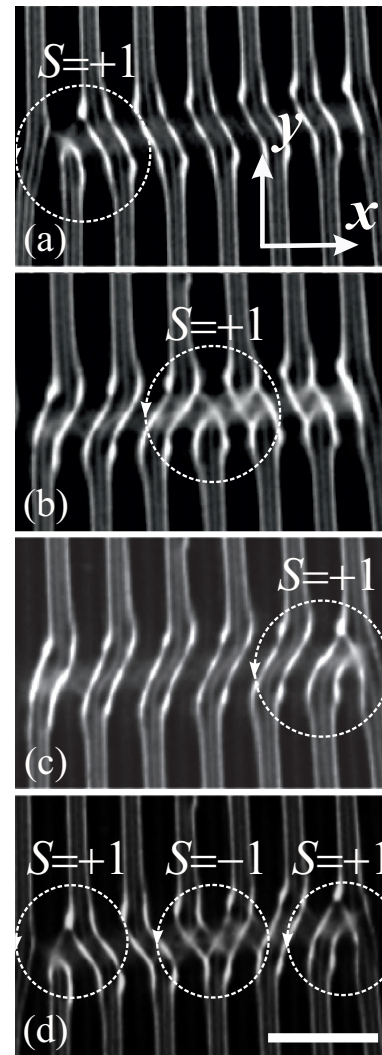


Рис. 5. Распад дислокации с топологическим зарядом $S = +1$ на антидислокацию с $S = -1$ и две дислокации с $S = +1$ в линейном дефекте при $U = 7.6$ В и $f = 30$ Гц. Интервал между кадрами $\Delta t \simeq 0.76$ с. Масштаб 100 мкм

моды директора \mathbf{n} в ядре линейного дефекта, когда гидродинамические потоки в нем перестают быть стационарными (при $U > 7.4$ В) и возникают «зиг-заг» осцилляции.

Для качественного описания воспользуемся результатами работ [29, 30], в которых моделируются различные механизмы распада УСГ солитонов. Авторами вначале доказывалось существование внутренних мод УСГ солитонов, когда они находятся в присутствии неоднородных, зависящих от пространства, внешних сил [29]. Рассматриваются условия (различные значения управляющего параметра B в выражении (3) ниже), при которых внутренняя мода становится неустойчивой, что приводит к распаду солитона на антисолитон и два

солитона. Также подчеркивается, что при наличии пространственно-временных сил солитон ведет себя как деформируемый (неупругий) объект.

Будем рассматривать УСГ с диссипативным членом, возмущенное внешней силой [29, 30]:

$$u_{tt} + \gamma u_t - u_{xx} + \sin u = F(x).$$

Здесь γ — некоторый параметр.

Вначале кинк движется с левого края линейного дефекта в сторону его правой границы практически без изменения формы и скорости в соответствии с решением (2) (Рис. 6(a)–(c)). При этом внешняя сила $F(x) = 0$. При столкновении кинка с правой границей линейного дефекта внутренняя мода топологического солитона становится неустойчивой под действием локализованной неоднородной внешней силы [29]

$$F(x) = 2(B^2 - 1) \sinh(Bx) / \cosh^2(Bx), \quad (3)$$

где B — управляющий параметр.

Анализ численных результатов для различных значений B показал, что самое впечатляющее явление происходит для $B^2 < 2/[\Lambda_*\Lambda_* + 1]$, где $\Lambda_* = (5 + \sqrt{17})/2$ [29]. В этом случае первая внутренняя мода является неустойчивой, что и приводит к распаду кинка на антикинк и два кинка (Рис. 6(d)).

В соответствии с [29] выбор вида функции (3) обусловлен следующими ее свойствами: (i) можно получить точное решение для солитона, покоящегося в положении равновесия; и (ii) можно точно решить задачу устойчивости этого солитона. Кроме того, с данным примером связаны реальные физические системы [31]. Например, аналогичная функция может описывать локальную деформацию системы волн зарядовой плотности [32].

Таким образом расщепление дислокации на антидислокацию и две дислокации в доменах Вильямса закрученного на $\pi/2$ НЖК качественно можно объяснить возникновением локальной неустойчивости внутренней твист-моды директора \mathbf{n} в рамках возмущенного УСГ, возникающей в момент, когда гидродинамические потоки в ядре дефекта перестают быть стационарными. Такая неустойчивость может возникнуть, например, в результате критического роста ориентационных флуктуаций директора \mathbf{n} при увеличении внешнего приложенного напряжения (при $U > 7.4$ В). В этом случае переход к топологической турбулентности в закрученных НЖК характеризуется не только процессами рождения и аннигиляции дислокаций, но и их распадом.

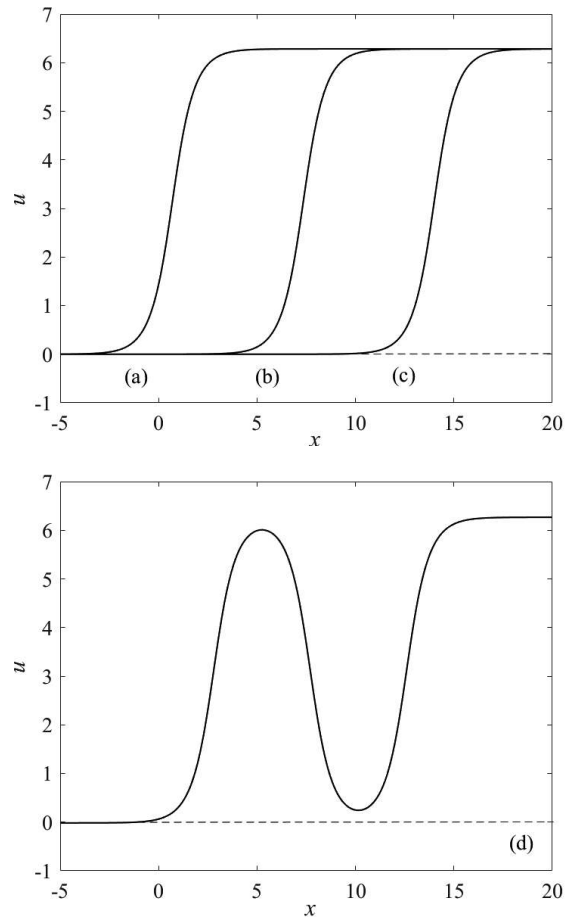


Рис. 6. Численная иллюстрация зависимости $u(x, t)$ от x , демонстрирующая распад кинка с топологическим зарядом $\sigma = +1$ на антикинк $\sigma = -1$ и два кинка с $\sigma = +1$. $\gamma = 0.2$, $\Delta T = 20$

4. Заключение

В представленной работе экспериментально обнаружено, что процесс перехода к турбулентности в системе электроконвекции в закрученных на $\pi/2$ НЖК может сопровождаться не только процессами рождения и аннигиляции дислокаций [27], но и их «элементарным» распадом на антидислокацию и две дислокации. Предпринята попытка качественно объяснить распад солитона возникновением локальной неустойчивости твист-моды директора \mathbf{n} в рамках возмущенного УСГ. Неустойчивость твист-моды директора \mathbf{n} наблюдается, когда гидродинамические потоки в линейных дефектах перестают быть стационарными и возникают доменные осцилляции. При этом дальнейшая динамика дислокаций устанавливается таким образом, чтобы в ядре нестационарного линейного дефекта обеспечивалась непрерывность геликоидального потока анизотропной жидкости.

Необходимо подчеркнуть, что исследование перехода от регулярного движения дефектов к сильно нестационарной пространственно-временной динамике остается актуальной задачей современной физики конденсированного состояния. Это явление связано с турбулентностью, обусловленной появлением дефектов [1, 2]. Кинки, как вихри и спирали, являются частными случаями более общего явления, называемого топологическими дефектами. Хотя эти объекты могут иметь разное происхождение и природу в разных физических системах, все они обладают очень похожими динамическими свойствами. В частности, одним из возможных механизмов, который в настоящее время считается ответственным за переход от тахикардии к фибрилляции желудочков в ткани сердца, является спонтанный распад одной спиральной волны электрической активности на несколько спиралей, приводящих к турбулентному волновому поведению [33].

Таким образом, такие неустойчивости, как распады солитонов, могут влиять на различные процессы в технике, медицине и др. Поэтому очень важно понимать не только все возможные механизмы распада солитонов, чтобы научиться избегать их, но и по возможности их контролировать [34].

В экспериментальных исследованиях использовалось оборудование Центра коллективного пользования «Спектр» ИФМК УФИЦ РАН и Регионального центра коллективного пользования «Агидель».

Работа выполнена в рамках госзадания № 1021052103972-3-1.3.2;1.3.1.

Список литературы

- [1] Couillet P., Gil L., and Lega J. Defect-mediated turbulence // *Physical Review Letters*. 1989. V. 62, No. 14. Pp. 1619–1622. DOI: 10.1103/PhysRevLett.62.1619
- [2] Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // *Reviews of Modern Physics*. 1993. V. 65. Pp. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851
- [3] Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.
- [4] Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
- [5] Пикин С.А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [6] De Gennes P.G. and Prost J. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford: Clarendon, 1994. 596 p.
- [7] Buka A. and Kramer L. (editors). *Pattern Formation in Liquid Crystals*. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
- [8] Kuramoto Y. Phase dynamics of weakly unstable periodic structures // *Progress of Theoretical Physics*. 1984. V. 71, No. 6. Pp. 1182–1196. DOI: 10.1143/PTP.71.1182
- [9] Toulouse G., Kléman M. Principles of a classification of defects in ordered media // *Journal de Physique Lettres*. 1976. V. 37, No. 6. Pp. 149–151. DOI: 10.1051/jphyslet:01976003706014900
- [10] Eckmann J.-P., Goren G. and Procaccia I. Nonequilibrium nucleation of topological defects as a deterministic phenomenon // *Physical Review A*. 1991. V. 44, No. 2. Pp. 805–808. DOI: 10.1103/PhysRevA.44.R805
- [11] Kai S., Chizumi N., and Kohno M. Pattern formation, defect motions and onset of defect chaos in the electrohydrodynamic instability of nematic liquid crystals // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1989. V. 58. Pp. 3541–3554. DOI: 10.1143/JPSJ.58.3541
- [12] Rasenat S., Steinberg V., and Rehberg I. Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection // *Physical Review A*. 1990. V. 42, No. 10. Pp. 5998–6008. DOI: 10.1103/PhysRevA.42.5998
- [13] Bodenschatz E., Weber A., and Kramer L. Interaction and dynamics of defects in convective roll patterns of anisotropic fluids // *Journal of Statistical Physics*. 1991. V. 64, No. 5. Pp. 1007–1015. DOI: 10.1007/BF01048810
- [14] Joets A. and Ribotta R. Localized bifurcations and defect instabilities in the convection of a nematic liquid crystal // *Journal of Statistical Physics*. 1991. V. 64, No. 5/6. Pp. 981–1005. DOI: 10.1007/BF01048809
- [15] Delev V.A., Toth P., and Krekhov A.P. Electroconvection in twisted nematic liquid crystals // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 2000. V. 351. Pp.179–186. DOI: 10.1080/10587250008023267
- [16] Tatsumi S., Sano M., and Rossberg A.G. Observation of stable phase jump lines in convection of a twisted nematic liquid crystal // *Phys. Rev. E*. 2006. V. 73. Pp. 011704-1–8. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.011704
- [17] Hertrich A., Krekhov A.P., and Scaldin O.A. The electrohydrodynamic instability in twisted nematic liquid crystals // *Journal de Physique II (France)*. 1994. V. 4. Pp. 239–252. DOI: 10.1051/jp2:1994126
- [18] Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008. 536 с.
- [19] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
- [20] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states // *Physical Review Letters*. 1965. V. 15, No. 6. P. 240–243. DOI: 10.1103/PhysRevLett.15.240
- [21] Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны // *Успехи Физических Наук*. 1989. Т. 157, Вып. 2. С. 201–266.
- [22] Rosanov N.N. *Spatial hysteresis and optical patterns*. Berlin: Springer, 2002. 308 p.
- [23] Lam L., Prost J. (editors). *Solitons in liquid crystals*. N.Y.: Springer Science & Business Media, 1992. 338 p.
- [24] Shen Yu. and Dierking I. Recent progresses on experimental investigations of topological and dissipative solitons in liquid crystals // *Crystals*. 2022. V. 12, No. 1. Pp. 1–17. DOI: 10.3390/cryst12010094

- [25] Чувывров А.Н., Скалдин О.А., Делев В.А., Лебедев Ю.А., Батыршин Э.С. Структура и динамика дислокаций Френкеля-Конторовой при электроконвекции в жидких кристаллах // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2006. Т. 130, № 6. С. 1072–1081.
[eLIBRARY ID: 9430706](#)
- [26] Скалдин О.А., Делев В.А., Шиховцева Е.С., Лебедев Ю.А., Батыршин Э.С. Бризероподобные дефекты и их динамика в одномерной ролловой структуре закрученных нематиков // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2015. Т. 148, Вып. 6(12). С. 1232–1247.
[DOI: 10.7868/S0044451015120172](#)
- [27] Делев В.А., Назаров В.Н., Скалдин О.А., Батыршин Э.С., Екомасов Е.Г. Сложная динамика каскада кинк-антикинкковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2019. Т. 110, Вып. 9. С. 607–613.
[DOI: 10.1134/S0370274X19210070](#)
- [28] Делев В.А. Неупругие взаимодействия солитонов в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1921. Т. 113, Вып. 1-2. С. 26–32.
[DOI: 10.31857/S1234567821010043](#)
- [29] González J.A., Bellorín A., Guerrero L.E. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // *Physical Review E*. 2002. V. 65. Pp. 065601-1-4.
[DOI: 10.1103/PhysRevE.65.065601](#)
- [30] González J.A., Bellorín A., Guerrero L.E. Kink-soliton explosions in generalized Klein–Gordon equations // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2007. V. 33. Pp. 143–155.
[DOI: 10.1016/j.chaos.2006.10.047](#)
- [31] Kivshar Yu.S. and Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Reviews of Modern Physics*. Vol. 61, No. 4. 1989. Pp. 763–915.
[DOI: 10.1103/RevModPhys.61.763](#)
- [32] Bak P. and Brazovskiy A. Theory of quasi-one-dimensional conductors: Interaction between chains and impurity effects // *Physical Review B*. 1978. V. 17, No. 8. Pp. 3154–3164.
[DOI: 10.1103/PhysRevB.17.3154](#)
- [33] Zipes D.P., Jalife J, and Stevenson W.G. Cardiac electrophysiology: from cell to bedside. E-Book, 2017. 1120 p.
- [34] González J.A., Bellorín A., Guerrero L.E. Controlling soliton explosions // *Physics Letters A*. 2005. V. 338. Pp. 60–65.
[DOI: 10.1016/j.physleta.2005.02.018](#)



The topological soliton decay in a linear defect of the domain structure of twisted nematic

Delev V.A.

IMCP UFRC RAS, Ufa, Russia

In this paper, the topological soliton decay in an oscillating linear defect of electroconvective structure (Williams domains) arising in $\pi/2$ twisted nematic liquid crystal are studied. In contrast to planarly oriented nematics, hydrodynamic flows in the domains of a twisted nematic have a helical character. Since, in addition to the tangential velocity component, there is also axial component, the direction of which is opposite in neighboring domains. This feature leads to the formation of stable localized extended objects – linear defects oriented normal to Williams domains. With increasing applied voltage, "zig-zag" oscillations occurs in linear defects. The boundaries between the "zig" and "zag" states are classical dislocations. It has been found, that the dislocation, moving along the core of the defect, breaks up into an antidislocation and two dislocations. Unlike case of planarly oriented nematics, dislocations are not isolated from each other by unperturbed rolls but remain "bound" by hydrodynamic flows within the core of a linear defect. It is assumed that the splitting of the dislocation occurs as a result of the local instability of the orientational twist mode of the director \mathbf{n} due to its strong coupling with the hydrodynamic velocity. In the framework of the sine–Gordon equation, in the presence of a dissipative term and spatial perturbations, the mechanism of a topological soliton (kink) decay into antisoliton and two solitons is considered.

Keywords: nematic liquid crystal, nematic, electroconvection, Williams domains, twist mode, linear defect, dislocation, sine–Gordon equation, kink

References

- [1] Couillet P., Gil L., and Lega J. Defect-mediated turbulence // *Physical Review Letters*. 1989. V. 62, No. 14. Pp. 1619–1622.
DOI: [10.1103/PhysRevLett.62.1619](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.1619)
- [2] Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // *Reviews of Modern Physics*. 1993. V. 65. Pp. 851–1112.
DOI: [10.1103/RevModPhys.65.851](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.65.851)
- [3] Getling A.V. Rayleigh-Benard convection. M.: Editorial URSS, 1999. 248 s. (In Russian)
- [4] Blinov L.M. Electro-Optical and Magneto-Optical Properties of Liquid Crystals (Nauka, Moscow, 1978; Wiley, New York, 1983). 384 p.
- [5] Pikin S.A. Strukturnye prevrashcheniya v zhidkikh kristallah. M.: Nauka, 1981. 336 s. (In Russian)
- [6] De Gennes P.G. and Prost J. The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Clarendon, 1994. 596 p.
- [7] Buka A. and Kramer L. (editors). Pattern Formation in Liquid Crystals. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
- [8] Kuramoto Y. Phase dynamics of weakly unstable periodic structures // *Progress of Theoretical Physics*. 1984. V. 71, No. 6. Pp. 1182–1196.
DOI: [10.1143/PTP.71.1182](https://doi.org/10.1143/PTP.71.1182)
- [9] Toulouse G., Kléman M. Principles of a classification of defects in ordered media // *Journal de Physique Lettres*. 1976. V. 37, No. 6. Pp. 149–151.
DOI: [10.1051/jphyslet:01976003706014900](https://doi.org/10.1051/jphyslet:01976003706014900)
- [10] Eckmann J.-P., Goren G. and Procaccia I. Nonequilibrium nucleation of topological defects as a deterministic phenomenon // *Physical Review A*. 1991. V. 44, No. 2. Pp. 805–808.
DOI: [10.1103/PhysRevA.44.R805](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.R805)
- [11] Kai S., Chizumi N., and Kohno M. Pattern formation, defect motions and onset of defect chaos in the electrohydrodynamic instability of nematic liquid crystals // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1989. V. 58. Pp. 3541–3554.
DOI: [10.1143/JPSJ.58.3541](https://doi.org/10.1143/JPSJ.58.3541)
- [12] Rasenat S., Steinberg V., and Rehberg I. Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection // *Physical Review A*. 1990. V. 42, No. 10. Pp. 5998–6008.
DOI: [10.1103/PhysRevA.42.5998](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.42.5998)
- [13] Bodenschatz E., Weber A., and Kramer L. Interaction and dynamics of defects in convective roll patterns of anisotropic fluids // *Journal of Statistical Physics* 1991. V. 64, No. 5. Pp. 1007–1015.
DOI: [10.1007/BF01048810](https://doi.org/10.1007/BF01048810)
- [14] Joets A. and Ribotta R. Localized bifurcations and defect instabilities in the convection of a nematic liquid crystal // *Journal of Statistical Physics* 1991. V. 64, No. 5/6. Pp. 981–1005.
DOI: [10.1007/BF01048809](https://doi.org/10.1007/BF01048809)

- [15] Delev V.A., Toth P., and Krekhov A.P. Electroconvection in twisted nematic liquid crystals // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 2000. V. 351. Pp.179–186.
DOI: [10.1080/10587250008023267](https://doi.org/10.1080/10587250008023267)
- [16] Tatsumi S., Sano M., and Rossberg A.G. Observation of stable phase jump lines in convection of a twisted nematic liquid crystal // *Physical Review E*. 2006. V. 73. Pp. 011704-1–8.
DOI: [10.1103/PhysRevE.73.011704](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.011704)
- [17] Hertrich A., Krekhov A.P., and Scaldin O.A. The electrohydrodynamic instability in twisted nematic liquid crystals // *Journal de Physique II (France)*. 1994. V. 4. Pp. 239–252.
DOI: [10.1051/jp2:1994126](https://doi.org/10.1051/jp2:1994126)
- [18] Braun O.M., Kivshar' YU.S. Model' Frenkelya-Kontorovoj. Konceptii, metody, prilozheniya. M.: Fizmatlit, 2008. 536 s. (In Russian)
- [19] Dodd R., Ejlbek Dzh., Gibbon Dzh., Morris H. Solitony i nelinejnye volnovye uravneniya. M.: Mir, 1988. 694 s. (In Russian)
- [20] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states // *Physical Review Letters*. 1965. V. 15, No. 6. P. 240–243.
DOI: [10.1103/PhysRevLett.15.240](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.15.240)
- [21] Kerner B.S., Osipov V.V. Autosolitons // *Uspehi Fizicheskikh Nauk*. 1989. V. 157, No. 2. Pp. 201–266. (In Russian)
- [22] Rosanov N.N. Spatial hysteresis and optical patterns. Berlin: Springer, 2002. 308 p.
- [23] Lam L., Prost J (editors). Solitons in liquid crystals. N.Y.: Springer Science & Business Media, 1992. 338 p.
- [24] Shen Yu. and Dierking I. Recent progresses on experimental investigations of topological and dissipative solitons in liquid crystals // *Crystals*. 2022. V. 12, No. 1. Pp. 1–17.
DOI: [10.3390/cryst12010094](https://doi.org/10.3390/cryst12010094)
- [25] CHuvyrov A.N., Skaldin O.A., Delev V.A., Lebedev YU.A., Batyrshin E.S. Struktura i dinamika dislokacij Frenkelya-Kontorovoj pri elektrokonvekcii v zhidkikh kristallah // *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoj Fiziki*. 2006. T. 130, № 6. S. 1072–1081. (In Russian)
eLIBRARY ID: 9430706
- [26] Skaldin O.A., Delev V.A., Shikhovtseva E.S., Lebedev Yu.A., and Batyrshin E.S. Breatherlike defects and their dynamics in the one-dimensional roll structure of twisted nematics // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2015. V. 121, No. 6. Pp. 1082–1095.
DOI: [10.1134/S1063776115120158](https://doi.org/10.1134/S1063776115120158)
- [27] Delev V.A., Nazarov V.N., Scaldin O.A., Batyrshin E.S., and Ekomasov E.G. Complex dynamics of the cascade of kink–antikink interactions in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2019. V. 110, No. 9. Pp. 607–612.
DOI: [10.1134/S0021364019210069](https://doi.org/10.1134/S0021364019210069)
- [28] Delev V.A. Inelastic interactions of solitons in a linear defect of the electroconvective structure of a nematic liquid crystal // *Letters to Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2021. Vol. 113, No. 1. Pp. 23–29.
DOI: [10.1134/S0021364021010021](https://doi.org/10.1134/S0021364021010021)
- [29] González J.A., Bellorín A., Guerrero L.E. Internal modes of sine-Gordon solitons in the presence of spatiotemporal perturbations // *Physical Review E*. 2002. V. 65. Pp. 065601-1-4.
DOI: [10.1103/PhysRevE.65.065601](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.065601)
- [30] González J.A., Bellorín A., Guerrero L.E. Kink-soliton explosions in generalized Klein–Gordon equations // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2007. V. 33. Pp. 143–155.
DOI: [10.1016/j.chaos.2006.10.047](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.10.047)
- [31] Kivshar Yu.S. and Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Reviews of Modern Physics*. Vol. 61, No. 4. 1989. Pp. 763–915.
DOI: [10.1103/RevModPhys.61.763](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.763)
- [32] Bak P. and Brazovskiy A. Theory of quasi-one-dimensional conductors: Interaction between chains and impurity effects // *Physical Review B*. 1978. V. 17, No. 8. Pp. 3154–3164.
DOI: [10.1103/PhysRevB.17.3154](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.17.3154)
- [33] Zipes D.P., Jalife J, and Stevenson W.G. Cardiac electrophysiology: from cell to bedside. E-Book, 2017. 1120 p.
- [34] González J.A., Bellorín A., Guerrero L.E. Controlling soliton explosions // *Physics Letters A*. 2005. V. 338. Pp. 60–65.
DOI: [10.1016/j.physleta.2005.02.018](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.02.018)



Моделирование сопряженного теплообмена термовязкой жидкости в цилиндрическом канале¹

Моисеев К.В.^{*,**}, Ямлихина И.Н.^{*}

^{*}Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

^{**}Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

В работе рассматривается течение термовязкой жидкости в цилиндрическом канале для различных типов функций вязкости при совместном решении задачи сопряженного теплообмена канала с окружающим материалом. Рассмотрена модель цилиндрического канала с протекающей внутри термовязкой жидкостью с заданными скоростью и вязкостью. Методология процесса заключается в использовании системы модельных уравнений, описывающих динамику процессов течения термовязкой жидкости, основанной на законах сохранения энергии фаз, уравнении неразрывности, уравнении сохранения количества движения в форме Навье–Стокса с учетом сопряженного теплообмена и уравнении теплообмена для твердого тела. Численная реализация модельных представлений осуществлена с применением цифрового пакета Comsol Multiphysics. Получены профили скорости и температуры в поперечном сечении канала. Показано влияние функции вязкости на профиль течения, а также на количественные характеристики потока и теплообмена. Проведен анализ зависимости характера профилей скорости и температуры от вязкости жидкости и типа зависимости вязкости от температуры. Результатом проделанной работы являются найденные особенности и закономерности, возникающие в процессе сопряженного теплообмена термовязкой жидкости в цилиндрическом канале при сравнении линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры. Проведен анализ полученных зависимостей вязкости и температуры в профиле потока, значения максимальной скорости потока. Показано, что вязкое трение вызывает локальное повышение температуры вблизи стенок трубы с последующим увеличением скорости жидкости из-за уменьшения вязкости. Полученные результаты являются базовыми для дальнейшего развития данной темы и будут использованы для решения новых задач в области моделирования потока термовязкой жидкости и сопряженного теплообмена.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, теплообмен, цилиндрический канал, профили скорости, профили температуры

1. Введение

Течение термовязких жидкостей в каналах играет важную роль, так как каналы являются основными узлами в теплообменном оборудовании. При течении вязкой жидкости отдельные ее слои взаимодействуют друг на друга с силами, касательными к слоям. Это явление называют внутренним трением

или вязкостью. Вследствие симметрии поперечного сечения ясно, что в канале частицы текущей жидкости, равноудаленные от оси, имеют одинаковую скорость. Наибольшей скоростью обладают частицы, движущиеся вдоль оси канала. При наличии теплообмена термовязкой жидкости со стенками канала вязкость жидкости становится неоднородной, что сказывается на течении и теплообмене. Таким образом, возникает определенный интерес к исследованию зависимости качественных и количественных характеристик потоков термовязких жидкостей в каналах.

Изучению этого явления посвящено большое

¹Работа выполнена в рамках государственного задания № 0246-2019-0052

количество работ [1–4], однако потенциал для более глубокого изучения до сих пор неисчерпаем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение термовязкой жидкости в цилиндрическом канале, схема представлена на рис. 1. Канал окружен теплопроводным материалом, имеющим конечные размеры и форму параллелепипеда $1 \text{ м} \times 0,1 \text{ м} \times 0,1 \text{ м}$.

Термовязкая жидкость поступает в канал, расположенный вдоль оси блока. Течение термовязкой жидкости направлено вдоль оси канала и обусловлено заданным перепадом давления.

Модель строится на основе фундаментальной системы дифференциальных уравнений гидродинамики, включающей уравнение неразрывности, уравнение сохранения количества движения в форме Навье–Стокса, уравнение сохранения энергии, записанное относительно температуры в канале, и уравнение теплопроводности материала, окружающем канал:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{v} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \vec{v}) &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\nabla p}{\rho}(\mu(T)\nabla \vec{v}), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\nabla T &= \chi_0 \Delta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \chi_m \nabla T, \end{aligned}$$

где \vec{v} — скорость жидкости; t — время; $\mu(T)$ — функция зависимости динамической вязкости от температуры; p — избыточное давление; ρ — плотность жидкости; T — температура жидкости; χ_0 — коэффициент температуропроводности жидкости; χ_m — коэффициент температуропроводности окружающего материала.

В начальный момент времени будем считать, что температура канала и окружающего материала T_1 , жидкость поступает в канал с температурой $T_2 > T_1$. Жидкость в канале находится в покое.

На стенках канала будем задавать условия прилипания $\vec{v} = 0$. На входе в цилиндрический канал задана фиксированная скорость жидкости $v = v_0$. На выходе из канала считается, что избыточное давление отсутствует $p = 0$.

Рассматриваются жидкости с двумя типами зависимости вязкости от температуры. Функции вязкости определены на одном температурном интервале (T_1, T_2) с одной областью значений (μ_1, μ_2) .

Линейно возрастающая и убывающая зависимости вязкости жидкости от температуры представляются в следующем виде (графики функций

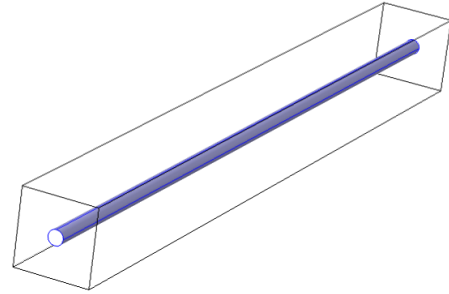


Рис. 1. Эскиз блока течения жидкости

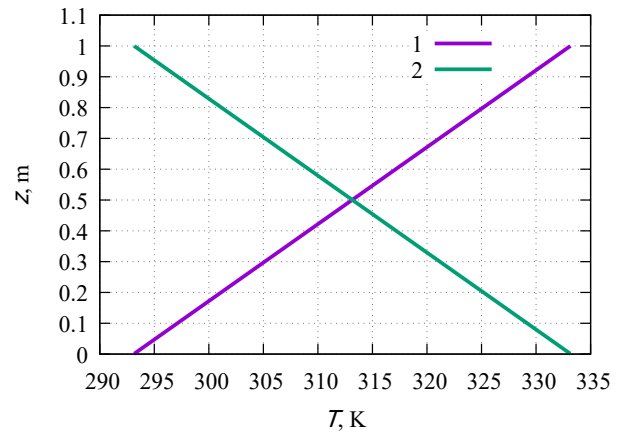


Рис. 2. Графики линейно возрастающей (1) и убывающей (2) зависимостей вязкости жидкости от температуры

приведены на рис. 2):

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \Delta\mu \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \\ \mu &= \mu_1 - \Delta\mu \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \end{aligned}$$

где $\Delta\mu = \mu_2 - \mu_1$.

Экспоненциально возрастающая и убывающая зависимости вязкости жидкости от температуры представлены на рис. 3 и имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 e^{(\log(\Delta\mu) \frac{T - T_1}{T_2 - T_1})}, \\ \mu &= \mu_2 e^{(-\log(\Delta\mu) \frac{T - T_1}{T_2 - T_1})}, \end{aligned}$$

где $\Delta\mu = \mu_2 / \mu_1$.

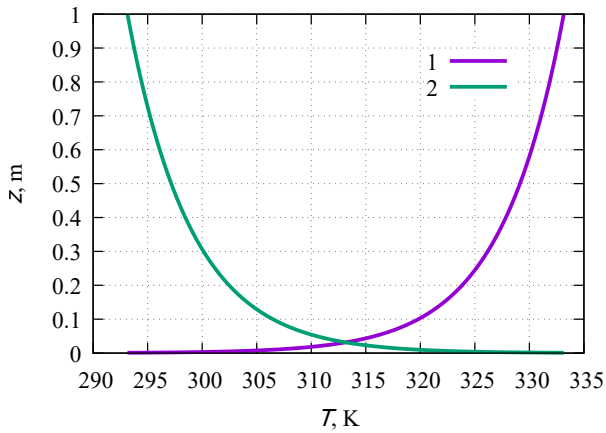


Рис. 3. Графики экспоненциально возрастающей (1) и убывающей (2) зависимостей вязкости жидкости от температуры

3. Практическая часть

Задача решалась численно с помощью пакета Comsol Multiphysics при следующих диапазонах вязкости $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$. Втекающая в канал жидкость имеет следующие свойства: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\mu_1 = 0,001 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $v_0 = 0,01 \text{ м/с}$, $T_1 = 333,15 \text{ К}$, $\chi_m = 6,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$. Вмещающий канал представляет собой твердое тело с параметрами $T_2 = 293,15 \text{ К}$, $\chi_m = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$. Расчеты для всех типов зависимостей вязкости от температуры проводились на одном промежутке времени — 10 часов.

На рис. 4 приведены профили температуры для линейно возрастающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. При $\Delta\mu = 1$ профиль температуры имеет

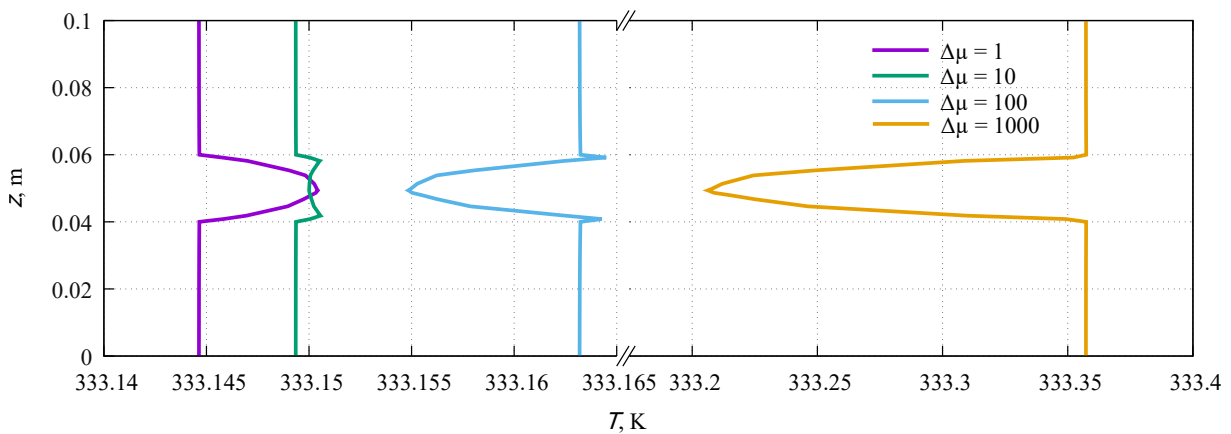


Рис. 4. Профили температуры для возрастающей линейной функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

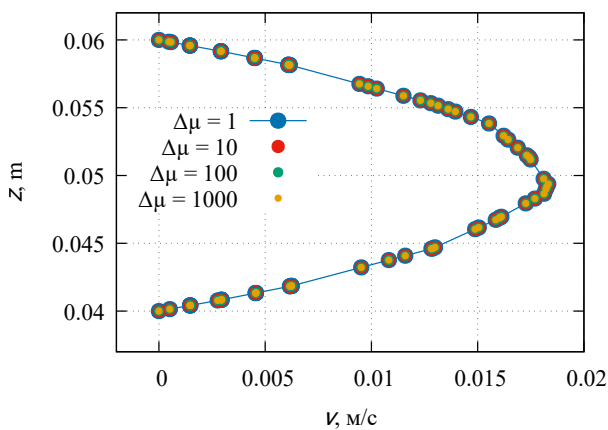


Рис. 5. Профили скорости для возрастающей линейной функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

параболический вид, что соответствует профилю течения. Для $\Delta\mu = 10$ профиль температуры принимает вид «заячьих ушей», а для $\Delta\mu = 100, 1000$ профили имеют обратно параболический вид, что свидетельствует о том, что на заданном временном интервале не удалось добиться развитого течения и, как следствие, установившегося теплообмена.

На рис. 5 приведены профили скорости для линейно возрастающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. Профили имеют идентичный параболический тип и практически одинаковое значение максимальной скорости потока, что свидетельствует о том, что теплообмен осуществляется за счет режима теплопроводности.

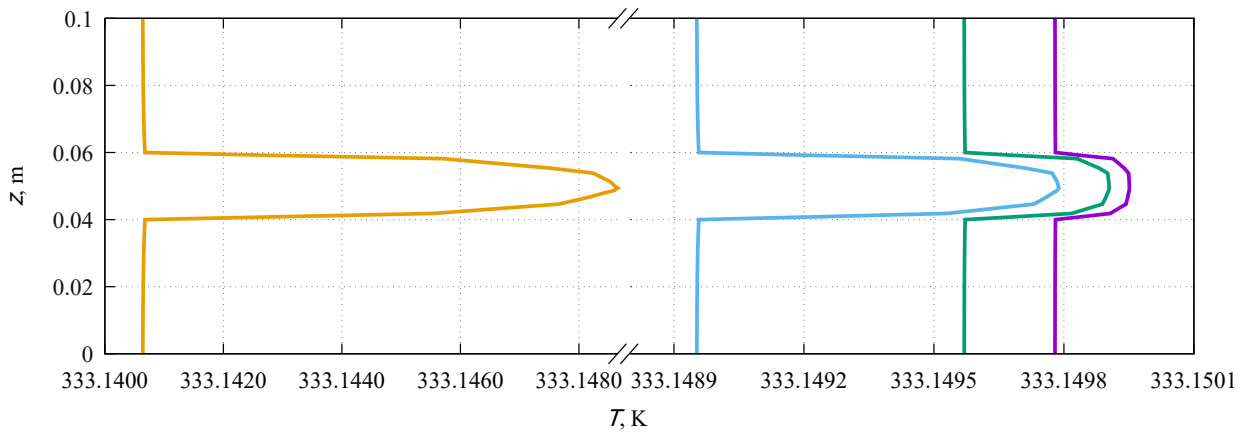


Рис. 6. Профили температуры для убывающей линейной функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

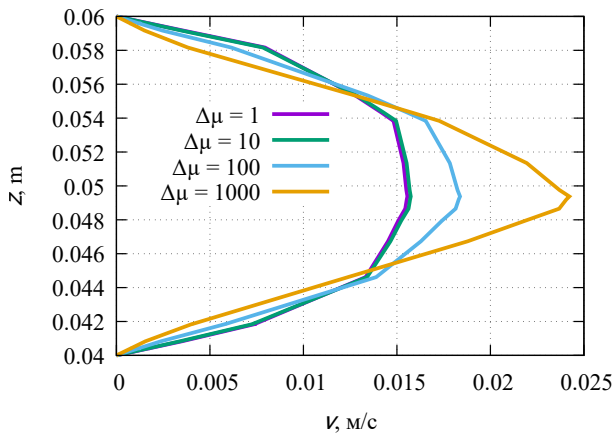


Рис. 7. Профили скорости для убывающей линейной функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

На рис. 6 приведены профили температуры для линейно убывающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. Профили имеют идентичный параболический вид.

На рис. 7 приведены профили скорости для линейно убывающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. Величина скорости возрастает с увеличением $\Delta\mu$. Видно, что профили устремляются к оси канала с увеличением $\Delta\mu$, что свидетельствует о преобладании конвективного теплообмена.

На рис. 8 приведены профили температуры для экспоненциально возрастающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. При $\Delta\mu$ профиль температуры имеет параболический вид, что соответствует профилю течения. Для $\Delta\mu = 10$ профиль температуры принимает

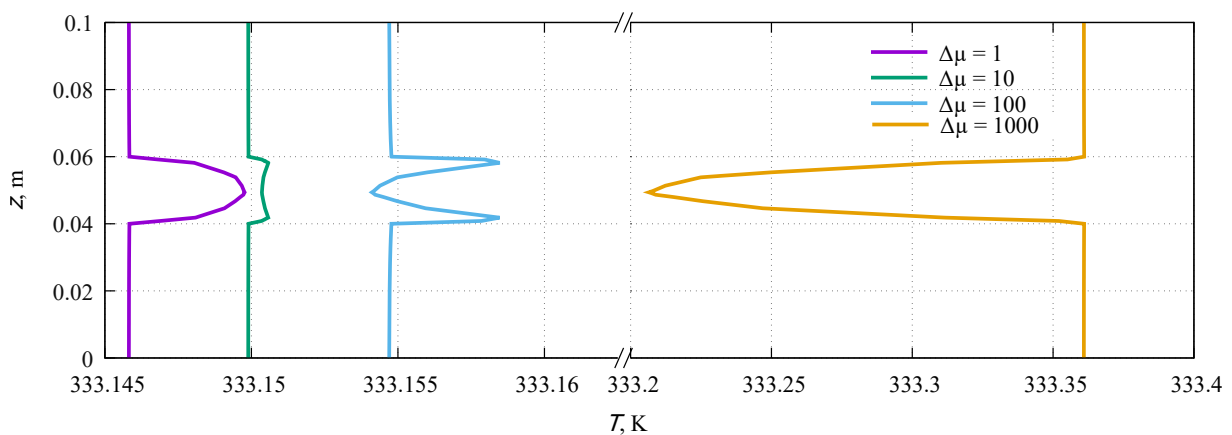


Рис. 8. Профили температуры для экспоненциально возрастающей функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

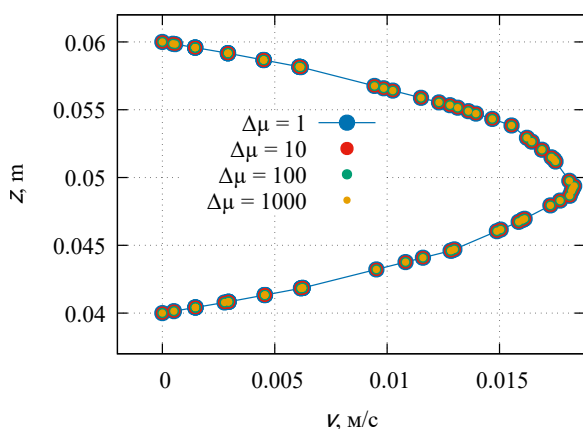


Рис. 9. Профили скорости для экспоненциально возрастающей функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

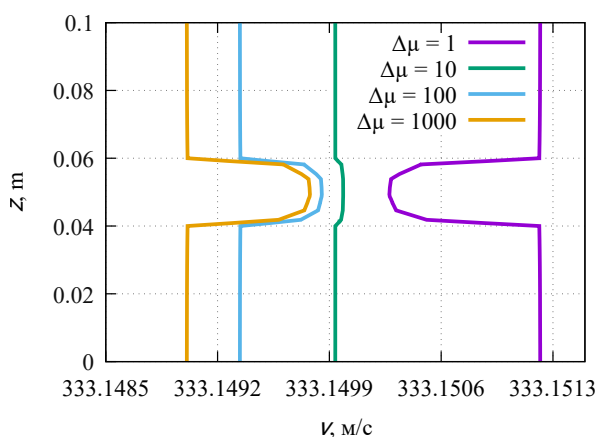


Рис. 10. Профили скорости для экспоненциально убывающей функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

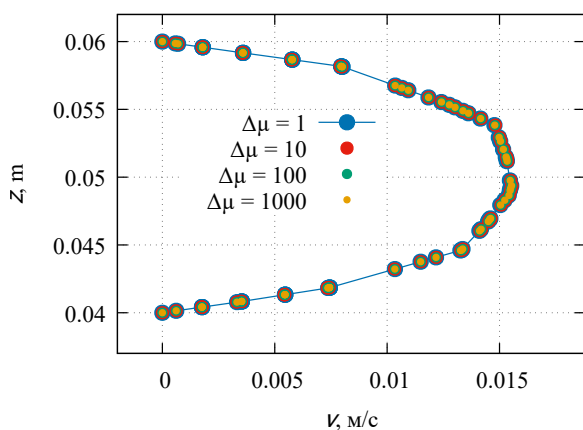


Рис. 11. Профили скорости для экспоненциально убывающей функции в центральном вертикальном сечении при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$

вид «заячьих ушей», а для $\Delta\mu = 100, 1000$ профили имеют обратно параболический вид, что свидетельствует о том, что на заданном временном интервале не удалось добиться развитого теплового течения.

На рис. 9 приведены профили скорости для экспоненциально возрастающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. Профили имеют идентичный параболический тип и практически одинаковое значение максимальной скорости потока, как и в случае линейно возрастающей функции.

На рис. 10 приведены профили температуры для экспоненциально убывающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. Прогрев потока не достигается при $\Delta\mu = 1$. Для $\Delta\mu = 10, 100, 1000$ профили температуры имеют параболический вид, что соответствует профилю течения.

На рис. 11 приведены профили скорости для экспоненциально убывающей функции при $\Delta\mu = 1, 10, 100, 1000$ в центральном вертикальном сечении. Профили скорости имеют идентичный параболический вид.

4. Результаты

Проведено моделирование теплообмена термовязкой жидкости в цилиндрическом канале при втекании в канал горячей термовязкой жидкости для различных типов функций вязкости совместно с решением задачи сопряженного теплообмена канала с окружающим материалом.

Получены профили скорости и температуры вдоль оси канала, а также в центральном поперечном сечении канала. Показано влияние функции вязкости на профиль течения, а также количественные характеристики потока и теплообмена.

Для линейно и экспоненциально убывающих зависимостей вязкости от температуры характерен теплообмен, обусловленный теплопроводностью.

Для линейно и экспоненциально убывающих функций выявлено изменение профиля скорости при различных $\Delta\mu$, что свидетельствует о преобладании конвективного теплообмена.

Профили скорости для линейно и экспоненциально возрастающих зависимостей вязкости от температуры имеют идентичный вид и одинаковые точки максимума в канале.

Список литературы

- [1] Moiseev K.V., Volkova E.V., Urmancheev S.F. Effect of Convection on Polymerase Chain Reaction in a Closed Cell // *Procedia IUTAM*. 2013. V. 8. P. 172–175.
DOI: [10.1016/j.piutam.2013.04.022](https://doi.org/10.1016/j.piutam.2013.04.022)
- [2] Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2005. Т. VIII, № 4(24). С. 51–59.
eLIBRARY ID: [9484545](#)
- [3] Моисеева Е.Ф., Малышев В.Л., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Влияние способа подвода тепла на характер течения при конвекции Рэлея–Бенара // *Вестник УГАТУ*. 2011. Т. 15, № 4(44). С. 154–158.
eLIBRARY ID: [18861709](#)
- [4] Кулешов В.С., Моисеев К.В. Численное моделирование конвективных течений аномально термовязкой жидкости // *Вестник УГАТУ*. 2016. Т. 20, № 2(72). С. 74–80.
eLIBRARY ID: [26605547](#)
- [5] Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Периодические структуры при конвекции аномально термовязкой жидкости // *Вестник БашГУ*. 2017. Т. 22, № 2. С. 297–302.
eLIBRARY ID: [29729319](#)
- [6] Кулешов В.С., Моисеев К.В., Хизбуллина С.Ф., Михайленко К.И., Урманчиев С.Ф. Особенности конвективных течений аномально термовязкой жидкости // *Математическое моделирование*. 2017. Т. 29, № 5. С. 16–26.
eLIBRARY ID: [29255015](#)
- [7] Моисеев К.В., Хизбуллина С.Ф., Бахтизин Р.Н., Урманчиев С.Ф., Кулешов В.С., Алфёров А.В. Математические модели термогравитационной конвекции неоднородной жидкости // *Нефтегазовое дело*. 2017. Т. 15, № 2. С. 165–170.
eLIBRARY ID: [29931683](#)
- [8] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mikhaylenko K.I., Urmancheev S.F. Convective Flows of Anomalous Thermoviscous Fluid // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018. V. 10(4). P. 529–537.
DOI: [10.1134/S2070048218040087](https://doi.org/10.1134/S2070048218040087)
- [9] Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Изолированные режимы течений при конвекции аномально термовязкой жидкости в плоской ячейке // *Прикладная математика и механика* 2019. Т. 83, № 3. С. 460–470.
DOI: [10.1134/S0032823519030093](https://doi.org/10.1134/S0032823519030093)
- [10] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // *Fluid Dynamics* 2019. Vol. 54. Pp. 983–990.
DOI: [10.1134/S0015462819070097](https://doi.org/10.1134/S0015462819070097)
- [11] Кулешов В.С., Моисеев К.В. Конвекция термовязкой жидкости в ячейке, подогреваемой сбоку // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 1. С. 67–72.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.010](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.010)
- [12] Moiseev K.V., Kuleshov V.S., Bakhtizin R.N. Free convective of a linear heterogeneous liquid in a square cavity at side heating // *SOCAR Proceedings*. 2020. No. 4. Pp. 108–116.
eLIBRARY ID: [44743960](#)
- [13] Moiseev K.V., Popenov A.I., Bakhtizin R.N. Express method for the testing of tribotechnical properties of lubricants // *SOCAR Proceedings*. 2021. No. 24. Pp. 65–69.
DOI: [10.15405/epsbs\(2357-1330\).2021.9.2](https://doi.org/10.15405/epsbs(2357-1330).2021.9.2)
- [14] Garafutdinov R.R., Chemeris D.A., Sakhabutdinova A.R., Moiseev K.V., Urmancheev S.F., Mikhaylenko C.I., Privalov L.Y., Chemeris A.V. Convective polymerase chain reaction in standard microtubes // *Analytical Biochemistry*. 2022. Vol. 641. 14565.
DOI: [10.1016/j.ab.2022.114565](https://doi.org/10.1016/j.ab.2022.114565)
- [15] Лихачев Е.Р. Зависимость вязкости воды от температуры и давления // *Журнал технической физики*. 2003. Т. 73, № 4. С. 135–136.
eLIBRARY ID: [20336293](#)
- [16] Кулешов В.С. Численное исследование свободной конвекции жидкости в термовязких средах с немонотонной зависимостью вязкости Гауссовского типа: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05: защищена 22.11.2018 / Кулешов Василий Сергеевич. Уфа, 2018. 130 с. Ph.D. thesis. 2018.
- [17] Урманчиев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // *Доклады академии наук*. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.
eLIBRARY ID: [17352428](#)
- [18] Фогельсон Р.Л., Лихачев Е.Р. Температурная зависимость вязкости // *журнал технической физики*. 2001. Т. 71, № 8. С. 128–131.
eLIBRARY ID: [14713851](#)
- [19] Costa A., Macedonio G. Viscous heating in fluids with temperature-dependent viscosity: implications for magma flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. V. 540. С. 21–38.
eLIBRARY ID: [14713851](#)
- [20] Sherman F.S. *Viscous Flow*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 1990. 746 p.



Thermoviscous liquid conjugate heat exchange simulation in cylindrical channel

Moiseev K.V.^{***}, Iamlikhina I.N.^{*}

^{*}Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

^{**}Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

The article is concerned with the flow of a thermoviscous fluid in a cylindrical channel for various types of viscosity functions in the joint solution of the problem of conjugate heat exchange between the channel and the surrounding material. A model of a cylindrical channel with a thermoviscous liquid flowing inside at a given velocity and viscosity is considered. The methodology of the process consists in applying a system of model equations that describes the dynamics of thermoviscous fluid flow processes based on the laws of phase energy conservation, the continuity equation, the Navier-Stokes momentum conservation equation taking into account conjugate heat transfer and the heat transfer equation for a solid. Numerical implementation of model representations was carried out using the Comsol Multiphysics digital package. Velocity and temperature profiles were obtained in the cross section of the channel. The influence of the viscosity function on the flow profile is shown, as well as the quantitative characteristics of the flow and heat transfer. An analysis was made of the dependence of the nature of the velocity and temperature profiles on the viscosity of the liquid and the type of dependence of viscosity on temperature. The result of the work done is the found features and regularities that arise in the process of conjugate heat transfer of a thermoviscous liquid in a cylindrical channel when comparing the linear and exponential dependences of viscosity on temperature. The analysis of the obtained dependences of viscosity and temperature in the flow profile, the value of the maximum flow rate was carried out. It is shown that viscous friction causes a local increase in temperature near the pipe walls, followed by an increase in fluid velocity due to a decrease in viscosity. The results obtained are basic for the further development of this topic and will be used to solve new problems in the field of modeling the thermoviscous fluid flow and conjugate heat transfer.

Keywords: thermoviscous fluid, heat exchange, cylindrical channel, velocity profile, temperature profile

References

- [1] Moiseev K.V., Volkova E.V., Urmancheev S.F. Effect of Convection on Polymerase Chain Reaction in a Closed Cell // *Procedia IUTAM*. 2013. V. 8. Pp. 172–175.
DOI: 10.1016/j.piutam.2013.04.022
- [2] Ilyasov A.M., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Numerical simulation of thermoconvection of a liquid with a quadratic dependence of viscosity on temperature // *Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 2005. V. VIII, № 4(24). Pp. 51–59.
eLIBRARY ID: 9484545
- [3] Moiseeva E.F., Malyshev V.L., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Influence of the method of heat supply on the nature of the flow during Rayleigh-Benard convection // *Vestnik UGATU*. 2011. V. 15, № 4(44). Pp. 154–158.
eLIBRARY ID: 18861709
- [4] Kuleshov V.S., Moiseev K.V. Numerical simulation of convective flows of an anomalously thermoviscous liquid // *Vestnik UGATU*. 2016. V. 20, № 2(72). Pp. 74–80.
eLIBRARY ID: 26605547
- [5] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Periodic structures during convection of an anomalously thermoviscous liquid // *Vestnik BSU*. 2017. V. 22, № 2. Pp. 297–302.
eLIBRARY ID: 29729319
- [6] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mihailenko K.I., Urmancheev S.F. Peculiarities of convective flows of an anomalously thermoviscous liquid // *Mathematical modeling*. 2017. V. 29, № 5. Pp. 16–26.
eLIBRARY ID: 29255015
- [7] Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Bahtizin R.N., Urmancheev S.F., Kuleshov V.S., Alferov A.V. Mathematical models of thermogravitational convection of an inhomogeneous fluid // *Oil and gas business*. 2017. V. 15, № 2. Pp. 165–170.
eLIBRARY ID: 29931683
- [8] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mikhaylenko K.I., Urmancheev S.F. Convective Flows of Anomalous Thermoviscous Fluid // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2018. V. 10(4). Pp. 529–537.
DOI: 10.1134/S2070048218040087

- [9] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Isolated flow regimes during convection of an anomalously thermoviscous fluid in a flat cell // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2019. V. 83, № 3. Pp. 460–470.
DOI: [10.1134/S0032823519030093](https://doi.org/10.1134/S0032823519030093)
- [10] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 54. Pp. 983–990.
DOI: [10.1134/S0015462819070097](https://doi.org/10.1134/S0015462819070097)
- [11] Kuleshov V.S., Moiseev K.V. Convection of a thermoviscous liquid in a cell heated from the side // *Multiphase systems*. 2019. V. 14, № 1. Pp. 67–72.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.010](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.010)
- [12] Moiseev K.V., Kuleshov V.S., Bakhtizin R.N. Free convective of a linear heterogeneous liquid in a square cavity at side heating // *SOCAR Proceedings*. 2020. No. 4. Pp. 108–116.
eLIBRARY ID: [44743960](https://elibrary.ru/44743960)
- [13] Moiseev K.V., Popenov A.I., Bakhtizin R.N. Express method for the testing of tribotechnical properties of lubricants // *SOCAR Proceedings*. 2021. No. 24. Pp. 65–69.
DOI: [10.15405/epsbs\(2357-1330\).2021.9.2](https://doi.org/10.15405/epsbs(2357-1330).2021.9.2)
- [14] Garafutdinov R.R., Chemeris D.A., Sakhabutdinova A.R., Moiseev K.V., Urmancheev S.F., Mikhaylenko C.I., Privalov L. Y., Chemeris A.V. Convective polymerase chain reaction in standard microtubes // *Analytical Biochemistry*. 2022. Vol. 641. 114565.
DOI: [10.1016/j.ab.2022.114565](https://doi.org/10.1016/j.ab.2022.114565)
- [15] Likhachev E.R. Dependence of water viscosity on temperature and pressure // *Journal of Technical Physics*. 2003. V. 73, № 4. Pp. 135–136.
eLIBRARY ID: [20336293](https://elibrary.ru/20336293)
- [16] Kuleshov V.S. Numerical study of free convection of a liquid in thermoviscid media with nonmonotonic dependence of viscosity of Gaussian type: dis. of the cand. of phys.-math. sciences: 01.02.05: defended 22.11.2018 / Kuleshov Vasily Sergeevich. Ufa, 2018. 130 p. Ph.D. thesis. 2018.
- [17] Urmancheev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // *Doklady Physics*. 2004. V. 396, № 2. Pp. 204–207.
eLIBRARY ID: [17352428](https://elibrary.ru/17352428)
- [18] Fogel'son R.L., Likhachev E.R. Temperature dependence of viscosity // *Technical Physics*. 2001. V. 71, № 8. Pp. 128–131.
eLIBRARY ID: [14713851](https://elibrary.ru/14713851)
- [19] Costa A., Macedonio G. Viscous heating in fluids with temperature-dependent viscosity: implications for magma flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. V. 540. Pp. 21–38.
eLIBRARY ID: [14713851](https://elibrary.ru/14713851)
- [20] Sherman F.S. *Viscous Flow*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 1990. 746 p.



Двумерное численное параметрическое моделирование системы охлаждения капиллярного микрозахвата при нестационарном течении жидкости¹

Насибуллаев И.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе представлен параметрический анализ двумерной модели системы жидкостного охлаждения горячей стороны элемента Пельтье капиллярного микрозахвата. Рассматривается нестационарное течение охлаждающей жидкости в камере охлаждения. Изучается эффективность охлаждения для трех геометрий камеры с различными вариантами расположения радиатора: монолитный, расположенный на элементе Пельтье; с одним или тремя ребрами. Построены математические модели течения жидкости через камеру микрозахвата; нагрева радиатора горячей стороной элемента Пельтье; передачи тепла от радиатора жидкости и вывода нагретой жидкости из камеры. Моделирование проводилось в программе FreeFem++ до тех пор, пока среднее за период осцилляций жидкости изменение температуры радиатора не выйдет на насыщение (рабочий режим микрозахвата). Методом ортогонального центрального композиционного планирования получены аналитические зависимости целевых функций (максимальная температура на радиаторе, амплитуда изменения температуры на радиаторе и время установления рабочего режима) от факторов модели (средняя скорость охлаждающей жидкости, коэффициент теплопередачи, частота и амплитуда осцилляций скорости жидкости). Для каждой рассмотренной геометрии и целевой функции определены ведущие и не значимые факторы. Проведен параметрический анализ влияния физических параметров системы на работу системы охлаждения. Результаты моделирования показывают, что геометрия, обеспечивающая высокую степень охлаждения и более быстрый выход на рабочий режим (радиатор с тремя ребрами), имеет большую амплитуду колебаний температуры на радиаторе и может использоваться в менее чувствительных к колебаниям температуры на радиаторе технических устройствах. Геометрия с радиатором с одним ребром обеспечивает наименьшее колебание температуры радиатора и может быть использована для охлаждения капиллярного микрозахвата.

Ключевые слова: гидродинамика, теплоперенос, капиллярный микрозахват, жидкостная система охлаждения, метод конечных элементов, ортогональный центральный композиционный план

1. Введение

При разработке новых микроэлектромеханических систем (МЭМС) [1] возникают задачи, для эффективного решения которых используется микрогидродинамика [2, 3] (например, воздушная [4] или жидкостная системы охлаждения, микронасос [5], микротеплообменник). В микрогидродинамике изучаются течения жидкости или газа в

микро- и наномасштабах. С уменьшением масштаба системы число Рейнольдса становится малым, а число Пекле может оставаться большим. Малое число Рейнольдса подразумевает ламинарный характер течения, соответствующий как большинству технических микроустройств, так и биологическим системам. А большое число Пекле означает, что конвективный (адвективный) перенос тепла преобладает над диффузионным [6], следовательно, в микроустройствах (микротеплообменник, система охлаждения, микрозахват) необходимо учитывать оба механизма теплопереноса [7].

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № FWGZ-2019-0089.

Для построения корректной компьютерной модели технического устройства необходимо определить набор физических параметров, соответствующих рабочим характеристикам устройства. Одни параметры можно найти непосредственно из физического эксперимента, а другие определяются из сравнения экспериментальных данных и результатов компьютерного моделирования, где они рассматриваются как подгоночные параметры. В моделях систем жидкостного охлаждения таким параметром является коэффициент теплопередачи α между радиатором и жидкостью или газом.

Численное моделирование воздушной системы охлаждения микропроцессора с радиатором, состоящим из системы цилиндрических микроребер, представлено в [8]. Показана зависимость теплообмена от размеров ребер и чисел Нуссельта и Рейнольдса. В [9] для схожей структуры микроребер показано значительное влияние положения входного и выходного отверстий на эффективность охлаждения микропроцессора. В работе [10] представлено моделирование точечной системы охлаждения электронных компонентов с помощью обдувания осциллирующей воздушной струей. Определены области параметров (длина струи, цилиндрическая или коническая форма трубки, частота колебаний воздушного), в которых коэффициент теплообмена будет максимальным. Образование вихрей вокруг струй увеличивает эффективную площадь охлаждения.

Эффективность системы охлаждения зависит от охлаждающего вещества. В [11] проведено сравнение эксперимента с моделированием системы охлаждения камеры с помощью элемента Пельтье с двумя вариантами отвода тепла: создаваемый вентилятором воздушный поток или текущая через радиатор жидкость. При расходе жидкости 20 мл/с обеспечивался отвод тепловой мощности до 230 Вт. Жидкостное охлаждение позволяло снизить температуру на 19 °С, а воздушное — на 10 °С. Показано, что с уменьшением размера камеры эффективность жидкостного охлаждения по сравнению с воздушным возрастает. Жидкостная система охлаждения более компактна, но требуется наличия внешнего насоса для циркуляции жидкости.

При охлаждении электронных устройств одним из требований для системы охлаждения является размер, а эффективность охлаждения зависит от ее конструктивных особенностей и физических свойств жидкости [12]. При моделировании необходимо учитывать зависимость физических параметров охлаждающей жидкости (вязкость, плотность, теплоемкость, теплопроводность) от температуры [13–15].

В работе [16] для охлаждения микропроцессора была разработана водяная камера с радиатором, содержащим различные конфигурации прямых микроканалов. Компьютерное моделирование в программе Ansys CFX показало количественно согласие (погрешность менее 5 %) с экспериментом. В [17] рассмотрен теплообменник с различными типами каналов: длинные (Т1) или короткие (Т2) полосы, смещенные относительно друг друга; в виде шевронной структуры (Т3); традиционные прямые (Т4). При размерах теплообменника 50 × 50 мм с расходом жидкости 230 мл/мин, тепловой мощностью нагревателя 40 Вт, в зависимости конфигурации каналов нагрев составил 30 °С для Т4, 21 °С для Т1, 18 °С для Т2 и 14 °С для Т3. В работе [18] численно изучены четыре радиатора со следующими структурами микроканалов: параллельная структура, сетчатая, тороидальная и фрактальная древовидная. Последний тип радиатора более эффективен для охлаждения микрочипа, но требует насоса, обеспечивающего большее давление на выходе. В [19] предложено активное решение для охлаждения мощных светодиодов на основе замкнутой микроимпульсной струи. В этой системе для обеспечения циркуляции жидкости используется микронасос, а для теплообмена между светодиодными чипами и настоящей системой — ударная струя. В [20] охлаждение процессора осуществляется с помощью воздушного охлаждения с использованием и без использования испарительной камеры. Экспериментально и теоретически показано, что испарительная камера снижает температуру процессора на ~ 26 %.

Для управления нагревом или охлаждением в технических устройствах используются термоэлектрические модули (ТЭМ) [21, 22]. В [23] представлен обзор использования микконтактов и миниатюрных термоэлектрических охладителей на основе кремния для снижения негативного влияния горячих точек на кристалле.

В работе [24] представлена двумерная модель системы жидкостного охлаждения горячей стороны элемента Пельтье в капиллярном микрозахвате [25, 26]. Определено влияние геометрических и физических параметров камеры микрозахвата на эффективность системы охлаждения, а также найдена зависимость максимальной температуры, установившейся на радиаторе, от скорости течения охлаждающей жидкости и коэффициента теплопередачи между радиатором и жидкостью для стационарного течения и проведено исследование влияния нестационарного течения жидкости на колебания температуры радиатора. Аналитическая модель быстрого переключения между режи-

мами работы системы охлаждения со стационарным течением охлаждающей жидкости с помощью изменения тепловой мощности элемента Пельтье предложена в работе [15].

С развитием математических и компьютерных моделей появились пакеты численного моделирования, использующие метод конечных элементов (КЭ), которые позволяют проводить моделирование устройств с практически произвольной геометрией [27]. В работе [28] получены элементы вычислительного стенда для цилиндрического и острокромочного жиклеров методом КЭ в открытом инженерном пакете Elmer FEM [29]. В [30] построен эквивалент трубы для системы элементов с гидросопротивлением. В работе [31] построена осесимметричная компьютерная модель для взаимодействия ньютоновской жидкости с гиперэластичным несжимаемым телом и с применением метода КЭ проведен анализ устойчивости дифференциальных уравнений, записанных в вариационной форме, в свободном пакете численного моделирования FreeFem++ [32]. Отметим, что данное ПО позволяет проводить моделирование двумерной и трехмерной геометрий как для задач упругости [33], гидродинамики [34, 35] и теплопереноса [15], так и для междисциплинарных задач [31, 36, 37], а также проводить моделирование течения жидкости в канале с динамически изменяемой геометрией [38, 39].

Для работы жидкостной системы охлаждения необходим насос, обеспечивающий достаточный расход жидкости. Существующие микронасосы используются в широком диапазоне применений [5], но их сложно применять для системы охлаждения микрозахвата, поскольку требуется микронасос малого размера с небольшим расходом жидкости и гибкой системой управления. Отметим миниатюрные мембранные микронасосы размером $10 \times 10 \times 1$ мм с клапанами на входном и выходном отверстиях с расходом жидкости до 1.8 мл/мин [40] и бесклапанный прототип размером $15 \times 15 \times 1$ мм с расходом жидкости до 100 мкл/мин [41]. В работе [42] представлена трехмерная математическая и компьютерная модели влияния деформации эластичной трубкой, периодически сжимаемой пьезоэлементом, на динамику текущей в ней жидкости. Используя осесимметричную модель колебаний системы пьезоэлементов, расположенных на эластичной трубке [43–45], предложена модель пьезоэлектрического микронасоса и получены аналитические формулы для зависимости среднего расхода жидкости от количества пьезоэлементов и их частоты колебаний. Данная формула может быть использована в программной части системы управления устройством в реальном времени. Разработана

двумерная модель микронасоса, создающего течение жидкости (с расходом до 50 мкл/с) в плоском канале с помощью погруженного в него пьезоэлемента с поперечным изгибом [36]. Методами факторных вычислительных экспериментов второго порядка [46, 47] предложен способ замены полного численного моделирования приближенными аппроксимациями, которые можно использовать с программным обеспечением системы управления техническим устройством.

В настоящей работе двумерная модель жидкостной системы охлаждения микрозахвата, представленная в [24], используется для параметрического анализа эффективности охлаждения при различных расположениях радиатора и нестационарном течении охлаждающей жидкости.

2. Основные уравнения

На рис. 1 представлена геометрия рассматриваемой модели (с соблюдением пропорций) с обозначением границ: внутренняя стенка камеры Γ_1 ; граница между радиатором и жидкостью Γ_2 ; входное Γ_3 и выходное Γ_4 отверстия; граница между радиатором и элементом Пельтье Γ_5 . Рассматриваются два варианта геометрии: G_1 с радиатором, расположенным на горячей стороне элемента Пельтье, и G_2 и G_3 с радиатором, состоящим из 1 или 3 ребер. Геометрия G_1 представляет собой вертикальное сечение Oxz камеры охлаждения и не учитывает обтекание жидкостью радиатора вдоль передней и задней стенок камеры, а также течение между ребрами радиатора. Геометрии G_2 и G_3 представляют горизонтальное сечение Oxy и не учитывают течение жидкости вдоль верхней стенки камеры. Таким образом, радиатору с одним ребром соответствует геометрия, состоящая из двух сечений $G_1 + G_2$, а радиатору с тремя ребрами — $G_1 + G_3$.

Механизм теплопереноса в камере охлаждения следующий. Жидкость втекает во входное отверстие Γ_3 . В процессе теплообмена с радиатором Γ_2 жидкость нагревается и выходит через отверстие Γ_4 . Нагрев радиатора элементом Пельтье происходит через контактную область Γ_5 (для G_1) или непосредственно передачей тепла на Γ_2 (для G_2 и G_3). Стенка Γ_1 камеры рассматривается термоизолированной. Соответствующие геометриям G_1 , G_2 и G_3 расчетные сетки показаны на рис. 1 (снизу).

Система уравнений, описывающая теплообмен в жидкостной системе охлаждения, включает в себя уравнение течения жидкости Навье–Стокса, уравнение непрерывности и уравнение теплопроводности. В результате нагрева жидкости меняется ее плотность. Поскольку плотность изменяется на небольшую величину (в рабочем

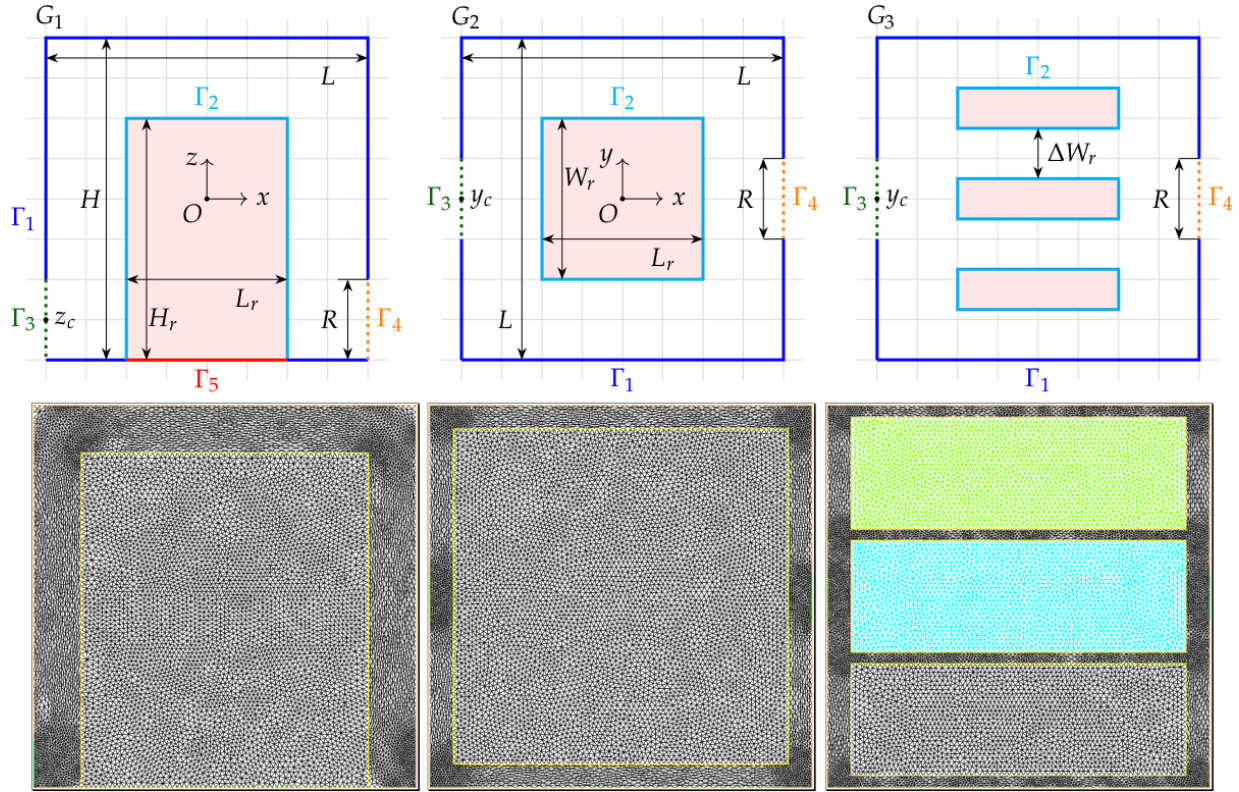


Рис. 1. Геометрии G_1 , G_2 и G_3 камеры охлаждения микрозахвата с различным расположением радиатора (сверху) и соответствующие им расчетные сетки (снизу)

диапазоне температур не более 4 % между жидкостью во входном отверстии и жидкостью вблизи радиатора) и изменения плотности вдоль линий потока жидкости незначительны, в работе используется приближение несжимаемой жидкости с непостоянной плотностью.

Течение несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье–Стокса [48]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

где $\rho = \rho(T)$ — плотность среды, зависящая от температуры T среды; $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ — вектор скорости жидкости; t — время; ∇ — оператор набла; p — давление; $\mu = \mu(T)$ — динамическая вязкость, зависящая от температуры; Δ — оператор Лапласа; $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$ — вектор ускорения свободного падения.

Уравнение непрерывности имеет вид:

$$\frac{1}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где K_f — объемный модуль упругости жидкости. Отметим, что величина $1/K_f$ мала (для

воды $1/K_f \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$). Уравнение (2) физически означает малую искусственную сжимаемость и обеспечивает высокую устойчивость численной схемы.

Распространение тепла в жидкости описывает уравнение теплопроводности [49]:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (3)$$

где T — температура жидкости; $c_p = c_p(T)$ — изобарная удельная теплоемкость; $\lambda = \lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности.

Распространение тепла в радиаторе описывается уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} = \chi_r \Delta T_r, \quad (4)$$

где T_r — температура радиатора; χ_r — коэффициент температуропроводности радиатора.

Начальные условия соответствуют покоящейся жидкости $u_x = u_y = 0$ и равномерному распределению температуры $T = T_0$ и $T_r = T_0$.

Граничные условия на скорость жидкости (условие прилипания и заданный профиль скоро-

сти на входном отверстии):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1, \Gamma_2 : u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0 \\ \Gamma_3(G_1) : \\ \quad u_x = -u_m \left[1 - 4 \left(\frac{z_c - z}{R} \right)^2 \right], u_z = 0, \\ \Gamma_3(G_2, G_3) : \\ \quad u_x = u_m \left[1 - 4 \left(\frac{y_c - y}{R} \right)^2 \right], u_y = 0, \\ \Gamma_4(G_1) : u_z = 0, \\ \Gamma_4(G_2, G_3) : u_y = 0, \end{array} \right.$$

где u_m — модуль максимальной скорости втекающей жидкости; z_c — координата центра входного отверстия (для геометрий G_2 и G_3 положение центра входного отверстия определяет y_c); R — ширина входного отверстия. Профили скорости $u_x(z)$ для G_1 и $u_x(y)$ для G_2 и G_3 соответствуют течению Пуазейля в плоском канале.

Граничные условия для температуры жидкости 1-го рода (через входное отверстие втекает жидкость с температурой T_0):

$$\Gamma_3 : T = T_0.$$

Для геометрии G_1 — 3-го рода (Ньютона-Рихмана, теплообмен между жидкостью и радиатором пропорционален разности температур жидкости T и радиатора T_r):

$$\Gamma_2(G_1) : \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_r - T), \lambda_r \frac{\partial T_r}{\partial n} = \alpha(T - T_r),$$

где α — коэффициент теплопередачи между твердым телом и жидкостью; n — нормаль к поверхности.

Граничные условия для температуры радиатора 2-го рода (закон Фурье) определяют тепловой поток от элемента Пельтье к радиатору:

$$\Gamma_5(G_1) : -\lambda_r \frac{\partial T_r}{\partial n} = q_T,$$

где $\lambda_r = \chi_r c_{pr} \rho_r$ — коэффициент теплопроводности радиатора; c_{pr} — изобарная удельная теплоемкость; ρ_r — объемная плотность; q_T — плотность теплового потока, связанная с величиной рассеиваемой элементом Пельтье тепловой мощности W соотношением

$$q_T = W / (L_r W_r),$$

где L_r и W_r — длина и ширина радиатора.

Для геометрий G_2 и G_3 граница Γ_5 отсутствует (т.к. находится в другой плоскости) поэтому тепловой поток задается на границе Γ_2 :

$$\Gamma_2(G_2, G_3) : \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T_r - T) + q_T,$$

с тепловым потоком

$$q_T = \frac{W}{2i(L_r + W_r)H_r},$$

где i — количество ребер радиатора.

3. Компьютерная модель

Уравнения (1)–(4) записывались в вариационной форме и решались численно методом КЭ в пакете численного моделирования FreeFem++ [32]. Дискретизация по времени проводилась по неявной схеме Эйлера первого порядка.

Для радиатора использовались параметры латуни марки Л96 [50]: плотность $\rho_r = 8850$ кг/м³, теплопроводность $\lambda_r = 245$ Вт/(м·К), изобарная удельная теплоемкость $c_{pr} = 389$ Дж/(кг·К), коэффициент температуропроводности $\chi_r = 7.117 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Ускорение свободного падения $g_z = -9.8$ м/с² для G_1 и $g = 0$ для G_2 и G_3 . Коэффициент теплопередачи α между латунью и водой зависит от разности температур между водой и радиатором, геометрии системы, скорости течения жидкости. Точное определение величины α возможно только с помощью эксперимента, в расчетах использовалось значение $\alpha = 1.5$ кВт/(м²·К), соответствующее экспериментальным данным течения воды через латунные трубки [51]. Высота H , длина L и ширина W_c камеры охлаждения составляли 8 мм. В геометрии G_1 высота радиатора $H_r = 7$ мм, его длина $L = 6$ мм. В геометрии G_2 размер ребра составлял 7×7 мм, а в G_3 три ребра имели размер 7×2.33 мм. Ширина входного и выходного отверстий $R = 1$ мм.

Температура жидкости (воды) во входном канале составляет $T_0 = 20$ °С. Физические свойства воды сильно зависят от температуры, поэтому необходимо учесть температурную зависимость для объемной плотности $\rho(T)$, динамической вязкости $\mu(T)$, коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ и изобарной теплоемкости $c_p(T)$. Остальные величины, входящие в модель, вычисляются по следующим формулам: кинематическая вязкость $\nu(T) = \mu(T)/\rho(T)$, коэффициент температуропроводности $\chi(T) = \lambda(T)/(\rho(T)c_p(T))$. При моделировании физические свойства жидкости рассматривались как конечно-элементные функции с аппроксимациями, представленными в [15].

Для проверки энергетического баланса производится расчет тепловой мощности, уносимой из системы жидкостью:

$$W_f = \int_{\Gamma_4} c_p \cdot \rho \cdot (T - T_0) \cdot (\mathbf{u}(\Gamma) \cdot \mathbf{n}) \cdot H_r d\Gamma.$$

При постоянном расходе охлаждающей жидкости со временем на радиаторе устанавливается

постоянная температура $\Delta T = T_r - T_0$ (рабочий режим микрозахвата). Период времени τ_t , за которое система охлаждения выходит на рабочий режим, определялся из условия, что выводимая из камеры через выходное отверстие тепловая мощность W_f отличается от вводимой элементом Пельтье W не более чем на 0.1 %.

Нестационарный расход жидкости задавался зависимостью амплитуды скорости течения жидкости от времени в виде

$$u_m = u_c + \Delta u \cos(2\pi ft),$$

где u_c — средняя скорость жидкости; Δu — амплитуда отклонения скорости жидкости от средней; f — частота изменения скорости. Заметим, что если величина Δu превысит величину u_c , то часть периода нагретая жидкость будет течь в обратном направлении и эффективность охлаждения снизится.

Для определения величины шага по времени и параметров расчетной сетки была проведена серия вычислительных экспериментов для геометрии G_1 , скоростей $u_c = 4$ см/с и $\Delta u = 0.5u_c$, частоты $f = 0.3$ Гц и коэффициента теплопередачи $\alpha = 2$ кВт/(м²·К). Результаты приведены в табл. 1. Для геометрий G_2 и G_3 параметры подбирались аналогичным способом.

Максимальное изменение температуры радиатора $T_m = \max(T_r - T_0)$ получено за время выхода системы на рабочий режим $t = 60$ с. Введены следующие обозначения: M — номер тестового расчета; n_t — количество шагов по времени за период колебаний (шаг по времени $\tau = 1/(f \cdot n_t)$); S_f и S_r — максимальный размер ребра КЭ в расчетных сетках камеры и радиатора; t_{CPU} — процессорное время; ϵ_c — относительная погрешность T_m (в сравнении с тестовым расчетом $M = 8$). В последующих вычислительных экспериментах использовались параметры $n_t = 32$, $S_f = 100$ и $S_r = 100$.

Таблица 1. Зависимость T_m от параметров расчета

M	n_t	S_f , мкм	S_r , мкм	T_m , °C	t_{CPU} , с	ϵ_c , %
1	8	200	200	7.0084	138.018	0.67
2	16	200	200	7.01325	254.645	0.61
3	32	200	200	7.02238	525.589	0.48
4	64	200	200	7.02671	1006.95	0.42
5	32	200	100	7.02664	579.026	0.42
6	32	100	200	7.04402	1166.59	0.17
7	32	100	100	7.04458	1195.64	0.16
8	128	50	50	7.056	13860.6	0.0

4. Результаты

Для каждой рассматриваемой геометрии проводилась серия вычислительных экспериментов методом ортогонального центрального композиционного планирования (ОЦКП) [46, 47] по следующим диапазонам параметров (факторов):

- $X_1 = u_c \in [3, 5]$ см/с (средняя скорость течения жидкости на входном отверстии);
- $X_2 = \alpha \in [1.5, 2.5]$ кВт/(м²·К) (коэффициент теплопередачи);
- $X_3 = f \in [0.15, 0.45]$ Гц (частота пульсаций амплитуды жидкости);
- $X_4 = \Delta u \in [0.25 \cdot u_c, 0.75 \cdot u_c]$ (амплитуда пульсаций скорости).

Для естественного значения n -го параметра X_n центральное значение $X_{n,c}$ и интервал $X_{n,l}$ определялись как:

$$X_{n,c} = \frac{\max(X_n) + \min(X_n)}{2},$$

$$X_{n,l} = \frac{\max(X_n) - \min(X_n)}{2}.$$

Кодированным значением n -го параметра x_n является линейное аффинное преобразование интервала $[\min(X_n), \max(X_n)]$ в интервал $[-1, +1]$:

$$x_n = (X_n - X_{n,c})/X_{n,l}.$$

Восстановление естественного значения параметра по кодированному: $X_n = X_{n,l}x_n + X_{n,c}$.

Определялись следующие выходные параметры (целевые функции) Y_m , $m = \{1, 2, 3\}$ на j -м периоде $t \in [(j-1)/f, j/f]$:

- $Y_1 = T_m = \max(\Delta T)$ (максимальное изменение температуры радиатора $\Delta T = T_r - T_0$);
- $Y_2 = \Delta T_m = \max(\Delta T) - \min(\Delta T)$ (амплитуда изменения температуры на радиаторе);
- $Y_3 = \tau_t$ (промежуток времени, за который система охлаждения выходит на рабочий режим).

Время τ_t определялось как время процесса, при котором T_m на $j-1$ периоде отличается от T_m на j -м периоде менее чем на 0.1%.

Матрица вычислительных экспериментов ОЦКП состоит из матрицы полного факторного эксперимента (содержит всевозможные комбинации факторов на нижнем и верхнем уровнях $x_n = \pm 1$; определяет линейный вклад и парные взаимодействия факторов в целевую функцию) и расширенной матрицы (содержит центральную

точку $x_n = 0$ и «звездные» точки $x_n = 0$ для всех n , кроме $n = k$, для которой $x_k = \pm\lambda$, где $\lambda = \sqrt{2}$ — плечо относительно центральной точки; определяет квадратичный вклад факторов в целевую функцию). Матрица ОЦКП представлена в табл. 2. Результаты вычислительных экспериментов, соответствующих расширенной матрице, показаны на рис. 2 (номера линий соответствуют номеру эксперимента N из табл. 2).

Аппроксимация ОЦКП представляет собой полином второй степени, содержащий **линейные** и **квадратичные** слагаемые, а также **парные** взаимодействия:

$$\begin{aligned}
 Y_m = & b_{0,m} + \\
 & + b_{1,m}x_1 + b_{2,m}x_2 + b_{3,m}x_3 + b_{4,m}x_4 + \\
 & + b_{5,m}x_1x_2 + b_{6,m}x_1x_3 + b_{7,m}x_1x_4 + \\
 & + b_{8,m}x_2x_3 + b_{9,m}x_2x_4 + b_{10,m}x_3x_4 + \\
 & + b_{11,m}(x_1^2 - \beta) + b_{12,m}(x_2^2 - \beta) + \\
 & + b_{13,m}(x_3^2 - \beta) + b_{14,m}(x_4^2 - \beta),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где $\beta = 4/5$, а коэффициенты аппроксимации представлены в табл. 3.

Относительная погрешность аппроксимации (5) вычислялась для набора факторов из табл. 2 и определялась по формуле

$$\varepsilon_r = |1 - Y_m/y_m| \cdot 100\%,$$

где y_m — результат вычислительного эксперимента для параметров (X_1, X_2, X_3, X_4) , а Y_m — соответствующая функция отклика для факторов (x_1, x_2, x_3, x_4) . Значения погрешностей ε_r представлены в табл. 3.

На рис. 2 линиями показаны зависимости $\Delta T(t)$, полученные численным моделированием, а символами — аппроксимация (5). Положение символов определяется координатами (Y_3, Y_1) , т.е. по оси времени — время выхода на рабочий режим τ_t , а по оси температур — максимальная температура радиатора T_m .

С помощью коэффициентов полинома ОЦКП можно определить ведущие (значение $|b_{n,m}|$ для $n > 0$ является максимальным), значимые ($|b_{n,m}| > \varepsilon$, где $\varepsilon = 0.05$ — критерий значимости параметра) и незначимые ($|b_{n,m}| < \varepsilon$) факторы для целевых функции Y_m ; их порядок (линейный $n = (1, \dots, 4)$ или квадратичный $n = (11, \dots, 14)$) и их парные взаимодействия $n = (5, \dots, 10)$.

Таблица 2. Полная матрица ОЦКП: $N = (1, \dots, 9)$ — номера экспериментов в расширенной части матрицы ОЦКП

N	x_1	x_2	x_3	x_4	u_c , см/с	α , кВт/(м ² К)	f , Гц	Δu , см/с
	-1	-1	-1	-1	3	1.5	0.15	0.25
	-1	-1	-1	+1	3	1.5	0.15	0.75
	-1	-1	+1	-1	3	1.5	0.45	0.25
	-1	-1	+1	+1	3	1.5	0.45	0.75
	-1	+1	-1	-1	3	2.5	0.15	0.25
	-1	+1	-1	+1	3	2.5	0.15	0.75
	-1	+1	+1	-1	3	2.5	0.45	0.25
	-1	+1	+1	+1	3	2.5	0.45	0.75
	+1	-1	-1	-1	5	1.5	0.15	0.25
	+1	-1	-1	+1	5	1.5	0.15	0.75
	+1	-1	+1	-1	5	1.5	0.45	0.25
	+1	-1	+1	+1	5	1.5	0.45	0.75
	+1	+1	-1	-1	5	2.5	0.15	0.25
	+1	+1	-1	+1	5	2.5	0.15	0.75
	+1	+1	+1	-1	5	2.5	0.45	0.25
	+1	+1	+1	+1	5	2.5	0.45	0.75
1	$-\lambda$	0	0	0	2.59	2	0.3	0.5
2	$+\lambda$	0	0	0	5.41	2	0.3	0.5
3	0	$-\lambda$	0	0	4	1.29	0.3	0.5
4	0	$+\lambda$	0	0	4	2.71	0.3	0.5
5	0	0	$-\lambda$	0	4	2	0.0878	0.5
6	0	0	$+\lambda$	0	4	2	0.512	0.5
7	0	0	0	$-\lambda$	4	2	0.3	0.146
8	0	0	0	$+\lambda$	4	2	0.3	0.854
9	0	0	0	0	4	2	0.3	0.5

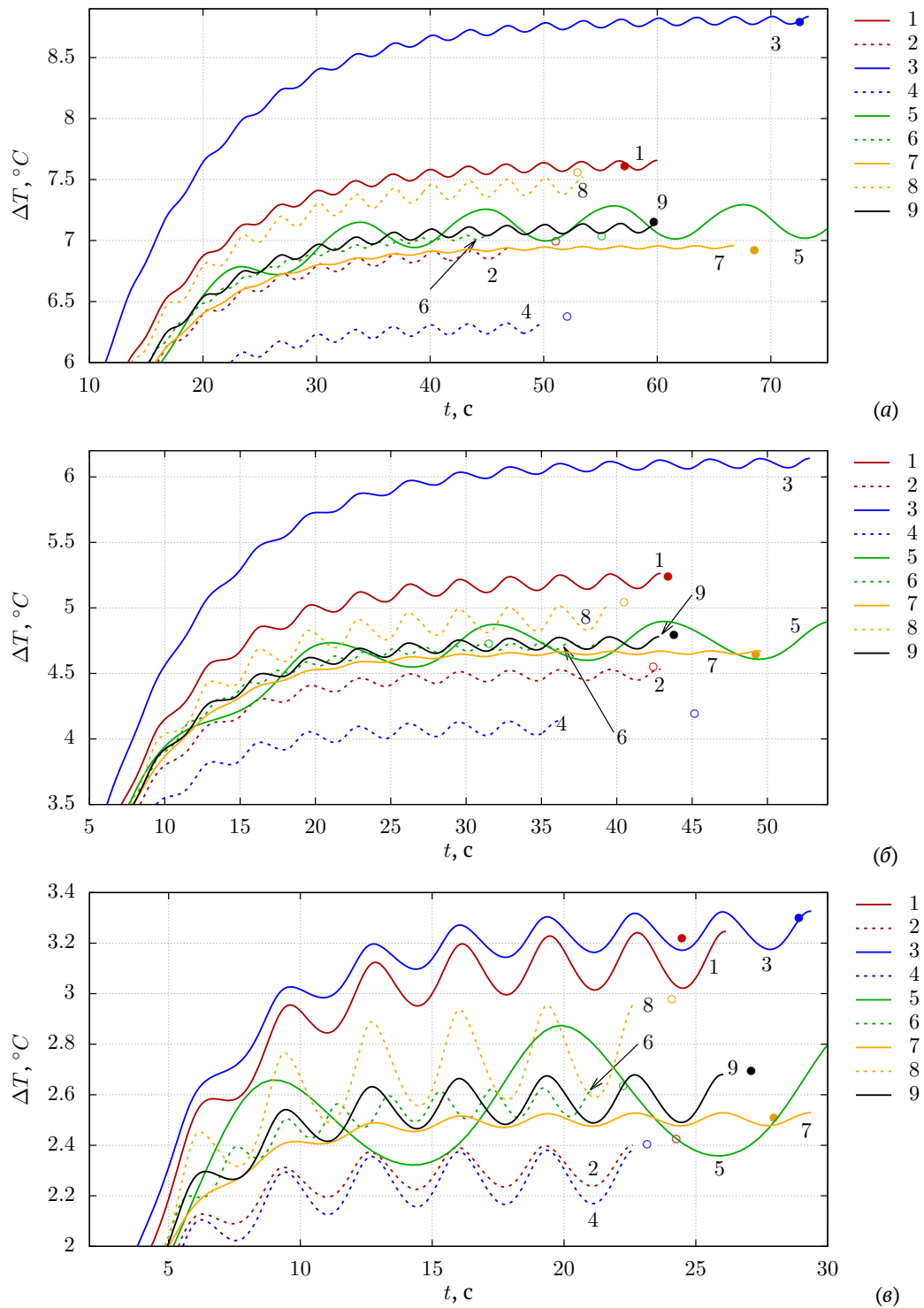


Рис. 2. Зависимость температуры ΔT от времени t для геометрии G_1 (а), G_2 (б) и G_3 (в). Номер линии соответствует строке N из табл. 2; линии – результаты моделирования; символы – аппроксимация (5); сплошные линии и диски – верхнее значение фактора; пунктирные линии и круги – нижнее значение фактора; черная сплошная линия соответствует центральной точке

Таблица 3. Коэффициенты полиномов $b_{i,m}$ (5) и относительная погрешность аппроксимации ε_r . Ведущие факторы выделены **полужирным** шрифтом

	$100 \cdot Y_1, m = 1$			$100 \cdot Y_2, m = 2$			$Y_3, m = 3$		
	G_1	G_2	G_3	G_1	G_2	G_3	G_1	G_2	G_3
$b_{0,m}$	742	500	285	10.6	12.8	24.1	62	46	27
$b_{1,m}$	-22	-24	-28	0	-1.5	-2.4	-2.2	-0.3	0
$b_{2,m}$	-85	-67	-32	1.0	1.6	2.1	-7.2	-4	-2.0
$b_{3,m}$	-9.8	-6.6	-8.5	-6.7	-7.3	-12.7	-9.4	-8.1	-6.8
$b_{4,m}$	22	14	17	5.5	7.4	13.6	-5.5	-3.1	-1.4
$b_{5,m}$	-1.0	-0.5	-0.2	-0.2	-0.2	0.29	2	-0.7	0.5
$b_{6,m}$	-0.3	1.6	1.2	0.4	1.1	1.58	0.7	-0.4	0.3
$b_{7,m}$	10	-0.9	-0.5	-0.1	-0.9	-1.0	2	0.4	-0.9
$b_{8,m}$	-0.3	-0.1	-0.4	-0.4	-0.9	-0.8	-1	1.5	-0.3
$b_{9,m}$	-2.5	0.2	-0.6	0.5	0.9	0.9	-0.5	0.1	0.9
$b_{10,m}$	-8.3	-4.7	-5.4	-3.3	-4.4	-7.1	-0.1	2.1	0.6
$b_{11,m}$	7.3	5	6.3	-0.2	0	-0.3	-2.8	-1.2	-1.3
$b_{12,m}$	21	17	7.8	-0.4	-0.4	-0.9	1.3	-0.4	-0.5
$b_{13,m}$	1.0	1.2	3	3.6	3.8	6.0	4.4	3.5	2.4
$b_{14,m}$	4.3	2.5	2.4	-0.2	0.5	0.6	0.5	-0.4	-0.5
$\varepsilon_r, \%$	0.43	11.6	6.0	0.58	14.2	8.75	0.83	8.66	6.85

Положительное значение $b_{n,m}$ означает, что увеличение соответствующих параметров ведет к росту значения функции Y_m , а отрицательное — к уменьшению. Центральная точка $x_n = 0, n = [1, 4]$ определяет среднее значение функции в виде

$$Y_m = b_{0,m} - \beta(b_{11,m} + b_{12,m} + b_{13,m} + b_{14,m}).$$

Проведем анализ данных ОЦКП, представленных в табл. 3, для температуры на радиаторе T_m :

- T_m значительно зависит от выбранной геометрии: для геометрии G_1 $b_{0,1} = 7.42$ °C; для G_2 — 5.0 °C; для G_3 — 2.85 °C;
- Ведущим линейным параметром является коэффициент теплопередачи α (максимальное значение $|b_{n,1}|, n > 0$ соответствует $|b_{2,1}|$, линии 3 и 4 на рис. 2); средняя скорость течения u_c (линии 1 и 2), частота колебаний f (линии 5 и 6) и амплитуда колебаний Δu скорости жидкости являются значимыми факторами ($|b_{n,1}| / b_{2,1} > \varepsilon, n = 1, 2, 4$). С ростом u_c, α и f температура T_m уменьшается ($b_{1,1} < 0, b_{2,1} < 0, b_{3,1} < 0$), а с ростом Δu — увеличивается ($b_{4,1} > 0$). При переходе от геометрии G_1 к G_2 и G_3 вклад амплитуды скорости u_c возрастает ($b_{1,1} \nearrow$), поскольку тепловая мощность, уносимая жидкостью через границу Γ , определяется формулой $\int_{\Gamma} c_p \rho \Delta T (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma$ где \mathbf{n} — нормаль к границе, а интегрирование ведется в поперечном потоку сечении. Поскольку каналы в геометрии G_2 и G_3 уже при неизменной амплитуде u_c , то на одном и том же расстоянии

от радиатора скорость жидкости будет выше и жидкость будет забирать больше тепла;

- Значимыми парными взаимодействиями являются u_c и Δu в геометрии G_1 (положительными) и f и Δu в геометриях G_1 и G_2 (отрицательными);
- Параметры u_c и α вносят положительный квадратичный вклад. Поскольку $b_{1,1}$ и $b_{2,1}$ отрицательны, а $b_{11,1}$ и $b_{12,1}$ положительны, то с увеличением u_c и α изменение функции T_m происходит с насыщением.

Для амплитуды колебаний температуры ΔT_m значимыми линейными факторами являются частота f и амплитуда колебания скорости Δu , а также их парное взаимодействие. Ведущим положительным квадратичным фактором является f . При переходе от геометрии G_1 к G_3 средняя величина ΔT_m существенно возрастает ($b_{0,2}$ меняется от 0.11 °C до 0.24 °C), а максимальное значение по матрице ОЦКП меняется от 0.3 °C до 0.7 °C.

Для времени выхода на рабочий режим τ_t значимыми линейными факторами являются коэффициент теплопередачи α , частота f и амплитуда колебания скорости Δu . При переходе от геометрии G_1 к G_2 и G_3 вклад от α и Δu становится незначительным. Частота f является значимым положительным квадратичным фактором. При переходе от геометрии G_1 к G_3 время τ_t существенно снижается от 62 с до 27 с ($b_{0,3}$).

Поскольку геометрия G_1 является вертикальным сечением трехмерной камеры охлаждения, а

геометрии G_2 и G_3 — вертикальными сечениями, то можно предположить, что в трехмерной геометрии с радиатором с одним ребром значение T_m будет лежать между значениями, полученными для G_1 и G_2 , а для радиатора с тремя ребрами — между значениями, полученными для G_1 и G_3 .

Аппроксимация (5) имеет погрешность $\varepsilon_r < 1\%$ для геометрии G_1 (табл. 3), до 14 % для геометрий G_2 и до 9 % для геометрии G_3 .

5. Заключение

В работе представлен параметрический анализ двумерной компьютерной модели камеры жидкостной системы охлаждения микрозахвата для различных геометрий радиатора при осциллирующем течении охлаждающей жидкости. Методом ОЦКП получены зависимости максимальной температуры на радиаторе, амплитуды изменения температуры на радиаторе и времени установления рабочего режима от средней скорости охлаждающей жидкости, коэффициента теплопередачи, частоты осцилляций скорости жидкости и ее амплитуды.

Получено, что в среднем геометрия G_3 по сравнению с G_2 обеспечивает лучшее охлаждение (в 1.8 раз) и меньшее время выхода на рабочий режим (в 1.7 раз), но имеет большие колебания температуры на радиаторе (в 2 раза), что может привести к преждевременному срыву удерживаемого объекта.

На основании результатов вычислительного эксперимента показано, что радиатор с одним ребром более предпочтителен для системы охлаждения микрозахвата, а радиатор с тремя ребрами можно использовать в устройствах менее чувствительных к колебаниям температуры на радиаторе.

Список литературы

- [1] Mishra M.K., Dubey V., Mishra P.M., Khan I. MEMS Technology: A Review // *Journal of Engineering Research and Reports*. 2019. Vol. 4, No. 1. Pp. 1–24.
DOI: [10.9734/jerr/2019/v4i116891](https://doi.org/10.9734/jerr/2019/v4i116891)
- [2] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // *Micro and Nano Engineering*. 2019. Vol. 2. Pp. 76–91.
DOI: [10.1016/j.mne.2019.01.003](https://doi.org/10.1016/j.mne.2019.01.003)
- [3] *Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications*. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p.
DOI: [10.1007/978-90-481-9029-4](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9029-4)
- [4] Kleinstreuer C., Li J. *Microscale Cooling Devices*. In: Li, D. (eds) *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*. Springer, New York, NY. 2015.
DOI: [10.1007/978-1-4614-5491-5_1008](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5491-5_1008)
- [5] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. Vol. 14. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [6] Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor and Francis. 1980.
- [7] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. Cham: Springer. 2016. 164 p.
- [8] Drabiniok E., Neyer A. Micro porous polymer foil for application in evaporation cooling // *Microsystem Technologies*. 2014. Vol. 20. Pp. 1913–1918.
DOI: [10.1007/s00542-013-1983-9](https://doi.org/10.1007/s00542-013-1983-9)
- [9] Koca F., Zabun M. The effect of outlet location on heat transfer performance in micro pin-fin cooling used for a CPU // *The European Physical Journal Plus*. 2021. Vol. 136. Art. no 1115.
DOI: [10.1140/epjp/s13360-021-02113-4](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02113-4)
- [10] Mishra A., Paul A.R., Jain A., Alam F. Design and Analysis of Synthetic Jet for Micro-channel Cooling. In: Wen, C., Yan, Y. (eds) *Advances in Heat Transfer and Thermal Engineering*. Springer, Singapore. 2021.
DOI: [10.1007/978-981-33-4765-6_55](https://doi.org/10.1007/978-981-33-4765-6_55)
- [11] Afshari F. Experimental and numerical investigation on thermoelectric coolers for comparing air-to-water to air-to-air refrigerators // *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2021. Vol. 144. Pp. 855–868.
DOI: [10.1007/s10973-020-09500-6](https://doi.org/10.1007/s10973-020-09500-6)
- [12] Tullius J.F., Vajtai R., Bayazitoglu Y. A Review of Cooling in Microchannels // *Heat Transfer Engineering*. 2011. Vol. 32, No. 7–8. Pp. 527–541.
DOI: [10.1080/01457632.2010.506390](https://doi.org/10.1080/01457632.2010.506390)
- [13] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Труды Института механики им. П.П. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9.
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [14] Nonino C., Del Giudice S., Savino S. Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipation Effects in Microchannel Flows With Uniform Wall Heat Flux // *Heat Transfer Engineering*. 2010. Vol. 31, No. 8. Pp. 682–691.
DOI: [10.1080/01457630903466670](https://doi.org/10.1080/01457630903466670)
- [15] Насибуллаев И.Ш. Аналитический анализ переключения рабочего режима в двумерной модели системы жидкостного охлаждения микрозахвата // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*. 2021. Т. 25. № 3(93). С. 120–131.
DOI: [10.54708/19926502_2021_25393120](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_25393120)
- [16] Choi J.T., Kwon O.K., Cha D.A. A numerical study of the heat transfer and fluid flow of micro-channeled water block for computer CPU cooling // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2011. Vol. 25. Art. no. 2657.
DOI: [10.1007/s12206-011-0616-4](https://doi.org/10.1007/s12206-011-0616-4)
- [17] Chien-Yuh Yang, Chun-Ta Yeh, Wei-Chi Liu, Bing-Chwen Yang. Advanced Micro-Heat Exchangers for High Heat Flux // *Heat Transfer Engineering*. 2007. Vol. 28, No. 8–9. Pp. 788–794.
DOI: [10.1080/01457630701328676](https://doi.org/10.1080/01457630701328676)
- [18] Xu S., Hu G., Qin J., Yang Y. A numerical study of fluid flow and heat transfer in different microchannel heat sinks for electronic chip cooling // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2012. Vol. 26. Pp. 1257–1263.
DOI: [10.1007/s12206-012-0209-x](https://doi.org/10.1007/s12206-012-0209-x)
- [19] Luo X., Liu S., Jiang X., Cheng T. Experimental and numerical study on a micro jet cooling solution for high power LEDs // *Science in China Series E: Technological Sciences*. 2007. Vol. 50. Pp. 478–489.
DOI: [10.1007/s11431-007-0028-y](https://doi.org/10.1007/s11431-007-0028-y)
- [20] Bose J.R., Ahammed N., Asirvatham L.G. Thermal performance of a vapor chamber for electronic cooling applications // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2017. Vol. 31. Pp. 1995–2003.
DOI: [10.1007/s12206-017-0349-0](https://doi.org/10.1007/s12206-017-0349-0)

- [21] Hendricks T.J., Karri N.K. Micro- and Nano-Technology: A Critical Design Key in Advanced Thermoelectric Cooling Systems // *Journal of Electronic Materials*. 2009. Vol. 38, No. 7. P. 1257–1267.
DOI: [10.1007/s11664-009-0709-3](https://doi.org/10.1007/s11664-009-0709-3)
- [22] Chen L., Meng F., Sun F. Thermodynamic analyses and optimization for thermoelectric devices: The state of the arts // *Science China Technological Sciences*. 2016. Vol. 59. Pp. 442–455.
DOI: [10.1007/s11431-015-5970-5](https://doi.org/10.1007/s11431-015-5970-5)
- [23] Bar-Cohen A., Wang P. On-chip Hot Spot Remediation with Miniaturized Thermoelectric Coolers // *Microgravity Science and Technology*. 2009. Vol. 21. Pp. 351–359.
DOI: [10.1007/s12217-009-9162-4](https://doi.org/10.1007/s12217-009-9162-4)
- [24] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // *Вычислительные технологии*. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20.
DOI: [10.25743/ICT.2021.26.2.002](https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.2.002)
- [25] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Капиллярный микрозахват с обратной связью. Патент на изобретение № 2261795. Опубликовано: 10.10.2005. Бюл. № 28. www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [26] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. Vol. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_2)
- [27] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006. 237 p.
- [28] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Известия Уфимского научного центра РАН*. 2015. № 4. С. 20–25.
eLIBRARY ID: [id=25732231](https://elibrary.ru/id=25732231)
- [29] Kuzmin D., Hämäläinen J. Finite Element Methods for Computational Fluid Dynamics: A Practical Guide. Computational Science & Engineering. SIAM. 2014.
DOI: [10.1137/1.9781611973617](https://doi.org/10.1137/1.9781611973617)
- [30] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149.
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [31] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // *Fluids*. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53.
DOI: [10.3390/fluids2020034](https://doi.org/10.3390/fluids2020034)
- [32] Hecht F. New development in FreeFem++ // *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [33] Насибуллаев И.Ш. Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX для моделирования статических задач упругости // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 183–200.
DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [34] Sadaka G., Dutykh D. Adaptive Numerical Modeling of Tsunami Wave Generation and Propagation with FreeFem++ // *Geosciences*. 2020. Vol. 10, No. 9. Art. no. 351.
DOI: [10.3390/geosciences10090351](https://doi.org/10.3390/geosciences10090351)
- [35] Насибуллаев И.Ш. Использование свободного ПО для визуализации результатов моделирования динамических процессов // *Многофазные системы*. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 121–143.
DOI: [10.21662/mfs2021.3.016](https://doi.org/10.21662/mfs2021.3.016)
- [36] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232.
DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [37] Sadaka G., Rakotondrandisa A., Tournier P.-H., Luddens F., Lothodé C., Danaila I. Parallel finite-element codes for the simulation of two-dimensional and three-dimensional solid–liquid phase-change systems with natural convection // *Computer Physics Communications*. 2020. Vol. 257. P. 107492.
DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107492](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107492)
- [38] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66.
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [39] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // *Многофазные системы*. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10.
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [40] Cheng CH, Tseng YP. Characteristic studies of the piezoelectrically actuated micropump with check valve // *Microsystem Technologies*. 2013. Vol. 19. Pp. 1707–1715.
DOI: [10.1007/s00542-013-1857-1](https://doi.org/10.1007/s00542-013-1857-1)
- [41] Guo L., Yan W., Xu Y., Chen Y. Valveless piezoelectric micropump of parallel double chambers // *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*. 2012. Vol. 13. Pp. 771–776.
DOI: [10.1007/s12541-012-0101-8](https://doi.org/10.1007/s12541-012-0101-8)
- [42] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750.
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [43] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [44] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2021. Vol. 14, No. 2. Pp. 152–164.
DOI: [10.25103/jestr.14.2.19](https://doi.org/10.25103/jestr.14.2.19)
- [45] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Dependence of the Piezoelectric Micropump Operating Mode on Its Geometry // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 2096, No. 1. P. 012081.
DOI: [10.1088/1742-6596/2096/1/012081](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012081)
- [46] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // *Вычислительные технологии*. 2016. Т. 21, № 26–41.
- [47] Насибуллаев И.Ш. Использование свободных программ для обработки и визуализации результатов научных исследований // *Многофазные системы*. 2021. Т. 16, № 2. С. 58–71.
DOI: [10.21662/mfs2021.2.009](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.009)
- [48] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 736 с.
- [49] Сивухин Д.В. Общий курс физики: термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит. 2006. 345 с.
- [50] ГОСТ 15527-2004. Сплавы медно-цинковые (латуни), обрабатываемые давлением.
- [51] Шляхин П.Н., Бершадский М.Л. Краткий справочник по паротурбинным установкам. М.-Л.: Госэнергоиздат. 1961. 128 с.



Two-Dimensional numerical parametric modeling of the capillary microgripper cooling system with unsteady fluid flow

Nasibullayev I.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The paper presents a parametric analysis of a 2D model of a fluid cooling system for the hot side of a Peltier element of a capillary microgripper. An unsteady flow of coolant in the cooling chamber is considered. The cooling efficiency is studied for three chamber geometries with different radiator locations: monolithic, located on the Peltier element; with one or three ribs. Mathematical models are built: fluid flow through the microgripper chamber; heating the radiator with the hot side of the Peltier element; heat transfer from the radiator to fluid and the removal of the heated fluid from the chamber. The simulation is carried out in the FreeFem++ program until the average change in the temperature of the radiator over the period of fluid oscillations reaches saturation (microgripper operating mode). Using the method of orthogonal central compositional planning, analytical dependences of response functions (maximum temperature on the radiator, amplitude of temperature change on the radiator, and time to establish the operating mode) on model factors (average coolant velocity, heat transfer coefficient, frequency and amplitude of fluid velocity oscillations) are obtained. For each considered geometry and response function, leading and insignificant factors are determined. A parametric analysis of the influence of the physical parameters of the system on the operation of the cooling system was carried out. The simulation results show that the geometry that provides a high degree of cooling and a faster exit to the operating mode (radiator with three fins) has a large amplitude of temperature fluctuations on the radiator and can be used in technical devices that are less sensitive to temperature fluctuations on the radiator. The single fin radiator geometry provides the least radiator temperature fluctuation and can be used to cool capillary microgripper.

Keywords: hydrodynamics, heat transfer, capillary microgripper, fluid cooling system, finite element method, orthogonal central composition plan

References

- [1] Mishra M.K., Dubey V., Mishra P.M., Khan I. MEMS Technology: A Review. *Journal of Engineering Research and Reports*. 2019. Vol. 4, No. 1. Pp. 1–24.
DOI: 10.9734/jerr/2019/v4i116891
- [2] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics. *Micro and Nano Engineering*. 2019. Vol. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [3] *Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications*. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p.
DOI: 10.1007/978-90-481-9029-4
- [4] Kleinstreuer C., Li J. *Microscale Cooling Devices*. In: Li, D. (eds) *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics*. Springer, New York, NY. 2015.
DOI: 10.1007/978-1-4614-5491-5_1008
- [5] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps. *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. Vol. 14. Pp. R35–R64.
DOI: 10.1088/0960-1317/14/6/R01
- [6] Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor and Francis. 1980.
- [7] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. Cham: Springer. 2016. 164 p.
DOI: 10.1007/978-3-319-23312-3
- [8] Drabiniok E., Neyer A. Micro porous polymer foil for application in evaporation cooling. *Microsystem Technologies*. 2014. Vol. 20. Pp. 1913–1918.
DOI: 10.1007/s00542-013-1983-9
- [9] Koca F., Zabun M. The effect of outlet location on heat transfer performance in micro pin-fin cooling used for a CPU. *The European Physical Journal Plus*. 2021. Vol. 136. Art. no 1115.
DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-02113-4

- [10] Mishra A., Paul A.R., Jain A., Alam F. Design and Analysis of Synthetic Jet for Micro-channel Cooling. In: Wen, C., Yan, Y. (eds) *Advances in Heat Transfer and Thermal Engineering*. Springer, Singapore. 2021. DOI: [10.1007/978-981-33-4765-6_55](https://doi.org/10.1007/978-981-33-4765-6_55)
- [11] Afshari F. Experimental and numerical investigation on thermoelectric coolers for comparing air-to-water to air-to-air refrigerators. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2021. Vol. 144. Pp. 855–868. DOI: [10.1007/s10973-020-09500-6](https://doi.org/10.1007/s10973-020-09500-6)
- [12] Tullius J.F., Vajtai R., Bayazitoglu Y. A Review of Cooling in Microchannels. *Heat Transfer Engineering*. 2011. Vol. 32, No. 7–8. Pp. 527–541. DOI: [10.1080/01457632.2010.506390](https://doi.org/10.1080/01457632.2010.506390)
- [13] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The effect of temperature on the fluid flow dynamics in technical systems with jets]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 1. P. 1–9 (In Russian). DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [14] Nonino C., Del Giudice S., Savino S. Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipation Effects in Microchannel Flows With Uniform Wall Heat Flux. *Heat Transfer Engineering*. 2010. Vol. 31, No. 8. Pp. 682–691. DOI: [10.1080/01457630903466670](https://doi.org/10.1080/01457630903466670)
- [15] Nasibullayev I.Sh. [Analytical analysis of operating mode switching in a 2D model of a fluid cooling system of the micro-gripper] *Analiticheskiy analiz pereklyucheniya rabocheho rezhima v dvumernoy modeli sistemy zhidkostnogo okhlazhdeniya mikrozhakhvata*. *Vestnik USATU [Vestnik UGATU]*. 2021. Vol. 25, N. 3 (93). Pp. 120–131 (in Russian). DOI: [10.54708/19926502_2021_25393120](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_25393120)
- [16] Choi J.T., Kwon O.K., Cha D.A. A numerical study of the heat transfer and fluid flow of micro-channeled water block for computer CPU cooling. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2011. Vol. 25. Art. no. 2657. DOI: [10.1007/s12206-011-0616-4](https://doi.org/10.1007/s12206-011-0616-4)
- [17] Chien-Yuh Yang, Chun-Ta Yeh, Wei-Chi Liu, Bing-Chwen Yang. Advanced Micro-Heat Exchangers for High Heat Flux. *Heat Transfer Engineering*. 2007. Vol. 28, No. 8–9. Pp. 788–794. DOI: [10.1080/01457630701528676](https://doi.org/10.1080/01457630701528676)
- [18] Xu S., Hu G., Qin J., Yang Y. A numerical study of fluid flow and heat transfer in different microchannel heat sinks for electronic chip cooling. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2012. Vol. 26. Pp. 1257–1263. DOI: [10.1007/s12206-012-0209-x](https://doi.org/10.1007/s12206-012-0209-x)
- [19] Luo X., Liu S., Jiang X., Cheng T. Experimental and numerical study on a micro jet cooling solution for high power LEDs. *Science in China Series E: Technological Sciences*. 2007. Vol. 50. Pp. 478–489. DOI: [10.1007/s11431-007-0028-y](https://doi.org/10.1007/s11431-007-0028-y)
- [20] Bose J.R., Ahammed N., Asirvatham L.G. Thermal performance of a vapor chamber for electronic cooling applications. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2017. Vol. 31. Pp. 1995–2003. DOI: [10.1007/s12206-017-0349-0](https://doi.org/10.1007/s12206-017-0349-0)
- [21] Hendricks T.J., Karri N.K. Micro- and Nano-Technology: A Critical Design Key in Advanced Thermoelectric Cooling Systems. *Journal of Electronic Materials*. 2009. Vol. 38, N. 7. P. 1257–1267. DOI: [10.1007/s11664-009-0709-3](https://doi.org/10.1007/s11664-009-0709-3)
- [22] Chen L., Meng F., Sun F. Thermodynamic analyses and optimization for thermoelectric devices: The state of the arts. *Science China Technological Sciences*. 2016. Vol. 59. Pp. 442–455. DOI: [10.1007/s11431-015-5970-5](https://doi.org/10.1007/s11431-015-5970-5)
- [23] Bar-Cohen A., Wang P. On-chip Hot Spot Remediation with Miniaturized Thermoelectric Coolers. *Microgravity Science and Technology*. 2009. Vol. 21. Pp. 351–359. DOI: [10.1007/s12217-009-9162-4](https://doi.org/10.1007/s12217-009-9162-4)
- [24] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system]. *Vychislitel'nyye tekhnologii* [Computational technologies]. 2021. V. 26. No. 2. Pp. 4–20 (in Russian). DOI: [10.25743/ICT.2021.26.2.002](https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.2.002)
- [25] Darintsev O.V., Migranov A.B. [Capillary micro-grip with feedback] *Capilarnyi microzavhat s obratnoi svazju*. Patent RF No. 2261795 RU, [Published] Opublikovano 10.10.2005. Byul. N. 28 (in Russian). https://www1.fips.ru/register-doc-view/fips_servLet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [26] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. Vol. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore. DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_2)
- [27] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006. 237 p.
- [28] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Dynamics of fluid flow in technical systems with jets] *Dinamika tekhnicheskikh zhidkosti v tekhnicheskikh sistemakh s zhiklerami*. *Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No. 4. Pp. 20–25 (In Russian). eLIBRARY ID: 25732231
- [29] Kuzmin D., Hämmäläinen J. Finite Element Methods for Computational Fluid Dynamics: A Practical Guide. *Computational Science & Engineering*. SIAM. 2014. DOI: [10.1137/1.9781611973617](https://doi.org/10.1137/1.9781611973617)
- [30] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The fluid flow through the related element system of technical device such as pipe-hydraulic resistance-pipe] *Techniye zhidkosti cherez sistemu svyazannykh elementov tekhnicheskogo ustroystva tipa trubagidrosoprotivleniye-truba*. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 2. Pp. 141–149 (In Russian). DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [31] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems. *Fluids*. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53. DOI: [10.3390/fluids2020034](https://doi.org/10.3390/fluids2020034)
- [32] Hecht F. New development in FreeFem++ // *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265. DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [33] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems] *Primeneniye svobodnykh programm FreeFem++/Gmsh i FreeCAD/CalculiX dlya modelirovaniya staticheskikh strukturnykh zadach*. *Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]*. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 183–200 (In Russian). DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [34] Sadaka G., Dutykh D. Adaptive Numerical Modeling of Tsunami Wave Generation and Propagation with FreeFem++. *Geosciences*. 2020. Vol. 10, No. 9. Art. no. 351. DOI: [10.3390/geosciences10090351](https://doi.org/10.3390/geosciences10090351)
- [35] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software to visualize the results of simulation of dynamic processes] *Ispol'zovaniye svobodnogo PO dlya vizualizatsii rezul'tatov modelirovaniya dinamicheskikh protsessov*. *Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]*. 2021. V. 16, No. 3–4. Pp. 121–143 (In Russian). DOI: [10.21662/mfs2021.3.016](https://doi.org/10.21662/mfs2021.3.016)
- [36] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel] *Dvumernaya dinamicheskaya model' vzaimodeystviya zhidkosti i pyezoelektricheskogo privoda s poperechnym izgibom v ploskom kanale*. *Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]*. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 220–232 (In Russian). DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)

- [37] Sadaka G., Rakotondrandisa A., Tournier P.-H., Luddens F., Lothodé C., Danaila I. Parallel finite-element codes for the simulation of two-dimensional and three-dimensional solid–liquid phase-change systems with natural convection. *Computer Physics Communications*. 2020. Vol. 257. P. 107492. DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107492](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107492)
- [38] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through the hydraulic resistance with a dynamically variable geometry] *Techeniye zhidkosti cherez gidrosoprotivleniye s dinamicheski izmenyayemoy geometriyey. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 59–66 (In Russian). DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [39] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. [Study of fluid flow through a channel deformed by piezoelement] *Izucheniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom kanal. Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (In Russian). DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [40] Cheng CH, Tseng YP. Characteristic studies of the piezoelectrically actuated micropump with check valve. *Microsystem Technologies*. 2013. Vol. 19. Pp. 1707–1715. DOI: [10.1007/s00542-013-1857-1](https://doi.org/10.1007/s00542-013-1857-1)
- [41] Guo L., Yan W., Xu, Y., Chen Y. Valveless piezoelectric micropump of parallel double chambers. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*. 2012. Vol. 13. Pp. 771–776. DOI: [10.1007/s12541-012-0101-8](https://doi.org/10.1007/s12541-012-0101-8)
- [42] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems] *Modelirovaniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom elastichnyy mikrokanal sistemy okhlazhdeniye mikrozakhvata. Mechatronics, automation, control* [Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie]. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian). DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [43] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore. DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [44] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2021. Vol. 14, No. 2. Pp. 152–164. DOI: [10.25103/jestr.142.19](https://doi.org/10.25103/jestr.142.19)
- [45] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Dependence of the Piezoelectric Micropump Operating Mode on Its Geometry. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 2096, No. 1. P. 012081. DOI: [10.1088/1742-6596/2096/1/012081](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012081)
- [46] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit] *Razrabotka kompyuternoy modeli osnovnogo elementa agregata dozirovaniya topliva. Vychislitelnye tehnologii* [Computational Technologies]. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41. (In Russian). eLIBRARY ID: 28886942
- [47] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software for processing and visualization of scientific research results] *Ispol'zovaniye svobodnykh programm dlya obrabotki i vizualizatsii rezul'tatov nauchnykh issledovaniy. Multiphase Systems* [Mnogofaznyye sistemy]. 2021. V. 16, No 2. Pp. 58–71 (In Russian). DOI: [10.21662/mfs2021.2.009](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.009)
- [48] Landau L.D., Lifshitz E.M. [Theoretical physics. V. 6. Fluid Mechanics. M.: Nauka] *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika. M.: Nauka*. 1988. 736 p. (In Russian).
- [49] Sivukhin D.V. [General course of physics. V. I. Mechanics. M.: Science] *Obshchiy kurs fiziki. M.: Nauka. 1979. T. I. Mekhanika. 1979. 520 p. (In Russian)*
- [50] GOST 15527-2004. Alloys copper-zinc (brass), processed by pressure.
- [51] Shlyakhin P.N., Bershadsky M.L. [Brief guide to steam turbine installations] *Kratkiy spravochnik po paroturbinnyim ustanovkam. M.-L.: Gosenergoizdat. 1961. 128 p.*



Численный анализ акустического рассеяния от слоя капель при внешнем воздействии¹

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование акустического рассеяния от препятствий малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, поскольку на явлении рассеяния основываются многие применения акустических волн. В рамках задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер, произвольных образом расположенных в пространстве, при внешнем воздействии, исследуется рассеяние от слоя капель. Основная цель: определение параметров, при которых система является чувствительной к изменению радиуса капель. Частный случай слоя сфер малых размеров возможен когда область, содержащая множество малых неоднородностей, условно является двумерной (одной из трех размерностей можно пренебречь). Задача решается численно с помощью обобщенной методики расчета, основанной на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах процессорного времени. Серия вычислительных экспериментов проведена для различных соотношений физических параметров капли и окружающей среды (плотности и скорости звука) для разного числа сфер и плотности их расположения в конфигурации. Показано, что система наиболее чувствительна к изменению радиуса капель в случае, когда упругость вещества внутри капли меньше, чем у внешней среды, а при увеличении числа сфер в плотных конфигурациях, — когда упругость вещества внутри капли много больше, чем у внешней среды. Получено, что чувствительность к изменению исходных данных падает с увеличением расстояния между центрами сфер, то есть с уменьшением плотности расположения сфер в конфигурации.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, система капель, монополюсный источник излучения, среднее квадратичное отклонение, отклик системы

1. Введение

Исследование акустического рассеяния от препятствий малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, поскольку на явлении рассеяния основываются многие применения акустических волн, такие как гидролокация [1], зондирование атмосферы и океана [1–3], создание позиционируемого 3D звука [4] и т.п. Одной из актуальных подзадач является определение давления на некотором расстоянии от рассеивающего слоя, состоящего из малых

звукопроницаемых (волна проходит через поверхность) сфер (капель), при внешнем воздействии. Подобные подзадачи могут возникать в случаях, когда область, содержащая множество исследуемых неоднородностей, условно является двумерной (одной из трех размерностей данной области можно пренебречь).

В работе [5] исследовалось акустическое рассеяние от слоя простой конфигурации, содержащего множество звукопроницаемых сфер, в трехмерном пространстве при воздействии сферической волны от монополюсного источника излучения с целью проведения анализа распределения давления на расстоянии от рассеивающего слоя при различных соотношениях физических параметров внешней и внутренней сред, а также плотности расположения сфер в конфигурации. В настоящей работе изуча-

¹Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052

ется акустическое рассеяние от слоя капель с целью оценки чувствительности отклика системы на изменение исходных данных, а именно, радиуса каплей a , при различных соотношениях физических параметров капли и окружающей среды (плотность ρ и скорость звука c) для разного числа сфер и плотности их расположения в конфигурации.

2. Постановка задачи и методика расчета

Задача рассеяния звука от N звукопроницаемых сфер различных радиусов a_v ($v = 1, \dots, N$) с центрами в координатах \mathbf{r}'_v в общем случае сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала $\psi(\mathbf{r})$ в точке вне сфер, имеющей в декартовой системе координат радиус-вектор \mathbf{r} , с волновым числом k_0 [6]

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0$$

и граничными условиями, выражающими равенство потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности v -ой сферы $S_v = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_v| = a_v\}$:

$$\left(\psi(\mathbf{r}) - \psi_{\text{int}}^{(v)} \right) \Big|_{S_v} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{S_v} = 0, \quad v = 1, \dots, N,$$

где $\psi_{\text{int}}^{(v)}$ — комплексный потенциал внутри v -й сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом k_v для внутренней среды:

$$\nabla^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} = 0;$$

ρ_0 — плотность внешней среды; ρ_v — плотность среды внутри v -й сферы.

Потенциал внешнего поля представляется в виде суммы потенциалов падающего поля $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ и поля рассеяния $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, соответствующему затухающим на бесконечности волнам [7]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik_0 \psi_{\text{scat}} \right) = 0.$$

Задача решается численно с помощью обобщенной техники разложения по мультиполям [8], разработанной изначально для случая звукопроницаемых сфер (волна не проходит через поверхность) с произвольным акустическим импедансом. Обобщение данной техники для случая звукопроницаемых сфер в частном случае, когда центры сфер лежат на одной оси, представлено в работах [9, 10], а оптимизация общего алгоритма для сфер, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, приведена в работе [11]. Выбор данной методики разложения по мультиполям обусловлен тем, что она позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах процессорного времени.

Система уравнений в матричном виде, к которой сводится решение данной задачи, в настоящей работе не приводится, поскольку она представлена в предыдущих работах автора [5, 12].

Рассмотрим слой, состоящий из $N = N_i \times N_i$ ($N_i = 3, 5$ или 7) сферических каплей радиуса a , изначально равномерно распределенных в плоскости Oyz , перпендикулярной к оси Ox , которая проходит через источник монополярного излучения M_s и расчетную точку M_c — точку, симметричную источнику излучения относительно заданного слоя (см. рис. 1). Наименьшее расстояние между центрами соседних сфер обозначим через δl .

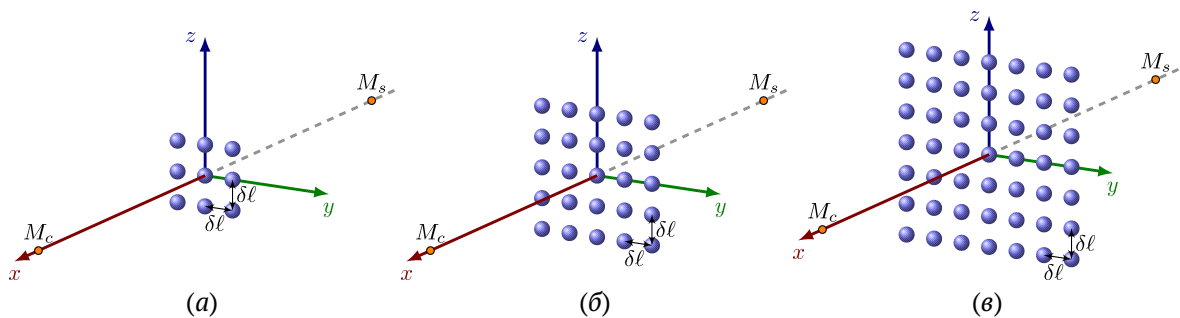


Рис. 1. Схема слоя, состоящего из $N = 3 \times 3$ (а), $N = 5 \times 5$ (б), $N = 7 \times 7$ (в) равномерно распределенных сферических каплей. M_s — монополярный источник излучения; M_c — расчетная точка

3. Численный анализ

При численной реализации техники разложения по мультиполям был разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [13]. Численный анализ проведен в рамках вычислительного эксперимента, в котором изучалось влияние исходного фактора (радиуса сфер) на значение искомой функции (модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ в расчетной точке M_c). Для этого радиусы капель a_i ($i = 1, \dots, N$) задавались случайным образом в пределах заданного отклонения Δ от первоначального (невозмущенного) значения a , то есть $a_i = a \pm \Delta$. Так, например, при отклонении в 5 % величина Δ определяется как $\Delta = 0.05a$, а в 10 % — $\Delta = 0.1a$. При численной реализации в программном коде случайное отклонение капель задавалось следующим образом

$$a_i = a + 2\Delta(\delta - 0.5),$$

где δ — случайная величина, определяемая в диапазоне от 0 и 1 встроенной подпрограммой Fortran 90 *random_number*(δ). Отметим, что для инициализации генератора случайных чисел необходимо предварительно запустить подпрограмму *random_seed*.

Поскольку связь между акустическим давлением p и потенциалом ψ определяется следующим соотношением

$$p = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho \psi,$$

то значения p и p_{in} выражаются через соответствующие потенциалы с точностью до постоянной величины $i\omega\rho$.

На рис. 2–10 представлены изменения модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ в расчетной точке M_c в зависимости от волнового радиуса k_0a при невозмущенных радиусах сфер a и при случайном отклонении радиусов всех капель от значения a в пределах 5 и 10 % для конфигураций, содержащих $N = N_i \times N_i$ ($N_i = 3, 5, 7$) сфер, и различных значений минимального расстояния между центрами соседних сфер $\delta l = 3a, 5a, 10a$. Рассмотрены физические параметры сред, соответствующие каплям воды ($\rho = 998 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$) в воздухе ($\rho = 1.205 \text{ кг/м}^3$, $c = 343.1 \text{ м/с}$), каплям воды в дихлорэтане ($\rho = 1252.6 \text{ кг/м}^3$, $c = 1034 \text{ м/с}$) и каплям дихлорэтана в воде.

Из представленных рисунков видно, что при одних параметрах система чувствительна к изменению начальных данных, а при других — начальное отклонение не приводит к существенным изменениям. Поэтому для оценки чувствительности

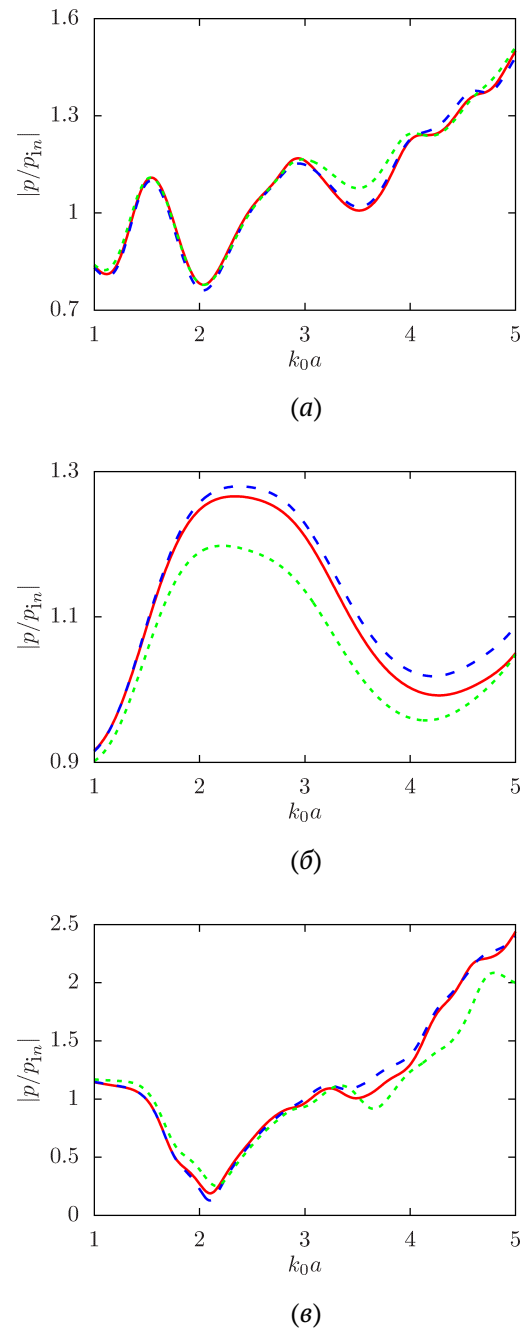
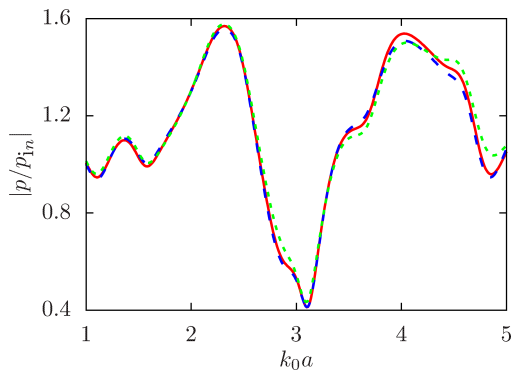
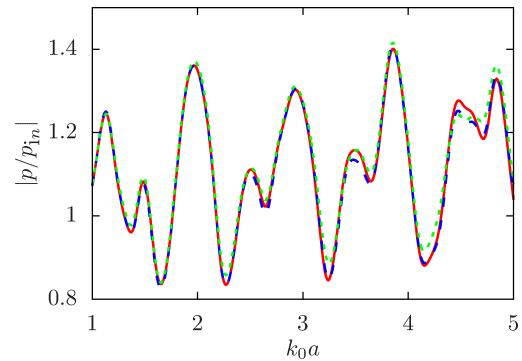


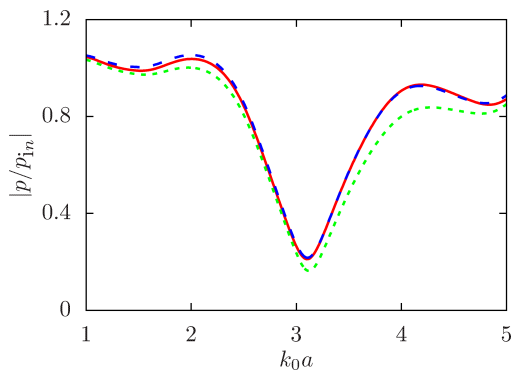
Рис. 2. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 3 \times 3$ и $\delta l = 3a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии — невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии — случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии — случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$



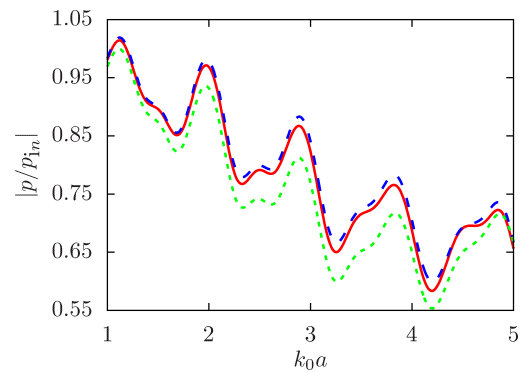
(a)



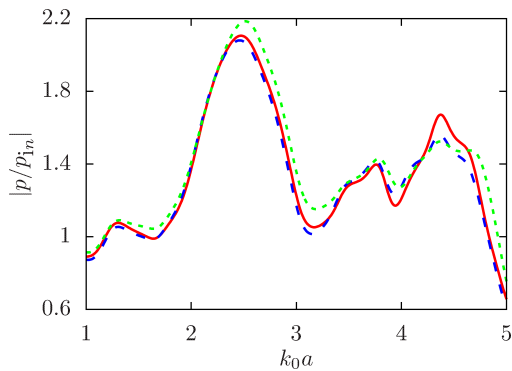
(a)



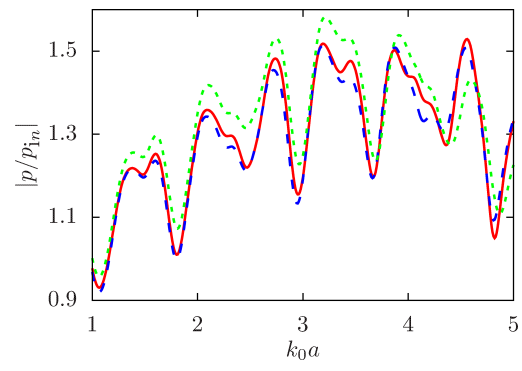
(б)



(б)



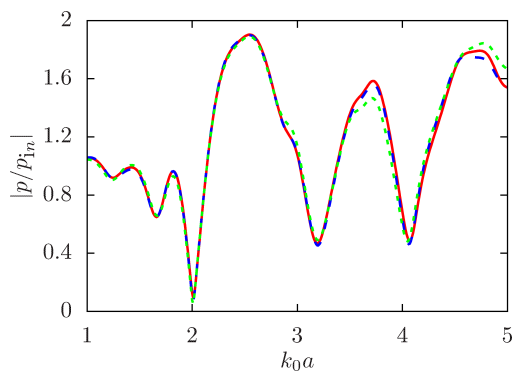
(в)



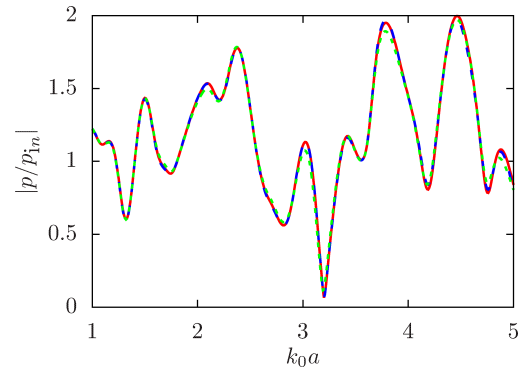
(в)

Рис. 3. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 3 \times 3$ и $\delta l = 5a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии – невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$.

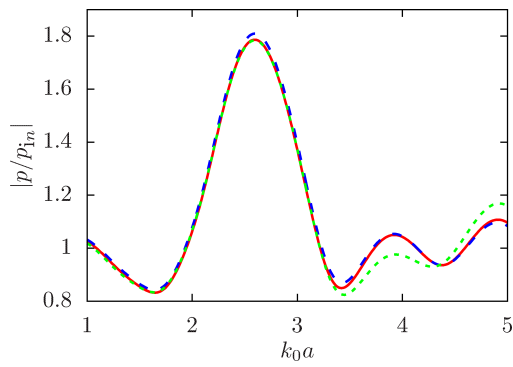
Рис. 4. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 3 \times 3$ и $\delta l = 10a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии – невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$.



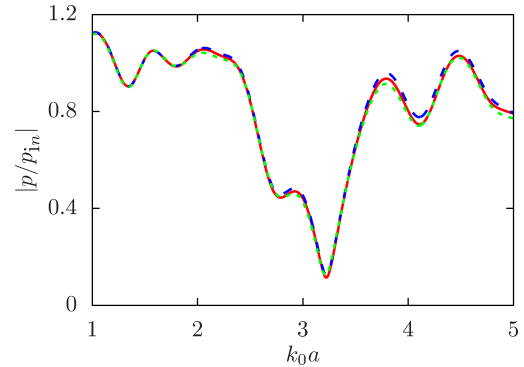
(a)



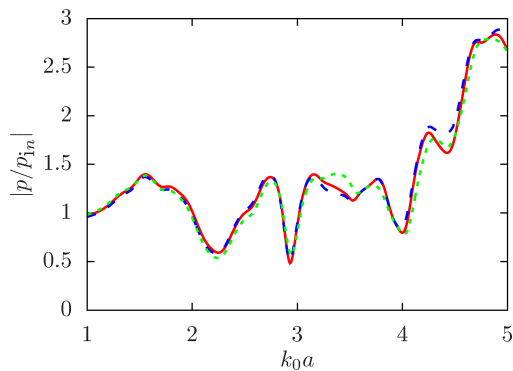
(a)



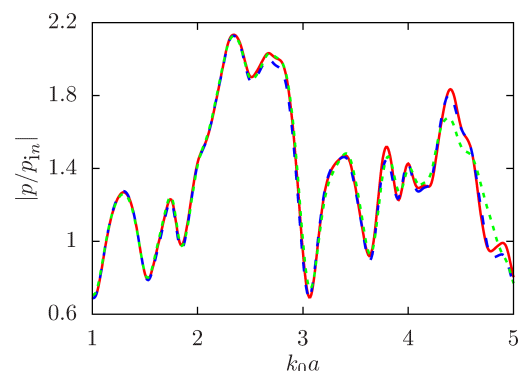
(б)



(б)



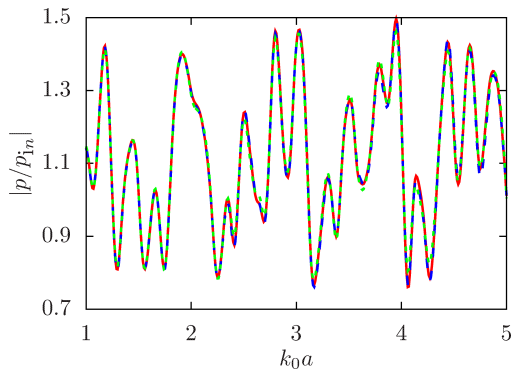
(в)



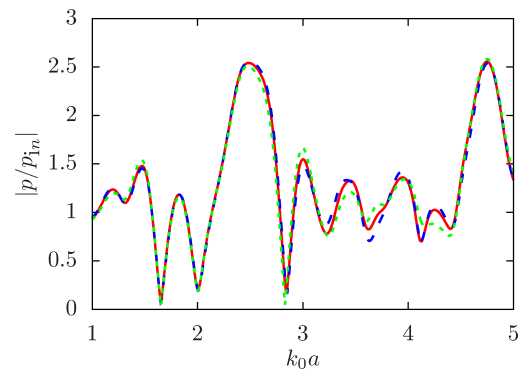
(в)

Рис. 5. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 5 \times 5$ и $\delta l = 3a$: капли воды в воздухе (a); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии – невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$

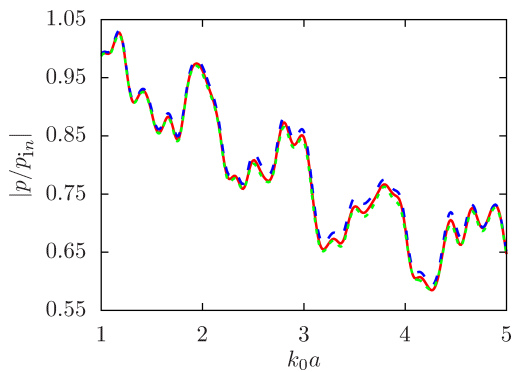
Рис. 6. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 5 \times 5$ и $\delta l = 5a$: капли воды в воздухе (a); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии – невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$



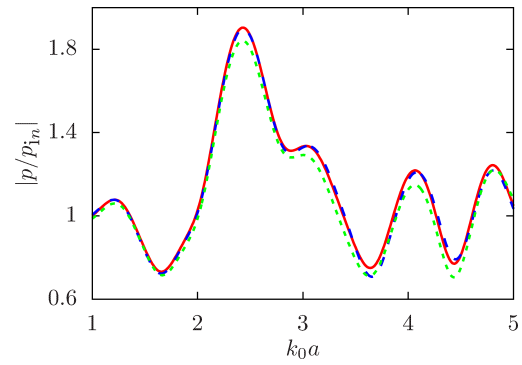
(a)



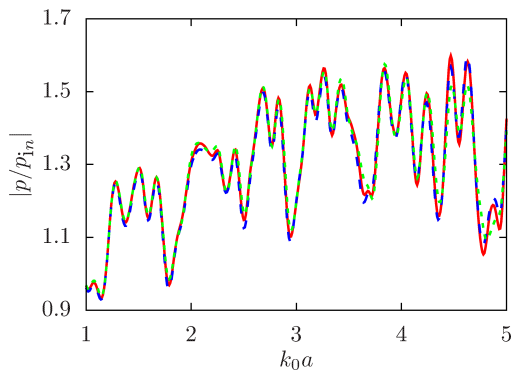
(a)



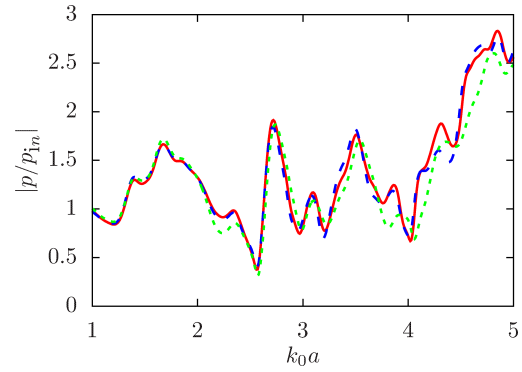
(б)



(б)



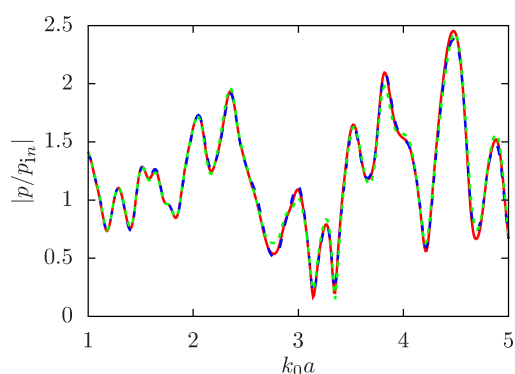
(в)



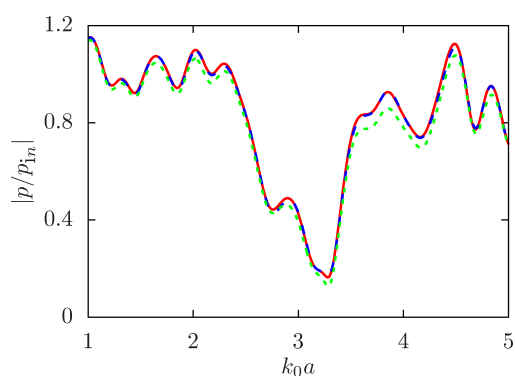
(в)

Рис. 7. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации $N = 5 \times 5$ и $\delta l = 10a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии — невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии — случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии — случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$

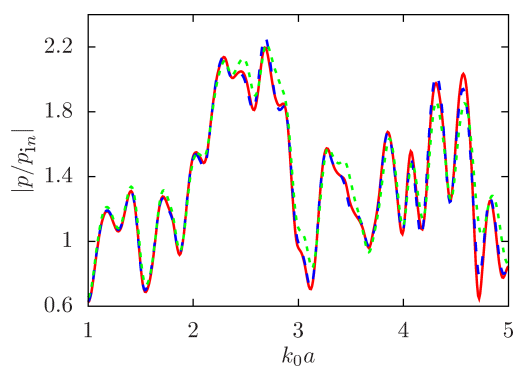
Рис. 8. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации $N = 7 \times 7$ и $\delta l = 3a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии — невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии — случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии — случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$



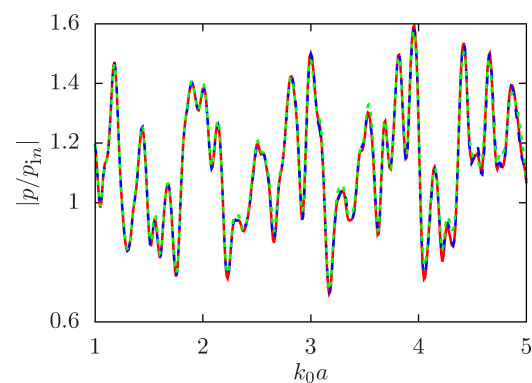
(a)



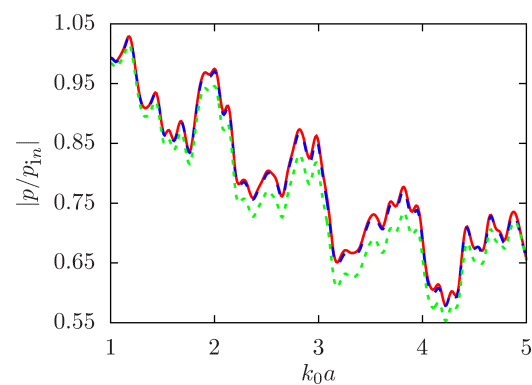
(б)



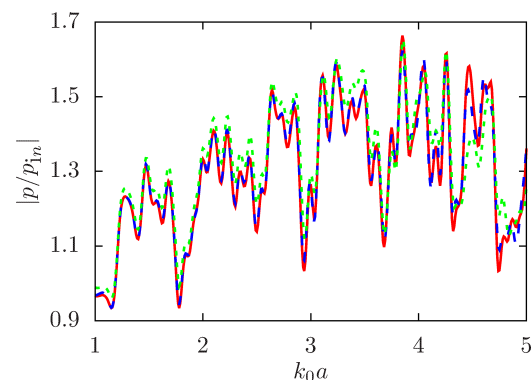
(в)



(a)



(б)



(в)

Рис. 9. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 7 \times 7$ и $\delta l = 5a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии – невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$

Рис. 10. Зависимость модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ от волнового радиуса k_0a для конфигурации $N = 7 \times 7$ и $\delta l = 10a$: капли воды в воздухе (а); капли воды в дихлорэтане (б); капли дихлорэтана в воде (в). Сплошные красные линии – невозмущенные значения радиусов $a_i \equiv a$; пунктирные синие линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 5\%$; штриховые зеленые линии – случайное распределение радиусов $a_i = a \pm 10\%$

отклика системы на относительное изменение исходных данных были рассчитаны среднеквадратические отклонения для радиусов капель a :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (a - a_i)^2}{N}}$$

и для искомой функции $f = |p/p_{in}|$:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^n (f_j - \tilde{f}_j)^2}{n+1}}$$

при шаге по k_0a равном $\Delta h(k_0a) = 0.01$, разбивающем отрезок $k_0a = [1, 5]$ на n частей. Здесь f_j и \tilde{f}_j — невозмущенное и возмущенное значения функции f в точке $(k_0a)_j$. Также была рассчитана максимальная абсолютная погрешность искомой функции:

$$\varepsilon_{\max} = \max_j |f_j - \tilde{f}_j|.$$

В табл. 1 представлены средние квадратичные отклонения для радиусов капель σ_a и расчетной функции σ_p , а также максимальная абсолютная погрешность ε_{\max} для трех рассмотренных конфигураций ($N = N_i \times N_i$, $N_i = 3, 5, 7$) с различной плотностью расположения сфер ($\delta l = 3a, 5a, 10a$) и случайным отклонением радиусов от начального в

пределах 5 и 10 %. В данной таблице красным цветом выделены значения среднеквадратичных отклонений искомой функции σ_p , превышающих соответствующие отклонения для радиусов капель σ_a . Видно, что условие $\sigma_p > \sigma_a$ выполняется в случае капель дихлорэтана в воде при плотном расположении сфер в конфигурации (при $\delta l = 3a$ и $5a$), а при увеличении числа сфер — также и при $\delta l = 10a$. Кроме того, данное условие выполняется и в случае капель воды в воздухе при увеличении числа сфер ($N_i = 5, 7$) в более плотной конфигурации, когда $\delta l = 3a$. Заметим, что при выполнении условия $\sigma_p > \sigma_a$ чувствительность к изменению исходных данных падает с ростом расстояния между центрами сфер, а увеличение отклонения радиусов капель от начального приводит к увеличению искомой функции.

4. Заключение

В работе в рамках исследования акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер, произвольным образом расположенных в пространстве, исследуется рассеяние от слоя капель для определения параметров, при которых система чувствительна к изменению исходных данных — радиуса капель. Проведена серия вычислительных экспериментов при различных соотношениях физических параметров капли и окружающей среды для разного числа сфер и плотности их расположения в конфигурации. Показано, что

Таблица 1. Влияние отклонения радиусов сфер a на величину нормированного давления $|p/p_{in}|$ в точке M_c : σ_a и σ_p — среднеквадратичные отклонения радиусов капель и искомой функции; ε_{\max} — максимальная абсолютная погрешность искомой функции. Красным цветом выделены значения $\sigma_p > \sigma_a$

N	± %	$\sigma_a, \times 10^{-2}$	δl	капли воды в воздухе		капли воды в дихлорэтанае		капли дихлорэтана в воде	
				$\sigma_p, \times 10^{-2}$	$\varepsilon_{\max}, \times 10^{-2}$	$\sigma_p, \times 10^{-2}$	$\varepsilon_{\max}, \times 10^{-2}$	$\sigma_p, \times 10^{-2}$	$\varepsilon_{\max}, \times 10^{-2}$
3 × 3	5	3.70	3a	1.32	2.74	2.00	3.79	4.88	12.35
			5a	1.61	3.67	1.01	1.70	4.31	11.49
			10a	1.06	3.16	1.17	1.87	2.21	5.79
	10	6.20	3a	2.90	7.03	5.18	7.66	16.12	44.10
			5a	3.33	8.59	5.85	10.70	8.86	24.76
			10a	2.15	4.93	4.05	6.35	6.03	13.50
5 × 5	5	2.45	3a	2.26	5.17	1.49	2.47	5.49	20.99
			5a	1.25	4.28	1.47	3.11	2.70	7.12
			10a	0.86	2.79	0.89	1.59	1.55	4.17
	10	4.52	3a	5.66	13.66	3.33	7.46	7.81	23.24
			5a	3.04	8.49	1.07	2.25	5.55	21.72
			10a	1.37	4.72	0.46	1.06	2.41	9.63
7 × 7	5	3.04	3a	5.00	13.47	1.97	5.34	7.81	30.97
			5a	2.66	7.39	0.73	2.15	3.29	14.85
			10a	0.98	3.27	0.43	0.95	1.90	7.40
	10	5.40	3a	8.00	23.23	4.73	7.11	17.33	50.05
			5a	4.49	12.37	3.66	6.74	9.98	47.12
			10a	1.85	5.55	3.10	4.63	5.78	21.73

- система наиболее чувствительна к изменению радиуса каплей в случае, когда отношение упругостей вещества сферы ($\chi_{in} = \rho_v c_v^2$) и внешней среды ($\chi_{out} = \rho_0 c_0^2$) меньше 1, то есть при $\chi_{in}/\chi_{out} < 1$ (капли дихлорэтана в воде);
- система становится более чувствительной к изменению исходных данных в случае, когда $\chi_{in} \gg \chi_{out}$ (капли воды в воздухе) при увеличении числа сфер в плотных конфигурациях;
- при выполнении условия $\sigma_p > \sigma_a$ чувствительность к изменению исходных данных падает с увеличением расстояния между центрами сфер;
- чем больше отклонение в исходных данных, тем больше отклонение искомой функции.

Отметим, что хотя данные выводы основаны на исследовании систем с небольшим числом сфер, логично предположить их справедливость и для конфигураций с большим числом включений. Однако для подтверждения истинности данного утверждения требуются дополнительные исследования, которые планируется провести в дальнейшем.

Список литературы

- [1] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с.
- [2] Сташкевич А.П. Акустика моря. Ленинград: Судостроение, 1966. 356 с.
- [3] Каллистратова М.А. Радиоакустическое зондирование атмосферы. Москва: Наука, 1985. 197 с.
- [4] Технология создания позиционируемого 3D звука. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed: 24.10.2022).
- [5] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 50–57. DOI: 10.21662/mfs2021.2.008
- [6] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [7] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.
- [8] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [9] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [10] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101. DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293
- [11] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [12] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. (в печ.) DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [13] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 24.10.2022).



Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of droplets under external action

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The study of acoustic scattering from small obstacles is important both for studying the fundamental nature of this phenomenon and from a practical point of view, since many applications of acoustic waves are based on the scattering phenomenon. Within the framework of the problem of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres arbitrarily located in space, under external influence, scattering from a layer of drops is studied. The main goal is to determine the parameters at which the system is sensitive to changes in the droplet radius. A special case of a small spheres layer is possible when a region containing many small inhomogeneities is conditionally two-dimensional one (one of the three dimensions can be neglected). The problem is solved numerically using a generalized calculation technique based on the fast multipole method, which allows achieving high accuracy of the results obtained with minimal CPU time. A series of computational experiments was carried out for various ratios of the physical parameters of the drop and the environment (density and sound speed) for a different number of spheres and the density of their arrangement in the configuration. It is shown that the system is most sensitive to changes in the droplet radius in the case when the elasticity of the substance inside the droplet is less than that of the external environment, and with an increase in the sphere number in dense configurations the system is most sensitive when the elasticity of the substance inside the droplet is much greater than that of the external environment. It is found that the sensitivity to changes in the initial data decreases with an increase in the distance between the sphere centers, that is, with a decrease in the density of the arrangement of the spheres in the configuration.

Keywords: acoustic scattering, system of drops, monopole radiation source, standard deviation, system response

References

- [1] Ishimaru A. Wave Propagation Scattering in Random Media, 1st Edition. New York: Academic Press, 1978. 272 p.
- [2] Stashkevich A.P. [Acoustics of the sea] *Akustika morya*. Leningrad: Sudostroenie, 1966. 356 p. (in Russian).
- [3] Kallistratova M.A. [Radio-acoustic sounding of the atmosphere] *Radioakusticheskoe zondirovanie atmosfery*. Moscow: Nauka, 1985. 197 p. (in Russian).
- [4] Technology for creating positioned 3D sound. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed: 24.10.2022).
- [5] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 2. Pp. 50–57 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.2.008
- [6] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. [Basics of acoustics] *Osnovy akustiki*. Kiev: Naukova Dumka, 2009. 867 p. (in Russian).
- [7] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, Inc. 1971. 426 p.
- [8] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [9] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [10] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian). DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293
- [11] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian). DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [12] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set of sound-permeable spheres in 3d space]. *Vychislitel'naya mexanika sploshnyx sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2022. V. 15, No. 4. Pp. 383–398 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [13] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 24.10.2022).



Использование муравьиного алгоритма для поиска стратегии поведения группы мобильных роботов на рабочем поле с препятствиями¹

Даринцев О.В., Мигранов А.Б.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматривается более сложный вариант решения проблемы распределения задач в группе мобильных роботов при наличии препятствий в рабочем пространстве. Работа является продолжением цикла исследований, в которых базовым алгоритмом решения поставленных задач являлся один из видов муравьиного алгоритма — метод мультиколониальной муравьиной системы в сочетании с алгоритмом планирования траектории, реализованный с использованием принципа динамического программирования. Скорректированы постановка задачи, модель рабочего пространства, цели функционирования роботов и параметры, характеризующие их работу. Проведен выбор свободных параметров муравьиного алгоритма для выполнения многокритериальной оптимизации и настройки решения: число итераций, количество межколониальных групп муравьев, вес концентрации феромона дуг, вес эвристической привлекательности дуг и коэффициент испарения феромона. Представлены результаты вычислительных экспериментов, проведенных при наличии в рабочем пространстве статических (известных заранее) и динамических (другие роботы) препятствий. Апробация предложенного алгоритма проводилась на примере группы, состоящей из трех роботов, выполняющих 10 заданий. Как показано в результатах вычислительных экспериментов траектории роботов строятся на подмножестве свободных ячеек рабочего пространства и не пересекают ячейки с препятствиями. При этом конфигурация рабочего поля влияет не только на фактические маршруты роботов, но и на перераспределение заданий между ними, и число задействованных роботов. Дополнительно проведена серия вычислительных экспериментов с разными комбинациями значений свободных параметров для определения оптимальных соотношений и реализации более эффективного муравьиного алгоритма. Оптимизация проводилась методом однократной настройки, что позволило найти требуемые значения свободных параметров. Показано, что выполненная подстройка параметров позволила снизить относительную погрешность при синтезе оптимального маршрута перемещения группы роботов на 3–6 %.

Ключевые слова: группа роботов, муравьиный алгоритм, распределение задач, планирование траекторий

1. Введение

Во многих зарубежных лабораториях проводятся разработки мобильных роботов в комплексе с системами управления и планирования для выполнения различного типа задач — от бытовых до военных [1]. Новые модификации обладают расширенным спектром выполняемых задач, а также наличием более функциональных бло-

ков связи как с диспетчерским пунктом [2], так и между группой роботов [3], что позволяет создавать на их базе группировки мобильных роботов, ориентированных на решение комплексных, многоэтапных задач [4, 5].

При переходе к управлению группой роботов первоочередной становится задача оптимального распределения ресурсов группы с учетом фактического перечня задач и обстановки на рабочем поле (в такой постановке ее можно отнести к проблемам поиска оптимальных стратегий поведения группы мобильных роботов), решению которой посвящено множество работ [3, 6, 7].

¹Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2018-007.

Ранее, в целом цикле работ, авторами уже рассматривалась возможность применения нейронных сетей [8], генетических алгоритмов [9] и муравьиного алгоритма [10] для поиска стратегии распределения задач в группе роботов. Наиболее близкой к полученным решениям является статья [10], в которой была рассмотрена задача построения оптимальной стратегии управления произвольной группой мобильных роботов для выполнения произвольного числа заданий с учетом нескольких критериев эффективности. Тогда впервые авторами для решения задачи был использован муравьиный алгоритм — метод мультиколониальной муравьиной системы (Ant Multi-Colony Optimization, AMCO) [11, 12], сформулирована многокритериальная функция оптимизации, с последующей ее скаляризацией. Так как это был первый опыт использования муравьиных алгоритмов для решения проблемы выбора оптимальной стратегии, то решение искалось на «пустом» рабочем поле (не учитывались даже стационарные препятствия), а для метода AMCO был подобран один набор параметров без анализа его оптимальности.

Основной целью настоящей работы является расширение (модификация) муравьиного алгоритма для ситуации с произвольными количествами задач и роботов, функционирующих на рабочем поле с естественными преградами, а также анализ влияния настраиваемых параметров AMCO на качество полученного решения.

2. Постановка задачи и цели исследования

Рассматривается рабочее поле размером $N \times M$ узлов, на котором находится n роботов и m заданий; координаты роботов — (x_i, y_i) , $i \in [1, n]$, координаты расположения заданий — (x_j^*, y_j^*) , $j \in [1, m]$. На поле часть узлов являются барьерами — в них не могут располагаться задание или робот, а следовательно, через них не может быть проложен маршрут робота. В одном узле одновременно может находиться только один робот и/или одно задание. Цель функционирования роботов — выполнение заданий, расположенных на рабочем поле.

Задача проводимого исследования: с учетом заданных характеристик всех объектов и наличия препятствий модифицировать алгоритм поиска оптимального плана распределения задач между имеющимися роботами, отвечающий требованиям многокритериальной оптимальной целевой функции.

3. Целевая функция и муравьиный алгоритм

Оптимизация в работе выполняется с использованием следующей построенной целевой функции:

$$\Phi(\bar{z}) = \frac{1}{\eta} \cdot W_{\Sigma}(\bar{z}) + w^T \cdot t_{\max}(\bar{z}) + W^{ST} \cdot N_w(\bar{z}), \quad (1)$$

где η — КПД функционирования роботов; w^T — удельная энергия, необходимая для функционирования группы поддержки в течение всего времени выполнения операции; t_{\max} — максимальное время, необходимое для выполнения всех заданий группой роботов; W^{ST} — энергия, затрачиваемая на размещение (перемещение) одного робота в узел рабочего поля; N_w — число задействованных роботов; $W_{\Sigma} = \sum_{i=1, n} (S_i w_i^{FN} + \tau_i w_i^{MV})$ — энергия, потребляемая группой роботов при выполнении заданий, находящихся на рабочем поле; S_i — расстояние, пройденное i -м роботом; τ_i — время, затраченное i -м роботом на выполнение группы делегированных ему заданий; w_i^{FN} — потребление энергии i -м роботом при выполнении операций; w_i^{MV} — потребление энергии i -м роботом при его перемещении.

На базе целевой функции (1) была построена скалярная функция поиска оптимума:

$$J : \min_{z \in Z} (\Phi(\bar{z})).$$

Более подробное описание целевой функции и функции поиска оптимума приводится в работе [10]. В качестве алгоритма поиска решения используется мультиколониальная муравьиная система (AMCO). Для настройки AMCO используются следующие свободные параметры: n — количество итераций; m — количество межколониальных групп муравьев; α — вес концентрации феромона дуг; β — вес эвристической привлекательности дуг; ρ — коэффициент испарения феромона.

4. Модификация работы алгоритма, учитывающего наличие препятствий на рабочем поле

Для реализации функционала подсистемы построения траекторий роботов с учетом статических (преграды на поле) и динамических (другие роботы) препятствий в AMCO был встроен модуль планирования траектории [13, 14], в котором реализован алгоритм планирования траектории с использованием принципа динамического программирования Р. Беллмана [15].

Таблица 1. Параметры роботов и заданий на поле

Роботы										
№	1			2			3			
Координаты	{2, 10}			{5, 10}			{8, 10}			
Скорость v_i , ед.раст./ед.вр.	30			20			25			
Расход на перемещение w_i^{MV} , ед.эн./ ед.раст.	30			40			35			
Расход на функционирование w_i^{FN} , ед.эн./ед.вр.	120			100			110			
Задания										
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Координаты	{5, 8}	{10, 8}	{2, 7}	{1, 6}	{7, 6}	{5, 4}	{9, 4}	{3, 3}	{7, 2}	{1, 1}

Корректность работы алгоритма проверялась в ходе вычислительного эксперимента, проводимого для группы, состоящей из трех роботов, которым было назначено 10 заданий. При этом роботы и задания размещаются на рабочем поле размером 10×10 клеток. Исходные параметры для рассматриваемого примера приведены в табл. 1 и 2. Расположение роботов и заданий на поле представлено на рис. 1.

Результат решения с использованием доработанного алгоритма АМСО с учетом препятствий представлен на рис. 2, из которого видно, что траектории роботов проходят по свободным ячейкам и не пересекают препятствия.

На рис. 3 показаны перемещения роботов при тех же исходных параметрах, но с применением другой конфигурации препятствий на поле. Результат демонстрирует, что конфигурация рабочего поля влияет не только на синтезируемые маршруты роботов, но также на перераспределение заданий между ними и на число задействованных роботов.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10		P_1			P_2			P_3		
9										
8					Z_1					Z_2
7		Z_3								
6	Z_4						Z_5			
5										
4					Z_6				Z_7	
3			Z_8							
2							Z_9			
1	Z_{10}									

Рис. 1. Расположение роботов и задач на рабочем поле (черными квадратами выделены узлы, являющиеся статическими препятствиями на поле)

Таблица 2. Параметры весовой функции

№	КПД	Удельная энергия, w^t , ед.эн./ед.вр.	Энергия размещения, W^{ST} , ед.эн.
1	0,9	100	5

В результате можно утверждать, что алгоритм с модулем построения траекторий, учитывающий особенности рабочего пространства, является более корректным и позволяет также корректно учитывать предлагаемое распределение задач в группе роботов.

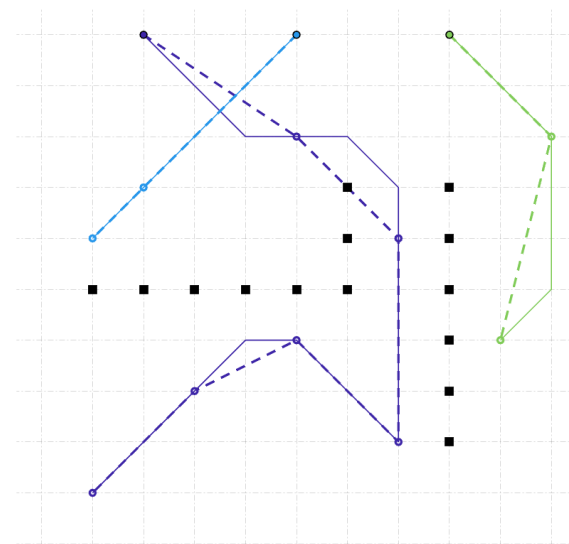


Рис. 2. Результаты расчета квазиоптимальной траектории перемещения роботов с учетом наличия динамических и статических препятствий на поле (квадраты – препятствия, заполненные точки – исходное положение роботов, полые точки – расположение заданий, сплошные линии – траектория движения роботов, пунктирные линии – последовательность обработки заданий)

Таблица 4. Типы графов для решения М-задачи

№	Число роботов	Число заданий	Размер поля	Доля препятствий
1	2	8	5×5	0,1
2	5	20	10×10	0,3
3	5	50	10×10	0,1
4	10	50	20×20	0,2
5	10	90	20×20	0,1

Таблица 5. Диапазоны изменения параметров

№	Параметр	min	max	массив
1	t	10	90	10, 30, 50, 70
2	α	0,5	2,5	0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5
3	β	1	9	1,0, 3,0, 5,0, 7,0, 9,0
4	ρ	0	1	0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0

го муравьиного алгоритма была проведена серия вычислительных экспериментов с разными комбинациями значений. Рассмотрены пять графов с различными параметрами (табл. 4).

Заданы диапазоны изменений и «опорные» точки для каждого из четырех свободных параметров (табл. 5). Поэтому для представленных множеств четырех свободных параметров пространство решения М-задачи включает 500 различных комбинаций.

Для всех комбинаций было проведено по 5 вычислительных экспериментов на каждом из 5-и графов (25 точек), в ходе которых оценивались суммарные затраты энергии всего коллектива, необходимые для выполнения поставленных заданий. В качестве оценки эффективности работы АМСО для всех 5-и графов предлагается рассмотреть не абсолютное значение энергии, а ее относительную погрешность (отклонение, превышение), вызванную изменением в работе алгоритма при смене параметров. За «опорное» значение для расчета погрешности выбирается минимальное значение затрат энергии, полученное в 2500 запусках алгоритма.

Далее представлены диаграммы распределения погрешности решения Б-задачи для каждого из параметров (рис. 4). На каждой из диаграмм отображены все полученные в рамках эксперимента значения (12 500 точек).

Проведен анализ полученных результатов, по результатам которого итерационным подходом выполнялся выбор оптимальных параметров свободных параметров АМСО. Очевидно, что наибольшее влияние на точность решения имеет параметр β , значит стабильные решения следует искать при $\beta > 7$. Поэтому для следующего шага примем за оптимальное значение $\beta = 9$.

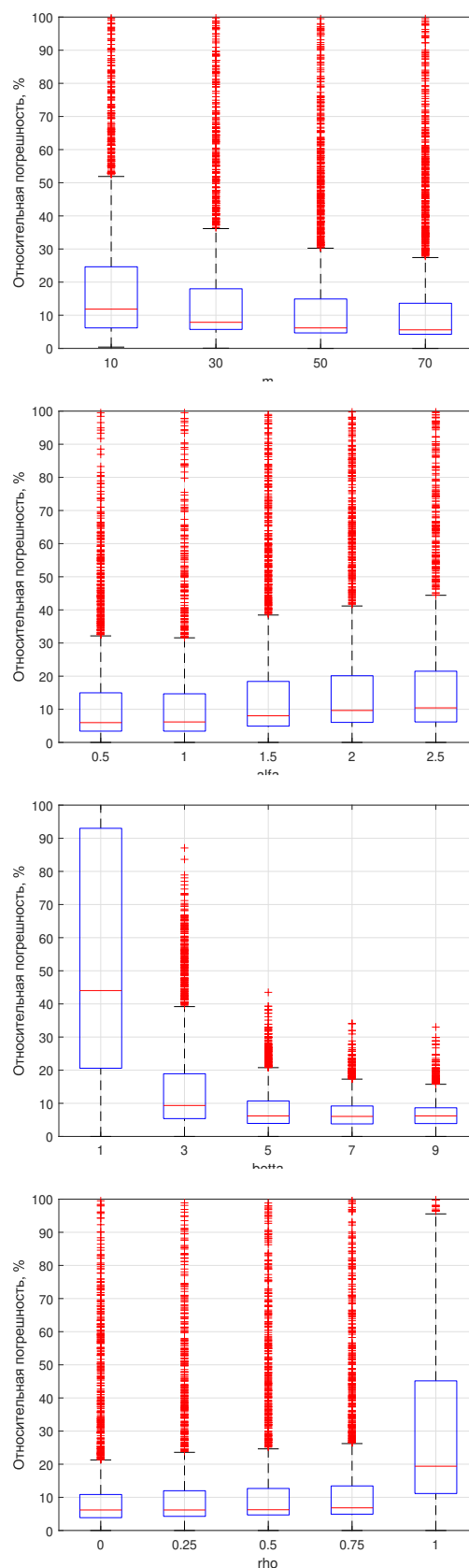


Рис. 4. Распределение относительной ошибки результатов решения Б-задачи для различных значений свободных параметров

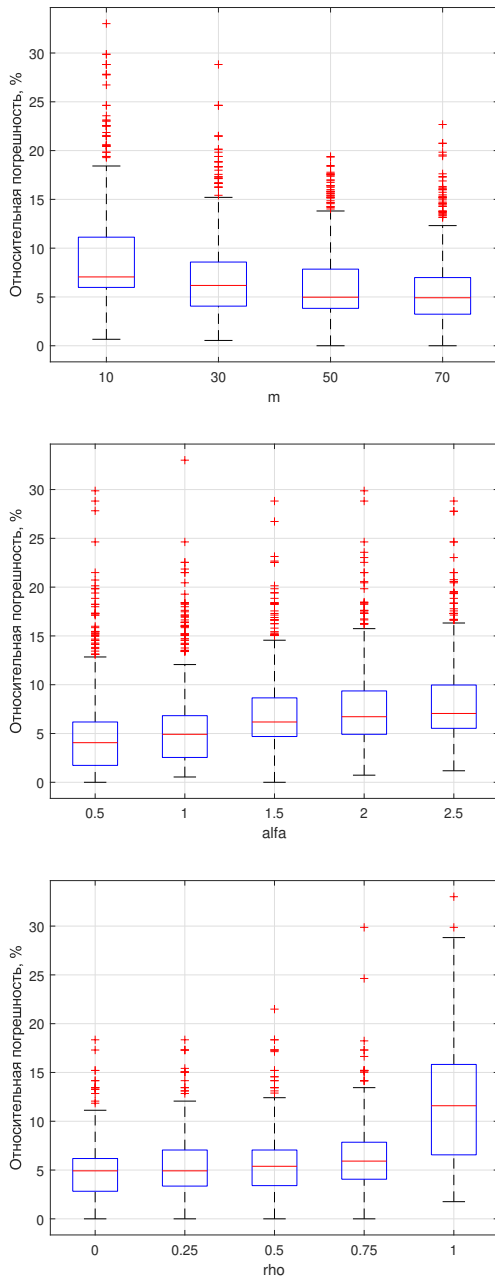


Рис. 5. Распределение относительной ошибки результатов решения Б-задачи при $\beta = 9$

Построим распределения ошибки для оставшихся трех параметров при известном значении четвертого (рис. 5). Диаграммы также построены по полученным 2500 точкам.

Анализ полученных диаграмм позволил выявить тренд сокращения ошибки при уменьшении параметра α и возрастании параметра m . Поэтому на втором этапе итерации зафиксируем параметр α , приняв за оптимальные значения $\alpha = 0,5$ и $\beta = 9$.

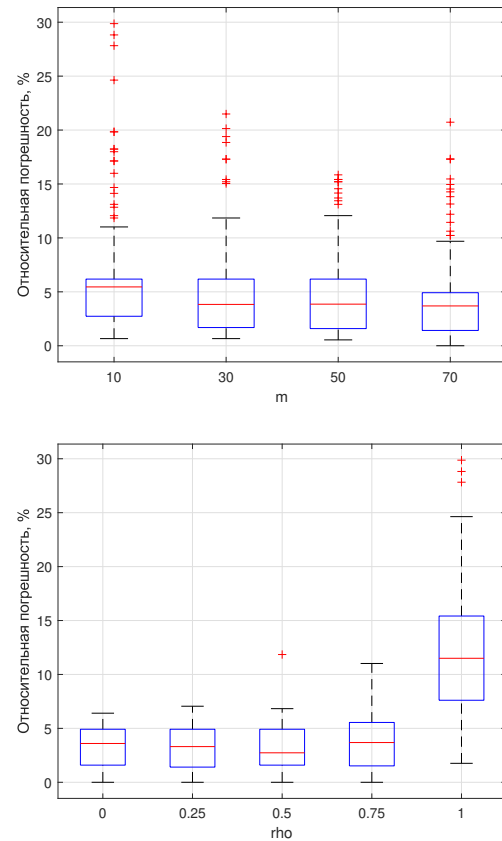


Рис. 6. Распределение относительной ошибки решения Б-задачи при $\alpha = 0,5$ и $\beta = 9$

Построим распределения ошибки для оставшихся двух параметров при заданных значениях второго и четвертого (рис. 6), отражающих уже по 500 точек.

Полученные диаграммы показывают, что после фиксации параметра α , исчез тренд уменьшения ошибки с ростом параметра m . Так усредненная величина ошибки совпадает для трех значений параметра: 30, 50 и 70 муравьев. При этом исключение двух параметров позволило выявить оптимальное значение параметра ρ : на диаграмме прослеживается минимум медианного значения ошибки при $\rho = 0,5$.

Поэтому на следующем шаге в качестве оптимальных значений принимаем $\rho = 0,5$, $\alpha = 0,5$ и $\beta = 9$.

Оценим влияние оставшегося параметра m на величину относительной ошибки (рис. 7). Представленная на рисунке диаграмма содержит 100 экспериментальных точек.

Оценивая минимальное медианное значение, а также значения верхнего квартиля, можем выбрать в качестве оптимального значения для количества межколониальных групп муравьев $m = 30$.

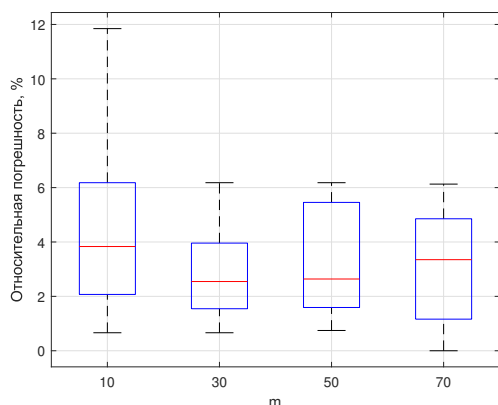


Рис. 7. Распределение относительной ошибки результатов решения Б-задачи для критерия m при $\alpha = 0,5$, $\beta = 9$ и $\rho = 0,5$

Результатом выполнения М-оптимизации методом однократной настройки параметров стало определение следующих значений свободных параметров АМСО:

- количество итераций n определяется из условия максимального времени расчета 10 секунд;
- количество межколонийных групп муравьев $m = 30$;
- вес концентрации феромона дуг $\alpha = 0,5$;
- вес эвристической привлекательности дуг $\beta = 9$;
- коэффициент испарения феромона $\rho = 0,5$.

Использование вышеприведенных значений данных параметров позволило получить среднюю величину отклонений при поиске оптимальной стратегии перемещения группы роботов на поле с препятствиями не более 3 %, при максимальном ее значении — 6 %.

6. Заключение

В настоящей статье показан один из вариантов решения для задачи поиска оптимальной стратегии управления произвольной группой мобильных роботов, сложность которой напрямую зависит от наличия статических препятствий, динамических препятствий в виде других роботов, присутствующих в рабочем пространстве. Произвольное число поставленных заданий, а также комплексная

оценка оптимальности (нескольких критериев эффективности) потребовали использования специфических приемов и методов модификации ранее полученного решения с использованием муравьиного алгоритма. Процедура внесения изменений в алгоритм была реализована в два этапа.

На первом этапе при синтезе траекторий группы роботов за счет внедрения в алгоритм АМСО нового модуля, производящего расчет взаимного перемещения роботов с использованием принципа динамического программирования, адекватно учитывались стационарные (преграды, стены) и динамические (другие роботы группы) препятствия.

Второй этап заключался в решении метаоптимизационной задачи выбора свободных параметров АМСО методом однократной настройки параметров, что в итоге позволило уменьшить относительную погрешность при синтезе оптимальных маршрутов для группы роботов и сократить суммарные энергетические затраты.

Список литературы

- [1] Булгаков А.Г., Торстен Б., Горчаков В.В., Касаткин А.В. Разработка мобильного робота для технологических процессов в строительстве // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2011. № 6(164). С. 20–25. [eLIBRARY ID: 17280557](#)
- [2] Гречушкин И.В., Савин В.И. Применение наземных робототехнических комплексов для проведения погрузочно-разгрузочных и транспортно-складских работ // Научные проблемы материально-технического обеспечения Вооруженных Сил Российской Федерации. 2019. № 3(13). С. 103–116. [eLIBRARY ID: 41149529](#)
- [3] Иванов Д.Я. Распределение ролей в коалициях роботов при ограниченных коммуникациях на основе роевого взаимодействия // Управление большими системами: сборник трудов. 2019. № 78. С. 23–45. [eLIBRARY ID: 37652243](#)
- [4] Политов Е.Н., Березина Л.В., Щербакова М.П. Робототехнические комплексы военного назначения: современное состояние и перспективы развития в Российской Федерации // Молодежь и наука: шаг к успеху : сборник научных статей 3-й Всероссийской научной конференции перспективных разработок молодых ученых : в 5 т., Курск, 21–22 марта 2019 года. Том 5. Курск: Закрытое акционерное общество «Университетская книга». 2019. С. 102–104. [eLIBRARY ID: 37265522](#)
- [5] Батанов А.Ф., Мингалеев С.Г., Очкин И.В. Робототехнические комплексы в аэромобильных группировках МЧС России // Технологии гражданской безопасности. 2019. Т. 16, № 2(60). С. 60–69. [eLIBRARY ID: 38504570](#)
- [6] Marino A., Parker L.E., Antonelli G., Caccavale F. A decentralized architecture for multi-robot systems based on the null-space-behavioral control with application to multi-robot border patrolling // J. Intell. Robot. Syst. 2013. V. 71. P. 423–444. [DOI: 10.1007/s10846-012-9783-5](#)
- [7] Аппельганц А.В., Пятакова О.И., Соловьев А.А. Групповое управление роботами военного назначения // Повышение качества образования, современные инновации в науке и производстве. 2019. С. 562–568.

- [8] Darintsev O.V., Migranov A.B. Using the Hopfield Neural Network to Select a Behaviour Strategy for the Group of Mobile Robots // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2096. 012086. DOI: [10.1088/1742-6596/2096/1/012086](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012086)
- [9] Darintsev O., Migranov A. Task Distribution Module for a Team of Robots Based on Genetic Algorithms: Synthesis Methodology and Testing // 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP), Samara, Russia. 2019.
- [10] Darintsev O.V., Migranov A.B. Multi-criteria Optimization of the Mobile Robot Group Strategy Using the Ant Algorithm. In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) *Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies*. V. 232. Springer, Singapore. 2022. DOI: [10.1007/978-981-16-2814-6_9](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_9)
- [11] Li X., Liu Z., Tan F. Multi-Robot Task Allocation Based on Cloud Ant Colony Algorithm // *ICONIP 2017. Lecture Notes in Computer Science*. 2017. Vol. 10637. Pp. 3–10. DOI: [10.1007/978-3-319-70093-9_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70093-9_1)
- [12] Кубил В.Н. Исследование и разработка методов решения многокритериальных задач маршрутизации транспорта на основе муравьиного алгоритма: Дис. ...канд. техн. наук: 05.13.01 / В.Н. Кубил. Новочеркасск. 2019. 184 с.
- [13] Карпухин В.Б. Математическая модель управления процессом поиска оптимального маршрута в транспортной сети // *Инновационные технологии в науке, транспорте и образовании: Сборник статей международной научно-методической интернет-конференции, Москва, 19–20 июня 2018 года*. Москва: Российский университет транспорта (МИИТ). 2018. С. 296–308. eLIBRARY ID: [36962584](https://elibrary.ru/36962584)
- [14] Ченцов А.А., Ченцов А.Г. О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2007. Т. 13, № 3. С. 136–160. eLIBRARY ID: [12040792](https://elibrary.ru/12040792)
- [15] Беллман Р. *Динамическое программирование*. М.: ИЛ. 1960.
- [16] Зайцев А.А., Курейчик В.В., Полупанов А.А. Обзор эволюционных методов оптимизации на основе роевого интеллекта // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2010. № 12(113). С. 7–12. eLIBRARY ID: [15553703](https://elibrary.ru/15553703)
- [17] Карпенко А.П., Свианадзе З.О. Метод мета-оптимизации поисковых алгоритмов оптимизации // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2011. № 1. С. 3. eLIBRARY ID: [15575356](https://elibrary.ru/15575356)
- [18] Карпенко А.П. Методы повышения эффективности популяционных алгоритмов глобальной оптимизации // *Перспективные направления развития отечественных информационных технологий. материалы V межрегиональной научно-практической конференции*. Севастопольский государственный университет; Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН. Севастополь. 2019. С. 87–88. eLIBRARY ID: [42944531](https://elibrary.ru/42944531)
- [19] Агасиев Т.А., Карпенко А.П. Мета-оптимизация алгоритмов глобальной параметрической оптимизации // *Системы компьютерной математики и их приложения*. 2019. № 20–1. С. 8–16. eLIBRARY ID: [39103145](https://elibrary.ru/39103145)
- [20] Bremermann H.J. Optimization through evolution and recombination // *Yovits M.C., Jacobi G.T. and Goldstein G.D. (Eds.), Self-Organizing Systems*. 1962. Pp. 93–106.



Using an ant algorithm to find a strategy for the behavior of a group of mobile robots on a work field with obstacles

Darintsev O.V., Miganov A.B.

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

A more complex solution to the problem of the distribution of tasks in a group of mobile robots, in the presence of obstacles in the workspace, is considered. The work is a continuation of a cycle of research in which the basic algorithm for solving the tasks was one of the types of ant algorithm – the multicolonial ant system method in combination with the trajectory planning algorithm implemented using the principle of dynamic programming. The task statement, the workspace model, the goals of the robots functioning and the parameters characterizing their work have been adjusted. The choice of free parameters of the ant algorithm for performing multi-criteria optimization and tuning of the solution is carried out: the number of iterations, the number of intercolonial groups of ants, the weight of the concentration of the pheromone of arcs, the weight of the heuristic attractiveness of arcs and the pheromone evaporation coefficient. The results of computational experiments conducted in the presence of static (known in advance) and dynamic (other robots) obstacles in the workspace are presented. The proposed algorithm was tested using the example of a group consisting of three robots performing 10 tasks. As shown in the results of computational experiments, robot trajectories are built on a subset of free cells of the workspace and do not intersect cells with obstacles. At the same time, the configuration of the work field affects not only the actual routes of robots, but also the redistribution of tasks between them, and the number of robots involved. Additionally, a series of computational experiments with different combinations of values of free parameters was carried out to determine the optimal ratios and implement a more efficient ant algorithm. Optimization was carried out by a single adjustment method, which allowed us to find the required values of free parameters. It is shown that the adjustment of the parameters made it possible to reduce the relative error in the synthesis of the optimal route of movement of a group of robots by 3–6 %.

Keywords: group of robots, ant algorithm, distribution of tasks, trajectory planning

References

- [1] Bulgakov A.G., Torsten B., Gorchakov V.V., Kasatkin A.V. Razrabotka mobil'nogo robota dlya tekhnologicheskikh processov v stroitel'stve // Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskij region. Seriya: Tekhnicheskie nauki. 2011. № 6(164). Pp. 20–25 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 17280557](#)
- [2] Grechushkin I.V., Savin V.I. Primenenie nazemnykh robototekhnicheskikh kompleksov dlya provedeniya pogruzochno-razgruzochnykh i transportno-skladskih rabot // Nauchnye problemy material'no-tekhnicheskogo obespecheniya Vooruzhennykh Sil Rossijskoj Federacii. 2019. № 3(13). Pp. 103–116 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 41149529](#)
- [3] Ivanov D.YA. Raspredelenie rolej v koalitsiyah robotov pri ogranichennykh kommunikatsiyah na osnove roevogo vzaimod-ejstviya // Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov. 2019. № 78. Pp. 23–45 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 37652243](#)
- [4] Politov E.N., Berezina L.V., SHCHerbakova M.P. Robototekhnicheskije komplekxy voennogo naznacheniya: sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya v Rossijskoj Federacii // Molodezh' i nauka: shag k uspekhу: sbornik nauchnykh statej 3-j Vserossijskoj nauchnoj konferencii perspektivnykh razrabotok molodykh uchenykh: v 5 t., Kursk, 21–22 marta 2019 goda. Tom 5. Kursk: Zakrytoe akcionerное obshchestvo «Universitetskaya kniga». 2019. Pp. 102–104 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 37265522](#)
- [5] Batanov A.F., Mingaleev S.G., Ochkin I.V. Robototekhnicheskije komplekxy v aeromobil'nykh gruppirovkah MCHS Rossii // Tekhnologii grazhdanskoj bezopasnosti. 2019. T. 16, № 2(60). Pp. 60–69 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 38504570](#)
- [6] Marino A., Parker L.E., Antonelli G., Caccavale F. A decentralized architecture for multi-robot systems based on the null-space-behavioral control with application to multi-robot border patrolling // J. Intell. Robot. Syst. 2013. V. 71. Pp. 423–444.
[DOI: 10.1007/s10846-012-9783-5](#)

- [7] Appel'ganc A.V., Pyatakova O.I., Solov'ev A.A. Gruppovoe upravlenie robotami voennogo naznacheniya // Povyshenie kachestva obrazovaniya, sovremennye innovacii v nauke i proizvodstve. 2019. Pp. 562–568 (In Russian).
- [8] Darintsev O.V., Migranov A.B. Using the Hopfield Neural Network to Select a Behaviour Strategy for the Group of Mobile Robots // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2096. 012086.
[DOI: 10.1088/1742-6596/2096/1/012086](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2096/1/012086)
- [9] Darintsev O., Migranov A. Task Distribution Module for a Team of Robots Based on Genetic Algorithms: Synthesis Methodology and Testing // 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP), Samara, Russia. 2019.
- [10] Darintsev O.V., Migranov A.B. Multi-criteria Optimization of the Mobile Robot Group Strategy Using the Ant Algorithm. In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies. V. 232. Springer, Singapore. 2022.
[DOI: 10.1007/978-981-16-2814-6_9](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_9)
- [11] Li X., Liu Z., Tan F. Multi-Robot Task Allocation Based on Cloud Ant Colony Algorithm // ICONIP 2017. Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol 10637. Pp. 3–10.
[DOI: 10.1007/978-3-319-70093-9_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70093-9_1)
- [12] Kubil V.N. Issledovanie i razrabotka metodov resheniya mnogokriterial'nyh zadach marshrutizacii transporta na osnove murav'inogo algoritma: Dis. ...kand. tekhn. nauk: 05.13.01 / V.N. Kubil. Novocherkassk. 2019. 184 p. (In Russian).
- [13] Karpuhin V.B. Matematicheskaya model' upravleniya procesom poiska optimal'nogo marshruta v transportnoj seti // Innovacionnye tekhnologii v nauke, transporte i obrazovanii: Cbornik statej mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoy internet-konferencii, Moskva, 19–20 iyunya 2018 goda. Moskva: Rossijskij universitet transporta (MIIT). 2018. Pp. 296–308 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 36962584](https://doi.org/10.26907/2542-0412.2018.296-308)
- [14] Chencov A.A., Chencov A.G. O realizacii metoda dinamicheskogo programmirovaniya v obobshchennoj zadache kur'era // Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN. 2007. T. 13, № 3. Pp. 136–160 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 12040792](https://doi.org/10.26907/2542-0412.2007.13.3.136-160)
- [15] Bellman R. Dinamicheskoe programmirovaniye. M.: IL. 1960 (In Russian).
- [16] Zajcev A.A., Kurejchik V.V., Polupanov A.A. Obzor evolyucionnyh metodov optimizacii na osnove roevogo intellekta // Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki. 2010. № 12(113). Pp. 7–12 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 15553703](https://doi.org/10.26907/2542-0412.2010.12.7-12)
- [17] Karpenko A.P., Sviaadze Z.O. Metod meta-optimizacii poiskovyh algoritmov optimizacii // Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Bauman. 2011. № 1. P. 3 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 15575356](https://doi.org/10.26907/2542-0412.2011.1.3)
- [18] Karpenko A.P. Metody povysheniya effektivnosti populacionnyh algoritmov global'noj optimizacii // Perspektivnye napravleniya razvitiya otechestvennyh informacionnyh tekhnologij. materialy V mezhhregional'noj nauchno-prakticheskoy konferencii. Sevastopol'skij gosudarstvennyj universitet; Sankt-Peterburgskij institut informatiki i avtomatizacii RAN. Sevastopol'. 2019. Pp. 87–88 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 42944531](https://doi.org/10.26907/2542-0412.2019.87-88)
- [19] Agasiev T.A., Karpenko A.P. Meta-optimizaciya algoritmov global'noj parametricheskoy optimizacii // Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya. 2019. № 20–1. Pp. 8–16 (In Russian).
[eLIBRARY ID: 39103145](https://doi.org/10.26907/2542-0412.2019.20-1.8-16)
- [20] Bremermann H.J. Optimization through evolution and recombination // Yovits M.C., Jacobi G.T. and Goldstein G.D. (Eds.), Self-Organizing Systems. 1962. Pp. 93–106.



Исследование спектральных характеристик течения термовязкой жидкости в кольцевом канале¹

Низамова А.Д.* , Киреев В.Н.** , Урманчиев С.Ф.*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Башкирский государственный университет, Уфа

В работе рассмотрено течение термовязкой модельной жидкости в кольцевом канале с заданным температурным полем. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе обобщенного уравнения спектральным методом разложения по полиномам Чебышева первого рода. Исследуется влияние учета экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от температуры и геометрии канала на спектральные характеристики уравнения гидродинамической устойчивости течения несжимаемой жидкости в плоском канале при различных значениях температуры стенок. Построены спектральные картины собственных значений обобщенного уравнения. Спектральные характеристики определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости, при этом собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени. Показано, что структура спектров в значительной степени зависит как от свойств жидкости, определяемых показателем функциональной зависимости вязкости, так и от геометрии канала. Установлено, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости в плоском канале, однако при его увеличении число собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет ненулевые амплитуды возмущений поперечной скорости. Устойчивость течения термовязкой жидкости зависит от наличия собственного значения с положительной мнимой частью среди всего множества найденных собственных значений при фиксированных параметрах числа Рейнольдса и волнового числа. Показано, что при фиксированных значениях числа Рейнольдса и волнового числа с ростом параметра термовязкости течение может стать неустойчивым.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, гидродинамическая устойчивость, спектр собственных значений, кольцевой канал

1. Введение

В настоящее время накоплен достаточный задел в исследовании устойчивости течений жидкости в плоских каналах, однако при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений [1–5]. Течения вязких жидкостей возникают в ряде отраслей промышленности при эксплуатации различ-

ных технических установок и устройств, а также при реализации ряда технологических процессов. В таких случаях существенной является проблема выявления особенностей такого течения при различных режимах. С точки зрения энергетической эффективности важен ламинарный режим, с другой стороны, при учете эффективности тепло-массообмена — турбулентный. Вязкость жидкости является важным параметром, который определяет закономерности течения.

В плоском канале теория гидродинамической устойчивости хорошо исследована, в том числе и для термовязких жидкостей [6–8]. Известно также, что в соответствии с линейной теорией в ци-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00915).

линдрическом канале течение всегда устойчиво, что противоречит экспериментальным наблюдениям. В технических устройствах используются и теплоизолированные поверхности, поэтому изменение коэффициента теплоотдачи является предметом исследования с точки зрения его влияния на устойчивость течения. В целом ряде теплообменных устройств используется схема, когда внутри трубы устанавливается трубка небольшого диаметра, содержащая нагревательный элемент. Исследование влияния геометрии канала на устойчивость течения жидкости является одной из задач в настоящей работе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в кольцевом канале с заданными внешним и внутренним радиусами и температурным полем под действием перепада давления.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [6–8].

Изменение продольной компоненты скорости по длине канала z рассчитывается следующим образом:

$$v_r = \varphi(r)e^{ik(z-ct)},$$

где $\varphi(r)$ — амплитуда возмущения поперечной скорости; i — мнимая единица; k — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число); $c = w/k$ — фазовая скорость волны вдоль оси канала (собственное значение), $c = c_r + ic_i$; w — частота; t — время.

Аналогичными к задаче о гидродинамической устойчивости термовязкой жидкости в плоском канале преобразованиями получим обобщенное уравнение об устойчивости течения жидкости в

кольцевом канале для радиальной координаты r :

$$\begin{aligned} & \frac{i\mu}{k\text{Re}} \left(\varphi^{IV} + \frac{2}{r}\varphi''' + \left(-\frac{3}{r^2} - 2s^2 \right) \varphi'' + \right. \\ & + \left. \left(\frac{3}{r^4} - 2s^2 \right) \varphi' + \left(-\frac{3}{r^4} + 2 \left(\frac{s}{r} \right)^2 + s^4 \right) \varphi \right) + \\ & + u_0 \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + s^2 \right) \varphi \right) - \\ & - \left(u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right) \varphi - \frac{i}{k\text{Re}} \times \\ & \times \left(\mu' \left(2\varphi''' + 3\frac{\varphi''}{r} - \varphi' \left(\frac{3}{r^2} + 2s^2 \right) + \left(\frac{3}{r^3} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left(\frac{s}{r} \right)^2 \right) \varphi + \mu'' \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \frac{\varphi}{r^2} - s^2\varphi \right) \right) \right) + \\ & + c \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \frac{\varphi}{r^2} - s^2\varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0, \quad \varphi'(r_1) = \varphi'(r_2) = 0,$$

где $s = \frac{r_2}{r_1}$ — отношение радиусов канала (внешнего r_2 к внутреннему r_1); $\mu = \mu(r) = \left(\frac{k-1}{2}r \right)^{-\beta}$ — вязкость; Re — число Рейнольдса;

$$u_0 = u_0(r) = \frac{\eta_M^2 \left((fr)^\beta - 1 \right) - \beta \left((fr)^{\beta+2} - 1 \right)}{\eta_M^2 \left(\eta_M^\beta - 1 \right) - \beta \left(\eta_M^{\beta+2} - 1 \right)}$$

— профиль скорости в невозмущенном состоянии; $\eta_M^2 = \frac{\beta}{(\beta+2)(k^{\beta+2}-1)(k^\beta-1)}$; $f = \frac{k-1}{2}$; $\beta = \frac{\alpha}{\ln s + \frac{1}{\text{Nu}}}$; Nu — число Нуссельта; α — ко-

эффициент термовязкости или коэффициент крутизны вискограммы — это множитель в показателе экспоненты, характеризующий степень зависимости вязкости от температуры. Величина $\ln s + \frac{1}{\text{Nu}}$ появляется в точном решении уравнения теплопроводности с учетом граничных условий теплообмена в безразмерном виде.

При решении задачи в уравнениях и формулах параметры представлены в безразмерном виде.

Следует отметить, что вывод представленного выше уравнения осуществлялся при задании возмущений только на давление и компоненты вектора скорости.

Для решения задачи об устойчивости течения жидкости необходимо найти все собственные значения c , которым соответствуют нетривиальные собственные функции $\varphi(y)$. Тогда критерием неустойчивости, очевидно, будет условие $c_i > 0$:

если существует хотя бы одно собственное значение с положительной мнимой частью, то течение является неустойчивым при заданных числе Рейнольдса и волновом числе. Если же все собственные значения имеют неположительную мнимую часть, то течение устойчиво при заданных параметрах.

Условие $c_i = 0$ дает нейтральную кривую, на которой возмущения не растут и не затухают. Минимальное значение числа Рейнольдса на нейтральной кривой называется критическим числом Рейнольдса Re_{cr} .

Согласно теории [5] рассматривается устойчивость течений жидкостей относительно возмущений поперечной скорости, так как они являются самыми «опасными» для турбулизации течения.

3. Результаты численного исследования

Численное исследование выполнялось с использованием спектрального метода разложения по полиномам Чебышева первого рода [6].

Спектральные картины собственных значений течения жидкостей с температурной зависимостью вязкости при фиксированных параметрах числа Рейнольдса $Re = 10^4$ и волновом числе $k = 1$ и параметром термовязкости равным 0,001 представлены на рис. 1. Такие картины принято называть «спектральным галстуком». Анализ полученных результатов показывает, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости. Однако при его увеличении количество собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет нетривиальное решение. Также стоит отметить, что при заданных числах Re и k для малого соотношения радиусов каналов течение является неустойчивым (рис. 1(а)), однако с увеличением соотношения s течение приобретает устойчивость (рис. 1(б),(в)).

Спектры собственных значений течения жидкости с параметром термовязкости равным 1 для нескольких значений s представлены на рис. 2. По полученным результатам можно сделать вывод о том, что при выполненных предположениях спектр собственных значений для малых параметров s (рис. 2(а)) качественно соответствует спектру собственных значений изотермического течения жидкости. Собственные значения стремятся к оси вещественных частей, группируясь в вертикальную ветвь, а при приближении к нулевым мнимым частям — делятся на отдельные ветви. С увеличением значений параметра s спектр претерпевает значительные изменения: вертикаль-

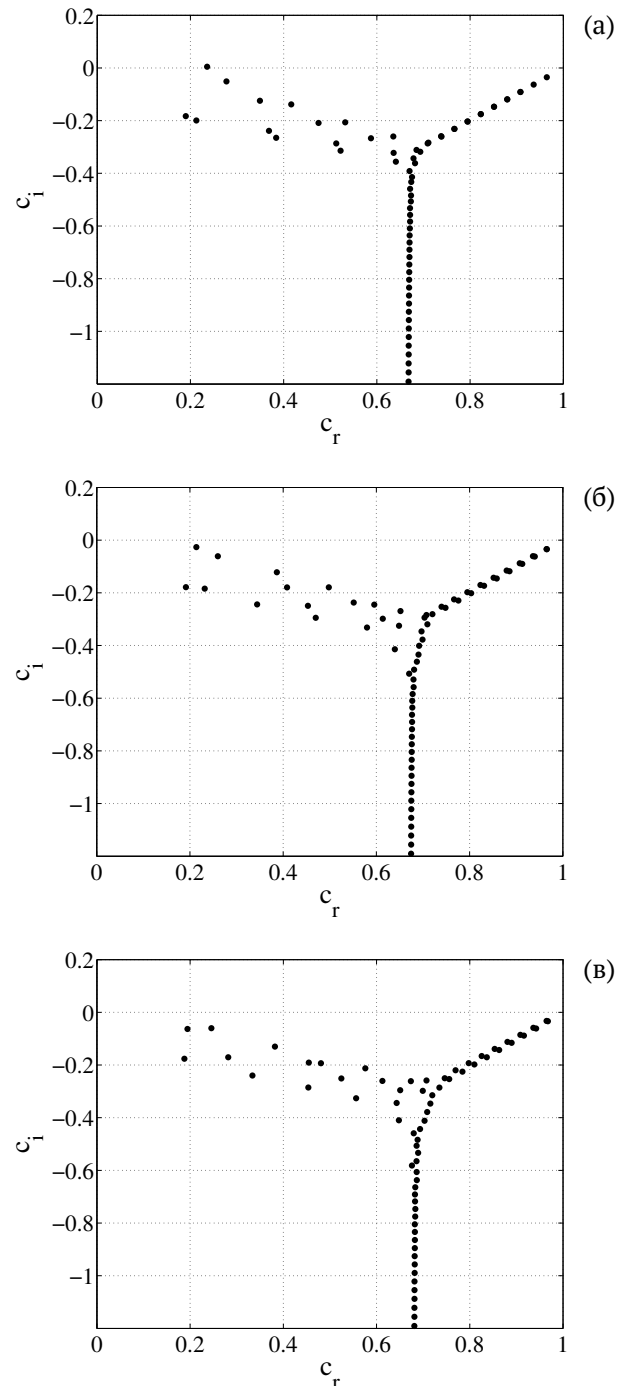


Рис. 1. Спектры собственных значений $Re = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 0.001$: а) $s = 1.001$; б) $s = 2$; в) $s = 8$

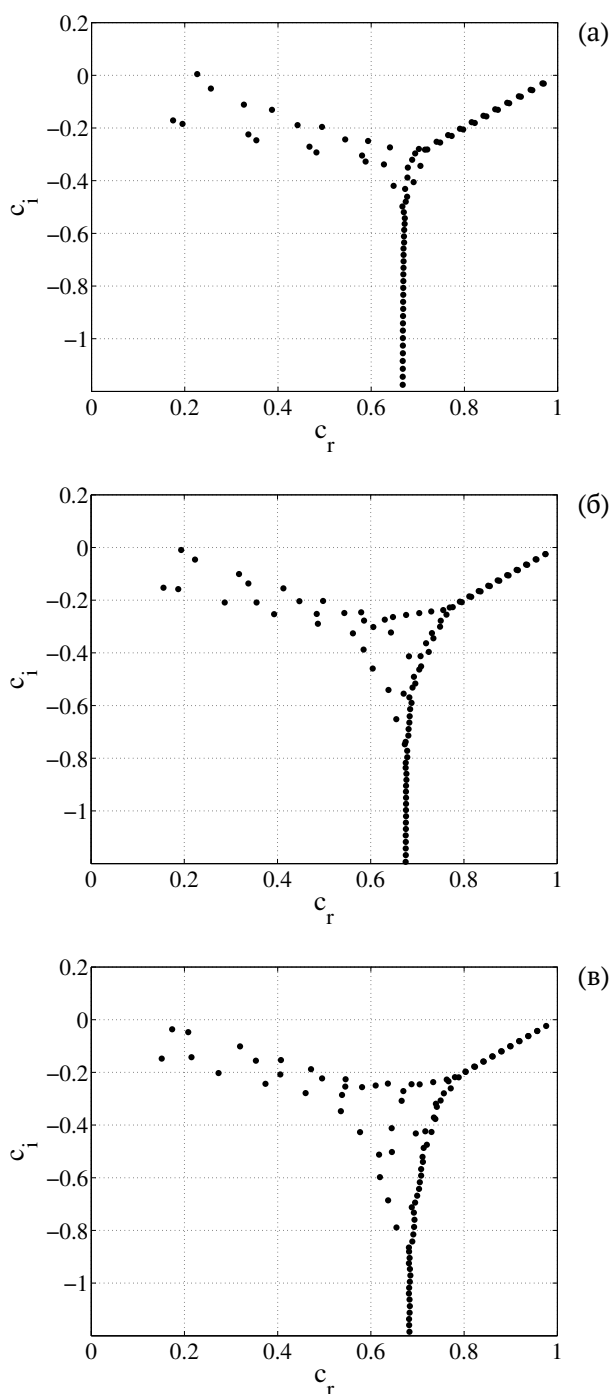


Рис. 2. Спектры собственных значений $Re = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 1$: а) $s = 1.001$; б) $s = 2$; в) $s = 8$

ная ветвь начинает делиться на несколько отдельных ветвей (рис. 2(б),(в)). Стоит отметить, что существует собственное значение с мнимой частью большей нуля (рис. 2(а)), а это соответству-

ет неустойчивости течения при фиксированных параметрах волнового числа и числа Рейнольдса. Аналогично результату выше стоит отметить, что с увеличением параметра s течение приобретает устойчивость (рис. 2(б),(в)).

4. Заключение

Установлено, что учет зависимости вязкости от температуры значительно влияет на выводы относительно гидродинамической устойчивости, что, безусловно, важно при анализе режимов течения в каналах теплообменников. При одних и тех же значениях числа Рейнольдса и волнового числа, описывающих устойчивые режимы течения, увеличение параметра термовязкости может привести к возникновению неустойчивых режимов. Следует отметить, что при этом происходит и качественное изменение структуры спектров собственных значений. Спектральные характеристики течения являются важной частью при анализе режимов течения жидкостей.

Список литературы

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564. DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703. DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Шкаликов А.А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям – сателлита Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа 2002). Часть 3. СМФН. 2003. Т. 3. С. 89–112. MathNet: [cmf17](https://mathnet.ru/cmf17)
- [4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691. MathNet: [zvmmf229](https://mathnet.ru/zvmmf229)
- [5] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [6] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58. DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [7] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459. DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [8] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215. DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)



Investigation of the spectral characteristics of a thermoviscous fluid flow in an annular channel

Nizamova A.D.*, Kireev V.N.**, Urmancheev S.F.*

*Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

**Bashkir State University, Ufa, Russia

The flow of a thermoviscous model fluid in an annular channel with a given temperature field is considered. The problem of the stability of the flow of a thermoviscous fluid is solved on the basis of the generalized equation by the spectral method of expansion in Chebyshev polynomials of the first kind. The effect of taking into account the exponential dependence of the fluid viscosity on temperature and channel geometry on the spectral characteristics of the equation of hydrodynamic stability of an incompressible fluid flow in a flat channel for various wall temperatures is studied. Spectral patterns of eigenvalues of the generalized equation are constructed. The spectral characteristics determine the structure of the eigenfunctions and the critical parameters of the flow of a thermoviscous fluid. In this case, the eigenfunctions demonstrate the behavior of transverse velocity perturbations, their possible growth or decay with time. It is shown that the structure of the spectra largely depends both on the properties of the liquid, determined by the index of the functional dependence of viscosity, and on the geometry of the channel. It has been established that for small values of the thermoviscosity parameter, the spectrum is comparable to the spectrum for an isothermal fluid flow in a flat channel, however, as it increases, the number of eigenvalues and their density increase, that is, there are more points at which the problem has nonzero amplitudes of transverse velocity perturbations. The stability of a thermoviscous fluid flow depends on the presence of an eigenvalue with a positive imaginary part among the entire set of found eigenvalues for fixed parameters of the Reynolds number and wave number. It is shown that, at fixed values of the Reynolds number and wave number, the flow can become unstable with an increase in the thermoviscosity parameter.

Keywords: thermoviscous liquid, hydrodynamics instability, spectra of eigenvalues, annular channel

References

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Shkalikov A.A. Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 124(6). Pp. 5417–5441.
DOI: [10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7)
- [4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // *Computational mathematics and mathematical physics*. 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.
DOI: [10.1134/S096554250710003X](https://doi.org/10.1134/S096554250710003X)
- [5] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian)
- [6] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation // *Multiphase systems*. 2019. Vol. 14, No. 1. Pp. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [7] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] *Prikladnaya mexanika i matematika*. 2019. Vol. 83, No. 3. Pp. 454–459 (in Russian).
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [8] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)



К юбилею Салавата Валеевича Хабирова



24 февраля 2022 года главному научному сотруднику Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Республики Башкортостан, нашему коллеге Салавату Валеевичу Хабирову исполнилось 75 лет.

Салават Валеевич Хабиров родился 24 февраля 1947 года в селе Пировское Пировского района Красноярского края. С 1965 по 1973 год учился в Новосибирском государственном университете. Тру-

довую деятельность в качестве ассистента начал в 1973 году в Уфимском авиационном институте, где проработал до 1983 г. За эти годы вырос до должности доцента. С 1983 по 1992 год работал старшим научным сотрудником в Отделе физики и математики Башкирского филиала Академии наук СССР. С 1992 года по настоящее время работает в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН.

Хабиров Салават Валеевич на сегодняшний день трудится в должности главного научного сотрудника и по совместительству является заведующим лабораторией «Дифференциальные уравнения механики» Института механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленного структурного подразделения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (дано современное название организации).

Профессор Салават Валеевич Хабиров известен как специалист в области группового анализа дифференциальных уравнений механики сплошных сред. Он является учеником основоположников группового анализа академика Л.В. Овсянникова и профессора Н.Х. Ибрагимова и основным участником Российской программы «ПОДМОДЕЛИ» (с 1989 г.) для моделей газовой динамики и гидродинамики.

Основные научные достижения С.В. Хабирова:

- классификация бесконечных непрерывных групп преобразований трехмерного пространства, задаваемых системами дифференциальных уравнений (1972 г.);
- экстремальные квазиконформные отображения осесимметричных областей (1973 г.);
- структура псевдогруппы, допускаемой уравнениями несжимаемой жидкости (1976 г.);
- классификация инвариантных движений несжимаемой жидкости со свободной границей (1981 г.);



- классификация преобразований Беклунда для эволюционных уравнений второго и третьего порядков (1984 г.);
- методы интегрирования краевых задач для уравнений, допускающих преобразования Беклунда (1987 г.);
- обоснование теста Пенлеве как продолжения дифференциальных подстановок (1994 г.);
- канонический вид инвариантных подмоделей газовой динамики (1995–1999 гг.);
- анализ инвариантных подмоделей уравнений газовой динамики (1995–2009 гг.);
- построение оптимальных систем основных моделей газовой динамики (1998 г.);
- подмодели изотропной турбулентности (1998–2002 гг.);
- классификация нерегулярных частично инвариантных решений ранга 2 дефекта 1 уравнений газовой динамики (2002 г.);
- классификация дифференциально-инвариантных подмоделей (2004–2009 гг.);
- симметричный анализ модели термовязкой жидкости (2004 г.);
- сходжение сферической ударной волны по теплопроводному газу (2009 г.);
- разработка газогидратов современными технологиями (2010 г.);

- иерархия подмоделей дифференциальных уравнений (2013 г.);
- плоские изотермические движения идеального газа без расширений (2014 г.);
- групповой анализ одномерной модели фильтрации газа (2017 г.);
- граф вложенных подалгебр алгебры симметрий сплошной среды (2019 г.);
- групповой анализ плоских стационарных вихревых движений идеального газа (2017–2021 гг.);
- модели раскрытия трещин на основе точных решений уравнений движения вязкой жидкости (2019 г.).

Профессор С.В. Хабилов входил в оргкомитеты Российских конференций «Семинар по аналитическим методам в газовой динамике» (для газодинамиков) и «Проблемы теоретической и прикладной математики» (для молодых ученых). Неоднократно приглашался для чтения лекций по групповому анализу в университеты России и зарубежных стран (Турция, Швеция, ЮАР, Тайланд). Ежегодно участвует в Международных и Всероссийских научных конференциях с докладами в городах России и зарубежом.

Научные исследования С.В. Хабилова поддерживались грантами Российского фонда фундаментальных исследований и Акаде-

мии наук Республики Башкортостан, входят в план формирования государственных заданий Российской академии наук.

С.В. Хабиров опубликовал 225 научных и учебно-методических работ. Он является автором 10 учебных и учебно-методических пособий, 4 монографий. С.В. Хабиров был членом диссертационных советов в Институте математики с ВЦ УФИЦ РАН и Стерлитамакском государственном педагогическом институте. В настоящее время является членом диссертационного совета Башкирского государственного университета. С.В. Хабировым подготовлено 8 кандидатов наук.

За многолетнюю плодотворную работу в Российской академии наук и в связи с 275-летием Академии С.В. Хабиров награжден Почетной грамотой. Награжден премией правительства Республики Башкортостан им. А. Ф. Леонтьева (2008 год), Почетной грамотой Академии наук Республики Башкортостан и Почетной грамотой Главы городского округа город Уфа (2017 г.), Юбилейной медалью Х.А. Рахматулина Национальным комитетом по теоретической и прикладной механике. В 2017 году Хабирову Салавату Валеевичу присвоено звание «Почетный деятель науки Республики Башкортостан».

За годы своей научно-педагогической деятельности С.В. Хабиров внес большой вклад в подготовку специалистов высшей квалификации, в развитие теории групповых свойств дифференциальных уравнений механики, направленных на изучение гидродинамических процессов в природе и технических аппаратах.

Коллектив журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляет своего коллегу, члена редколлегии журнала Салавата Валеевича Хабирова с юбилеем и желает ему прекрасного самочувствия, творческого вдохновения и активности, новых замечательных успехов на благо нашего Отечества!

Основные публикации

- [1] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ. 2012. 659 с.
- [2] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем. 2003. 192 с.
- [3] Хабиров С.В. Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 6(322). С. 1396–1406.
DOI: [10.1134/S0037446613060189](https://doi.org/10.1134/S0037446613060189)
- [4] Ibragimov N.H., Khabirov S.V. Contact transformation group classification of nonlinear wave equations // Nonlinear dynamics. 2000. Vol. 22, No. 1. Pp. 61–71.
DOI: [10.1023/A:1008309626744](https://doi.org/10.1023/A:1008309626744)
- [5] Хабиров С.В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
DOI: [10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf](https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf)
- [6] Хабиров С.В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 439–444.
DOI: [10.4213/mzm1185](https://doi.org/10.4213/mzm1185)
- [7] Khabirov S.V., Ünal G. Group analysis of the von Kármán–Howarth equation. Part I. Submodels // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2002. Vol. 7. No. 1–2. Pp. 3–18.
DOI: [10.1016/S1007-5704\(02\)00003-5](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(02)00003-5)
- [8] Хабиров С.С., Хабиров С.В. Разработка гидратов современными технологиями // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2010. Т. 7. С. 202–210.
DOI: [10.21662/uim2010.1.018](https://doi.org/10.21662/uim2010.1.018)
- [9] Хабиров С.В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа–Ампера // Математический сборник. 1990. Т. 181, № 12. С. 1607–1622.
DOI: [10.1070/SM1992v071n02ABEH001405](https://doi.org/10.1070/SM1992v071n02ABEH001405)
- [10] Хабиров С.В. Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, № 2. С. 87–90.
DOI: [10.1070/SM1992v071n02ABEH001405](https://doi.org/10.1070/SM1992v071n02ABEH001405)



Доклады молодых ученых и аспирантов Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН за 2022 год (аннотации докладов)

Сираева Д.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

1. Конкурс научных докладов молодых ученых ИМех УФИЦ РАН

Динамика давления в трещине гидро- разрыва при переходных режимах ра- боты скважины

Фокеева Нина Олеговна, аспирант ИМех УФИЦ
РАН

Руководитель — г.н.с., д.ф.-м.н. В.Ш. Шагапов
1 место

В работе получены точные аналитические решения задачи о распределении давления в вертикальной трещине ГРП при переходных режимах работы скважины. Показано, как по известному графику изменения давления на скважине с вертикальной трещиной ГРП можно определить изменения дебита жидкости и, наоборот, как по известному изменению дебита скважины определить изменение давления. При этом дается описание изменения давления в трещине ГРП.

Многомодульный мобильный робот

Копьев Алексей Сергеевич, инженер-
исследователь

Руководитель — г.н.с., д.ф.-м.н. О.В. Даринцев
2 место

В докладе представлена разработка адекватных математических моделей новых конструкций

мобильных роботов, предназначенных для перемещения в ограниченном пространстве; синтез 3D моделей конструкции; анализ функциональных и технических характеристик масштабируемого мобильного робота по результатам компьютерных и полунатурных экспериментов. Разработано новое конструктивное решение на базе результатов анализа существующих мобильных роботов и выявленных недостатков.

Динамика собственных колебаний жидкости в скважине, сообщающейся с пластом при наличии трещины ГРП

Мамаева Зилия Заитовна, аспирант ИМех УФИЦ
РАН

Руководитель — г.н.с., д.ф.-м.н. В.Ш. Шагапов
3 место

Рассмотрена задача о собственных колебаниях столба жидкости в насосно-компрессорной трубе, возникающих после внезапного открытия или закрытия вертикальной скважины. Построена теоретическая модель, описывающая динамику столба жидкости в скважине, сообщающейся с пластом через проницаемые стенки открытого участка, а также ГРП трещину. На основе этой модели получены аналитические решения, описывающие собственные затухающие колебания давления и скорости в скважине под влиянием проявления вязкости вблизи стенки скважины, а также фильтрационных процессов в призабойной зоне, подверженной

ГРП. Сравнительный анализ результатов расчета с имеющимися промышленными данными показывает, что частотные характеристики, а также интенсивность затухания собственных колебаний дают достаточно содержательную информацию о коллекторских параметрах призабойной зоны и о качестве ГРП трещин.

2. Семинар Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

Исследование взаимодействия трубопровода с транспортируемой и окружающей его сплошными средами

Юлмухаметов Артур Ахмарович, инженер-исследователь

Научный руководитель: д.ф.-м.н., проф. Султанов Я.Т.

Научный консультант: с.н.с., к.ф.-м.н. Шакирьянов М.М.

В настоящей работе предложены модели статического изгиба и нелинейных изгибных колебаний трубопровода, учитывающие взаимодействия изменений кривизны его осевой линии и внутреннего давления. Также построена модель, описывающая движение двухфазной жидкости с кольцевой структурной формой течения в поперечных сечениях трубопровода. На основе этих моделей и разработанных программ для ЭВМ решены задачи взаимодействия трубопровода с транспортируемой и окружающей его сплошными средами.

Получены следующие выводы:

1. Построена математическая модель, учитывающая сопротивление транспортируемой газожидкостной среды с кольцевой структурной формой течения и окружающей сплошной среды при ускоренном движении трубопровода перпендикулярно его оси вращения. Получены аналитические выражения для определения внешней и внутренней присоединенных масс трубопровода, транспортирующего двухфазную среду с кольцевой структурной формой течения. Установлено, что отношение присоединенных масс с учетом и без учета перетекания частиц газожидкостной среды в поперечных сечениях является функцией плотностей сред и геометрических размеров трубы. Показано, что отношение частот собственных колебаний трубопровода с учетом и без учета эффективной присоединенной массы увеличивается с увеличением плотности жидкой фазы. Определено, что увеличение амплитуды и частоты переменного давления в трубе приводят к увеличению амплитуд динамической части прогиба. Показано, что результаты

численного и приближенного аналитического моделирования находятся в качественном согласии.

2. Разработаны математические модели статического изгиба и изгибных колебаний трубопровода с учетом взаимодействия изменений кривизны его осевой линии и внутреннего давления, упругости и присоединенной массы грунта. Показано, что с увеличением жесткости грунта происходит уменьшение прогиба. С ростом внутреннего давления статический прогиб трубопровода увеличивается. Определены критическое значение жесткости грунта, ниже которого в линейной задаче происходит неограниченное возрастание прогиба, а также значение внутреннего перепада давления, выше которого происходит такое возрастание. Получено аналитическое выражение для определения параметра жесткости грунта по экспериментально определенным значениям прогиба.

3. Установлено, что частоты изгибных колебаний трубопровода падают с увеличением внутреннего давления в трубопроводе. Показано, что с увеличением жесткости грунта растет и частота изгибных колебаний трубы. Определено, что рост присоединенной массы грунта приводит к уменьшению частоты изгибных колебаний трубопровода. Получены аналитические выражения для определения параметра жесткости грунта, присоединенной массы грунта, давления транспортируемой жидкости по собственным частотам изгибных колебаний трубопровода.

4. Реализована методика решения задач взаимодействия трубопровода с внешней и внутренней средами, которая заключается в последовательном применении методов Бубнова-Галеркина, Рунге-Кутты и в анализе результатов решения с помощью дискретного преобразования Фурье и отображения Пуанкаре.

3. Конкурс научных работ молодых ученых УФИЦ РАН

Диагностика определения существования газогидратных залежей в придонных отложениях водоёмов с применением волны Стоунли

Каримова Гульназ Римовна, аспирант ИМех УФИЦ РАН

Руководитель — г.н.с., д.ф.-м.н. В.Ш. Шагапов

Развитие теории исследования волновых процессов в гидратонасыщенных породах является важным вопросом, который позволит более детально развить методы обнаружения и освоения подобных залежей. Исследование волны Стоунли в

придонных участках водоемов позволит определить плотность содержания газогидратов в пластах и масштабы таких пластов по акустическим свойствам. Предложена теоретическая модель, основанная на особенностях распространения волн Стоунли на границе раздела воды и пород в придонном слое (песок, насыщенный водой или газогидратом). Найдены аналитические решения в виде гармонической бегущей волны для давления, смещений, потенциалов для векторов продольной и поперечной волны, получено дисперсионное уравнение для определения скорости волны Стоунли. Изучено влияние основных параметров (насыщенности, пористости, частот) на характер поведения волны. Показаны скорости волны Стоунли для различной насыщенности песка водой, газогидратом. Представлены зависимости глубины проникновения звуковой волны, продольных и поперечных волн в жидкость и в твердую среду от частоты и насыщенности.

Новые точные решения уравнений газовой динамики с уравнением состояния специального вида

Сираева Дилара Тахировна, к.ф.-м.н., научный сотрудник

Нахождение новых точных решений нелинейных дифференциальных уравнений является нетривиальной задачей. Применение методов группового анализа позволяет находить точные решения рассматриваемых уравнений, что обуславливает актуальность заявленной темы исследования. Рассматриваются уравнения газовой динамики – система из уравнений Эйлера, неразрывности и энергии в обезразмеренном виде. Система замыкается уравнением состояния. Уравнение состояния имеет специальный вид: давление, равное сумме функций плотности и энтропии. К данной системе уравнений впервые применяются методы группового анализа, позволяющие найти новые точные решения и описать движение частиц в целом.



Семинары Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН за 2022 год (аннотации докладов)

Моисеев К.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование термогидродинамических процессов в прискважинной зоне неоднородных пластов

Исламов Д.Ф.

Башкирский государственный университет, Уфа
(23.03.2022 г.)

Работа посвящена повышению эффективности термогидродинамических исследований пласта на основе использования математических моделей нестационарной неизотермической фильтрации жидкости в неоднородных пластах. Проведен анализ современных публикаций по теоретическим и экспериментальным исследованиям термогидродинамических процессов в неоднородных пластах. Развита аналитическая и численная модели неизотермического движения жидкости в неоднородном по проницаемости пласте, учитывающие термодинамические эффекты для переходных режимов после пуска скважины, смены дебита и прекращения отбора. Исследованы нестационарные температурные поля слоисто-неоднородного пласта при отборе и после кратковременной закачки жидкости с учетом баротермического эффекта, перетоков между слоями и теплопроводности. Созданы симуляторы для расчета нестационарных полей давления и температуры в неоднородных пластах и изучения путей их практического использования при планировании и интерпретации термогидродинамических исследований

пластов с целью определения параметров неоднородности в прискважинной зоне. Разработаны рекомендации для исследования скважины и обработки данных с целью определения параметров неоднородности пласта.

Исследование взаимодействия трубопровода с транспортируемой и окружающей его сплошными средами

Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа (30.06.2022 г.)

В работе предложены модели статического изгиба и нелинейных изгибных колебаний трубопровода, учитывающие взаимодействия изменений кривизны его осевой линии и внутреннего давления. Также построена модель, описывающая движение двухфазной жидкости с кольцевой структурной формой течения в поперечных сечениях трубопровода. На основе этих моделей и разработанных программ для ЭВМ решены задачи взаимодействия трубопровода с транспортируемой и окружающей его сплошными средами. Построена математическая модель, учитывающая сопротивления транспортируемой газожидкостной среды с кольцевой структурной формой течения и окружающей сплошной среды при ускоренном движении трубопровода перпендикулярно оси его вращения. Получены аналитические выражения для определения внешней и внутренней присоединенных масс трубопровода, транспортирующей двухфазную среду

с кольцевой структурной формой течения. Установлено, что отношение присоединенных масс с учетом и без учета перетекания частиц газожидкостной среды в поперечных сечениях является функцией плотностей сред и геометрических размеров трубы. Показано, что отношение частот собственных колебаний трубопровода с учетом и без учета эффективной присоединенной массы увеличивается с ростом плотности жидкой фазы. Определено, что увеличение амплитуды и частоты переменного давления в трубе приводит к увеличению амплитуд динамической части прогиба. Показано, что результаты численного и приближенного аналитического моделирования находятся в качественном согласии. Разработаны математические модели статического изгиба и изгибных колебаний трубопровода с учетом взаимодействия измененной кривизны его осевой линии и внутреннего давления, упругости и присоединенной массы грунта. Показано, что с увеличением жесткости грунта происходит уменьшение прогиба. С ростом внутреннего давления статический прогиб трубопровода увеличивается. Определены критическое значение жесткости грунта, ниже которого в линейной задаче происходит неограниченное возрастание прогиба, а также значение внутреннего перепада давления, выше которого происходит такое возрастание. Получено аналитическое выражение для определения параметра жесткости грунта по экспериментально определенным значениям прогиба. Установлено, что частоты изгибных колебаний трубопровода падают с увеличением внутреннего давления в трубопроводе. Показано, что с увеличением жесткости грунта растет и частота изгибных колебаний трубы. Определено, что рост присоединенной массы грунта приводит к уменьшению частоты изгибных колебаний трубопровода. Получены аналитические выражения для определения параметра жесткости грунта, присоединенной массы грунта, давления транспортируемой жидкости по собственным частотам изгибных колебаний трубопровода. Реализована методика решения задач взаимодействия трубопровода с внешней и внутренней средами, которая заключается в последовательном применении методов Бубнова–Галеркина, Рунге–Кутта и в анализе результатов решения с помощью дискретного преобразования Фурье и отображения Пуанкаре.

Свободные колебания с изменяемой частотой. Динамический гаситель с изменяемой жесткостью. Полностью уравновешенный одноцилиндровый двухтактный двигатель с постоянной угловой скоростью вращения

Зотов А.Н.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа (20.10.2022 г.)

Первая часть доклада посвящена проблеме увеличения амплитуды свободных колебаний при одновременном уменьшении их частоты. Получены свободные колебания с увеличивающейся со временем амплитудой, частота колебаний при этом уменьшается. На данный момент объяснение такое: колебания можно разложить в ряд Фурье. А для гармонических колебаний энергия пропорциональна произведению квадрата частоты на квадрат амплитуды. Увеличение амплитуды в данном случае можно объяснить уменьшением частоты. Показаны трудности экспериментальной проверки данного факта.

Вторая часть доклада посвящена проблеме изменения жесткости дополнительной пружины при изменении частоты возмущающей силы при динамическом гашении колебаний. Это достигнуто при помощи системы, в которой пневмопружина перемещается между направляющими расчетной формы. Изменяя соответствующим образом давление в пневмопружине при одних и тех же направляющих, можно изменять должным образом жесткость дополнительной пружины.

Третья часть доклада посвящена двухтактному одноцилиндровому двигателю. В рассматриваемом двигателе стойку и кривошип, кривошип и шатун соединяют упругие шарниры с заданной характеристикой. Параметры упругих шарниров подобраны так, что боковая сила, действующая на поршень, равна нулю при любом угле поворота кривошипа. Угловая скорость кривошипа при этом постоянна. Кроме того, за счет противовесов на кривошипе и шатуне получено полное уравновешивание двухтактного одноцилиндрового двигателя.

Семинар по материалам отчета по государственному заданию № 0246-2019-0052 за 2022 год (15.12.2022 г.)

к.ф.-м.н. Ахметов А.Т.

Лаборатория «Экспериментальная гидродинамика» ИМех УФИЦ РАН, Уфа

д.ф.-м.н., проф. Урманчиев С.Ф.

Лаборатория «Механика многофазных систем» ИМех УФИЦ РАН, Уфа

д.т.н. Даринцев О.В.

Лаборатория «Робототехника и управление в технических системах» ИМех УФИЦ РАН, Уфа

к.ф.-м.н. Шакирьянов М.М.

Лаборатория «Механика твердого тела» ИМех УФИЦ РАН, Уфа

д.ф.-м.н. Хабиров С.В.

Лаборатория «Дифференциальные уравнения» ИМех УФИЦ РАН, Уфа

В качестве объектов исследования были рассмотрены: подмодели цепочки вложенных подалгебр размерностей от 1 до 4, описывающие конические движения газа; термовязкие жидкости с различными зависимостями вязкости от температуры; дисперсные системы при акустических воздействиях; закрученные потоки газовых смесей в вихревых трубах; магматические расплавы при интенсивном теплообмене с вмещающими горными породами; вскипающие флюиды в процессе истечения и слабые ударные волны в слое водной пены; волны давления в цилиндрическом канале, заполненном жидкостью, содержащий пузырьковый кластер; тепловые поля гидратонасыщенного пласта, взаимодействующего с теплоносителем и граница фронта разложения газового гидрата; акустические волны в слое пузырьковой жидкости; дисперсные и микродисперсные системы; насыпные среды, состоящие из песка, насыщенного нефтью; изменение структуры насыпных сред под воздействием ударных волн; вязкоупругие среды с различными реологическими свойствами в ячейке Хеле–Шоу.

Цели исследований: построение инвариантных и частично инвариантных подмоделей цепочки вложенных подалгебр, описывающих конические движения газа; исследование инвариантных решений с линейным полем скоростей уравнений газовой динамики для двух уравнений состояния и их обобщение; установление влияния интенсивности теплообмена на распределение гидродинамических параметров потока в кольцевом кана-

ле, связанных с образованием и эволюцией вязкого барьера; изучение воздействия температурных полей на устойчивость установившихся течений термовязких жидкостей в кольцевом канале при различных значениях параметра термовязкости; анализ влияния характера распределения и звукопроницаемости частиц дисперсной фазы на дифракцию и затухание акустических волн; изучение параметров выходящего газа и распределения дисперсной фазы в потоке в зависимости от геометрических характеристик вихревой трубы; построение математической модели дифференциации магматического расплава, исследование влияния интенсивности теплообмена на особенности осаждения частиц более плотной фазы при течении базальтовой магмы в системе трещин земной коры; изучение особенностей процесса истечения из тонкого сопла водного флюида со сверхкритическими параметрами с учетом пространственной динамики эволюции формирующейся парожидкостной струи; исследование динамики слабой волны сжатия в слое пены с учетом ее упруго-вязко-пластических свойств; определение критериев усиления и ослабления импульсных сигналов при прохождении через пузырьковые завесы конечных размеров; построение математической модели разложения гидратного пласта при тепловом воздействии для анализа энергоэффективности добычи метана; исследование влияния пузырьковой «завесы» в жидкости на интенсивность волн давления; выявление закономерностей неустойчивого вытеснения нефти водой в ячейке Хеле–Шоу, использование зондирующих импульсов для анализа изменений свойств насыпной среды под воздействием ударного импульса, «паспортизация» реологических характеристик вязкоупругих сред.

При решении поставленных задач применялись методы группового анализа дифференциальных уравнений; алгоритм расчёта рассеяния звука на системе сфер с использованием уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала; спектральные методы с использованием полиномов Чебышева; численные алгоритмы термогидродинамики, основанные на методе контрольного объёма; методы быстрого преобразования Фурье. Численная реализация алгоритмов проведена с помощью компьютерных программ.

Экспериментальные исследования распространения волн в насыщенных пористых средах проводились на установке «Ударная труба ИМех», а микрореологические эксперименты — в ячейках Хеле–Шоу.

Место и время проведения заседаний:

по четвергам, в 16:00, дистанционно или в аудитории 416 Института механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМех УФИЦ РАН)

Адрес: Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, 71

Секретарь семинаров: канд. физ.-мат. наук, доцент
Константин Валерьевич Моисеев

e-mail: constgo@mail.ru

Содержание

Механика жидкости и газа

Делев В.А.

Распад топологического солитона в линейном дефекте
доменной структуры закрученного нематика 135–144

Моисеев К.В., Ямлихина И.Н.

Моделирование сопряженного теплообмена термовязкой жидкости
в цилиндрическом канале 145–152

Насибуллаев И.Ш.

Двумерное численное параметрическое моделирование системы охлаждения
капиллярного микрозахвата при нестационарном течении жидкости 153–166

Насибуллаева Э.Ш.

Численный анализ акустического рассеяния от слоя капель при внешнем воздействии 167–176

Робототехника и теория управления

Даринцев О.В., Мигранов А.Б.

Использование муравьиного алгоритма для поиска стратегии поведения
группы мобильных роботов на рабочем поле с препятствиями 177–186

Краткие сообщения

Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф.

Исследование спектральных характеристик течения
термовязкой жидкости в кольцевом канале 187–191

Портрет ученого

К юбилею Салавата Валеевича Хабирова 192–194

Заметки ИМех

Сираева Д.Т.

Доклады молодых ученых и аспирантов Института механики им. Р.Р. Мавлютова
УФИЦ РАН за 2022 год (аннотации докладов) 195–197

Моисеев К.В.

Семинары Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
за 2022 год (аннотации докладов) 199–201

Contents

Liquid & Gas Mechanics

Delev V.A.

The topological soliton decay in a linear defect of the domain structure of twisted nematic (in Russian) 135–144

Moiseev K.V., Iamlikhina I.N.

Thermoviscous liquid conjugate heat exchange simulation in cylindrical channel (in Russian) 145–152

Nasibullaev I.Sh.

Two-Dimensional numerical parametric modeling of the capillary microgripper cooling system with unsteady fluid flow 153–166

Nasibullaeva E.Sh.

Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of droplets under external action (in Russian) 167–176

Robotics & Control Theory

Darintsev O.V., Migranov A.B.

Using an ant algorithm to find a strategy for the behavior of a group of mobile robots on a work field with obstacles 177–186

Brief Communications

Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F.

Investigation of the spectral characteristics of a thermoviscous fluid flow in an annular channel (in Russian) 187–191

Profiles

Anniversary of Salavat Valeevich Khabirov (in Russian) 192–194