ISSN: 2658-5782



Номер 1-2

2022

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org



ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 1-4



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.001

УДК 534.1; 539.3

bl

Получена: 11.05.2022 Принята: 25.05.2022

Электронный журнал «Многофазные системы» Института механики им. Р.Р. Мавлютова

Михайленко К.И.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Изложена краткая история появления и развития журнала «Многофазные системы», тесно связанная с научной и публикационной деятельностью Института механики им. Р.Р. Мавлютова. Описан путь развития от нерегулярного сборника Трудов, к ежегодному изданию, а затем и электронному научному журналу.

Ключевые слова: Труды Института механики, многофазные системы, научный журнал

Этот год юбилейный для Института механики им Р.Р. Мавлютова, ему исполняется тридцать лет. Дата не самая значительная для научной организации, однако сам факт, что Институт образован был в 1992 году, не самое благоприятное для науки в нашей стране время, стоит упоминания.

Больше половины времени существования, результаты исследований, проводимых в Институте механики, печатаются, в том числе и в собственных изданиях Института. С небольшими перерывами публикации сотрудников Института и коллег из других институтов и университетов выходили сначала в нерегулярных сборниках трудов, затем в ежегодном сборнике, который и был преобразован в журнал.

Таким образом, в течение тридцати лет существования Института механики было издано шестнадцать томов сборников трудов и Журнала, включающих в себя двадцать шесть отдельных выпусков. Представленная Вашему вниманию заметка открывает двадцать седьмой выпуск, объединённый номер 1–2 семнадцатого тома.

Первые два тома сборника трудов носили название «Проблемы механики и управления» (Рис. 1) и увидели свет в 1994 и 1996 годах [1, 2]. Издания имеют вид, характерный для того времени: страницы напечатаны на пишущей машинке, формулы аккуратно вписаны от руки, а графики нарисованы отдельно и вклеены в текст. Самые продвинутые статьи набраны в популярном редакторе ChiWriter [3] и даже имеют выравнивание по правому краю.

Всего первые выпуски Трудов включали 22 и 33 статьи соответственно.

Следующий выпуск увидел свет лишь в 2003 году [4]. Этот том получил название «Труды Института механики Уфимского научного центра РАН» (Рис. 2) и его следует считать первым шагом к регулярному изданию. Выпуск включает в себя 25 статей, которые разделены по тематикам: Механика деформируемых твердых тел, Механика жидкостей и газов, Теория автоматического управления. Указанные тематики становятся основными и в содержании последующих выпусков. Кроме того, начиная с данного тома изменяется подход к полиграфической подготовке изданий. За основу при предпечатной подготовке статей взята издательская система ЦСТЕХ [5].

В 2006–2008 годах опубликованы тома с 4 по 6 [6–8]. Это уже были регулярные ежегодные выпуски Трудов Института механики. В этих выпусках напечатаны 25, 43 и 33 научные работы соответственно. Также в некоторую традицию входит публикация расширенных тезисов конференций, проводимых Институтом. Так, выпуски 5 и 6 в значительной мере включают работы, представленные на конференции «Механика и химическая физика сплошных сред» (Бирск, 27–30 июня 2007 г.). Серию

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Михайленко К.И.



Начиная с девятого тома, вышедшего в 2012 году, Труды Института механики переходят на журнальный формат (Рис. 3). При этом девятый выпуск Трудов разделен на две части, содержащие 39 и 27 статей [11, 12]. Выпуск вновь основан на материалах конференции: V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения» (Уфа, 2–5 июля 2012 г.).

В 2014 годы увидел свет выпуск (том) 10 [13], содержащий 22 статьи. Это был последний том, выпущенный на бумаге.

В 2016 годы руководством Института совместно с редакцией Трудов принято решение преобразовать издание в научный журнал. Название «Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН» было сохранено. Журнал зарегистрировали как электронное издание (международный стандартный сериальный номер ISSN 2542–0380) с периодичностью два выпуска в год. Также статьи журнала получили индексирование в системах РИНЦ (eLibrary) и DOI. Для журнала был разработан собственный класс документа Late

В том же годы вышло два номера по 20 статей [14, 15]. А в следующем, 2017, 20 в первом номере и 18 — во втором [16, 17].

К этому времени стало понятно, что название «Труды ИМех» уже не соответствует той роли, которую отводят Журналу учредители. Именно поэтому в 2018 году произошло последнее на настоящий момент изменение. Журнал переименовали в «Многофазные системы» (соответственно, был получен новый индекс ISSN 2658–5782). Кроме того, приняли решение перейти на ежеквартальный выпуск (4 номера в год) до 10 статей в номере. Журнал получил новое лицо (Рис. 4) и обновлённый класс документа ЦАТ_ЕХ.

Следует отметить, что класс документа постепенно изменяется с учетом запросов пользователей и оформителей, для исправления обнаруженных ошибок, а также при появлении новых индексов для единообразного оформления списка литературы. В первом номере прошлого 16 тома была опубликована заглавная статья о современном состоянии класса mfs [18].

Так как решение о переименовании и новая регистрация заняли определенное время, трина-



Рис. 1. Обложка второго тома сборника трудов



Рис. 2. Обложка третьего тома сборника трудов



Рис. 3. Обложка десятого тома сборника трудов журнальном формате



Рис. 4. Обложка тринадцатого тома Журнала с новым названием «Многофазные системы»

дцатый том за 2018 год состоял из двух выпусков, получивших номера 3 и 4 [19, 20], в каждом из которых опубликовано по 10 статей.

Следующий год прошёл по расписанию. Четырнадцатый том содержит четыре выпуска, содержащих в общей сумме 40 статей.

К сожалению, 2020 год отметился эпидемией COVID-19, мто сказалось на публикационной активности, в том числе и в последующие годы. Поэтому в 2020 году «Многофазные системы» выпущены в виде двух спаренных выпусков. Номер 1–2 содержит тезисы VII Российской конференции «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» (Уфа, 5–10 октября 2020 г.) общим количеством 123 кратких сообщения; а номер 3–4 состоит из 13 статей.

2021 год также не изобиловал новыми работами. всего опубликовано три выпуска (один сдвоенный): первый и второй номера по 6 статей и номер 3–4 содержит всего 8 статей.

В 2022 году принято решение первый выпуск, заглавную статью которого Вы читаете, посвятить юбилею Института механики, опубликовать в нём обзорные статьи руководителей направлений исследований института и, благодаря значительному объему, сделать его также сдвоенным.

В дальнейшем редакция Журнала надеемся на регулярный выход новых номеров и плодотворное сотрудничество с новыми авторами.

Список литературы

- Проблемы механики и управления: Сб. статей / УНЦ РАН. Уфа, 1994. 192 с.
- [2] Проблемы механики и управления. Уфа: Гилем. 1996. 312 с.
- [3] Редактор ChiWriter https://ru.wikipedia.org/wiki/ChiWriter
- [4] Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 3 / Под. ред. М.А. Ильгамова, Р.И. Нигматулина, С.В. Хабирова. Уфа: Гилем, 2003. 321 с. eLIBRARY ID: 36324614
- [5] The LaTeX project. https://www.latex-project.org
- [6] Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 4 / Под. ред. С.Ф. Урманчеева, С.В. Хабирова. – Уфа: Гилем, 2006. 307 с. eLIBRARY ID: 36325144
- [7] Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 5 / Под. ред. М.А. Ильгамова, С.Ф. Урманчеева, С.В, Хабирова. – Уфа: Гилем, 2007. 340 с. eLIBRARY ID: 36325099
- [8] Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 6 / Под. ред. С.Ф. Урманчеева, С.В. Хабирова. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2008. 229 с. eLIBRARY ID: 36314742
- [9] Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 7 / Под. ред. С.Ф. Урманчеева. – Уфа: Гилем, 2010. 231 с. eLIBRARY ID: 36314721

- [10] Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 8 / Под. ред. С.Ф. Урманчеева. — Уфа: Нефтегазовое дело, 2011. 288 с. eLIBRARY ID: 36314693
- [11] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 9 / Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р.Р.Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2–5 июля 2012). Часть І. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. 190 с. eLIBRARY ID: 34327740
- [12] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 9 /. Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложения», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р.Р.Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2-5 июля 2012). Часть II. – Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. 150 с. eLIBRARY ID: 34327742
- [13] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 10 / Под ред. С.Ф. Урманчеева. Уфа: Нефтегазовое дело, 2014. 116 с. eLIBRARY ID: 34248260

- [14] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2016. Т. 11, № 1. DOI: 10.21662/uim2016.1
- [15] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2016. Т. 11, № 2. DOI: 10.21662/uim2016.2
- [16] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 1. DOI: 10.21662/uim2017.1
- [17] Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 2. DOI: 10.21662/uim2017.2
- [18] Галимзянов М.Н., Михайленко К.И., Налобина Е.А. Подготовка статьи для журнала «Многофазные системы»: руководство для автора // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 1. С. 1–7. DOI: 10.21662/mfs2021.1.001
- [19] Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. DOI: 10.21662/mfs2018.3
- [20] Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. DOI: 10.21662/mfs2018.4

ISSN 2658-5782



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.002

УЛК 532.2

Получена: 11.05.2022 Принята: 25.05.2022

К тридцатилетию со дня основания Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Из истории Института

Инициатива создания в Уфе академического института в области механики принадлежала выдающемуся ученому и организатору науки и высшей школы России, члену-корреспонденту РАН Рыфату Рахматулловичу Мавлютову.

Институт механики Уфимского научного центра РАН был организован Постановлением Президиума РАН № 208 от 23 июня 1992 года по представлению Президиума Уральского отделения РАН. Постановление было подписано Президентом Российской академии наук академиком Ю.С. Осиповым и Главным ученым секретарем РАН академиком И.М. Макаровым. В Постановлении отмечалась необходимость развития исследований в области механики, диктуемая потребностями научно-технического обеспечения южной части Уральского региона. В качестве основных направлений научной деятельности Института были обозначены:

- деформирование элементов конструкций из упругих и упруговязкопластических материалов при сложном нагружении;
- нестационарные процессы в гетерогенных средах с физико-химическими и структурными превращениями;
- нелинейные механические системы со многими степенями свободы и синтез многосвязных многофункциональных систем управления.

В том же Постановлении директором Института механики был назначен член-корреспондент РАН Р.Р. Мавлютов.

Институт механики создавался на базе профильных научно-исследовательских подразделений Башкирского научного центра Уральского отделения PAH И Уфимского авиационного института.



Рис. 1. Член-корреспондент Российской академии наук Рыфат Рахматуллович Мавлютов

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Галимзянов М.Н.

В целях увековечивания памяти видного ученого в области прикладной механики и процессов управления в технических системах, инициатора создания и директора–организатора Института механики Уфимского научного центра РАН (1992–2000 гг.), Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, члена-корреспондента РАН Рыфата Рахматулловича Мавлютова Президиум Российской академии наук постановлением № 19 от 31.01.2012 г. присвоил Институту механики УНЦ РАН имя члена-корреспондента РАН Р.Р. Мавлютова.

Более подробно с основными направлениями деятельности и достижениями сотрудников Института с 1992 по 2016 годы можно ознакомиться в [1–4].

Институт сегодня

На сегодняшний день в состав Института механики входят пять научных лабораторий:

- 1. Механика многофазных систем.
- 2. Механика твердого тела.
- 3. Дифференциальные уравнения механики.
- 4. Робототехника и управление в технических системах.
- 5. Экспериментальная гидродинамика.

За последние 5 лет сотрудниками Института получено много новых фундаментальных результатов. Отметим некоторые из них.

Лаборатория «Механика многофазных систем»

Заведующий лабораторией, заслуженный деятель науки РБ, д.ф.-м.н., профессор С.Ф. Урманчеев

Разработана двухтемпературная двухфазная модель газо- парожидкостной смеси с учетом парообразования, конденсации и межфазного теплообмена в односкоростном однодавленческом приближении в одномерной сферическо-симметричной и двумерной осесимметричной постановках. Численная реализация моделей осуществлена методом сквозного счета с использованием подвижных лагранжевых сеток (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.А.).

Проведено исследование нестационарного процесса истечения вскипающей жидкости при мгновенной разгерметизации сосуда высокого давления через тонкое сопло. Изучено влияние начального радиуса и числа микропузырьков на ин-



Рис. 2. Заслуженный деятель науки РБ, д.ф.-м.н., профессор Саид Федорович Урманчеев

тенсивность парообразования, оказывающих существенное влияние на процесс формирования пароводяной струи в условиях выбранных экспериментов (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.А.).

Представлены результаты численного моделирования процесса распространения сферической ударной волны, инициируемой сферическим взрывом в водной пене с использованием предложенной модели газожидкостной пены, учитывающей межфазный контактный теплообмен. Установлено, что учет теплообмена приводит к снижению амплитуды давления за счет понижения температуры газовой фазы и, как следствие, к замедлению скорости фронта ударной волны (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.А.).

Изучены фильтрационные волны давления в трещинах, находящихся в пористой и проницаемой среде. Проанализировано влияние коллекторских характеристик пласта и трещины (например, их пористости, проницаемости и ширины трещины), а также реологических свойств насыщающего флюида на динамику распространения сигналов в трещине. Показано, что трещина в пористом и проницаемом пласте является своеобразным волновым каналом для низкочастотных колебаний давления в скважинах (Шагапов В.Ш.).

Получены точные решения, описывающие эволюцию полей давления в трещине при внезапном изменении давления в скважине на постоянную величину. На основе этих решений установлены соответствующие закономерности для расхода флюида от времени и граничного давления. Таким образом, трещина в пористой среде является волновым каналом для низкочастотных колебаний давления в призабойной зоне скважины. Все это, в свою очередь, позволяет диагностировать результаты гидроразрыва посредством гидропрослушивания. Кроме того, полученные аналитические решения, соответствующие постоянному перепаду давления, могут быть использованы для интерпретации результатов ГИС (Шагапов В.Ш.).

Аналитически решена задача о росте слоя гидрата при контакте гидратообразующего газа и воды для двух предельных режимов. В первом режиме рост слоя гидрата определяется его пропускной способностью. При этом процесс образования гидрата происходит в изотермическом режиме. При большой пропускной способности гидрата, которая зависит от коэффициента диффузии, скорость увеличения толщины слоя гидрата определяется способностью воды и гидрата отводить тепло с поверхности, на которой образуется гидрат. Получены критические условия для приведенных коэффициентов диффузии и проницаемости слоя гидрата, соответствующие этим двум режимам гидратообразования при контакте газа и воды (Шагапов В.Ш.).

При численном решении системы уравнений, описывающей гидродинамическую устойчивость термовязких жидкостей, обнаружены значительные различия между спектрами собственных значений для течения термовязкой жидкости и жидкости с постоянной вязкостью. Показано, что учет температурной зависимости вязкости жидкости оказывает существенное влияние на значение критического числа Рейнольдса, характеризующего предельное значение устойчивости ламинарного течения жидкости. Эти значения экспоненциально убывают с ростом показателя экспоненты в функциональной зависимости вязкости от температуры. Следует отметить, что при осреднении указанной зависимости волновые числа остаются практически постоянными в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса для различных значений показателя экспоненты. В случае термовязких жидкостей наблюдается уменьшение величины волнового числа с ростом критического числа Рейнольдса.

Для жидкостей с немонотонной зависимостью вязкости от температуры, в зависимости от числа Нуссельта, исследованы режимы установления потока в канале. Обнаружены четыре типа переходных процессов, соответствующих различным уровням интенсивности теплообмена.

При боковом подогреве квадратной полости, заполненной жидкостью с заданной начальной линейной стратификацией, увеличение перепада температур, приложенного к вертикальным границам области, приводит к последовательному переходу от слоистого течения к течению с наклонными вихрями. При дальнейшем росте перепада температур образуется треугольная структура вихрей и далее уже возникает глобальное одновихревое течение, характерное для свободной конвекции однокомпонентной жидкости при подогреве сбоку. Установлено, что при слоистом режиме конвекции при увеличении вертикального масштаба области происходит рост количества горизонтальных вихрей. Показано также, что вихревые структуры при слоистом режиме конвекции имеют квазидвумерный характер.

Проведены обобщение и численный анализ модели для определения поля вокруг одиночной звуконепроницаемой сферы с различным значением комплексного сопротивления при прохождении двух видов волн: плоской и сферической от монопольного источника излучения. В литературе рассмотрены в основном только два предельных случая — акустически жесткая и мягкая сферы, в настоящей работе при постановке граничных условий был рассмотрен общий случай, позволяющий использовать сферу с произвольным комплексным сопротивлением. Данная модель в дальнейшем позволит провести обобщения на случаи акустического рассеяния от звукопроницаемой сферы и рассеяния от множества сфер.

Завершен этап исследований, связанный с подготовкой массовых вычислительных экспериментов на вихревых трубах различной геометрии. Основное внимание уделено построению конечно-разностных сеток, соблюдающих условие гексагональности и ортогонализированности и позволяющих снизить погрешность при одновременном уменьшении количества узловых точек. При тестировании сеток разных конфигураций получен ряд результатов как повторяющих характерную для вихревой трубы температурную стратификацию (эффект Ранка-Хилша), так и с обратным распределением температуры. Так как инверсия температуры наблюдалась при одновременном изменении характеристик разностной сетки и определяемых указанными характеристиками параметров завихрителя, вывод о том, определяется ли аномальная температурная инверсия вычислительными особенностями или является физической характеристикой системы, может быть сделан по результатам дальнейших исследований.

Температурная стратификация дисперсных систем. Рассмотрено влияние длины основного канала вихревой трубы на величину производства холодного и горячего воздуха. Разработана модель и проведены предварительные расчеты вихревой трубы с дополнительным каналом подачи воздуха, расположенным на одной оси с основным каналом со стороны горячей диафрагмы. Установлено, что зависимость расхода воздуха через холодную диафрагму от длины основного канала имеет нелинейный характер. Определена также зависимость эффекта температурной стратификации от граничных условий (Михайленко К.И.).

Численное исследование закономерностей конвективных течений Рэлея–Бенара полимерных жидкостей. Установлено, что при свободно конвективном течении жидкости с аномальной зависимости вязкости от температуры решающую роль при формировании потоков играет эволюция вязкого барьера и, в зависимости от параметра, характеризующегося зависимостью вязкости от температуры, образуется или один из вариантов вихревого течения, или структура течения, соответствующая режиму чистой теплопроводности. Установлено, что наличие вязкого барьера приводит к появлению вихрей различного масштаба и, вследствие этого, к многомасштабности течения (Моисеев К.В.).

Нелинейная динамика пузырьковых кластеров в акустических полях с учетом диффузионных процессов и влияния различных сил на систему пузырьков. При исследовании рассеяния волн в акустическом диапазоне от пары твердых частиц и от нескольких капель/пузырьков сферической формы с центрами, расположенными на одной оси, проведены обобщение и численный анализ модели для определения поля вокруг/внутри сфер при прохождении акустической волны от монопольного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. Исследованы различные подходы по усечению бесконечных рядов в разложении. Полученные результаты позволят в дальнейшем провести тестовые расчеты для верификации общего численного алгоритма для случая множества произвольно расположенных в пространстве сфер (Насибуллаева Э.Ш.).

Особенности гидродинамической устойчивости жидкостей в каналах теплообменников. При определении потери устойчивости течения жидкостей в каналах теплообменных устройств необходимо учитывать зависимость вязкости от температуры. Установлено влияние экспоненциальной зависимости вязкости от температуры на критические параметры гидродинамической устойчивости несжимаемой жидкости при линейном изменении температуры по сечению плоского канала. При достаточно больших числах Пекле построены спектры собственных значений для обобщенного уравнения Орра–Зоммерфельда. Показано, что кривые нейтральной устойчивости и критическое число Рейнольдса в значительной степени зависят от свойств жидкости, определяемых показателем экспоненциальной функции вязкости (Низамова А.Д, Урманчеев С.Ф.).

Определение коэффициента гидравлического сопротивления при течении термовязкой жидкости в каналах переменного сечения. При течении жидкостей с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры установлено влияние локального нагрева на характер изменения коэффициента гидравлического сопротивления. Показано, что с увеличением параметра термовязкости коэффициент гидравлического сопротивления значительно уменьшается. Стоит отметить, что эффект наиболее выражен при изменении отношения длины локального нагрева ко всей длине канала в диапазоне $0 < \lambda < 0.6$. При больших значениях λ коэффициент гидравлического сопротивления изменяется незначительно. Таким образом, в соответствии с расчетными данными по оптимизации затрат электроэнергии на локальный нагрев возможно повысить эффективность различных технологических процессов (Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д.).

Динамика волн и вихреобразование при взаимодействии воздушного сферического импульса давления с защитным барьером из водной пены. Показано, что увеличение объемного водосодержания в пенном слое при его уплотнении под воздействием ударного импульса приводит к снижению скорости фронта УВ и блокирует ее прохождение вглубь пены. Установлено, что основной причиной формирования тороидальных вихревых зон и турбулизации потока в газовой области за фронтом УВ является искривление линий тока за счет развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, возникающей в результате изгиба границы газ-пена при ее взаимодействии со сферической УВ. Подтверждена достоверность полученных решений сравнением с решениями аналогичной задачи другими численными методами и экспериментальными данными (Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф.).

Особенности формирования вскипающей струи водяного пара, истекающей из сосуда высокого давления через тонкое сопло. Установлено, что взаимодействие высокоскоростного потока с примыкающей к нему невозмущенной зоной приводит к искривлению траектории движения газа и развитию неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, что сопровождается образованием и развитием вихревых зон. Формирование серии тороидальных вихрей вблизи оси симметрии в окружающем струю газе приводит к появлению осциллирующей формы основного струйного течения с сохранением полости внутри струи. С течением времени струйный поток в процессе взаимодействия с газовой областью формирует в ней последовательную серию акустических волновых импульсов, являющихся источником пульсаций, фиксируемых в экспериментах (Болотнова Р.Х.).

Исследование гармонических волн в жидкости с паровоздушными пузырьками миллиметрового размера показало, что при изменении равновесной температуры от комнатной до точки кипения коэффициент затухания меняется в десятки и сотни раз в зависимости от частоты возмущений. В случае мелкодисперсных смесей из-за большего влияния капиллярных сил на межфазной поверхности изменение фазовой скорости и коэффициента затухания гораздо слабее (не более двух раз) (Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Агишева У.О.).

На основании модельных расчетов показано, что при падении акустической волны со стороны пузырьковой жидкости на границу раздела с «чистой» жидкостью для низкочастотных волн ($\omega < \omega_R$) существует критический угол падения, при углах больших которого волна полностью отражается от границы раздела (Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Агишева У.О.).

Теоретически показано, что увеличение степени перегрева жидкости приводит к сужению области устойчивости пузырьковой системы из-за роста массовой доли пара в пузырьках (Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Агишева У.О.)

При локальном охлаждении области скачкообразного сужения канала в плоском случае за счет влияния зависимости вязкости жидкости от температуры происходит увеличение гидравлического сопротивления. Ранее аналогичный результат получен и в случае подогрева, но, естественно, с противоположным эффектом. Следует отметить, что степень увеличения коэффициента гидравлического сопротивления при охлаждении оказалась выше, чем степень его снижения при подогреве, что связано с нелинейностью зависимости вязкости от температуры (Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д.).

Установлена причина увеличения трения при продольном относительном перемещении цилиндров вследствие вращения внутреннего цилиндра: течение Куэтта приводит к образованию динамических конвективных структур в зазоре между двумя коаксиальными трубами, деформация которых и приводит к появлению эффекта. Результат решения задачи позволит установить причину дополнительного сопротивления, например, при расширении скважины для дальнейшего протаскивания трубопровода. Проведена оптимизация величины балластировки трубопровода при подготовке его к протаскиванию с учетом реологических свойств бурового раствора и фильтрационных свойств грунта. Определены допустимые величины препятствий в скважине подводного перехода, при которых возможно их преодоление в процессе протаскивания (Урманчеев С.Ф.).

Разработана математическая модель течения базальтовой магмы в системе грунтовых трещин, содержащих субвулканическую камеру. Базальтовая магма представлена как термовязкая жидкость с двухзвенной экспериментальной зависимостью вязкости от температуры. Задача теплового взаимодействия магмы с вмещающими породами описана условиями теплообмена на стенках каналов и субвулканической камеры. При этом вмещающие породы подчиняются уравнению теплопроводности. Установлено, что при протекании магмы в трещине в условиях значительных градиентов температуры вблизи одной из стенок возникает зона разогрева магмы, обусловленного вязкой диссипацией (Моисеев К.В.).

Для исследования температурной стратификации потока газа в вихревой трубе построена математическая модель с учетом особенностей конфигурации входного и выходного устройств. Проведен анализ сеток различной конфигурации для реализации численной модели. При этом сетка должна быть гексагональной — для сокращения общего количества граней конечных объемов и для сокращения объема вычислений; по возможности ортогонализированной и равномерной — для уменьшения вычислительной погрешности. Показано, что построенные сетки удовлетворяют поставленным условиям (Михайленко К.И.).

Исследовано распространение ударной волны (УВ) в слое водной пены для условий новых экспериментальных данных с визуализацией динамики водосодержания пены под воздействием УВ (Monloubou M., Le Clanche J., Kerampran S. Actes, 2019). Разработанная математическая модель описывает поведение пены как неньютоновской жидкости с учетом эффективной вязкости Гершеля– Балкли, межфазных теплообменных процессов по модели Ранца–Маршалла и реалистических уравнений состояния, описывающих термодинамические свойства компонент водной пены. Модель численно реализована в разработанном авторами решателе пакета ОрепFOAM. Показано, что изменение структуры водной пены за фронтом УВ приводит к формированию в пенном слое локальной зоны с высоким объемным водосодержанием, способствующей ослаблению УВ. Получено удовлетворительное согласование численных расчетов с экспериментальными данными (Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф.).

Проведен сравнительный анализ аналитического автомодельного и численного решений с применением пакета OpenFOAM для задачи Седова о точечном взрыве в газе для оценки достоверности численных исследований по динамике УВ с применением решателя пакета OpenFOAM (Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А.).

Исследованы собственные колебания столба жидкости в вертикальной нефтяной скважине, возникающие при резком закрытии или открытии скважины (гидроударе). При этом период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются не только протяженностью столба жидкости в скважине, ее диаметром и реологическими свойствами жидкости, но и коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта (в частности, коэффициентами проницаемости, качеством перфорации скважин и свойствами образованных трещин ГРП). С использованием математической модели, описывающей движение столба жидкости в скважине и фильтрацию в призабойной зоне, найдены решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Получены характеристические уравнения для определения комплексных частот (частоты колебаний и коэффициента затухания). Изучены зависимости колебаний наилучшей частоты собственных колебаний. коэффициента затухания и декремента затухания от проницаемости пласта. Установлено, что с увеличением коэффициента проницаемости пласта в диапазоне от 10^{-15} м² до 10^{-10} м² частота собственных колебаний монотонно снижается, таким образом, период колебаний при изменении коэффициента проницаемости от самых низких значений увеличится приблизительно в два раза. Наиболее нетривиальным эффектом является нелинейная зависимость коэффициента затухания и декремента затухания от проницаемости пласта. Показано, что по собственным колебаниям жидкости внутри скважины можно судить о качестве открытого участка скважины, геометрических характеристиках скважины, коллекторских свойствах призабойной зоны, сопоставляя наблюдаемые параметры изменения давления в различных точках скважины (основные частоты, коэффициент затухания, сдвиг по фазе, амплитуды) с расчетными значениями, получаемыми по рассматриваемой модели (Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З.).

На основе анализа решений типа гармонических волн в трещинах, находящихся в низкопроницаемых пластах и расположенных перпендикулярно скважине, показано, что трещины для низкочастотных колебаний давления в скважине являются своеобразным волновым каналом. Иначе, характерное расстояние затухания волн в трещинах, а также в пласте вблизи нее может быть значительно выше, чем в однородной пористой среде при отсутствии трещины (Шагапов В.Ш.).

Исследован процесс формирования полой струи при истечении из тонкого сопла водяного пара, изначально находящегося при высоком давлении в сверхкритическом состоянии. Численное моделирование проведено с применением решателя sonicFoam библиотеки открытого пакета OpenFOAM в двумерной осесимметричной постановке. Показано, что процесс истечения сопровождается формированием полой струи в условиях сверхзвукового режима при отсутствии конденсации, что способствует образованию внутренней границы струи (диска Маха) и развитию внешнего и внутреннего тороидальных вихрей, поддерживающих режим сохранения полости в центре струи (Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф.).

Проведено численное исследование процесса взаимодействия сферического ударного импульса в газовой области с защитным барьером из водной пены. Поставленная задача решена для случая двумерной осевой симметрии с использованием двухфазной газожидкостной модели, базирующейся на законах сохранения массы, импульса и энергии смеси и уравнении динамики объемного содержания фаз с применением решателя compressible-MultiphaseInterFoam открытого пакета OpenFOAM, модифицированного в соответствии с условиями задачи и модельными представлениями. Показано, что сжатие водной пены под действием УВ приводит к существенному снижению скорости фронта УВ и блокировке ее прохождения в пенный слой, что сопровождается искривлением границы между газом и пеной и формированием тороидальных вихрей в газовой области (Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф.).

Исследована динамика импульсного сигнала, распространяющегося в подземном трубопроводе с поврежденным участком. Рассмотрены волны давления, распространяющиеся по линейному трубопроводу, заполненному флюидом, а диссипация из-за вязкого трения и теплопроводности учитывается в тонком слое жидкости или газа вблизи стенки. Участок трубопровода с повреждением принят за отражающую поверхность. При получении условий на этой поверхности принято, что интенсивность утечки жидкости при прохождении волны через поврежденный участок полностью лимитируется проницаемостью грунта. Из анализа дисперсионных выражений для коэффициентов отражения и прохождения, а также результатов расчетов методом быстрого преобразования Фурье для эволюции импульсного сигнала при прохождении через поврежденный участок показано, что в низкопроницаемых грунтах сигнал слабо «чувствует» повреждения, а в высокопроницаемых — «чувствителен» только для коротких (высокочастотных) импульсных сигналов (Шагапов В.Ш.).

Изучено распространение слабых возмущений в водовоздушной пузырьковой среде, когда в пузырьках помимо нерастворимого в воде газа (например, воздуха) присутствуют пары воды, которые в процессе движения смеси могут переходить в состав воды. Находящийся в пузырьках воздух, также будет оказывать диффузионное сопротивление на интенсивность фазовых переходов системы «пар-вода». Проанализировано влияние начальных параметров двухфазной смеси «вода-пузырьки» (объемное содержание фаз, размеры дисперсной фазы, а также температура воды) на эволюцию гармонических волн в пузырьковой жидкости (Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н.).

Исследования направлены на решение фундаментальных задач гидродинамики, тепло- и массообмена, связанные с установлением новых закономерностей и гидродинамических эффектов в многофазных и термовязких системах. Практическая мотивация исследований основана на необходимости разработки эффективных расчетных методов для современных технологий и создания математических моделей прогнозирования поведения гидродинамических систем в условиях воздействия внешних физических полей (Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д., Киреев В.Н.).

При течении жидкостей с различными видами зависимости вязкости от температуры была рассмотрена задача о влиянии теплообмена на гидравлическое сопротивление канала с переменным сечением. В результате проведенных численных экспериментов были предложены поправки к формулам Вейсбаха по определению гидравлического сопротивления каналов со скачкообразным изменением сечения (Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д., Киреев В.Н.).

Установлено, что учет эффекта зависимости вязкости от температуры существенным образом сказывается и на величине критического числа Рейнольдса при анализе гидродинамической устойчивости течения термовязких жидкостей в каналах теплообменников. При этом можно сделать вывод, что критическое число Рейнольдса зависит от энергии активации, характеризующей зависимость вязкости от температуры: увеличение экспоненциального параметра приводит к уменьшению области ламинарного течения жидкости (Урманчеев С.Ф., Низамова А.Д., Киреев В.Н.).

Установлено влияние «вязкого барьера» и выявлена роль формирования третичных вихрей на глобальную картину течения. Обнаружен новый вид структуры конвективных течений в задаче о тепловой конвекции аномально термовязкой жидкости. При определенных значениях числа Рэлея наличие функциональной зависимости вязкости от температуры гауссовского типа приводит к режиму течения с изолированными конвективными ячейками. В этом случае формируется течение, в котором конвективные валы отделены друг от друга вязким барьером (Моисеев К.В., Кулешов В.С.).

Выявлен ряд особенностей эволюции конвективных валов при боковом подогреве непрерывно стратифицированной жидкости в зависимости от безразмерных управляющих параметров задачи: при увеличении перепада температур происходит последовательный переход от слоистого течения к течению с наклонными вихрями, затем к течению, имеющему треугольную структуру вихрей, и далее к глобальному одновихревому течению, характерному для свободной конвекции однокомпонентной жидкости при подогреве сбоку. Также показано, что при слоистом режиме конвекции при увеличении вертикального масштаба области происходит увеличение количества горизонтальных вихрей (Моисеев К.В., Кулешов В.С.).

Представлены результаты исследования по отражению волн в акустическом диапазоне от капель сферической формы. Решение этой задачи имеет принципиальное значение для диагностики парои газокапельных потоков в камерах сгорания ракетных и авиационных двигателей, аппаратах химических технологий и других устройствах. Благодаря построенной обобщенной модели отражения волн от сферы был рассмотрен общий случай, позволяющий рассмотреть звукопроницаемую сферу (т.е. сферу, сквозь границу которой проходит акустическая волна), что позволило адекватно описать экспериментальные данные. Проведены исследования отражения волн от пары как звуконепроницаемых, так и звукопроницаемых сфер и вычислены соответствующие коэффициенты. Параметрический анализ для одиночной сферы и для пары сфер показал, что при определенных значениях параметров могут создаваться условия, при которых за сферой или парой сфер появляется либо зона пониженного давления (пятно Пуассона), либо зона повышенного давления (сфера является жидкой линзой). Таким образом, разработанная модель отражает экспериментально наблюдаемые эффекты (Насибуллаева Э.Ш.).

На основе разработанной компьютерной программы проведены вычислительные эксперименты по тепловой стратификации в трубе Ранка-Хиллша. Установлено, что, когда воздух в вихревую трубу подается при постоянном объемном расходе, образующийся выход холодного воздуха оказывается значительно ниже, чем в случае постоянного давления на входе. Существенное влияние на эффект стратификации оказывает размер площади кольца горячего выхода вихревой трубы. Независимо от геометрии холодного выхода основное охлаждение выходящего воздуха происходит непосредственно в сопле холодного выхода, тогда как на переходе из трубы в сопло воздух имеет приблизительно одинаковую температуру, лишь немногим меньшую в сравнении с температурой подаваемого газа (Михайленко К.И.).

Лаборатория «Механика твердого тела» Заведующий лабораторией, д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН М.А. Ильгамов

Решена задача о взаимном влиянии выпучивания упругой пластины под действием сжимающей силы и отклонения контактной границы жидкостей с разными плотностями. Полученное решение позволяет определить обобщенный критерий (критическую силу) при взаимодействии неустойчивости Эйлера и неустойчивости Рэлея–Тэйлора (М.А. Ильгамов).

Определяется поперечная распределенная нагрузка на пластину, находящуюся в газовой среде. Разные значения давления газов на обе поверхности образуют как перепад давления, так и поперечную силу, зависящую от кривизны срединной по-



Рис. 3. Член-корреспондент Российской академии наук Марат Аксанович Ильгамов

верхности. Показано, что в общем случае обе эти составляющие поперечной силы должны учитываться. При малом отношении среднего давления к модулю упругости материала и при большой относительной толщине влияние второй составляющей нагрузки мало. При малой относительной толщине пластины, большом отношении среднего давления среды к модулю упругости материала влияние второй составляющей поперечной нагрузки на изгиб становится значительным.

Статический и динамический изгибы трубопровода в вертикальной плоскости под действием собственного веса рассматриваются с учетом взаимодействия внутреннего давления и кривизны осевой линии, а также осесимметричной деформации. Давление состоит из постоянной и переменной по времени частей и предполагается равномерно распределенным по всему пролету между опорами. Дается анализ реакции трубопровода на ступенчатое возрастание давления, когда может быть найдено точное решение задачи. Вводится в рассмотрение начальная стадия изгиба, определяемая малостью упругих сил по сравнению с инерционными. На этой стадии решение находится в степенных рядах, при этом закон изменения давления может быть произвольным. Это решение дает начальные условия для определения дальнейшего процесса. Приводится сравнение продолжительности инерционной стадии со временами резкого изменения давления и ударных волн в жидкостях и газах. Определяются конструкционные параметры, когда ударное давление воспринимается только инерционными силами в трубопроводе.

Вращательные колебания трубопровода в большей степени влияют на его изгибные колебания, чем последние на вращательные. Анализ показывает, что динамическое поведение рассмотренной системы отличается большим разнообразием в зависимости от входных параметров. Ввиду большого числа последних не удается определить разные режимы движения трубопровода через небольшое число безразмерных параметров. Поэтому для заданного набора входных параметров по использованной модели трубопровода необходимо проводить отдельный анализ.

Изучаются изгибные колебания трубопровода, провисающего над грунтовыми берегами или оврагами. Учитывается влияние внутреннего давления в трубе на эти колебания. Статический изгиб определяется в зависимости от веса трубы и транспортируемой среды. Скорость движения жидкости не учитывается. Предполагается, что части трубопровода по обе стороны от провисающего участка заделаны в грунт с одинаковыми свойствами. Влияние грунта моделируется распределенной системой пружин с определенными жесткостями в продольном и поперечном направлениях трубопровода. Определяется спектр частот в зависимости от давления жидкости, массы присоединенного грунта, жесткости грунта. Рассматриваемая расчетная схема справедлива не только в случае трубопровода и грунта, но и в случае конструкций трубопроводемкость, где более податливая сплошная среда уменьшает концентрацию напряжений в месте соединения трубопровода со стенкой емкости. Показано, что с увеличением жесткости грунта растет и частота колебаний трубопровода, причем тем быстрее, чем меньше присоединенная масса грунта. Получено, что собственные частоты колебаний центральной части трубопровода не зависят от относительной жесткости и присоединенной массы грунта.

Рассмотрен статический изгиб тонкой упругой пластины, разделяющей две жидкости с разными плотностями и скоростями движения. Жидкости предполагаются несжимаемыми, а срединная поверхность пластины — недеформируемой. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца и Релея в зависимости от сжимающей пластину силы, скоростей движения жидкостей, а также ускорения, направленного перпендикулярно к контактной границе. Найдены области изменения этих параметров, когда происходят стабилизация и дестабилизация плоской формы пластины и контактных поверхностей. Установлены динамические режимы деформации пластины при резком повышении и падении давления. Разработан метод решения задачи в случае сложной формы изменения давления.

Пространственные колебания трубопровода и транспортируемой жидкости при действии внутреннего переменного и ударного давлений исследованы на основе модели изгибно-вращательных движений. Модель учитывает как взаимодействие внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии трубы, так и взаимное влияние ее окружной и продольной деформаций. Установлено, что как при гармоническом изменении динамической части внутреннего давления, так и после кратковременного действия ударной нагрузки изгибные и вращательные колебательные движения стального трубопровода, могут иметь сложный характер. Исследование позволяет оценить напряженно-деформированное состояние трубопровода и разработать меры по его защите от повреждений и разрушения.

Собственные частоты изгибных колебаний трубопровода в грунте определены по модели Кирхгоффа. Показано, что по двум известным низшим частотам можно определить жесткость и присоединенную массу грунта, а по одной известной частоте — давление жидкости внутри трубопровода. Установлено, что пять собственных частот — минимальное число, по которым можно восстановить характер закрепления на обоих концах трубопровода.

Доказана теорема о единственности решения обратной задачи об идентификации дифференциального уравнения и двух краевых условий, описывающих изгибные колебания стержня переменной жесткостью с упруго закрепленными концами. Такие системы используются для вибрационной защиты от ударных воздействий.

Исследованы продольные и изгибные колебания стержней с дефектами. Показано, что координата, длина и площадь поперечного сечения стержня в зоне повреждения могут быть определены по трем собственным частотам продольных колебаний. Установлено, что по известным низшей частоте изгибных колебаний, координате, длине и площади поперечного сечения в зоне дефекта определяется осевой момент инерции стержня.

Получены новые результаты в задаче о колебаниях струны в неоднородной внешней среде, коэффициент упругости которой описывается полиномиальным потенциалом. Показано, что краевые условия могут быть идентифицированы однозначно по трем собственным частотам колебаний.

Рассмотрена задача вдавливания цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство, имеющее цилиндрическую вогнутость. Проведены расчет и анализ напряженнодеформированного состояния стальной оболочки и упругопластического полупространства.

Изгибная жесткость трубопровода, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление стабилизируют или начальная форма трубопровода является устойчивой, а сжимающие силы, внутреннее гидростатическое давление, движение жидкости с любыми скоростями внутри трубопровода дестабилизируют его или начальная форма трубопровода является неустойчивой.

Рассмотрены статический изгиб и продольная устойчивость нанопроволок, находящихся под давлением жидкости или газа. Учитываются два поверхностных эффекта. Первый обусловлен различием упругих свойств в тонком приповерхностном слое и в основном объеме материала. Эффективные жесткости на растяжение и изгиб могут быть больше или меньше чем обычные жесткости в зависимости от материала. Второй эффект обусловлен взаимодействием избыточного давления на круговую боковую поверхность проволоки и разности площадей выпуклой и вогнутой сторон поверхности, появляющейся при изгибе. Этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше отношение давления к модулю упругости материала и длины проволоки к ее диаметру (Ильгамов М.А.).

Статический цилиндрический изгиб нанопленок рассмотрен в линейной и нелинейной постановках. Определены спектр частот изгибных колебаний и параметрический резонанс. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый из них связан с различающимися упругими свойствами в приповерхностном слое и в основном объеме материала и проявляющийся при растяжении и изгибе пленок нанометровых толщин. Второй эффект обусловлен появляющейся при изгибе разностью площадей выпуклой и вогнутой поверхностей, на которые действуют давления газов. Этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше отношение среднего давления к модулю упругости материала и длины пленки к ее толщине. Имеют значение условия нагружения торцевых поверхностей пленки, а также деформация по толщине пленки под действием среднего давления. Положительное среднее избыточное давление (сжатие) приводит к увеличению эффективной жесткости, уменьшению прогиба, возрастанию собственных частот. Отрицательное среднее давление (вакуумирование) уменьшает жесткость и собственные частоты. Показано, что в этом случае может иметь место изгиб пленки в результате потери продольной устойчивости. Колебания среднего давления приводят к параметрическому усилению изгибных колебаний. Эти результаты не могут быть получены на основе классических уравнений изгиба тонких пластин и пленок (Ильгамов М.А.).

Исследованы пространственные колебания участка трубопровода, находящегося по концам на опорах. Труба, изогнутая собственным весом и постоянным давлением заключенной в ней жидкости, подвергается гидравлическому удару. Для приближенного анализа динамики деформирования трубопровода вводятся в рассмотрение инерционная и инерционно-упругая стадии по времени. На первой стадии учитываются только давление в жидкости и инерционные силы. В конце первой стадии действие ударной нагрузки прекращается. Вторая стадия изгибно-вращательных движений трубопровода является продолжением ее инерционной стадии. Задача Коши с нулевыми начальными условиями решается также численным методом Рунге-Кутта. Результаты вычислений, полученные для стальной трубы с транспортируемой жидкостью, позволили сделать следующие краткие выводы. На начальной стадии реакции трубопровода на ударное давление в транспортируемой жидкости можно учитывать только инерционные силы и пользоваться линеаризованными уравнениями движения. В конце времени удара, являющегося началом инерционно-упругой стадии деформирования, изгибные перемещения трубы без заметной погрешности могут быть приняты равными нулю. Скорости изгибных перемещений трубы за время удара достигают конечных значений, они прямо пропорциональны амплитуде динамической составляющей внутреннего давления. При этом угловая скорость вращательного движения трубопровода может быть принята равной нулю. С ростом амплитуды динамической составляющей внутреннего давления на инерционно-упругой стадии растут также амплитуды изгибных перемещений трубопровода. При этом модули минимумов угла поворота трубы всегда больше ее начального угла отклонения. В рамках принятых в работе допушений для описания пространственных колебаний трубопровода можно использовать приближенную систему нелинейных уравнений. На инерционноупругой стадии колебаний положение трубы в пространстве с допустимой погрешностью может быть определено также аналитическим решением, полученным методом последовательных приближений. Для принятых входных данных приближенное аналитическое и численное решения находятся в удовлетворительном согласии (Шакирьянов М.М.).

Линейная устойчивость упругой цилиндрической оболочки, содержащей несжимаемую идеальную жидкость, при ударе по торцу в осевом направлении рассмотрена в предположении о мгновенном установлении сжатия по всей длине. Основное внимание уделяется анализу волнообразования в условиях контактного взаимодействия с жидкостью. Приводятся также результаты экспериментального исследования волнообразования в оболочке с жидкостью и без жидкости. Дается сравнение их с теоретическими данными. Показано уменьшение размеров волн по окружности и длине оболочки, содержащей жидкость, по сравнению с пустой оболочкой (Ильгамов М.А.).

Рассмотрены сопротивления сплошных сред при ускоренном движении трубопровода. Недеформируемый трубопровод бесконечной длины, окруженный идеальной несжимаемой жидкостью, движется с ускорением перпендикулярно своей оси. Трубопровод имеет круговое поперечное сечение. Транспортируемая газожидкостная среда в трубе включает в себя граничащие области с двумя фазами: жидкой и газовой. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области. Влиянием сил гравитации на поперечные движения частиц сред пренебрегается. Возмущенные движения внутренних газовой, жидкой и внешней сплошной сред, вызванные ускорением трубопровода, описываются уравнениями Лапласа в полярных координатах относительно потенциалов скоростей. Показано, что отношение присоединенных масс жидкости с учетом и без учета перетекания частиц газожидкостной смеси в поперечных сечениях является функцией геометрических размеров трубы и плотностей сред. Исследованы изгибные колебания двухопорного трубопровода под действием внутреннего переменного давления. Транспортируемая среда в трубопроводе состоит из жидкой и газовой фаз. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области; при этом скоростью течения пренебрегается. Учитываются изменения давления в жидкости, обусловленные ускоренным движением трубопровода. Получены численное и приближенное аналитическое решения уравнения установившихся изгибных колебаний (Шакирьянов М.М., Юлмухаметов А.А.).

Представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения (Хакимов А.Г.).

В статической и динамической постановках рассмотрен линейный изгиб консольного стержня, нагруженного всесторонним давлением и продольной силой. В отличие от случая двухопорного стержня положительное избыточное давление на поверхности консольного стержня уменьшает критическое значение сжимающей силы неизменного направления, а отрицательное избыточное давление (вакуумирование) — увеличивает его. Действие избыточного давления на поверхность консольного стержня не вносит изменений в известный результат об отсутствии равновесного отклоненного положения под действием сжимающей следящей силы. Происходит стабилизация динамического поведения при действии положительного избыточного давления и дестабилизация при вакуумировании. При одновременном действии сжимающей силы неизменного направления и сжимающей следящей силы происходит уменьшение критического значения первой из них. В случае растягивающей следящей силы это значение увеличивается, что объясняется изменением направления их равнодействующей. Действие окружающего избыточного давления приводит к большему разнообразию упругого поведения стержня (Ильгамов М.А.).

Явление изгибания вверх пролета трубопровода между вибрирующими опорами может быть объяснено тем же механизмом, который приводит к подобному эффекту в случае маятника Капицы. В данном случае картина осложняется изменением общего прогиба, играющего роль длины маятника, в зависимости от игры сил гравитации и внутреннего давления, угла качения пролета вокруг оси, проходящей через опоры. При вертикальных колебаниях опор рассмотрен случай преобладающего влияния на изгиб внутреннего давления. При высоких частотах и малых амплитудах колебаний опор общий прогиб в принятом приближении может быть определен из нелинейного уравнения статического изгиба. Условие равенства момента распределенных по длине трубопровода сил гравитации и момента сил вибрации опор определяет границу областей выпучивания к нижнему и верхнему положениям. Предельные значения областей притяжения получаются при малой гравитации и сильной вибрации опор (Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М.).

Влияние избыточного давления окружающей среды на спектр частот колебаний стержня определяется безразмерным параметром. Он возрастает при увеличении давления и длины стержня, уменьшается с ростом изгибной жесткости. При вакуумировании безразмерный параметр меняет знак, частоты уменьшаются. С увеличением как распределенной, так и точечной присоединенной массы собственные частоты колебаний уменьшаются ввиду неизменной изгибной жесткости стержня. Перемещение точечной массы к центру приводит к уменьшению нечетных собственных частот, в то время как четные частоты не меняются. По измеренной первой частоте может быть определено избыточное давление, действующее на поверхность стержня (за исключением торцевых поверхностей). По измеренным двум частотам изгибных колебаний определяется точечная присоединенная масса и ее координата. Эти результаты могут быть использованы при моделировании работы резонаторов, в том числе микро и нанорезонаторов (Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.).

Большая удельная поверхность микро- и нанорезонаторов обусловливает заметное проявление различных поверхностных эффектов. Изгибная модель упругой полоски, закрепленной шарнирно по концам, позволяет наиболее просто определить влияние избыточного давления окружающей среды на ее колебания, что до сих пор не учитывалось. Это влияние на спектр частот определяется безразмерным параметром. Он пропорционален отношению давления к модулю упругости материала и квадрату отношения длины резонатора к его толщине. С увеличением избыточного давления окружающей среды частоты колебаний возрастают. При вакуумировании частоты снижаются. Для реальных входных параметров эти изменения являются существенными, особенно для низших гармоник. При высоких давлениях окружающей среды и большом отношении длины к толщине резонатора спектр частот мало зависит от модуля упругости и толщины. Определяющим является только длина и отношение давления к плотности материала. Эти результаты не могут быть получены в рамках обычной теории резонаторов. Ввиду большой разницы результатов представляется целесообразным соответствующее экспериментальное исследование. По первой частоте изгибных колебаний можно определить давление окружающей среды. С увеличением равномерно распределенной присоединенной массы и уменьшением избыточного давления собственные частоты колебаний уменьшаются. С увеличением присоединенной массы в середине резонатора нечетные частоты изгибных колебаний уменьшаются. Четные собственные частоты изгибных колебаний резонатора не зависят от точечной массы, находящейся в середине. По двум частотам изгибных колебаний можно определить точечную присоединенную массу и ее координату по длине резонатора (Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.).

Сопоставлены результаты молекулярнодинамического расчета частот собственных изгибных колебаний УНТ различного диаметра с предсказанием теории тонких упругих оболочек. Установлено, что для УНТ радиуса, большего 13,68°А, размерный эффект перестает проявляться и теория оболочек может использоваться с высокой точностью для оценки частот изгибных колебаний. Об этом также свидетельствует малость погрешности в оценке частот старших гармоник УНТ при радиусе, большем 13,68°А. Полученные результаты для УНТ достаточно большого радиуса хорошо согласуются с литературными данными. С уменьшением радиуса УНТ точность континуальной теории снижается. Аппроксимирующие выражения могут использоваться для расчета частот колебаний УНТ малого радиуса. С ростом амплитуды колебаний за счет геометрической и физической нелинейностей

УНТ наблюдается снижение частоты собственных изгибных колебаний. Результаты исследования полезны для создания терагерцовых резонаторов и наносенсоров малых масс и сил, основанных на использовании резонансных частот колебаний УНТ, проявляющих эффект электромеханической связи (Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С.).

Динамические свойства углеродной нанотрубки могут быть определены с удовлетворительной точностью с использованием ее эффективных жесткостных и массовых характеристик и уравнений теории тонкостенных оболочек. В настоящей работе таким образом рассмотрено поведение однослойной нанотрубки под действием динамического давления на ее внешнюю поверхность. Давление принимается равномерным по всей поверхности в виде ступеньки по времени. Далее оно остается постоянным. При этом давление излучения можно не учитывать в случае легких газов. В условиях плоской деформации трубки может быть рассмотрено кольцо прямоугольного поперечного сечения. Малое начальное отклонение от круговой формы задается в виде суммы гармоник с убывающими амплитудами. Важными параметрами в анализе являются статическое критическое значение давления и собственные частоты радиальных колебаний. Они зависят от количества атомов, образующих кольцо, и его эффективных характеристик. Если действующее давление меньше статического критического давления, то возбуждаются колебания кольца. В противном случае прогибы в линейном анализе неограниченно возрастают. Они сопровождаются высокочастотными колебаниями с уменьшающимися амплитудами по росту гармоник. Определяется преобладающая гармоника в различные моменты динамического выпучивания в зависимости от количества атомов, образующих кольцо. В начале процесса преобладает низшая гармоника с наибольшей амплитудой в начальном прогибе, в дальнейшем быстрее возрастают другие гармоники и происходит их перестройка в зависимости от входных параметров. Эти результаты относятся к линейной стадии развития прогибов нанотрубки. В нелинейной стадии возможна очередная перестройка гармоник, так как потенциальная энергия деформации при более высоких гармониках растет быстрее, чем для низших гармоник. Поэтому при любом их начальном распределении и преобладающих гармониках в зависимости от отношения давления к его критическому значению основной формой деформации может являться низшая гармоника (Дмитриев С.В., Ильгамов М.А.).

Приведенная постановка задачи отличается от обычной теории свободных колебаний струн тем, что учитываются два поверхностных эффекта. Первый из них, связанный различием упругих свойств приповерхностного слоя и основного объема, приводит к изменению эффективной жесткости струны на растяжение. Второй эффект характеризируется безразмерным параметром α. В зависимости от возрастания ($\alpha > 0$) или убывания (*α* < 0) избыточного давления происходит увеличение или уменьшение эффективной жесткости и частот поперечных колебаний струны по сравнению с частотами, возбуждаемыми при давлении сборки системы струна–опоры ($\alpha = 0$). Без учета второго эффекта колебания струны могут быть только периодическими и обусловленными начальными условиями. Предложен способ определения параметра α изменения давления на поверхности струны по экспериментальным данным периодов и амплитуд колебаний в различные моменты времени. Разные формулировки соответствующей обратной задачи приводят к соотношениям, позволяющим получать результаты с различной точностью (Ильгамов М.А., Утяшев И.М.).

Лаборатория «Дифференциальные уравнения механики»

Заведующий лабораторией, заслуженный деятель науки РБ, д.ф.-м.н., профессор С.. Хабиров

Получены законы сохранения в модели фильтрации газа (Хабиров С.В.).

Получены вихревые установившиеся плоские энтропийные течения идеального газа (Хабиров С.В.).

Получены законы сохранения нулевого порядка для вязкой жидкости (Хабиров С.В.).

Предложена математическая модель распространения радионуклидов с учетом их распада в земле в областях с твердыми породами, содержащих трещины (Мигранов Н.Г.).

Проведены исследования, связанные с прохождением света через ячейки с сегнетоэлектрическими жидкими кристаллами с очень малым шагом спирали при воздействии низкочастотных (1 kHz) и высокочастотных (100 kHz) электрических полей. С использованием экспериментальных данных, полученных в настоящей работе, и численных расчетов удалось установить, что с увеличением частоты прикладываемого внешнего электрического поля светопропускание через ячейку уменьшалось более чем в два раза. Это важно для проектирования новых дисплеев на основе сегнетоэлектрических жидких кристаллов с временами отклика на два порядка меньше, чем ныне существующие дисплеи (Мигранов Н.Г.).



Рис. 4. Заслуженный деятель науки РБ, д.ф.-м.н., профессор Салават Валеевич Хабиров

Для одноатомной газовой динамики рассмотрены трехмерные допускаемые подалгебры, содержащие проективный оператор. С их помощью построены подмодели наименьшего ранга: инвариантные подмодели ранга один и регулярные частично инвариантные подмодели ранга два (Шаяхметова Р.Ф.).

Для всех 48 типов 4-х мерных подалгебр, допускаемых моделями сплошной среды гидродинамического типа, вычислены базисы точечных инвариантов. Это позволяет рассмотреть простейшие частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. При этом получаются как регулярные, так и нерегулярные частично инвариантные подмодел. (Хабиров С.В.).

Для уравнения состояния в виде давления сумма функций плотности и энтропии по двумерным подалгебрам построены инвариантные подмодели ранга 2 канонического эволюционного типа (Сираева Д.Т.).

Выведены приближенные модели раскрытия трещины в пласте под действием фильтрующейся жидкости. Модели строятся на точных решениях уравнений движения вязкой жидкости, в том числе и на инвариантных решениях. Учитываются фильтрация жидкости через двигающуюся границу, отсутствие касательного движения на границе и сжимающие трещину упругие силы (Хабиров С.В., Хабиров С.С.).

Для уравнений идеальной газовой динамики в цилиндрической системе координат с произвольным уравнением состояния рассмотрена двумерная подалгебра из оптимальной системы. Базис операторов состоит из оператора галилеева переноса и оператора движения по спиральным линиям. В результате получены решения, описывающие прямолинейный разлет частиц газа с поверхности геликоида. Движения частиц по логарифмическим спиралям, лежащим на параболоиде, и движения по гиперболическим спиралям, лежащим на конусе (Юлмухаметова Ю.В.).

Проведен симметрийный анализ стационарной двумерной вихревой подмодели для течений идеального газа с переменной энтропией. С помощью 4-х интегралов подмодель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений 3-го порядка для функций тока и удельного объема. В системе имеется одна произвольная функция двух переменных, которая выражается через уравнение состояния и произвольных функций интегралов. Найдены преобразования эквивалентности. Перечислены произвольные элементы системы, при которых допускаемая группа расширяется. Построены оптимальные системы подгрупп этих групп. Приведены примеры инвариантных и частично инвариантных решений (Хабиров С.В.).

Относительно общей трехмерной подгруппы с 5-ю произвольными параметрами, содержащей все операторы галилеевых преобразований, рассмотрены все инвариантные решения с линейным полем скоростей для идеальной газовой динамики. Изучены движения частиц в целом. Каждая частица двигается по прямым линиям. В определенные моменты времени частицы собираются на линейных многообразиях коллапса. В зависимости от значений произвольных параметров могут быть несколько многообразий коллапсов. Перечислены все возможные случаи коллапсов частиц. Рассмотрены движения выделенных объемов частиц в виде параллелепипедов, которые проецируются в параллелограммы на многообразиях коллапсов. На примере уравнений газовой динамики у полученных решений изучено движение звуковых поверхностей в зависимости от уравнения состояния. Выведены уравнения движения звуковых характеристик для полученных инвариантных решений. Приведен пример звукового коноида простейшего решения (Хабиров С.В.).

Элементы группового анализа приведены для подмодели плоских установившихся изоэнтропических вихревых течений газа. Решена задача групповой классификации по произвольным элементам уравнения состояния и значениям интегралов Бернулли и вихря. Построены оптимальные системы подалгебр для двух четырехмерных алгебр Ли, возникающих при групповой классификации. По оптимальной системе проведена классификация инвариантных решений для некоторых случаев групповой классификации. Дана физическая интерпретация некоторых решений (Хабиров С.В.).

Рассмотрены уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного как сумма функций плотности и энтропии. Для инвариантной подмодели 2-мерной подалгебры в виде линейной комбинации переносов, выбранной из построенной ранее оптимальной системы неподобных подалгебр, найдены интегралы системы, определен тип системы, система приведена к симметрическому и характеристическому видам, найдены точные решения, определены преобразования эквивалентности для линеаризованной системы, решена задача групповой классификации, построена оптимальная система неподобных подалгебр, применяются интегральные преобразования (Сираева Д.Т., Хабиров С.В.).

По двумерной подалгебре, содержащей проективный оператор и оператор растяжения по термодинамическим параметрам одноатомного газа, рассмотрена инвариантная подмодель ранга 2. Подмодель записана в каноническом виде, поэтому представление решения имеет нетривиальный вид. Получены инвариантные решения, безвихревые движения и серия простых решений с дифференциальными связями. Движения газа происходят без коллапса, во всем пространстве сначала сжимается, а затем разлетается до вакуума. Найдены движения сгустков газа подобные уединенным волнам (Хабиров С.В., Шаяхметова Р.Ф.).

Рассмотрена инвариантная подмодель уравнений газовой динамики, построенная на трехмерной подалгебре с проективным оператором в случае одноатомного газа. Подмодель сведена к уравнению Абеля, для которого построена картина интегральных кривых. Для сепаратрисы седла исследовано приближенное решение. Это решение задает вихревой разлет газа по плоским кривым на поверхности вращения (Шаяхметова Р.Ф.).

Лаборатория «Робототехника и управление в технических системах»

Заведующий лабораторией, д.т.н. О.В. Даринцев

На базе результатов моделирования кинематики, динамики и изучения свойств манипулятора, полученных в ходе выполнения гранта РФФИ № 15-08-02938-а, проведено параметрическое моделирование конструкции многозвенного манипулятора с управляемым изгибом, что позволило создать прикладное программное обеспечение



Рис. 5. Д.т.н., доцент Олег Владимирович Даринцев

для синтеза конструкции манипулятора с заданными эксплуатационными свойствами. Эксперименты с моделями и модернизированными полунатурными стендами позволили просчитать перспективы использования данного типа манипуляторов в медицине (стоматологии) и наметить план дальнейших работ по прототипированию данного оборудования.

Продолжены работы по синтезу методик использования технологий расширенной и виртуальной реальностей в робототехнике при синтезе специализированных информационных и управляющих систем. Получены предварительные результаты по реализации виртуальных синхронных информационных систем на базе разнородных (разнотипных) датчиков с использованием ПЛИС.

Синтезирована предварительная методика построения информационных систем на базе гибридных ПЛИС, что позволит получить не только синхронные данные с разнотипных датчиков, но и провести параллельную обработку информации непосредственно в ПЛИС с использованием встроенных 32-разрядных контроллеров.

Получены результаты реализации распределенных нейросетевых алгоритмов планирования траекторий мобильных роботов на базе трехуровневой информационно-управляющей системы с отдельными элементами облачных технологий (в качестве аппаратной платформы использовались результаты работы по гранту РФФИ № 16-29-04165-офи_м). Получены результаты моделирования течения жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается продольным движением зоны сжатия). Полученные результаты могут быть использованы для разработки элементов вычислительного стенда перспективных микроустройств, исполнительных и захватных. В дальнейшем планируется провести исследование течения жидкости в деформированном внешним воздействием канале из гиперупругого материала и учесть воздействие поверхностного натяжения на формирование капли на выходном конце канала.

Разработан алгоритм с заданной динамикой изменения геометрии для определения диапазона возможностей решения такого рода задач, поскольку при численном моделировании в системах с изменяемой геометрией необходимо контролировать перестроения расчетной сетки с сохранением точности расчетов.

При разработке компьютерной модели элемента применены интерполяционные методы для различных наборов входных параметров (ширина проходного отверстия, градиент давления, вязкость) для аппроксимации отклика системы (расход рабочей жидкости). Ранее данный подход к решению подобного рода задач не применялся.

Выполнен синтез математической модели газотурбинного двигателя (ГТД) на основе матричного подхода с помощью нейронных сетей, новизна которой состоит в использовании двух нейронных сетей, что позволяет использовать при моделировании весь диапазон динамической характеристики двигателя, представленной в виде совокупности взаимосвязанных матриц. Благодаря использованию графоаналитического метода построен алгоритм управления ГТД на режиме разгона с последующим переходом на режим стабилизации, реализующий разгон и выход на режим стабилизации за минимальное время при точности 0,3 %.

Разработана структура роботизированного комплекса, включающего в себя установки получения топлива, а также материалы с заданными свойствами.

Модифицирован сетевой метод моделирования системы топливопитания ГТД: введены зависимости изменения вязкости топлива от температуры рабочей жидкости, а также изменения сил трения на подвижных элементах с учетом используемого материала и конструкции. Получены новые экспериментальные результаты, подтверждающие изменения динамических характеристик дозаторов топлива и повышение сил трения, износа подвижных элементов. Разработан способ косвенного замера вязкости в процессе работы двигателя.

Получены две методики синтеза интеллектуальных алгоритмов распределения задач в группе мобильных роботов, проведены эксперименты по проверке работоспособности, робастности, точности полученных решений. Работы проводились в виде компьютерного моделирования и тестовых прогонов на экспериментальном оборудовании. Рассмотрены различные варианты состояния окружающей среды, группы роботов с идентичными и разными функциональными возможностями (гомогенные и гетерогенные коллективы), проверялась устойчивость систем к наличию возмущений. При оценке способности центра управления обслуживать достаточно большие группы роботов получено, что размер коллектива ограничен вычислительными мощностями и объемами запоминающих устройств, задействованных при решении поставленных задач. Нейросетевая реализация алгоритма планирования не ограничивает количество групп роботов, на которые будет распространяться процесс управления. Аналогичные исследования были также проведены и для метода планирования, реализованного на базе генетических алгоритмов (Даринцев О.В., Мигранов А.Б.).

Получен новый комплекс моделей кинематики и динамики для многозвенных манипуляторов с управляемым изгибом, с помощью которых исследованы различные режимы работы, получена зависимость конечного положения рабочей манипулятора от величины «преднатяга» рабочих тросов. Оптимизирована структура информационной системы манипулятора, в результате которой повышена точность определения внутренних параметров, скорость опроса датчиков и скорость обработки информации. На новые структуры и алгоритмическое обеспечение получены Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ (Даринцев О.В., Богданов Д.Р.).

Получены новые методики синтеза интеллектуальных алгоритмов распределения задач в группе мобильных роботов с учетом специфики окружения, роботов–агентов и т.д. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с разработанными ранее системами планирования.

Продолжены исследования по созданию новых перспективных устройств микроманипулирования на базе капиллярного микрозахвата, в ходе которых выполнен анализ конструктивных схем аналогичных устройств, по результатам которого синтезированы новая архитектура и конструкция микрозахвата. Получены новые методики синтеза конструкции и моделирования основных узлов капиллярного микрозахвата с улучшенными эксплуатационными характеристиками. В отличие от известных пальцевых микрозахватов предлагаемая конструкция захвата не оказывает силового воздействия на объект манипулирования, что гарантирует отсутствие побочных деформаций и нарушения целостности и/или формы манипулируемой детали. Для минимизации размеров микрозахвата и повышения эффективности операций захвата-отпускания (сокращение времени операции) проведено моделирование работы различных конструкций микронасосов, использующих разные типы пьезоэлементов. Полученные расчетные формулы позволят синтезировать быстросчетные алгоритмы управления контуром охлаждения и реализовать систему управления захватом на критических режимах в режиме реального времени.

Проведен анализ новой предметной области — робототехнические комплексы диагностики трубопроводных систем малых размеров со сложной топологией, выявлены проблемы, показаны способы реализации управляемых перемещений в трубопроводах. Синтезированы математические модели, описывающие кинематику и динамику многосегментных мобильных роботов при движении по внутренней поверхности. Проведены эксперименты для уточнения параметров математических моделей.

Продолжены исследования и получены новые, более точные, модели манипулятора с управляемым изгибом, что позволило повысить скорость и точность расчетов. Полученные решения планируется использовать при синтезе информационной и управляющей систем. Модернизирован экспериментальный стенд (Даринцев О.В., Мигранов А.Б., Богданов Д.Р.).

Представлены результаты исследования новой модели топливной аппаратуры ГТД, полученной с использованием синтезированных когнитивных карт. Проведенный сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов показал совпадение расчетных значений при значительном (до 20–40 раз) сокращении времени расчетов. Сформирована методика синтеза и использования когнитивных моделей при разработке новых конструкций элементов топливной автоматики (Денисова Е.В., Сидоров С.П.).

Разработана методика синтеза интеллектуального алгоритма распределения задач в группе мобильных роботов. Отличительным признаком является то, что центр управления способен обслужи-

вать достаточно большие группы роботов, размер которых ограничен его вычислительными мощностями и доступными объемами запоминающих устройств. Предлагаемая нейронная сеть также не ограничивает количество групп роботов, на которые будет распространяться процесс управления. Несомненным преимуществом данной методики является то, что администратор сети может на этапе ввода обучающей выборки назначить повышающий или понижающий коэффициент одному из весов, тем самым указать, насколько важен для распределения задачи тот или иной параметр. Также стоит отметить, что данный метод отличается универсальностью, в рамках его реализации могут быть добавлены другие критерии, на основе которых будет производиться распределение задач.

Синтезирована новая конструкция капиллярного захвата, использующего микроэлемент Пельтье, жидкостную систему охлаждения и новые микродатчики температуры. Размеры устройства уменьшены более чем в 15 раз, площадь рабочей поверхности составляет всего 6 мм². С учетом специфики конструкции и работы захвата синтезирована новая архитектура системы управления.

Разработаны новые конструкции некоторых элементов топливной автоматики, в частности конструкция сервопоршня с антикавитационной поверхностью. Разработана модель ГТД в среде имитационного моделирования Simulink с использованием двух нейронных сетей на основе матричного подхода. Разработана модель сервопоршня для агрегата дозирования топлива на основе нейронной сети и матричного подхода. Искусственно введен параметр, характеризующий степень возможного расслоения статических характеристик сервопоршня, позволяющий учитывать такое расслоение. Введение данного параметра позволило использовать матричный подход и нейронную сеть к моделированию сервопоршня АДТ в среде имитационного моделирования Simulink. Полученная модель может использоваться при моделировании всей САУ БПЛА, что позволит улучшить качество управления системой в целом (Денисова Е.В., Черникова М.С., Сидоров С.П.).

Синтезирована новая конструкция многозвенного манипулятора с управляемым изгибом, проведено комплексное исследование. Для получения информации о натяжении и перемещении силового троса на входе и выходе узла сбора информации были установлены датчики углового положения (magneticrotaryencoder). Требования по снижению массы, веса и стоимости узла (соответственно использование корпусированного варианта датчика неприемлемо) выполнены за счет разработки новой конструкции информационного узла, в которой вместо типовых датчиков углового положения их чувствительные элементы были интегрированы непосредственно в сам узел. Поданы две заявки на Свидетельства о регистрации программ.

При решении задачи моделирования и исследования гидросистем для микроробототехнических комплексов с учетом специфики конструкций и свойств рабочей жидкости исследованы различные режимы течения жидкости через трубку круглого сечения, сжимаемую пьезоэлементом по периодическому закону. Деформация трубки под воздействием пьезоэлемента рассчитывалась уравнениями линейной теории упругости для граничных условий Дирихле и Неймана.

Показано, что подбором давления пьезоэлемента на внешнюю часть трубки можно получить такую же деформацию внутренней части трубки, как и при задании перемещения поверхности контакта внутрь на определенную величину (зависимость является линейной), что означает взаимозаменяемость рассматриваемых граничных условий.

Изучены два режима течения жидкости в деформированной трубке: один конец трубки закрыт, течение индуцируется деформацией трубки; оба конца открыты, течение индуцируется как деформацией трубки, так и приложенным к слою перепадом давления. Первый режим позволяет провести тестирование компьютерной модели, а второй режим — предложить механизм дозирования жидкости, управляемый двумя параметрами (частотой сжатия пьезоэлемента и величиной перепада давления) (Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В.).

Получены новые методики синтеза интеллектуальных алгоритмов распределения задач в группе мобильных роботов с применением муравьиных алгоритмов и нейросетей, выполнен сравнительный анализ полученных результатов с полученными ранее алгоритмами.

Проведена оценка влияния на эффективность охлаждения радиатора следующих параметров: геометрия внутренней камеры микрозахвата и радиатора, расположение входного и выходного каналов, вводимая в систему тепловая мощность, скорость течения жидкости во входном канале. Построены однопараметрические аналитические аппроксимации для зависимости температуры радиатора от времени, а также продолжительности «быстрого» переключения.

Разработана осесимметричная математическая и компьютерная модели пьезоэлектрического микронасоса, проанализированы источники погрешности и определена область применимости модели. Определены параметры выхода микронасоса на рабочий режим.

Получены новые модели кинематики робототехнического комплекса диагностики трубопроводных систем малых размеров, на базе которых построены типовые шаблоны управляемых перемещений в различных сегментах при произвольной ориентации трубы и типовых фитингов. Синтезированы прототипы основных узлов конструкции модульного робота. Проведено компьютерное моделирование, определены ограничения на геометрию, размеры и подвижность отдельных модулей.

Получены новые модели манипулятора с управляемым изгибом, проведена модернизация экспериментального стенда.

Лаборатория «Экспериментальной гидродинамики» Заведующий лабораторией к.ф.-м.н. А. Т. Ахметов

Среди многофазных сред можно выделить жидкости с анизотропными элементами в виде микроскопических включений, в частности дискообразных. Эритроциты (дискоциты) — деформируемые элементы, их анизотропные свойства проявляются при определенных гидродинамических условиях, в частности, при течении крови в микроканале со ступенчатым сужением. Биологическая дисперсия (кровь) состоит из плазмы на 55 % и форменных элементов на 45 %, из них 98 % эритроциты диаметром d = 8 мкм, толщиной 2–3 мкм, объемом 90 мкм³ каждый, их плотность на 6 % выше плотности плазмы. Особенности течения биологической дисперсии изучались в разработанном методом мягкой фотолитографии микрожидкостном устройстве в виде ячейки Хеле-Шоу со ступенчатым сужением (6 × 1 мм с зазором 55 мкм с сужением $100 \times 50 \times 55$ мкм на середине ячейки) при

Рис. 6. К.ф.-м.н. Альфир Тимирзянович Ахметов

гидродинамических условиях, соответствующих человеческому организму.

Отработанная методика обработки результатов скоростной съемки путем измерения покадрового смещения эритроцитов позволила построить поле скоростей и области изменения ориентации дискоцитов в цельной крови. При течении одиночных дискоцитов удалось определить различие скоростей эритроцитов разной ориентации на различной глубине. При течении в сосуде со стенозом следует отметить перед входом в сужение область ускорения, а после выхода из сужения — область торможения. Течение идеальной жидкости при обтекании симметричных препятствий сугубо симметрично, что наблюдается и при течении вязких сред при малых числах Рейнольдса. Дисперсные среды с анизотропными элементами, плотность которых больше плотности несущей фазы, вносят асимметрию как в поле скоростей, так и в структуру течения. Следует отметить, что при течении разбавленной крови дискоциты ориентируются вдоль линий тока: в зоне ускорения — перпендикулярно плоскости ячейки Хеле-Шоу, в зоне торможения — параллельно. При течении цельной крови в зоне ускорения эритроциты ориентированы вдоль линии тока перпендикулярно к плоскости ячейки, после прохождения сужения в зоне торможения перпендикулярно линиям тока и к поверхности модели. Образующаяся упаковка параллельных друг другу эритроцитов после прохождения цельной кровью стеноза позволяет предположить, что процесс тромбообразования более вероятен в области кровеносного сосуда, в котором ориентация движущихся дискоцитов перпендикулярна к линиям тока, т.е. после сужения.

Изучение распространения ударных волн в двух типах проппанта с близкими по размерам гранулами — RCP (ResinCoatedProppant) с полимерным покрытием и обычного проппанта — *P* показало значительную разницу скоростей распространения волн. Наличие оболочки снижает скорость распространения волн как в сухом проппанте, так и в водогазонасыщенном больше, чем на треть. В мелкодисперсных насыпках как из стеклянных шариков (100-250 мкм), так и из фракций песка в том же диапазоне размеров при насыщении водой поглощение ударных волн и их скорость существенно зависят от способа заполнения секции ударной трубы. При одной и той же концентрации водной фазы водогазонасыщенной дисперсии скорость и поглощение волн различаются до 40 % в зависимости от подготовки и способа заполнения секции. Такой необычный результат связан со степенью дробления газовой фазы в поровом пространстве.

Закономерности развития фронта при неустойчивом вытеснении нефти водой в ячейке Хеле-Шоу. Разработана установка с использованием методов визуализации для исследования течений в микроканалах, в том числе процессов вытеснения. Все элементы установки управляются с использованием компьютера и в синхронизированном виде сохраняются в его памяти (видеоизображения, показания датчика давления, весов и заданного расхода). Фрактальный анализ эволюции «вязких пальцев» при двух режимах вытеснения при постоянном перепаде давления и постоянном расходе позволил установить: 1) по мере внедрения пальцев размеры растущих кластеров увеличиваются и их фрактальная размерность тоже возрастает; 2) в режиме постоянного перепада давления зависимости $D(V/V_0)$ хорошо аппроксимируются степенными функциями, которые при кратном увеличении (2,5 раза) перепада давления практически совпадают, в то время, как экспериментальные зависимости в режиме постоянного расхода не поддаются такой аппроксимации и существенно отличаются как друг от друга, так и от режима постоянного давления. В режиме постоянного расхода более быстрый рост фрактальной размерности в сравнении с постоянным перепадом обусловлен более быстрым нарастанием кластеров из-за больших перепадов, возникающих на начальном этапе нагнетания с постоянным расходом. Качественный анализ картины вытеснения до прорыва показывает большую сплошность вытесняющей воды при постоянном расходе и более эффективное вытеснение при расходе 50 мкл/мин. В процессе вытеснения большее диспергирование вытесняемой фазы (нефти) происходит при постоянном перепаде давления, более эффективное вытеснение — при прохождении большего объема воды 10 объемов ячейки. Выявлено 4 этапа вытеснения нефти водой при постоянном перепаде, давления и заданном расходе: 1) до прорыва воды; 2) при закачке воды до 1 объема ячейки; 3) при закачки воды от 1 до 7 объемов ячейки; 4) дальнейшая закачка от 7 до 20 объемов ячейки. По темпам извлечения количество извлеченной нефти по отношению к прокачанной воде 1 этап — 1/1, 2 этап — 1/4, 3 этап — 1/30 и 4 этап — 1/200. Количественное сравнение эффективности вытеснения показывает: до прорыва наиболее эффективно вытеснение при постоянном расходе (50 мкл/мин), при больших объемах прокачки более 10 объемов ячейки при постоянном перепаде давления (50 кПа) (Ахметов А.Т., Рахимов А.А., Валиев А.А.).

Скорость распространения слабых ударных волн в средах из стеклянных шариков и песка в зависимости от водонасыщенности. В ходе экспериментов выявлены следующие общие закономерности, которые характерны для случаев заполнения секции насыпных сред стеклянными шариками или песком: 1) с увеличением влагосодержания скорость распространения волн уменьшается; 2) вакуумирование водонасыщенной насыпной среды приводит к более, чем 7-кратному увеличению скорости волны. То есть микропузырьки кардинальным образом влияют на скорость распространения волн давления в пористой среде, насыщенной водой. Различие распространения волн давления в секции насыпных сред, заполненной стеклянными шариками или песком, насыщенным водой, состоит в следующем: превышение влагосодержания 95 % в песке приводит к увеличению скорости волны с 105 до 160 м/с, что не наблюдается в стеклянных шариках и связано с полисперсным составом песка в сравнении со стеклянными шариками (Ахметов А.Т.).

Установлено, что ультразвуковое воздействие приводит к интенсификации фильтрационного процесса, даже после запирания дисперсий течение в микроканалах возобновляется (Ахметов А.Т., Рахимов А.А., Валиев А.А.).

Способ зондирования насыпных сред в ударных трубах, непосредственно после воздействия ударной волны, с помощью переотраженной волны позволил установить, что наиболее значимые изменения обнаруживаются в насыпных средах при влажности до 5 % объема пор; при более высоких концентрациях действие ударной волны незначительно изменяет свойства насыпной среды; при концентрациях свыше 60 % возникают низкочастотные колебания вплоть до полного водонасыщения; в дегазированной среде при 100 % водонасыщенности у падающей и зондирующей волн эпюры на датчиках идентичны, что демонстрирует объективность метода (Ахметов А.Т.).

В процессе работы проводились экспериментальные исследования течения дисперсий, в том числе с анизотропными элементами. Разработанные и изготовленные методом мягкой фотолитографии микрожидкостные устройства с микроканалами различной топологии и геометрии использовались для физического моделирования стенозов и бифуркации кровеносных сосудов. Ячейки Хеле-Шоу использовались для моделирования пористой структуры и трещин нефтеносной породы. Для регистрации динамики дисперсий в потоке использовалась высокоскоростная микровидеосъемка. Изучение условий проявления эффекта динамического запирания показало:

1. Увеличение содержания изотропных и анизотропных частиц приводило, помимо увеличения вязкости, к уменьшению времени наступления динамического запирания.

2. При одинаковом процентном содержании частиц у эмульсий, содержащих анизотропные включения — хризотил, время наступления запирания и объем протекшей эмульсии до запирания на порядок меньше, чем у эмульсий с содержанием аэросила. Удивительно, что при этом вязкость эмульсии с аэросилом даже выше, чем у аналогичной эмульсии с хризотилом. Это можно объяснить тем, что хризотил — анизотропный порошок со специфическим строением.

Сравнительное изучение вытеснения нефти водой и газом в ячейке Хеле–Шоу показало, что вытеснение водой более эффективно по сравнению с газом. Зависимость объема протекшей жидкости от времени имеет нелинейный вид. После прорыва как газа, так и воды, наблюдается локальное перераспределение давления, что приводит к дополнительному доизвлечению нефти. Эффективность вытеснения нефти в ячейке Хеле–Шоу повышается с увеличением постоянного расхода агента. Увеличение перепада давления ведет к уменьшению размеров диспергировавших остаточных целиков нефти.

При течении цельной и разбавленной (1 % эритроцитов) крови в микроканале, имитирующем стеноз сосудов было обнаружено:

1. В обоих случаях ориентация эритроцитов — вдоль линии тока в зоне ускорения перед стенозом.

2. После прохождения стеноза в зоне торможения цельной крови эритроциты ориентируются перпендикулярно к линиям тока, в разбавленной — параллельно линиям тока в плоскости ячейки Хеле-Шоу.

3. Скорости эритроцитов, измеренные на оси микроканала: в цельной крови после сужения ниже, чем до него, в разбавленной наоборот — существенно выше.

Образующаяся упаковка параллельных друг другу эритроцитов, после прохождения цельной кровью стеноза, позволяет предположить, что процесс тромбообразования более вероятен в области кровеносного сосуда, в котором ориентация движущихся дискоцитов перпендикулярна к линиям тока, т.е. после прохождения сужения (Ахметов А.Т., Рахимов А.А., Валиев А.А., Саметов С.П.).

Издательская деятельность

С 2017 по 2021 годы выпущены с 12 по 16 тома журнала «Многофазные системы». Том 12, вышедший в 2017 году, состоит из двух номеров журнала, которые включают в себя 38 статей по различным направлениям механики, дифференциальным уравнениям и роботехнике. Том 13, состоящий из двух номеров, включает в себя 18 статей по различным направлениям механики, дифференциальным уравнениям и роботехнике. В 2019 году уже удалось собрать том 14 из четырех номеров. В него вошло 36 статей по механике жидкости и газа, механике твердого тела и роботехнике. В 2020 (пандемийном) году журнал наполнился работами участников запланированной VII Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория, эксперимент, приложения». Было опубликовано более 140 статей по различным направлениям механики. В 2021 году выпущено три номера 16 тома, в которых опубликовано 20 статей.

Наукометрические показатели

Докторские диссертации: 2018 год

Чиглинцева А.С. «Гидродинамические и теплофизические основы процессов разложения и образования газогидрата метана в технологиях добычи и хранения природного газа», 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

Кандидатские диссертации: 2017 год

Рафикова Г.Р. «Математическое моделирование образования газогидратов в пористых средах с учетом диффузионной кинетики», 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

2018 год

Аитбаева А.А. «Математическое моделирование и идентификация вида и параметров закрепления конца стержня по собственным частотам его колебаний», 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Кулешов В.С. «Численное исследование свободной конвекции жидкости в термовязких средах с немонотонной зависимостью вязкости гауссовского типа», 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

2019 год

Низамова А.Д. «Устойчивость течения термовязких жидкостей в плоском канале с линейным профилем температуры», 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы. Никонорова Р.Ф. «Инвариантные подмодели одноатомного газа», 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

Монографии:

Ильгамов М.А. Резонанс. М.: ООО «ИПЦ «Маска». Издание третье, дополненное. 2021. 254 с.

Патенты:

Ахметов А.Т., Елизарова В.А., Кислицын А.А. и др. Способ ликвидации ледяных, гидратных и гидратопарафиновых пробок в скважине // Патент № 1739011, кл. Е 21 В 43/00, 37/06. Б.И. № 21. 1992.

Зарегистрированные программы:

Богданов Д.Р. Программа для моделирования и синтеза специализированного цифрового компонента ПЛИС опроса датчика магнитного энкодера AS5048A. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2019613916 РФ, заявл. 11.03.2019, опубл. 26.03.2019.

Богданов Д.Р. Программа для моделирования и синтеза специализированного цифрового компонента ПЛИС (инкрементные датчики), версия 2. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019612092, заявл. 31.01.2019, опубл. 11.02.2019.

Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от коаксиальных сфер при внешнем воздействии // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020618862 от 05.08.2020 г.

Юлмухаметов А.А., Шакирьянов М.М. Программа для вычисления внешней и внутренней присоединенных масс трубопровода, транспортирующего жидкость или газ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021668941; заявл. 11.11.2021; регистрация в Реестре программ для ЭВМ 22.11.2021. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47434316.

Юлмухаметов А.А., Шакирьянов М.М. Нелинейные изгибные колебания трубопровода с учетом внутренней присоединенной массы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669592; заявл. 10.11.2021; регистрация в Реестре программ для ЭВМ 30.11.2021. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47434976.

Коробчинская В.А., Файзуллина Э.А. Определение параметров газокапельной смеси при ударноволновом сжатии в результате точечного взрыва. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2021661096. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. 06.07.2021.

Коробчинская В.А., Гайнуллина Э.Ф. Расчет динамических характеристик ударных волн в газе, генерируемых сильным взрывом в постановке за-



Рис. 7. Вручение Благодарности Президента Российской Федерации С.Ф. Урманчееву

дачи Седова. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2021661097. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. 06.07.2021.

Государственные награды и почетные звания сотрудников Института:

Благодарность Президента Российской Федерации за заслуги в развитии науки и многолетнюю плодотворную деятельность — С.Ф. Урманчеев (2018 г.)

Почетное звание Почетный работник науки и высоких технологий Российской Федерации — Р.Х. Болотнова (2017 г.), А.Т. Ахметов (2021 г.), М.М. Шакирьянов (2021 г.)

Почетная грамота Министерства образования и науки Российской Федерации — Е.В. Денисова (2021 г.), К.И. Михайленко (2021 г.)

Почетная грамота Республики Башкортостан — А.Г. Хакимов (2021 г.), Ж.Г. Огуречникова (2021 г.)



Рис. 8. Заслуженный деятель науки Республики Башкортостан С.В. Хабиров

Заслуженный деятель науки Республики Башкортостан — С.В. Хабиров (2017 г.), В.Ш. Шагапов (2018 г.)

Почетная грамота Министерства финансов Республики Башкортостан — Ж.Г. Огуречникова (2021 г.)

Почетная грамота Министерства экономического развития Республики Башкортостан — Е.А. Хрулева (2021 г.)

Премия им. **Р.Р.** Мавлютова в области технических наук — С.Ф. Урманчеев (2021 г.)

Медаль им. Х.А. Рахматулина — награды Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике — М.А. Ильгамов (2017 г.), С.В. Хабиров (2017 г.), С.Ф. Урманчеев (2018 г.), Р.Х. Болотнова (2018 г.), В.Ш. Шагапов (2019 г.)

Список литературы

- [1] Урманчеев С.Ф. Институту механики Уфимского научного центра РАН – 15 лет! // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2007. Т. 5. С. 11–37. http://mfs.uimech.org/2007/pdf/uim2007.1.preface. pdf
- [2] Урманчеев С.Ф. К двадцатилетию со дня основания ИМех УНЦ РАН // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. 2012. Т. 9, № 1. С. 8–10. http://mfs.uimech.org/2012/pdf/uim2012.1.preface. pdf
- [3] Урманчеев С.Ф., Галимзянов М.Н., Огуречникова Ж.Г., Денисова Е.В., Бушуева Л.С., Юлмухаметова Ю.В. История становления и развития Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 2, № 1. С. 85–100. eLIBRARY ID: 26181032
- [4] Галимзянов М.Н. К двадцатипятилетию со дня основания Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. xii-xxxvi. DOI: 10.21662/uim2017.2.0ii

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 27-37



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.003 DOI: 10.21662/mfs2022.1.003 УДК 532.529:5

Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Особенности формирования сверхкритических пароводяных струй (обзор)¹

Болотнова Р.Х.*, Коробчинская В.А.*,**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа **Башкирский государственный университет, Уфа

В настоящей статье приведен обзор работ по исследованию динамики формирования струи водного флюида сверхкритических параметров при истечении из камеры высокого давления через тонкое сопло. Рассмотрена система модельных уравнений, описывающих динамику процессов истечения как однофазной, так и многофазной газо- парожидкостной сред, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии фаз в соответствии с однодавленческим, односкоростным и двухтемпературным приближениями с учетом контактного теплообмена и массообменных процессов испарения и конденсации в условиях равновесного состояния. Численная реализация модельных представлений осуществлена методом подвижных лагранжевых сеток, а также с применением модифицированных решателей открытого пакета OpenFOAM. Дан анализ особенностей начальной стадии формирования пароводяной струи при истечении через тонкое сопло, основанный на результатах численного моделирования лагранжевым методом в случае двумерной осесимметричной постановки. Рассмотрены задачи, относящиеся к исследованию эволюции формирующейся струи в процессе истечения однофазного потока водяного пара и вскипающей струи сверхкритических параметров состояния, численно реализованные с применением пакета OpenFOAM. Отмечены особенности образования диска Маха, сопровождающиеся возникновением полости внутри струи. Показано, что в процессе истечения вскипающей пароводяной струи формируются вихревые зоны вблизи оси симметрии и образуются периодические пульсации давления и массовой скорости, которые в дальнейшем приводят к акустическим колебаниям, предшествующим основному струйному течению, наблюдаемым в экспериментах. Приведено обоснование достоверности применяемого численного метода, реализованного в новых решателях пакета OpenFOAM, на примере сравнения численного и аналитического решений задачи Л.И. Седова о точечном взрыве в двухфазной газокапельной смеси и сопоставления результатов численного решения и экспериментальной фотографии сверхзвуковой струи азота при истечении через цилиндрическое сопло из резервуара высокого давления.

Ключевые слова: тонкое сопло, истечение вскипающего флюида, математическое и численное моделирование, пакет OpenFOAM

1. Введение

Интерес к изучению процессов формирования струйных течений водяного пара связан с их широким применением в различных технологиях по распылению жидкостей, также он обусловлен задачами, возникающими при внезапной разгерметизации камер высокого давления критических параметров состояния. Анализ динамики таких струй необходим при решении проблем безопасности современного энергетического оборудования с целью предупреждения аварийных ситуаций.

Для задач по определению параметров двухфазных потоков используются различные модели: гомогенного зародышеобразования равновесного или метастабильного потока, термически равновесного или гетерогенного неравновесного потока, модель вихревого па-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0052.

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Болотнова Р.Х.

[©] Коробчинская В.А.

рообразования, а также модели с различным межфазным взаимодействием [1–15].

В работе [1] изучались процессы эволюции газовых струй, сопровождающиеся формированием дисков Маха и образованием вихревых колец. Авторами [2, 3] проводились эксперименты по исследованию истечения перегретой воды из камеры высокого давления через короткие цилиндрические сопла. В работе [4] были продолжены экспериментальные исследования [2] по вскипанию струи перегретой воды при ее истечении через короткий цилиндрический канал при наличии пассивного завихрителя, который оказывает воздействие на форму и структуру потока.

В экспериментальных исследованиях [5] с помощью метода теневой фотографии изучался процесс распыления жидкого топлива высокоскоростной струей перегретого водяного пара, который используется при сжигании жидких углеводородов. Численное исследование нестационарного процесса истечения вскипающего теплоносителя при начальном сверхкритическом давлении, вызванного торцевым разрывом трубопровода, проводилось авторами [6, 7] на основе неравновесной гомогенной [6] и релаксационной [7] моделей, и было обнаружено формирование периодических вихреобразных структур. В работе [7] определялся угол распада струи в зависимости от различных режимных факторов и начальных условий.

В работе [8] представлены результаты численного моделирования и проведен сопоставительный анализ инжекции воздушной струи под большим давлением в замкнутый объем с жидкостями различной плотности при периодических пульсациях давления в газовом объеме, приводящих к его разрушению. Авторами [9] с привлечением численного моделирования и экспериментальных данных была апробирована математическая модель динамики нестационарной жидкой струи, описывающая впрыск топлива в дизеле, подаваемого под давлением в камеру сгорания.

Влияние начального состояния воды в камере высокого давления с учетом интенсивности зародышеобразования вскипающей воды на эволюцию формы пароводяной струи на начальной стадии истечения в условиях эксперимента [2] проанализировано в работе [10]. Численное моделирование проводилось методом сквозного счета с использованием подвижных лагранжевых сеток на основе модели вскипания, предложенной в [11]. Термодинамические свойства воды и пара описывались широкодиапазонным уравнением состояния [12]. Авторы представили сравнительный анализ расчетных и экспериментальных частот зародышеобразования с целью уточнения начального числа и радиуса микропузырьков, влияющих на интенсивность парообразования.

Дальнейшие исследования рассматриваемого процесса проводились для последующих стадий формирования струи с использованием решателей библиотеки открытого пакета OpenFOAM для задачи по истечению водяного пара, изначально находящегося при высоком давлении в сверхкритическом состоянии [13]. Здесь использовалось однофазное приближение для условий истечения, когда возможно не учитывать процессы испарения и конденсации. В [14] исследовалась динамика формирования пароводяной струи с параметрами, близкими к критическим.

В работе [15] были продолжены исследования [10–14] с более детальным изучением особенностей процесса истечения из тонкого сопла в окружающую среду водного флюида со сверхкритическими параметрами. В [15] показана пространственная динамика эволюции формирующейся парожидкостной струи с применением предложенной модели двухфазной смеси, учитывающей равновесные тепло- и массообменные процессы испарения и конденсации с использованием модифицированного авторами решателя reactingTwoPhaseEulerFoam открытого пакета OpenFOAM.

Целью настоящей работы является обзор исследований, касающихся процессов формирования вскипающих пароводяных струй при различных режимах истечения из тонких сопел, с описанием наиболее значимых результатов, полученных за последние несколько лет.

Уравнения модели парожидкостной смеси с учетом испарения и конденсации

Рассмотрим условия моделируемых экспериментов [2], которые были выбраны в качестве базовых при численных исследованиях, проведенных в работах [10, 14, 15]. В зависимости от изучаемого эксперимента водный флюид может находиться в различных состояниях насыщения вплоть до сверхкритического, определяемых давлением p_0 и температурой T₀ [2]. После отпирания заслонки, расположенной на торце узкого цилиндрического сопла радиуса $y_s = 0.25$ мм [2], происходит разгерметизация, сопровождающаяся распадом разрыва, в результате которого в камеру высокого давления распространяется волна разгрузки, а в невозмущенную окружающую воздушную среду (p = 0.1 MIIa, *T* = 300 K) — ударная волна, инициирующая процесс истечения водного флюида.

При численном моделировании изучаемых режимов истечения использовались уравнения динамики газожидкостной смеси в трехмерной декартовой системе координат [16, 17], включающие законы сохранения массы, импульса и энергии каждой фазы в соответствии с однодавленческим, односкоростным и двухтемпературным приближениями с учетом контактного теплообмена и массообменных процессов испарения и конденсации:

уравнения неразрывности фаз

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}) = \Gamma_i; \qquad (1)$$

уравнения сохранения импульса фаз

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i\vec{v}\vec{v}) = -\alpha_i\nabla p +
+ \operatorname{div}(\alpha_i\vec{\tau}_i) + \Gamma_i\vec{v}, \quad (2)$$

$$\vec{\tau}_i = \mu_i\left(\nabla\vec{v} + \vec{v}^T\right) - \frac{2}{3}(\mu_i\operatorname{div}\vec{v})I;$$

уравнения сохранения энергии фаз

$$\frac{\partial (\alpha_{i}\rho_{i}(e_{i}+K_{i}))}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_{i}\rho_{i}\vec{v}(e_{i}+K_{i})) =
= -p\frac{\partial\alpha_{i}}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_{i}\vec{v}p) +
+ \operatorname{div} (\alpha_{i}\gamma_{i,eff}\nabla h_{i}) +
+ K_{ht}(T_{j}-T_{i}) + L_{i}\Gamma_{i}, \quad \gamma_{i,eff} = \frac{c_{p_{i}}}{c_{V_{i}}}\gamma_{i}.$$
(3)

Скорость массообмена $\Gamma_i = \frac{dm_i}{dt}$ определяется интенсивностью процесса испарения (конденсации) в равновесном состоянии насыщения, описываемым уравнением Антуана [18]. В уравнениях (1)-(3) использовались следующие обозначения: $\vec{\tau}_i$ — тензор вязких напряжений; c_{p_i}, c_{V_i} — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме; γ_i — температуропроводность; $\gamma_{i,eff}$ — эффективная температуропроводность; h_i — энтальпия; T_i температура; *L_i* — скрытая теплота парообразования/конденсации; *K*_{ht} — коэффициент теплообмена; μ_i — динамическая вязкость; ρ_i — плотность; α_i — объемное содержание; e_i , K_i — внутренняя и кинетическая энергии; нижний индекс i = l, g соответствует жидкой и газовой фазам; \vec{v} — вектор массовой скорости; *р* – давление. Термодинамические свойства воды и водяного пара описывались совершенными уравнениями состояния.

Оценка достоверности метода численной реализации модели для решения задач динамики струйных течений

Для обоснования достоверности используемого метода численного моделирования на платформе OpenFOAM в работе [15] было проведено сравнение расчетного решения, полученного с помощью решателя из пакета OpenFOAM, и автомодельного решения задачи Л.И. Седова о точечном взрыве плоской конфигурации в газокапельной среде [19]. Ниже приведено используемое для сравнительного анализа аналитическое решение задачи Седова для эйлеровой координаты x, скорости v и давления p [19]:

$$\frac{x}{r_{2}} = \left[\frac{3}{4}(\gamma+1)V\right]^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{3}{2}\gamma V-1\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2\gamma-1}} \times \\ \times \left[3\left(1-\frac{\gamma+1}{2}V\right)\right]^{\frac{5\gamma-4}{3(1-2\gamma)}}, r_{2} = \left(\frac{E}{\rho_{0}'}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \\ \frac{v}{v_{2}} = \frac{3}{4}(\gamma+1)V\frac{x}{r_{2}}, v_{2} = \frac{4}{3(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\rho_{1}}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \quad (4) \\ \frac{p}{p_{2}} = \left[\frac{3}{4}(\gamma+1)V\right]^{\frac{2}{3}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{3}{2}V\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \times \\ \times \left[3\left(1-\frac{\gamma+1}{2}V\right)\right]^{\frac{3\gamma+4}{3(2-\gamma)}}, p_{2} = \frac{8E}{9r_{2}(\gamma+1)},$$

где интервал изменения безразмерной переменной V определен неравенством $\frac{2}{3\gamma} \leqslant V \leqslant \frac{4}{3(\gamma+1)}$, где $\gamma = \frac{c_{p_g} + kc}{c_{V_g} + kc}$ — показатель адиабаты газокапельной смеси, зависящий от удельных теплоемкостей газа c_{p_g} , c_{V_g} и теплоемкости жидких частиц c. В работе [19] предполагалось, что наличие жидких частиц в газе увеличивает инерцию среды, которая остается однородной по плотности: $\rho' = \rho_g(1+k)$,

положительная константа. При аналитическом решении задачи о точечном взрыве в газокапельной смеси (4) были использованы следующие начальные условия: энергия взрыва $E = 10 \ \text{Дж}, \ \rho_0' = \rho_{g0}(1+k), \ \text{где } k = 100,$ $\rho_{g0} = 0.01251 \ \text{кг/m}^3, \ \text{показатель адиабаты смеси}$ $\gamma = 1.1, \ p_0 = 0 \ \text{Па}, \ T_0 = 0 \ \text{K}.$

где ρ_g — плотность совершенного газа (азот), а k —

Численное моделирование задачи о точечном взрыве в газокапельной среде с использованием пакета OpenFOAM [18] проводилось для начальных и граничных условий, близких к выбранным при автомодельном решении рассматриваемой тестовой задачи. Ниже приведена система уравнений сохранения массы, импульса и энергии для двухфазной смеси в односкоростном однотемпературном приближении с равным давлением фаз [18]:

$$\frac{\frac{\partial(\alpha_i\rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i\vec{v}) = 0,}{\frac{\partial(\alpha_i\rho_i\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i\vec{v}\vec{v}) = -\alpha_i\nabla p + \operatorname{div}(\alpha_i\vec{\tau}_i),}$$
$$\frac{\frac{\partial(\alpha_i\rho_i(e_i + K_i))}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i\vec{v}(e_i + K_i)) = -p\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_i\vec{v}p).$$

Начальное объемное газосодержание азота $\alpha_{g0} = 0.99$ соответствовало начальной плотности смеси, принятой в аналитическом автомодельном решении: $\rho_{0}^{'} = \rho_{g0} \alpha_{g0} + \rho_{l0} (1 - \alpha_{g0})$, $ho_{g0} = 0.01251$ кг/м³, $ho_{l0} = 1000$ кг/м³. Теплофизические параметры газокапельной смеси выбирались таким образом, чтобы показатель адиабаты также соответствовал используемому в аналитическом решении [19] $\gamma = 1.1$. При формировании начальных и граничных условий использовались утилиты setFieldsDict и blockMeshDict из выбранного решателя OpenFOAM. На левой границе расчетной области задавались временные зависимости давления p(t), температуры T(t), скорости $\vec{v}(t)$ и объемного газосодержания $\alpha_g(t)$ в виде табличной функции для нестационарного типа граничного условия uniformFixedValue, задаваемой в нулевом файле данных созданной файловой структуры решателя в соответствии с аналитическими решениями, полученными для координаты, удаленной от точки взрыва на расстояние x = 0.2 мм.

На рис. 1 представлены профили давления p(x) и массовой скорости $v_x(x)$ в указанные моменты времени (в мкс), полученные в случае автомодельного решения [19] (1), и численные результаты аналогичной задачи с применением пакета OpenFOAM (2), по которым можно оценить их удовлетворительное согласование.

В дополнение к сравнению аналитического и численного с использованием пакета OpenFOAM решений был проведен сопоставительный анализ данных численного расчета с результатами эксперимента [20], приведенного в [15]. В выбранном эксперименте изучался процесс формирования сверхзвуковой струи азота при истечении через цилиндрическое сопло диаметром d = 10 мм из резервуара высокого давления при начальном давлении $p_{0r} = 4$ МПа и температуре $T_{0r} = 300$ К в окружающую атмосферу с $p_b = 0.1$ МПа, $T_b = 300$ К. На рис. 2(а) показана фотография струи азота в момент времени t = 0.2 мс от начала процесса истечения [20].



Рис. 1. Распределения давления p(x) (*a*) и массовой скорости $v_x(x)$ (*b*) в моменты времени 50, 100 и 150 мкс: 1 — аналитическое решение [19], 2 — численное решение с применением решателя пакета OpenFOAM

Численная реализация моделируемого эксперимента проводилась с использованием системы уравнений газовой динамики, включающей уравнения сохранения массы, импульса и энергии [18]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial \left(\rho \vec{v}\right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \vec{v}\right) = -\nabla p + \operatorname{div} \vec{\tau},$$
$$\frac{\left(\rho \left(e + K\right)\right)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \vec{v} \left(e + K\right)\right) = -\operatorname{div} \left(\vec{v}p\right).$$

9

На рис. 2(b) приведены результаты численных расчетов в виде магнитуды скоростей $|\vec{v}(x, y)|$, полученные для задачи о струйном истечении азота в момент времени 0.2 мс и соответствующие условиям эксперимента, представленного на рис. 2(a).

Анализ экспериментальной фотографии и соответствующего ей расчетного распределения поля скоростей (рис. 2) показал согласованность результатов эксперимента с полученным решением для сформированной сверхзвуковой осесимметричной струи газа со степенью нерасчетности $n = p_a/p_b > 2$, где p_a — давление на срезе сопла; p_b — давление окружающей среды. Видно, что в обоих случаях струя приобретает бочкообразную форму с образованием нормального скачка уплотнения (диска Маха) и висячего скачка уплотне-



Рис. 2. Распределение полей скоростей при струйном истечении газа азота в момент времени 0.2 мс при начальном перепаде давлений $p_{0r}/p_b = 40/1$ [20]: (а) — экспериментальная фотография [20]; (b) — результаты расчетов, полученных с использованием пакета ОрепFOAM

ния, формирующегося по границе «бочки». Расстояние от выхода сопла до диска Маха на оси струи оценивалось по формуле [21]:

$$x_M = 0.67d \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{0.5}.$$
 (5)

Величина *x*_{*M*} = 33.58 мм была найдена исходя из значений $p_a = 2.5 \text{ MПa}$, $p_b = 0.1 \text{ MПa}$, полученных в расчетах моделируемого эксперимента. Численное решение показало совпадение характерного расчетного расстояния $x_c = 33.6$ мм с оценкой (5). На экспериментальной фотографии расстояние от выхода сопла до диска Маха $x_e = 33.2$ мм имеет относительную погрешность $\delta_x = (\left|x_e - x_M\right| / x_M) \cdot 100\% pprox 1\%$ в сравнении с *x*_M и численным решением с применением пакета OpenFOAM (*x*_c = 33.6 мм). Для значений диаметра диска Маха d и высоты бочки h получены следующие оценки экспериментальных и расчетных величин: $d_e = 15.5$ мм, $d_c = 15$ мм, $h_c = h_e = 20 \text{ mm}, \quad \delta_d = (\left| d_e - d_c \right| / d_e) \cdot 100\% < 5\%.$ Проведенный анализ показал удовлетворительное согласование экспериментальных данных [20] и численных решений, полученных с применением пакета OpenFOAM [15].



Рис. 3. Фотография струи вскипающей воды в процессе истечения для начальных условий сверх-критического состояния при $T_0=650~{\rm K}$ [2]

Исследование процессов формирования и эволюции вскипающих пароводяных струй

На начальном этапе исследований особенности процессов истечения изучались в одномерном приближении. В работе [11] построена двухфазная модель вскипающей парожидкостной смеси в переменных Лагранжа и исследованы процессы полного истечения вскипающей жидкости при разгерметизации трубы высокого давления.

При исследовании задач пространственного истечения пароводяной смеси в [10] применялся численный метод сквозного счета на подвижных лагранжевых сетках, деформирующихся во времени, и анализировалось формирование начальной стадии струйного течения со следующими исходными значениями параметров в камере высокого давления: $T_0 = 650$ К и $p_0 = 22.73$ МПа.

На рис. 3 представлена фотография струи вскипающей воды в режиме гомогенного зародышеобразования для вышеуказанных начальных условий сверхкритического состояния, при котором форма образующейся струи близка к параболической [2]. При этих условиях истечения формирование струи происходит в режиме образования незначительной доли жидкой фазы ($\alpha_l \approx 10^{-4}$), т.е. при частичной конденсации пара. Так же, как и в эксперименте, в расчетах (рис. 4) наблюдается интенсивное расширение газового потока, в котором достигаются сверхзвуковые скорости истечения. На момент времени t = 0.5 мкс расчетные скорости потока достигают ≈ 1000 м/с, что по оценке скорости звука в паре соответствует числу Маха $M \approx 2.3$. На рис. 4 в момент времени *t* = 0.5 мкс в полученных расчетах фиксируется радиальное расширение струи по боковой границе на центральном участке и ее сужение в крайней граничной зоне по направлению движения потока (в лидере струи). С течением времени (см. рис. 4, t = 1.0 мкс) сверхзвуковой режим истечения сохраняется, происходит дальнейшее расширение потока по боковым границам с большими значениями v_y составляющей скорости на этих участках по сравнению с осевой зоной, что сопровождается, как и в эксперименте [2], формированием струи параболического вида.

Применение лагранжева подхода, используемого при численном моделировании [10], ограничивает продолжительность расчетов для изучения последующих стадий формирования струи.

В расчетах, проведенных в работе [13], процесс истечения водяного пара из тонкого сопла проводился с использованием решателя sonicFoam библиотеки открытого пакета OpenFOAM [18] с уравнением состояния водяного пара Пенга– Робинсона, что позволило исследовать изучаемое явление на более длительных временных интервалах физического процесса.

В расчетах предполагалось, что в начальный момент времени в узком цилиндрическом сопле находится водяной пар при давлении $p_0 = 22.73$ МПа и температуре $T_0 = 1273$ К. В связи с модельными ограничениями однофазного приближения начальное состояние водяного пара в камере высокого давления выбиралось таким образом, чтобы исключить возможность конденсации пара в процессе истечения, то есть предполагалось, что формирование струи происходило в режиме перегретого пара. Как и в эксперименте [2], в расчетах наблюдалось интенсивное расширение струи и достигались сверхзвуковые скорости истечения $\vec{v} \approx 1200$ м/с. Начиная с момента времени *t* = 10 мкс в расчетах формировались скачки уплотнения. Вдоль границы расширяющейся сверхзвуковой струи образуется висячий скачок уплотнения, при отражении которого от оси симметрии происходит формирование прямого скачка уплотнения, являющегося пограничной зоной между областями сверхзвукового (2) и дозвукового (3) течений (рис. 5). Вдоль боковой границы струи концентрируется основной поток газа (4), характеризующийся также сверхзвуковым режимом истечения *M* = 1.17. С течением времени по внешнему участку струи сверхзвуковой режим истечения сохраняется. Взаимодействие высокоскоростного потока с примыкающей к нему слабо возмущенной зоной приводит к искривлению траектории движения газа и развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [1], что сопровождается об-



Рис. 4. Расчетные распределения давления *p* и мгновенного поля скоростей \vec{v} в процессе истечения в указанные моменты времени (мкс)



Рис. 5. Эволюция расчетного распределения скоростей в процессе истечения водяного пара из тонкого сопла из начального сверхкритического состояния



Рис. 6. Расчетные поля давления p(x,y) при струйном истечении для моментов времени 0.1 (а) и 0.2 (b) мс. В верхнем углу фрагмента (а) приведена расчетная зависимость от времени давления p(t) на оси симметрии струи для точки $x^* = 0.025$ м

разованием и развитием вихревых зон. Основной вихрь поддерживает сверхзвуковую скорость потока на внешнем участке струи. Более слабый вихрь, образующийся вблизи оси симметрии в окружающем струю газе за счет направления потока газа навстречу движению струи, способствует смещению центральной зоны диска Маха в сторону сопла, что приводит к формированию полой струи.

Дальнейшее исследование изучаемого явления проводилось с дополнительным учетом в модели газо- парожидкостной смеси тепло- и массообменных процессов, происходящих при наличии испарения и конденсации в соответствии с системой уравнений (1)–(3) [15].

При компьютерной реализации использовался модифицированный авторами решатель reactingTwoPhaseEulerFoam в среде пакета OpenFOAM, построенный на основе вычислительного алгоритма PIMPLE, который значительно ускоряет вычисления и позволяет достичь хорошей скорости сходимости решений. Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных по каждому контрольному объему



Рис. 7. Расчетные поля модуля скорости $|\vec{v}(x,y)|$ при струйном истечении для моментов времени 0.1 (а) и 0.2 (b) мс. В верхнем углу фрагмента (а) приведена расчетная зависимость от времени составляющей скорости $v_x(t)$ на оси симметрии струи для точки $x^* = 0.025$ м

обеспечивает консервативность численной схемы. Численное решение задачи выполнено в осесимметричной постановке. Для достижения точности расчетов использовалась адаптивная сгущающаяся сетка в области тонкого сопла. На внутренних границах расчетной области принималось условие скольжения.

Результаты численного моделирования исследуемого режима истечения, соответствующего приведенной в разделе 2 постановке задачи при начальных значениях давления водного флюида $p_0 = 22.73$ МПа и температуры $T_0 = 650$ К, находящегося в цилиндрическом сосуде высокого давления длины $x_h = 10$ мм и радиуса $y_h = 10$ мм, представлены на рис. 6 и 7 в моменты времени t = 0.1 и 0.2 мс в виде динамики полей давлений p(x,y) (рис. 6), модуля скоростей $|\vec{v}(x,y)|$ и линий тока (рис. 7). На дополнительных фрагментах рис. 6(а) и 7(а) приведены временные зависимости давления p(t) и составляющей скорости $v_x(t)$, контролируемые на оси симметрии в точке $x^* = 0.025$ м. К моменту времени t = 0.1 мс (рис. 6, 7), как и в эксперименте [2], фиксируется

интенсивное расширение струи, которая приобретает форму, близкую к параболической, и достигаются сверхзвуковые скорости истечения порядка 1200 м/с с числом Маха *M* = 1.22. Основной поток газа вдоль боковой границы струи характеризуется также сверхзвуковым режимом истечения. На границах сверхзвукового течения наблюдается образование висячего и центрального (диска Маха) скачков уплотнения. Со временем (t = 0.1, 0.2 мс) взаимодействие высокоскоростного потока со слабо возмущенной газовой областью сопровождается искривлением линий тока и появлением вихревых зон, являющихся следствием развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Процесс формирования серии тороидальных вихрей способствует закручиванию струи, ее расширению и в дальнейшем приводит к турбулизации потока (см. на рис. 7 динамику полей скоростей и линий тока в моменты времени t = 0.1, 0.2 мс).

Давление в струе снижается от изначально создаваемого в камере высокого давления $p_0 =$ 22.73 МПа до значений ниже 0.15 МПа (рис. 6). С течением времени в ближней зоне оси симметрии формирующийся режим истечения образует локальные области периодически изменяющегося давления и массовой скорости потока в струе, показанные в виде пульсаций давления и массовой скорости на дополнительных фрагментах рис. 6(а) и 7(а) для точки $x^* = 0.025$ м, расположенной на оси симметрии струи. Полученные в расчетах пульсации с амплитудой давления $\Delta p \approx 0.6$ бар и нарастающим диапазоном колебаний массовой скорости до $\Delta v_x \approx 400$ м/с имеют характерный период колебаний $\tilde{T} \approx 25$ мкс, что соответствует частоте $\tilde{v} = 1/\tilde{T} \approx 40$ кГц. Рассмотренный выше режим струйного течения является источником формирования радиально распространяющихся периодических акустических колебаний, присутствующих в изначально невозмущенной газовой области перед основной струей, которые наблюдались также и в экспериментальных исследованиях [2, 3].

5. Заключение

В обзоре представлены результаты теоретических исследований особенностей формирования осесимметричных струй в процессе истечения вскипающих жидкостей через тонкое сопло из камеры высокого давления.

Приведены уравнения модели, описывающие динамическое поведение газо- парожидкостной среды в процессе формирования многофазных струйных течений с учетом тепло- и массообменных процессов.

Обозначены методы численного моделирова-

ния, используемые при решении рассматриваемых задач. Показано развитие модельных представлений и применяемых численных методов при исследовании изучаемых процессов с визуализацией полученных результатов.

На первых этапах исследований начальной стадии процесса формирования струи показано, что при начальной сверхкритической температуре формируется сверхзвуковой режим истечения с незначительной конденсацией паровой фазы и формированием струи параболического вида.

Дальнейшие численные исследования с применением модификаций решателей из пакета OpenFOAM выявили условия образования в струе висячего скачка уплотнения, диска Маха и вихревых зон, которые закручивают струю в сторону внешнего участка. Развитие струйного потока сопровождается формированием группы тороидальных вихрей, которые образуют динамические локальные области периодических пульсаций давления и массовой скорости в ближней зоне оси симметрии струи, являющиеся источниками акустических пульсаций в газовой области, предшествующих основному потоку.

Достоверность используемого численного метода основана на сравнении численных и аналитических решений тестовой задачи. Показано удовлетворительное согласование моделируемого процесса формирования сверхзвуковой струи азота с экспериментальными данными.

Список литературы

- Ishii R., Fujimoto H., Hatta N., Umeda Y. Experimental and numerical analysis of circular pulse jets // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 392. Pp. 129–153. DOI: 10.1017/S0022112099005303
- [2] Решетников А.В., Бусов К.А., Мажейко Н.А., Скоков В.Н., Коверда В.П. Переходные режимы вскипания струй перегретой воды // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 3. С. 359– 367. eLIBRARY ID: 18198606
- [3] Решетников А.В., Мажейко Н.А., Скоков В.Н., Беглецов В.Н., Коверда В.П. Динамика пульсаций при взрывном вскипании струй перегретой воды // Письма в Журн. техн. физики. 2007. Т. 33, вып. 17. С. 31–37. eLIBRARY ID: 20326320
- [4] Бусов К.А., Решетников А.В., Мажейко Н.А., Капитунов О.А. Исследование влияния пассивного завихрителя на истечение перегретой жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 2019. № 1. С. 62-68. DOI: 10.15372/PMTF20190108
- [5] Ануфриев И.С., Шадрин Е.Ю., Копьев Е.П., Шарыпов О.В., Лещевич В.В. Распыление жидкого топлива высокоскоростной струей водяного пара // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 4. С. 659–662. eLIBRARY ID: 44466732
- [6] Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А., Сорокин А.Л. Генерация ударноволновых и вихревых структур при истечении струи вскипающей воды // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 6. С. 795–798. eLIBRARY ID: 22599881

- [7] Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А. Волновые процессы при истечении водяного теплоносителя со сверхкритическими начальными параметрами // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 5. С. 821–824. eLIBRARY ID: 30291172
- [8] Алексеев М.В., Вожаков И.С., Лежнин С.И. Пульсации давления при инжекции газа в заполненный жидкостью закрытый объем при больших перепадах давления // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 5. С. 833–836. eLIBRARY ID: 42313598
- [9] Сеначин П.К., Кирюшин И.И., Самарин А.В., Сеначин А.П., Ульрих С.А. Численное моделирование динамики нестационарной жидкой струи // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 6. С. 853–867. eLIBRARY ID: 46374941
- [10] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Пространственное моделирование процесса формирования струи вскипающей воды при истечении из тонкого сопла // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24. № 5. С. 783–794. eLIBRARY ID: 30291168
- [11] Болотнова Р.Х., Бузина В.А. (Коробчинская В.А.), Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 6. С. 719–730. eLIBRARY ID: 18198246
- [12] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313. eLIBRARY ID: 15639102
- [13] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Особенности формирования полой струи водяного пара сверхкритических параметров состояния, истекающего через тонкое сопло // Теплофизика

и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 783–789. eLIBRARY ID: 36825486

- Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Faizullina E.A. Analysis the dynamic formation of a vapor supersonic jet under outflow from thin nozzle // J. Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2103. P. 012219-1-012219-6.
 DOI: 10.1088/1742-6596/2103/1/012219
- [15] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Моделирование динамики струи при истечении через тонкое сопло водного флюида, находящегося в сверхкритическом состоянии // Теплофизика и аэромеханика. 2022. Т. 29, № 3. С. 361–370. eLIBRARY ID: 48738287
- [16] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука. Т. 1. 1987. 464 с.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука.Т. VI. 1986. 736 с.
- [18] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. http://www.openfoam.com (дата обращения: 31.10.2022)
- [19] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1977. 440 с.
- [20] Orescanin M.M., Austin J.M., Kieffer S.W. Unsteady high-pressure flow experiments with applications to explosive volcanic eruptions // J. of Geophysical Research. 2010. Vol. 115. Pp. B06206-1-806206-18. DOI: 10.1029/2009JB006985
- [21] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука. Т. 1. 1991. 597 с.
ISSN 2658-5782

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.003 DOI: 10.21662/mfs2022.1.003

17 (2022), 1-2, 27-37

Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

The formation features of supercritical steam-water jets (review)

Bolotnova R.Kh.*, Korobchinskaya V.A.*,**

*Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia **Bashkir Sate University, Ufa, Russia

The review of works on study of dynamics formation of water fluid jet of supercritical parameters outflowing from a high-pressure chamber through a thin nozzle has been carried out. The system of model equations describing the dynamics of outflow processes in both single-phase and multiphase gas-vapor-liquid media is considered. It based on the laws of conservation of mass, momentum and energy of phases in accordance with single-pressure, single-speed and two-temperature approximations with the allowance for contact-type heat transfer and mass transfer for evaporation and condensation under equilibrium conditions. The numerical realization of model representations is carried out by the method of movable Lagrangian grids and using modified solvers of the OpenFOAM package. The analysis of the features initial stage of the formation of a steam-water jet at outflow through a thin nozzle is given based on the results of numerical simulation by the Lagrangian method in the case of a two-dimensional axisymmetric formulation. The problems about the study of the evolution a forming jet during the outflow of a single-phase flow of water-steam and a boiling jet of supercritical state parameters are considered, by the numerical realization in the OpenFOAM package. The features the formation of Mach disk, accompanied by the appearance of a cavity inside the jet, are noted. It is shown that during the outflow of a boiling steam-water jet, the vortex zones are formed near the axis of symmetry and periodic pulsations of pressure and mass velocity are generated, which subsequently lead to acoustic oscillations preceding the main jet flow observed in experiments. The justification of reliability the applied numerical method realized by the new OpenFOAM solvers is given on the example of comparing numerical and analytical solutions to L.I. Sedov's problem of a point explosion in two-phase gas-drop mixture and comparing the results of numerical solution and experimental photography of supersonic nitrogen jet outflowing through cylindrical nozzle from high-pressure vessel.

Keywords: thin nozzle, boiling water outflow, mathematical and numerical modeling, OpenFOAM package

References

- [1] Ishii R., Fujimoto H., Hatta N., Umeda Y. Experimental and numerical analysis of circular pulse jets // J. Fluid Mech. 1999. V. 392. Pp. 129–153. DOI: 10.1017/S0022112099005303
- [2] Reshetnikov A.V., Busov K.A., Mazheiko N.A., Skokov V.N., Koverda V.P. Transient behavior of superheated water jets boiling // Thermophysics and Aeromechanics. 2012. V. 9, No. 2. Pp. 329-336. DOI: 10.1134/S0869864312020151
- [3] Reshetnikov A.V., Mazheiko N.A., Skokov V.N., Begletsov V.N., Koverda V.P. Pulsation dynamics during explosive boil-up of overheated water jets // Techn. Phys. Letters. 2007. V. 33, No. 9. Pp. 732-737. DOI: 10.1134/S1063785007090052
- [4] Busov K.A., Reshetnikov A.V., Mazheiko N.A., Kapitunov O.A. Effect of a passive swirler on the superheated liquid flow // J. Applied Mech. Techn. Phys. 2019. V. 60, No. 1. Pp. 53–58. DOI: 10.1134/S0021894419010085

- [5] Anufriev I.S., Shadrin E.Yu., Kopyev E.P., Sharypov O.V., Leschevich V.V. Liquid fuel spraying by a high-speed steam 0 V jet // Thermophysics and Aeromechanics. 2020. V. 27, No. 4. Pp. 627-630. DOI: 10.1134/S0869864320040162
- [6] Alekseev M.V., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A., Sorokin A.L. Generation of shockwave and vortex structures at the outflow of a boiling water jet // Thermophysics and Aeromechanics. 2014. V. 21, No. 6. Pp. 763–766. DOI: 10.1134/S0869864314060122
- [7] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A. Wave processes at outflow of water coolant with initial supercritical parameters // Thermophysics and Aeromechanics. 2017. V. 24, No. 5. Pp. 799-802. DOI: 10.1134/S0869864317050158
- [8] Alekseev M.V., Vozhakov I.S., Lezhnin S.I. Pressure pulsations during gas injection into a liquid-filled closed vessel with a



high pressure drop // Thermophysics and Aeromechanics. 2019. V. 26, No. 5. Pp. 781–784. DOI: 10.1134/S0869864319050159

- [9] Senachin P.K., Kiryushin I.I., Samarin A.V., Senachin A.P., Ulrich S.A. Numerical simulation of the dynamics of a nonstationary liquid jet // Thermophysics and Aeromechanics. 2020. V. 27, No. 6. Pp. 811–824. DOI: 10.1134/S0869864320060025
- [10] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. Boiling water jet outflow from a thin nozzle: spatial modeling // Thermophysics and Aeromechanics. 2017. V. 24, No. 5. Pp. 761–771. DOI: 10.1134/S0869864317050110
- [11] Bolotnova R.Kh., Buzina V.A. (Korobchinskaya V.A.), Galimzyanov M.N., Shagapov V.Sh. Hydrodynamic features of boiling liquid outflow // Teplofizika i Aeromekhanika [Thermophysics and Aeromechanics]. 2012. V. 19, No. 6. Pp. 719–730 (in Russian). eLIBRARY ID: 18198246
- [12] Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-range equation of state of water and steam: Simplified form // High Temperature. 2011. V. 49, No. 2. Pp. 303-306.
 DOI: 10.1134/S0018151X11020106
- [13] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Supercritical steam outflow from a thin nozzle: forming a hollow jet // Thermophysics and Aeromechanics. 2018. V. 25, No. 5. Pp. 751–757. DOI: 10.1134/S0869864318050116
- [14] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Faizullina E.A. Analysis the dynamic formation of a vapor supersonic jet under outflow

from thin nozzle // J. Physics: Conference Series. 2021. V. 2103. Pp. 012219–1–012219-6. DOI: 10.1088/1742-6596/2103/1/012219

- [15] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. Modeling of dynamics of supercritical water jet outflowing from a thin nozzle // Thermophysics and Aeromechanics. 2022. Vol. 29, № 3. Pp. 347–355. DOI: 10.1134/S0869864322030039
- [16] Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. Hemisphere, New York, 1990.
- [17] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Vol. 6. Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [18] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. http://www.openfoam.com (дата обращения: 31.10.2022)
- Sedov L.I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. CRC Press, Boca Raton, 1993.
 DOI: 10.1201/9780203739730
- [20] Orescanin M.M., Austin J.M., Kieffer S.W. Unsteady high-pressure flow experiments with applications to explosive volcanic eruptions // J. of Geophysical Research. 2010. V. 115. Pp. B06206-1-B06206-18. DOI: 10.1029/2009JB006985
- [21] Abramovich G.N. Applied Gas Dynamics. Foreign Technology Div Wright-Patterson AFB, OH, 1973.

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 38-50



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.004 DOI: 10.21662/mfs2022.1.004 УДК 532.529:5

Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Моделирование динамических явлений в водных пенах (обзор)¹

Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Приведен аналитический обзор исследований, направленных на изучение поведения водной пены в условиях ударно-волнового воздействия. Проанализированы основные подходы и теоретические приближения, используемые при разработке моделей водных пен. Рассмотрена двухфазная газокапельная модель водной пены, основанная на законах сохранения массы, импульса и энергии в соответствии с однодавленческим, двухскоростным, двухтемпературным приближениями, описывающая ее динамику при ударной нагрузке высокой интенсивности, при воздействии которой происходит разрушение пенной структуры на микрокапли. Модель учитывает межфазный теплообмен, силы межфазного сопротивления, присоединенных масс и явление синерезиса (осаждения) пены. Численная реализация модели проведена с применением новых решателей в программном комплексе OpenFOAM. Дан анализ численного решения задачи о сферическом взрыве в водной пене для условий литературных экспериментальных данных. Показано влияние синерезиса на интенсивность и скорость распространения ударной волны. Рассмотрена двухфазная модель водной пены, учитывающая ее упруго-вязко-пластические свойства для условий слабого ударного воздействия, не разрушающего ее структуру. Модель учитывает упругие свойства водной пены при небольших деформациях и при переходе пены из упругого состояния в вязкопластическое описывает ее как неньютоновскую жидкость. Проанализирована динамика распространения слабой ударной волны в слое водной пены с формированием двухволновой структуры волны сжатия, состоящей из основной волны и опережающего ее упругого предвестника. Показан процесс формирования за фронтом ударной волны локальной зоны уплотнения водной пены, за которой следует газовая область. Достоверность полученных результатов численных исследований подтверждена их согласованием с литературными экспериментальными данными.

Ключевые слова: ударная волна, водная пена, пакет OpenFOAM, математическое и численное моделирование

1. Введение

Широкое практическое применение ударных волн (УВ) в различных областях технологической деятельности связано с необходимостью поиска эффективных средств противоударной защиты для обеспечения безопасности на промышленных объектах и производствах.

Перспективным методом ослабления интенсивности ударного воздействия является применение защитных преград на основе водных пен, способных существенно снижать амплитуду и скорость VB. В сравнении с другими демпфирующими средами пены обладают рядом весомых преимуществ: они недороги и просты в изготовлении, безопасны в эксплуатации, а защитный пенный барьер может быть быстро сооружен непосредственно на месте использования. В связи с этим важно построение и развитие математических моделей водной пены для исследования пространственных нестационарных процессов, приводящих к ослаблению интенсивности VB применением водной пены, с целью изучения ее демпфирующих свойств.

Одной из простых моделей, используемых для описания водной пены, является равновесная модель псевдогаза (или модель эффективного газа) Рудингера [1], основанная на нестационарных урав-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246–2019–0052.

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Болотнова Р.Х.

[©] Гайнуллина Э.Ф.

нениях Эйлера. В рамках данного подхода пена рассматривается как идеальный газ с высокой молекулярной массой. Для моделирования реального содержания воды в пене используется эффективный показатель адиабаты в экспоненциальном виде, который варьируется от значения показателя адиабаты для газа до некого значения, соответствующего равновесному состоянию. Уменьшенное количество основных параметров делает модель эффективного газа удобной для расчетов динамики давления за УВ в пене [2–6]. Модификации модели псевдогаза и сейчас используются исследователями при изучении макроскопических процессов в водных пенах, например, если формируемый при взаимодействии УВ и водной пены газожидкостный поток быстро достигает равновесного состояния и может быть описан в рамках однокомпонентного подхода, при котором две фазы находятся в динамическом и тепловом равновесии [7,8].

Еще в ранних экспериментальных работах по ударному воздействию на водную пену было обнаружено, что при больших значениях избыточного давления пена разрушается на капли жидкости сразу за основной УВ [9, 10]. Вследствие передачи импульса и тепла между жидкой и газовой фазами характеристики УВ существенно изменяются, что приводит к неравновесному распределению скоростей и диффузионному воздействию на ударно-волновой фронт [11]. В связи с этим, используя предположение о разрушении пенной структуры за фронтом сильной УВ, в более комплексных подходах пену стали представлять в виде газокапельной смеси [12–14], поскольку применение многофазных моделей позволяет учитывать диссипативные процессы, что значительно повышает точность численных решений.

Дискретная или «ячеечная» модель водной пены, описывающая ее как непроницаемую для газа среду с ячеистой структурой, была предложена В.С. Суровым [15, 16]: если допустить, что компоненты двухфазной среды сжимаются независимо друг от друга и пренебречь теплообменом и массопереносом между фазами, то получится замкнутая модель двухфазной среды Х.А. Рахматулина [17], которая ранее для исследования волновой динамики в пенах не применялась.

Среди моделей, описывающих распространение УВ в двухфазной смеси, следует выделить модель М. Baer и J. Nunziato [18], которая была изначально разработана для моделирования неравновесных процессов в зоне реакции при взрыве ВВ и предполагала отличающиеся скорости и давления фаз. В [19] R. Abgrall и R. Saurel предложили модификацию модели M. Baer, J. Nunziato, используемую в том числе для моделирования однородных двухфазных потоков (пузырьковых и капельных), ударных волн в конденсированных многофазных смесях и явлений кавитации в жидкостях. Позднее данная модель была расширена для многомерного случая [20].

В дальнейшем А. Chinnayya и др. [21] на основе модификаций дискретных уравнений [22] создали многофазную модель для описания динамики УВ, учитывающую отсутствие термодинамического равновесия между фазами: при распространении УВ по двухфазной среде механические и термодинамические состояния фаз отличаются, что обусловлено различием их акустических импедансов, и система стремится к равновесному состоянию под действием релаксационных процессов.

Новым подходом при изучении распространения импульса давления в водной пене стало применение математической модели двухфазной среды, основанной на положениях механики многофазных сред Р.И. Нигматулина [23]. Предложенная одномерная модель двухфазной среды в лагранжевых переменных представлена системой уравнений, которая включает в себя законы сохранения массы и внутренней энергии для каждой фазы и закон сохранения импульса смеси [24–26]. При этом для описания свойств жидкой фазы используется широкодиапазонное уравнение состояния [27] в форме Ми–Грюнайзена.

Однако в вышеописанных теоретических исследованиях взаимодействие водных пен с сильными УВ рассматривалось преимущественно в одномерном приближении и с использованием уравнений состояния, которые предполагают сжимаемость только газовой фазы, либо описывают сжимаемость жидкости по линейному закону. В случае моделирования слабых волн исследователями не учитывались упругие свойства пенной структуры.

В настоящем обзоре рассмотрены предложенные авторами [28–33] пространственные модели водных пен и дан анализ исследований по динамике сильных и слабых УВ в водной пене с учетом реологических особенностей ее поведения в зависимости от интенсивности ударного воздействия.

Ударно-волновые процессы в водной пене с учетом явления синерезиса

При изучении динамики сильных УВ в водной пене предполагалось, что под воздействием мощной УВ пена разрушается на микрокапли и может быть описана моделью газокапельной смеси с диаметром капель, определяемым толщиной жидких пленок пены [12]. В этом случае система дифференциальных уравнений двухфазной газокапельной смеси в эйлеровых переменных в предположении равенства давлений, различающихся скоростей и температур фаз имеет вид [23], [34]:

• уравнения сохранения массы *i*-ой фазы

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v_i}) = 0, \qquad (1)$$

• уравнения сохранения импульса *i*-ой фазы

$$\frac{\partial (\alpha_i \rho_i \vec{v}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \vec{v}_i) = = -\alpha_i \nabla p + \operatorname{div}(\alpha_i \mathbf{\tau}_i) + \vec{F}_i,$$
(2)

 уравнения сохранения полной энергии *i*-ой фазы

$$\frac{\partial(\alpha_{i}\rho_{i}(u_{i}+K_{i}))}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_{i}\rho_{i}(u_{i}+K_{i})\vec{v}_{i}) = = -p\frac{\partial\alpha_{i}}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_{i}\vec{v}_{i}p) + \operatorname{div}(\alpha_{i}\gamma_{i}\frac{c_{p,i}}{c_{V,i}}\nabla h_{i}) + + K_{ht}(T_{i}-T_{i}),$$
(3)

 уравнение динамики объемного содержания воды в пене

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \vec{v}) + \operatorname{div}(\alpha_1 \alpha_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)) - \alpha_1 \operatorname{div} \vec{v} = \\ = \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} \right).$$
(4)

В уравнениях (1)–(4) использованы следующие обозначения: α_i — объемное содержание; ρ_i — плотность; \vec{v}_i — вектор скорости; t — время; p — давление; τ_i — тензор вязких напряжений; \vec{F}_i — вектор плотности межфазных сил; u_i , K_i — внутренняя и кинетическая энергии; γ_i — температуропроводность; $c_{p,i}$, $c_{V,i}$ — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме; h_i — энтальпия; K_{ht} — коэффициент теплообмена; T_i — температура; $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$ — скорость газокапельной смеси. Нижними индексами i, j = 1, 2 обозначены водная и газовая фазы смеси.

Выражение для тензора вязких напряжений имеет вид:

$$\mathbf{\tau}_i = \mu_i (\nabla \vec{v_i} + \nabla \vec{v_i}^T) - \frac{2}{3} (\mu_i \operatorname{div} \vec{v_i}) \mathbf{I},$$

где μ_i — динамическая вязкость; *I* — единичный тензор.

Плотность межфазных сил представлена суммой

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,drag} + \vec{F}_{i,vm}$$

где слагаемое

$$\vec{F}_{i,drag} = \frac{3}{4} \alpha_1 C_D \frac{\rho_2}{d_{10}} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) |\vec{v}_i - \vec{v}_j|$$

определяет силу межфазного сопротивления по модели Шиллера–Науманна [35] в газокапельной среде с диаметром капель *d*₁₀.

При исследовании распространения УВ в водной пене важно учитывать синерезис пены — ее осаждение под действием гравитационных сил. Для этого в предложенной модели [28–30] в коэффициент сопротивления C_D была введена зависимость $c_s(\alpha_{10})$, ослабляющая действие межфазного сопротивления при уменьшении начального водосодержания пены:

$$C_D = rac{c_s(lpha_{10})(1+0.15\,\mathrm{Re}^{0.687})}{\mathrm{Re}}$$
, $\mathrm{Re} \leqslant 1000.$

Выражение для силы присоединенных масс имеет вид:

$$\vec{F}_{i,vm} = 0.5 \alpha_1 \rho_2 \left(\frac{d_i \vec{v}_i}{dt} - \frac{d_j \vec{v}_j}{dt} \right)$$

Интенсивность межфазного теплообмена определена моделью Ранца–Маршалла [36]:

$$K_{ht} = \frac{\kappa_2 \operatorname{Nu}}{d_{10}}, \ \operatorname{Nu} = 2 + 0.6 \operatorname{Re}^{1/2} \operatorname{Pr}^{1/3},$$

где к₂ — теплопроводность газа; Nu, Re, Pr — числа Нуссельта, Рейнольдса и Прандтля.

Для описания свойств воздуха выбрано уравнение состояния в форме Пенга–Робинсона [37]:

$$p = \frac{RT_2}{V_m - b} - \frac{a(T_2)}{V_m(V_m + b) + b(V_m - b)},$$
 (5)

в котором

$$a = 0.45724 \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \lambda(T_r, \omega), \quad b = 0.07780 \frac{RT_c}{p_c}$$
$$\lambda = (1 + \theta(1 - T_r^{0.5}))^2, \quad T_r = \frac{T_2}{T_c},$$
$$\theta = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2,$$

где R — универсальная газовая постоянная; V_m — молярный объем; T_c , p_c — критические значения температуры и давления для воздуха; ω — ацентрический фактор.

Термодинамические параметры воды определялись широкодиапазонным уравнением состояния [27] в форме Ми–Грюнайзена с упругим потенциалом типа Борна–Майера:

$$p = p^{(p)} + p^{(T)}, \quad u = u^{(p)} + u^{(T)},$$
 (6)

где

$$p^{(p)}(\rho) = A\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\beta+1} \exp\left[b\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\beta}\right)\right] - K\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\xi+1}, \quad \rho = \frac{1}{V},$$

$$u^{(p)}(\rho) = \int_{\rho^*}^{\rho} \frac{p^{(p)}(\rho)}{\rho^2} d\rho =$$

= $\frac{A}{\beta\rho_0 b} \exp\left[b\left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\beta}\right)\right] - \frac{K}{\xi\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\xi} + u^*,$
 $\frac{\xi_V(\rho)}{\rho} = \Gamma(\rho)c_V.$

Константа интегрирования u^* обеспечивает выполнение условий $u^{(p)}(\rho^*) = 0$, $p^{(p)}(\rho^*) = 0$.

Модель (1)–(6) была численно реализована методом контрольных объемов с применением алгоритма PIMPLE посредством создания и сборки нового решателя в программном комплексе OpenFOAM [38]. Модель расчета термодинамических свойств, описываемых уравнением состояния воды [27] (6), внедрена в библиотеку thermophysicalModels пакета OpenFOAM.

На основе предложенной модели в работах [28–30] было выполнено численное исследование динамики мощного сферического взрыва в водной пене для условий эксперимента [39].

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1: в цилиндрическом сосуде, заполненном водной пеной с начальным объемным водосодержанием $\alpha_{10} = 0.0083$, происходит детонация ВВ PLANP (масса заряда 145 г). Параметры сильной УВ, инициированной взрывом, измерялись датчиками 1-4.

Рассматриваемая задача решалась в двумерной осесимметричной постановке (рис. 2) с начальными и граничными условиями, выбранными в соответствии с данными эксперимента [39].

Для учета синерезиса пены начальное объемное водосодержание α_{10} варьировалось в диапазоне 0.001 - 0.0083, поскольку процесс осаждения пены длился $\Delta t \approx 10$ мин вплоть до инициирования взрыва [39]. Неравномерное распределение α_{10} показано на рис. 1 синим цветом различной интенсивности.

В соответствии с данными экспериментов [39] датчики 1 и 2 находились в одной горизонтальной плоскости с центром взрыва, и начальное объемное содержание воды в положениях этих датчиков ($l_1 = 0.41$ м, $l_2 = 0.53$ м от точки взрыва) принималось равным экспериментальному значению $\alpha_{10} = 0.0083$. Датчики 3 и 4 ($l_3 = 0.67$ м, $l_4 = 0.93$ м) располагались выше центра взрыва ($h_3 = 0.6$ м, $h_4 = 0.75$ м), и для учета синерезиса начальное объемное водосодержание пены задавалось в виде распределения $\alpha_{10}(h)$ по высоте от центра взрыва, приведенного на рис. 3.

В результате расчетов показано, что процесс синерезиса пены приводит к увеличению скорости фронта УВ в вертикальном направлении вверх



Рис. 1. Схема эксперимента: 1-4 — датчики давления



Рис. 2. Схема расчетной области



Рис. 3. Начальное распределение $\alpha_{10}(h)$ и зависимость $c_s(\alpha_{10}(h))$ по высоте h от центра взрыва; h_1, \ldots, h_4 — высота положения датчиков давления



Рис. 4. Динамика импульса давления в пене для датчиков $l_1, ..., l_4$ с учетом (1) и без учета (2) процесса синерезиса, 3 — экспериментальные данные [39]

вследствие снижения плотности верхних слоев пены при ее осаждении (рис. 4 и 5).

На рис. 4 представлен сравнительный анализ расчетных и экспериментальных осциллограмм давлений в УВ в положениях датчиков. Установлено, что численные решения с учетом синерезиса пены [28–30] имеют наилучшее согласование с экспериментом [39], и относительная погрешность расчетов не превышает 4 %.

Влияние упруго- вязко- пластических свойств водной пены на структуру слабой ударной волны

При исследовании взаимодействия водных пен с УВ небольшой интенсивности следует учитывать, что при небольших деформациях пена ведет себя как упруго-вязко-пластичная система, способная восстанавливать свое исходное состояние после снятия нагрузки [40]. В этом случае малые приложенные напряжения приводят к перегруппировке связей пены с сохранением ее структуры. Лишь при превышении критического напряжения деформации становятся необратимыми — происходит разрушение пены на фазовые составляющие с ее преобразованием в газокапельную среду. Следовательно, необходимо создание моделей водной пены, учитывающих ее упругие свойства при небольших деформациях и псевдопластичность пены как неньютоновской жидкости.

Предлагаемая в [31–33] двухфазная модель водной пены, описывающая ее поведение при слабом ударном воздействии, включает законы сохранения массы и энергии каждой фазы, уравнение импульса и динамики объемного содержания водной фазы пены в однодавленческом, односкоростном приближениях и основана на подходах [23], [34]:

• уравнение неразрывности *i*-й фазы

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i\vec{v}) = 0, \tag{7}$$

• уравнение импульса смеси

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \operatorname{div}\mathbf{\tau} + \operatorname{div}\mathbf{s}, \quad (8)$$

• уравнение сохранения энергии *i*-й фазы

$$\frac{\partial(\alpha_i\rho_i(u_i+K_i))}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i\rho_i(u_i+K_i)\vec{v}) =
= -p\frac{\partial\alpha_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_i\vec{v}p) +
+ \operatorname{div}(\alpha_i\gamma_i\frac{c_{p,i}}{c_{V,i}}\nabla h_i) +
+ \operatorname{div}(\alpha_i\vec{v}\cdot\mathbf{\tau}) + \operatorname{div}(\alpha_i\vec{v}\cdot\mathbf{s}),$$
(9)

• уравнение динамики объемного водосодержания:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 \vec{v}) - \alpha_1 \operatorname{div}(\vec{v}) = = \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{d\rho_2}{dt} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} \right).$$
(10)

Входящие в состав водной пены компоненты воздуха и воды описаны реалистичными уравнениями состояния в форме Пенга–Робинсона [37] (5) и Ми–Грюнайзена [27] (6) соответственно.

Обозначения в уравнениях (7)–(10) введены по аналогии с уравнениями модели газокапельной смеси (1)–(6).



Рис. 5. Динамика полей давления (*a*) и векторных полей скоростей (*б*) в указанные моменты времени; 1, ..., 4 – датчики давления

Упругие свойства водной пены, проявляющиеся в случае, когда касательные напряжения не превышают предела упругости s_0 , описаны с использованием закона упругости Гука [23]:

$$\boldsymbol{s} = \mu_s (\nabla \vec{e} + \nabla \vec{e}^T) - \frac{2}{3} (\mu_s \operatorname{div} \vec{e}) \boldsymbol{I},$$

где *s* — девиатор тензора упругих напряжений; *e* — вектор деформаций; µ_s — модуль сдвига.

Если приложенная деформация достаточно велика, происходит превышение предела сдвиговых напряжений, и пена переходит из упругого состояния в вязкопластическое. Критерием данного перехода является выполнение условия текучести Мизеса [23]

$$|I_2(\boldsymbol{s})| - \frac{1}{3}s_0^2 > 0.$$

В случае выполнения условия Мизеса, исходные компоненты девиатора тензора упругих напряжений *s*_{kl} корректируются по формуле [23]:

$$\widetilde{s}_{kl} = s_{kl} \frac{s_0}{\sqrt{3|I_2(\boldsymbol{s})|}}.$$

Здесь $I_2(s)$ — второй инвариант девиатора тензора напряжений s; s_{kl} , \tilde{s}_{kl} — исходные и нормированные компоненты s соответственно.

Вязкопластические свойства водной пены как неньютоновской жидкости описываются в соответствии с моделью Гершеля–Балкли, которая в терминах эффективной вязкости µ_{eff} принимает вид [41]:

$$\mu_{eff} = k |\dot{\gamma}|^{n-1} + \tau_0 |\dot{\gamma}|^{-1}$$

где τ_0 — предел текучести вязкопластического состояния; $|\dot{\gamma}|$ — модуль скорости сдвига; k — коэффициент консистенции; n — показатель отклонения от ньютоновских свойств [41].

Численная реализация рассматриваемой модели водной пены (5)–(10) выполнена методом контрольных объемов в новом решателе, созданном авторами [31–33] в программном комплексе OpenFOAM.

Результаты численных исследований динамики слабых воздушных УВ в слое водной пены для условий экспериментальных данных G. Jourdan et al. [43] и M. Monloubou et al. [42] получены в работах [31–33].

Схема установки, на которой проводились эксперименты G. Jourdan et al. [43], представлена на рис. 6. Слабая УВ с числом Маха M = 1.3 формировалась в газе при прорыве диафрагмы из камеры высокого давления.



Рис. 6. Схема эксперимента [43]: HP, LP — камеры высокого и низкого давлений, FS — участок трубы с водной пеной, l = 3.52 м — положение датчика давления



Рис. 7. Зависимости *p*(*t*) в пене для *l* = 3.52 м: 1, 2 – данные экспериментов, 3, 4 – расчеты с учетом (3) и без (4) упругих свойств водной пены с указанным начальным водосодержанием α₁₀

Как и в экспериментах, при численном моделировании были исследованы два типа водных пен с начальным объемным водосодержанием $\alpha_0^1 = 0.0125$ и $\alpha_0^2 = 0.0333$. Начальные и граничные условия поставленной задачи согласованы с данными экспериментов [43]: $p_{HP} = 2.4$ бар, $p_{LP} = 1.0$ бар; $T_{HP} = T_{LP} = 298$ K; $\vec{v} = 0$; $s_0 = \tau_0 = 0.25$ бар; $\mu_s^1 = 0.16$ бар, $\mu_s^2 = 0.03$ бар; k = 2; $n_1 = 0.5$, $n_2 = 0.3$ (верхний индекс соответствует типу водной пены); x = 0, x = 3.79 м, y = 0, y = 0.08 м, z = 0, z = 0.08 м – жесткие стенки.

Осциллограммы давления p(t), представленные на рис. 7, соответствуют расчетам [33] и экспериментальным данным [43] в положении датчика l для пен с $\alpha_{10}^1 = 0.0125$ и $\alpha_{10}^2 = 0.0333$. Численные решения в виде профилей давления 3 демонстрируют двухволновую конфигурацию ударного импульса в пене: как и в экспериментах [43], основную волну сжатия амплитудой $p \approx 1.8$ бар опережает упругий предвестник амплитудой $p_e \approx$ 0.2 бар. Вязкопластические свойства пены формируют более пологий фронт волны по мере ее распространения вглубь пенного слоя. При этом на



Рис. 8. Расчетные профили $\alpha_1^2(x)$ и p(x) в моменты времени (мс) для $\alpha_{10}^2=0.0333$, l=3.52 м — датчик давления, p_e — упругий предвестник

графиках наблюдается различие в скорости ударноволнового фронта: в более плотном пенном слое ($\alpha_{10}^2 = 0.0333$) скорость УВ меньше в сравнении с вариантом для $\alpha_{10}^1 = 0.0125$. Расчеты без учета упругости пены (4), приведенные для сравнительного анализа, подтверждают влияние упругих свойств водной пены на профиль слабой УВ, не разрушающей пенной структуры.

Волновая картина течения, формирующаяся в процессе распространения УВ в газе, содержащем слой водной пены с $\alpha_{10}^2 = 0.0333$, представлена на рис. 8. После разрыва диафрагмы в камере высокого давления происходит формирование падающей УВ и отраженной волны разгрузки (t = 1.0 мс). С приходом УВ на контактную границу газ-пена происходит локальное уплотнение пенного слоя до $\alpha_1^2 = 0.045$, и давление УВ в зоне взаимодействия увеличивается. Воздействие УВ на пенный слой смещает его границу, сжимая пену до $\alpha_1^2 \approx 0.06$.

На следующем этапе исследований в [31, 32] рассматривался эксперимент из работы M. Monloubou et al. [42], в котором изучалась динамика слабой УВ в слое водной пены, инициируемой в ударной трубе длиной 4 м, состоящей из камер высокого (HP) и низкого (LP) давлений и сегмента трубы (AF) длиной ≈ 0.63 м, в котором располагался слой водной пены (рис. 9). После разрыва диафрагмы D инициировался процесс распространения УВ вглубь ударной трубы,



Рис. 9. Схема эксперимента: HP, LP — камеры высокого и низкого давления, D — диафрагма, AF сегмент с водной пеной, $l_1, ..., l_5$ — датчики давления

содержащей газовую область и пенный слой. Осциллограммы давлений на УВ фиксировались датчиками 1–5, закрепленными на расстоянии 0.1 м друг от друга. Датчик 1 располагался в газовой области перед пенным слоем на расстоянии $l_1 = 0.7$ м от левой границы трубы, датчики 2–5 в слое водной пены.

Моделирование исследуемого процесса [42] было проведено при следующих начальных условиях: в камерах высокого и низкого давлений $p_{HP} = 5.5$ бар, $T_{HP} = T_{LP} = 300$ К, $p_{LP} = 1.0$ бар; начальное объемное водосодержание пены $\alpha_{10} = 0.05$. Параметры, описывающие упруговязко- пластические свойства водной пены: $s_0 = \tau_0 = 0.5$ бар, $\mu_s = 0.3$ бар, k = 1, n = 0.3. Граничные условия: x = -0.8 м, x = 3.2 м, y = 0, y = 0.08 м, z = 0, z = 0.08 м — жесткие стенки.

На рис. 10(а) показано распространение в газе плоской УВ амплитудой $\Delta p \approx 1.5$ бар, движущейся со скоростью ≈ 500 м/с. Второй скачок давления амплитудой ≈ 4 бар, наблюдаемый на датчиках 3– 5, образуется вследствие отражения основной УВ от левой границы установки.

В случае наличия пенного слоя (рис. 10(б)) численные и экспериментальные осциллограммы, полученные с датчика 1, расположенного в газовой области перед пенным слоем, имеют двухступенчатую структуру. Первое повышение давления происходит в момент прихода основной воздушной УВ, второй скачок давления является следствием отражения этой волны от границы с водной пеной, более плотной по сравнению с газовой средой. Установлено небольшое повышение давления на $\Delta p \approx 0.5$ бар в слое пены (рис. 10(б)), что обусловлено ее уплотнением в процессе взаимодействия с УВ. С течением времени при движении по пенному слою ударный импульс приобретает двухволновую структуру, состоящую из основной УВ амплитудой $\Delta p \approx 2$ бар и опережающего ее упругого предвестника амплитудой $p_e \approx 0.5$ бар.

Анализ численных решений, полученных с учетом наличия в ударной трубе пенного слоя, показал снижение скорости фронта ударного импульса в 2.5 раза по сравнению с чистым газом.



Рис. 10. Зависимости избыточного давления $\Delta p(t)$ в газе (a) и пене (б) в положениях датчиков $l_1, ..., l_5$; черные линии – результаты расчетов; цветные линии – экспериментальные данные [42], p_e – упругий предвестник

На рис. 11 показано распределение объемного содержания воды в пене $\alpha_1(x)$ при t = 0.35 мс с момента прихода УВ на 1-й датчик. В расчетах [31, 32], как и в экспериментах [42], фиксируется локальная зона повышенного объемного водосодержания (до $\alpha_1 = 0.2$), расположенная за фронтом УВ. При этом правая граница пены смещается вслед за ударно-волновым фронтом, что приводит к формированию области с высоким содержанием газа (x = 2.6 м, рис. 11).

Полученные в работах [31–33] результаты численного моделирования имеют удовлетворительное согласование с экспериментальными данными [42, 43].

4. Заключение

В обзоре приведен анализ существующих моделей водной пены, описывающих ее поведение под ударно-волновым воздействием.

Рассмотрена модель двухфазной газокапельной смеси для исследования динамики сильных



Рис. 11. Распределение $\alpha_1(x)$ в рассматриваемом сегменте ударной трубы в момент времени t = 0.35 мс: a – экспериментальные данные [42]; δ – расчеты

УВ в водной пене в соответствии с однодавленческим, двухскоростным, двухтемпературным приближениями, учитывающая межфазный теплообмен, силы межфазного сопротивления, присоединенных масс и явление синерезиса пены. Показано, что синерезис пены приводит к увеличению скорости движения УВ в вертикальном направлении вверх вследствие снижения плотности верхних слоев пены.

Проанализирована динамика водной пены под воздействием слабых УВ, не разрушающих ее структуру. Упруго- вязко- пластическое поведение водной пены описано в рамках двухфазной смесевой модели. Упругие свойства учтены в соответствии с законом Гука. Переход к вязкопластическому течению контролировался условием Мизеса, а выше предела текучести — законом Гершеля-Балкли для неньютоновской жидкости. Детализированы причины двухволновой структуры УВ, состоящей из упругого предвестника, опережающего основную волну сжатия, и выявлены особенности формирования за фронтом УВ области повышенного водосодержания, за которой находится свободная от пены зона, образованная в результате смещения границы пены вслед за УВ.

Численная реализация моделей проведена с использованием новых решателей программного комплекса OpenFOAM. Имеется удовлетворительное согласование расчетов с данными экспериментов.

Список литературы

- Rudinger G. Effect of a finite volume occupied by particles on the dynamics of a mixture of gas and particles // Raketn. Tekh. Kosmonavt. 1965. No. 7. Pp. 1217–1222.
- [2] Borisov A.A., Gelfand B.E., Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Stepanov VV, Timofeev E.I. and Khomik S.V. Shock waves in water foams // Acta Astronautica. 1978. V. 5, No. 11/12. Pp. 1027–1033. DOI: 10.1016/0094-5765(78)90007-3
- [3] Вахненко В.А., Кудинов В.М., Паламарчук Б.И. К вопросу о затухании сильных ударных волн в релаксирующих средах // Физика горения и взрыва. 1984. № 1. С. 105-111. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID= 150975&ARTICLE_ID=151005
- [4] Borisov A.A., Gelfand B.E., Timofeev E.I. Shock waves in liquids containing gas bubbles // Int. J. Multiphase Flow. 1983. V. 9, No. 5. Pp. 531–543. DOI: 10.1016/0301-9322(83)90016-2
- Panczak T.D., Krier H. Shock propagation and blast attenuation through aqueous foams // J. Hazard. Mat. 1987. V. 14. Pp. 321– 336.
 DOI: 10.1016/0304-3894(87)85004-5
- [6] Васильев Е.И., Митичкин С.Ю., Тестов В.Г., Хайбо Х. Численное моделирование и экспериментальное исследование влияния процесса синерезиса на распространение ударных волн в газожидкостной пене // Журнал технической физики. 1997. № 11. С. 1–9. eLIBRARY ID: 21318032
- [7] Liverts M., Ram O., Sadot O., Apazidis N., Ben-Dor G. Mitigation of exploding-wire-generated blast-waves by aqueous foam // Phys. Fluids. 2015. V. 27. 076103. DOI: 10.1063/1.4924600
- [8] Sembian S, Liverts M., Apazidis N. Attenuation of strong external blast by foam barriers // Phys. Fluids. 2016. V. 28. 096105. DOI: 10.1063/1.4963243
- [9] Кудинов В.М., Паламарчук Б.И., Гельфанд Б.Е., Губин С.А. Параметры ударных волн при взрыве зарядов ВВ в пене // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, №3. С. 555–557. MathNet: dan40111
- [10] Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Gelfand B.E., Gubin S.A. Shock waves in gas-liquid foams // Appl. Mech. 1977. V. 13, No. 3. Pp. 279–283.
 DOI: 10.1007/BF00882681
- [11] Britan A., Shapiro H., Liverts M., Ben-Dor G., Chinnayya A., Hadjadj A. Macro-mechanical modelling of blast wave mitigation in foams. Part I: Review of available experiments and models // Shock Waves. 2013. V. 23. Pp. 5–23. DOI: 10.1007/s00193-012-0417-4
- [12] Ждан С.А. Численное моделирование взрыва заряда ВВ в пене // ФГВ. 1990. Т. 26, № 2. С. 103-110. eLIBRARY ID: 30555610
- [13] Британ А.Б., Зиновик И.Н., Левин В.А. Разрушение пены ударными волнами // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 5. С. 108-116. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID= 120152&ARTICLE_ID=135531
- [14] Британ А.Б., Васильев Е.И., Куликовский В.А. Моделирование процесса ослабления ударной волны экраном из пены // Физика горения и взрыва. 1994. № 3. С. 135–142. eLIBRARY ID: 12747113
- [15] Суров В.С. О распространении волн в пенообразных средах // ТВТ. 1996. Т. 34, № 2. С. 285–292. MathNet: tvt2731
- [16] Суров В.С. О взаимодействии волн давления с неоднородным экраном из пены // ТВТ. 1997. Т. 35, № 1. С. 25–30. MathNet: tvt2425

- [17] Рахматулин Х.А. Газовая и волновая динамика. М.: Издательство Московского университета, 1983. 200 с.
- [18] Baer M., Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. of Multiphase Flow. 1986. V. 12, No. 6. Pp. 861–889. DOI: 10.1016/0301-9322(86)90033-9
- [19] Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // J. Comput. Phys. 1999. V. 150. Pp. 425–467. DOI: 10.1006/jcph.1999.6187
- [20] Saurel R., Le Metayer O. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation // J. Fluid. Mech. 2001. V. 431. Pp. 239–271. DOI: 10.1017/S0022112000003098
- [21] Chinnayya A., Daniel E., Saurel R. Modelling detonation waves in heterogeneous energetic materials // J. Comput. Phys. 2004.
 V. 96, No. 2. Pp. 490–538.
 DOI: 10.1016/j.jcp.2003.11.015
- [22] Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003. V. 186. No 2. Pp. 361–396. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00011-1
- [23] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т.1. 464 с.
- [24] Болотнова Р.Х., Агишева У.О. Особенности распространения ударных волн в водных пенах с неоднородной плотностью // Сборник трудов Института механики УНЦ РАН. 2012. Т. 9, № 1. С. 41–46. DOI: 10.21662/uim2012.1.007
- [25] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование демпфирующих свойств водной пены под воздействием сферической ударной волны // Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2. С. 108–121. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [26] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // ПММ. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477. DOI: 10.1134/S0032823519030020
- [27] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма //ТВТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313. MathNet: tvt291
- [28] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Нурисламова Э.А. Моделирование процесса ослабления сферического взрыва применением водной пены // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 108–114. DOI: 10.21662/mfs2019.2.015
- [29] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование динамики ударного воздействия на водные пены с учетом вязкоупругих свойстви явлений синерезиса // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 5. С. 28–32. DOI: 10.31857/S0568528120050023
- [30] Гайнуллина Э.Ф. Влияние синерезиса водной пены на скорость распространения ударной волны // Многофазные системы. 2020. № 3. С. 152–160. DOI: 10.21662/mfs2020.3.126
- [31] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование влияния диссипативных свойств водной пены на динамику ударных волн // ПМТФ. 2020. № 4. С. 15–21. DOI: 10.15372/PMTF20200402
- Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Modeling of weak shock waves propagation in aqueous foam layer // J. Phys.: Conf. Ser. 2021.
 V. 2103. 012217.
 DOI: 10.1088/1742-6596/2103/1/012217

- [33] Гайнуллина Э.Ф. Влияние вязкоупругих свойств водной пены на динамику ударных волн // Вестник Башкирского университета. 2021. Т. 26, № 3. С. 548–553. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.3.1
- [34] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 3–е изд., перераб. М: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. 736 с.
- [35] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. V. 77. Pp. 40–65.
- [36] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // Chem. Eng. Prog. 1952. V. 48, No. 22. Pp. 141–146.
- [37] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. V. 15. Pp. 59–64. DOI: 10.1021/i160057a011
- [38] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. http://www.openfoam.com

- [39] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // Shock Waves. 2013. V. 23, No. 1. Pp. 39–53.
 DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0
- [40] Ветошкин А.Г. Физические основы и техника процессов сепарации пены. М: Инфра–Инженерия. 2016. 404 с.
- [41] Dollet B., Raufaste C. Rheology of aqueous foams // Comptes Rendus Physique. 2014. V. 15. Pp. 731–747. DOI: 10.1016/j.crhy.2014.09.008
- [42] Monloubou M., Le Clanche J., Kerampran S. New experimental and numerical methods to characterise the attenuation of a shock wave by a liquid foam // Actes 24eme Congres Francais de Mecanique. Brest: AFM. 2019. 255125. https://cfm2019.sciencesconf.org/255125/document
- [43] Jourdan G., Marian C., Houas L. et al. Analysis of shockwave propagation in aqueous foams using shock tube experiments // Phys. Fluids. 2015. V. 27. 056101 DOI: 10.1063/1.4919905

ISSN 2658-5782

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.004 DOI:10.21662/mfs2022.1.004 17 (2022), **1-2**, 38-50

Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

Modeling of dynamic phenomena in aqueous foams (review)

Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

Analytical review of investigations aimed at studying the aqueous foam behavior under the shock-wave impact is given. The main approaches and theoretical approximations used in the development of aqueous foams models are analyzed. The two-phase gas-drop model of aqueous foam is considered, based on the laws of conservation of mass, momentum, and energy in accordance with one-pressure, two-velocity, two-temperature approximations. The model describes foam dynamics under a high - intensity impact, which destroys the foam structure into microdroplets, and takes into account interfacial heat transfer, interfacial drag and virtual mass forces and the phenomenon of foam syneresis (deposition). The numerical implementation of the model was carried out using new solvers in the OpenFOAM software. The analysis of the numerical solution of the spherical explosion in aqueous foam is given for the conditions of the literature experimental data. The syneresis influence on the intensity and velocity of shock wave propagation is shown. The two-phase model of aqueous foam is considered, which takes into account its elastic-viscous-plastic properties for conditions of weak impact that does not destroy foam structure. The model takes into account the elastic properties of aqueous foam at small deformations and describes it as a non-Newtonian fluid when the foam changes its state from the elastic to viscoplastic. The weak shock wave propagation dynamics in the layer of aqueous foam with the formation of a two-wave structure, consisting of the main wave and the elastic precursor ahead of it, is analyzed. The process of local aqueous foam compaction zone formation, followed by a gaseous region, behind the shock wave front is shown. The reliability of the obtained results of numerical studies is confirmed by their agreement with the literature experimental data.

Keywords: shock wave, aqueous foam, OpenFOAM software, mathematical and numerical modeling

References

- Rudinger G. Effect of a finite volume occupied by particles on the dynamics of a mixture of gas and particles // Raketn. Tekh. Kosmonavt. 1965. No. 7. Pp. 1217–1222.
- [2] Borisov A.A., Gelfand B.E., Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Stepanov V.V., Timofeev E.I. and Khomik S.V. Shock waves in water foams // Acta Astronautica. 1978. V. 5, No. 11/12. Pp. 1027– 1033. DOI: 10.1016/0094-5765(78)90007-3
- [3] Vakhnenko V.A., Kudinov V.M., Palamarchuk B.I. Damping of strong shocks in relaxing media // Combust. Explos. Shock Waves. 1984. V. 20. Pp. 97–103. DOI: 10.1007/BF00749928
- Borisov A.A., Gelfand B.E., Timofeev E.I. Shock waves in liquids containing gas bubbles // Int. J. Multiphase Flow. 1983. V. 9, No. 5. Pp. 531–543.
 DOI: 10.1016/0301-9322(83)90016-2
- Panczak T.D., Krier H. Shock propagation and blast attenuation through aqueous foams // J. Hazard. Mat. 1987. V. 14. Pp. 321– 336.
 DOI: 10.1016/0304-3894(87)85004-5

- [6] Vasil'ev E.I., Mitichkin S.Yu., Testov V.G., Haibo H. Numerical simulation and experimental research on the effect of syneresis on the propagation of shock waves in a gas-liquid foam // Technical Physics. 1997. V. 42, No. 11. Pp. 1241–1248. DOI: 10.1134/1.1258855
- [7] Liverts M., Ram O., Sadot O., Apazidis N., Ben-Dor G. Mitigation of exploding-wire-generated blast-waves by aqueous foam // Phys. Fluids. 2015. V. 27. 076103.
 DOI: 10.1063/1.4924600
- [8] Sembian S, Liverts M., Apazidis N. Attenuation of strong external blast by foam barriers // Phys. Fluids. 2016. V. 28. 096105. DOI: 10.1063/1.4963243
- [9] Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Gel'fand B.E., Gubin S.A. [Shock wave parameters during detonation of explosive charges in a foam]*Dokl. Akad. Nauk SSSR* [The Proceedings of the USSR Academy of Sciences]. 1976. V. 228, No. 3. Pp. 555–557 (in Russian). MathNet: dan40111
- [10] Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Gelfand B.E., Gubin S.A. Shock waves in gas-liquid foams // Appl. Mech. 1977. V. 13, No. 3. Pp. 279-283.
 DOI: 10.1007/BF00882681

- [11] Britan A., Shapiro H., Liverts M., Ben-Dor G., Chinnayya A., Hadjadj A. Macro-mechanical modelling of blast wave mitigation in foams. Part I: Review of available experiments and models // Shock Waves. 2013. V. 23. Pp. 5–23. DOI: 10.1007/s00193-012-0417-4
- [12] Zhdan S.A. Numerical modeling of the explosion of a high explosive (HE) charge in foam // Combust., Explos., Shock Waves. 1990. V. 26, No. 2. Pp. 221–227. DOI: 10.1007/BF00742416
- Britan A.B., Zinovik I.N., Levin V.A. Breaking up foam with shock waves // Combust. Explos. Shock Waves. 1992. V. 28. Pp. 550– 557. DOI: 10.1007/BF00755733
- [14] Britan A.B., Vasil'ev E.I., Kulikovskii V.A. Modeling the process of shock-wave attenuation by a foam screen // Combust. Explos. Shock Waves. 1994. V. 30, No. 3. Pp. 389–396. DOI: 10.1007/BF00789435
- Surov V.S. Propagation of Waves in Foams // High Temperature. 1996. V. 34, No. 2. Pp. 280–287. MathNet: tvt2731
- [16] Surov V.S. Interaction of Pressure Waves with an Inhomogeneous Shield of Foam // High Temperature. 1997. V. 35, No. 1. Pp. 21–26. MathNet: tvt2425
- [17] Rakhmatulin Kh.A. [Gas and wave dynamics] *Gazovaya i volnovaya dinamika*. M.: Moscow University Publishing House, 1983. P. 200 (In Russian).
- [18] Baer M., Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. of Multiphase Flow. 1986. V. 12, No. 6. Pp. 861–889. DOI: 10.1016/0301-9322(86)90033-9
- [19] Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // J. Comput. Phys. 1999. V. 150. Pp. 425–467. DOI: 10.1006/jcph.1999.6187
- [20] Saurel R., Le Metayer O. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation // J. Fluid. Mech. 2001. V. 431. Pp. 239–271. DOI: 10.1017/S0022112000003098
- [21] Chinnayya A., Daniel E., Saurel R. Modelling detonation waves in heterogeneous energetic materials // J. Comput. Phys. 2004.
 V. 96, No. 2. Pp. 490–538.
 DOI: 10.1016/j.jcp.2003.11.015
- [22] Abgrall R., Saurel R. Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures // J. Comput. Phys. 2003.
 V. 186, No. 2. Pp. 361–396.
 DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00011-1
- [23] Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. New York: Hemisphere, 1990. P. 532.
- [24] Bolotnova R.Kh., Agisheva U.O. [Features of shock wave propagation in aqueous foams with non-uniform density] *Trudy Instituta Mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo Nauchnogo Centra Rossijskoj Akademii Nauk* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2012. V. 9, No. 1. Pp. 41–46 (in Russian). DOI: 10.21662/uim2012.1.007
- [25] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [A research of damping properties of aqueous foam under the impact of spherical shock waves] *Izvestiya VUZov. Povolzhskij Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017. No. 2. Pp. 108–121 (in Russian). DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [26] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // Fluid Dynamics. 2019. V. 54, No. 7. Pp. 970– 977. DOI: 10.1134/S0015462819070024

- [27] Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-Range Equation of State of Water and Steam: Simplified Form // High Temperature. 2011. V. 49, No. 2. Pp. 303-306. DOI: 10.1134/S0018151X11020106
- [28] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Nurislamova E.A. [Modeling of the spherical explosion attenuation process using aqueous foam] *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 108–114 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2019.2.015
- Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Modeling the Dynamics of Shock Impact on Aqueous Foams with Account for Viscoelastic Properties and Syneresis Phenomena // Fluid Dynamics. 2020.
 V. 55, No. 5. Pp. 604–608.
 DOI: 10.1134/S001546282005002X
- [30] Gainullina E.F. [Influence of aqueous foam syneresis on the shock wave propagation velocity] *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase systems]. 2020. No. 3. Pp. 152–160 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.3.126
- [31] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of the dissipative properties of aqueous foam on the dynamics of shock waves // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. V. 61, No. 4. Pp. 510–516. DOI: 10.15372/PMTF20200402
- Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Modeling of weak shock waves propagation in aqueous foam layer // J. Phys.: Conf. Ser. 2021.
 V. 2103. 012217.
 DOI: 10.1088/1742-6596/2103/1/012217
- [33] Gainullina E.F. [Influence of viscoelastic properties of aqueous foam on the dynamics of weak shock waves] Vestnik Bashkirskogo universiteta [Bulletin of Bashkir University]. 2021. V. 26, No. 3. Pp. 548-553 (in Russian).
 DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.3.1
- [34] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1987. P. 554.
- [35] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. V. 77. Pp. 40–65.
- [36] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // Chem. Eng. Prog. 1952. V. 48, No. 22. Pp. 141–146.
- [37] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. V. 15. Pp. 59–64. DOI: 10.1021/i160057a011
- [38] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. http://www.openfoam.com
- [39] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // Shock Waves. 2013. V. 23, No. 1. Pp. 39–53.
 DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0
- [40] Vetoshkin A.G. Physical foundations and technology of foam separation processes. Moscow: Infra-Inzheneriya, 2016. 404 p.
- [41] Dollet B., Raufaste C. Rheology of aqueous foams // Comptes Rendus Physique. 2014. V. 15. Pp. 731–747. DOI: 10.1016/j.crhy.2014.09.008
- [42] Monloubou M., Le Clanche J., Kerampran S. New experimental and numerical methods to characterise the attenuation of a shock wave by a liquid foam // Actes 24eme Congres Francais de Mecanique. Brest: AFM. 2019. 255125. https://cfm2019.sciencesconf.org/255125/document
- [43] Jourdan G., Marian C., Houas L. et al. Analysis of shockwave propagation in aqueous foams using shock tube experiments // Phys. Fluids. 2015. V. 27. 056101 DOI: 10.1063/1.4919905

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-3, с. 51-62



Многофазные системы



Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Основные задачи группового анализа дифференциальных уравнений механики

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Групповой анализ дифференциальных уравнений использует теорию Ли соответствия между непрерывными группами преобразований и алгебрами Ли операторов дифференцирования первого порядка. Дифференциальные уравнения механики обязательно допускают обширную группу преобразований. Теория Ли изучает структуру алгебры этой группы. Групповой анализ уравнений механики использует структуру допускаемой алгебры для производства подмоделей и точных решений, для изучения краевых задач подмоделей и поведения механической среды для точных решений. Формулируются основные задачи группового анализа и приведены простые примеры их решения.

Ключевые слова: уравнения механики, групповой анализ, теория Ли, подмодели, точные решения

1. Введение

Вывод уравнений механики основан на представлении о пространстве, в котором происходит движение. Для нерелятивистских движений пространство-время инвариантно относительно переносов по времени, пространству и галилеевых переносов (движение с постоянной скоростью). Предполагается также изотропность пространства, т.е. инвариантность относительно вращений. Все эти преобразования порождают 10-и параметрическую группу. По теории Ли этой группе соответствует 10-мерная алгебра Ли, структура которой хорошо изучена [1, 2]. Законы движения сплошной среды инвариантны относительно этой группы. Законы, записанные в виде дифференциальных уравнений, замыкаются уравнениями состояния. Для специальных уравнений состояния допускаемая уравнениями группа может расширяться. Различным подалгебрам допускаемых групп соответствуют подмодели — представление части решений дифференциальных уравнений. Полным описанием подмоделей занимается групповой анализ, основные задачи которого разработаны в [3]. Здесь они

представлены в простейшем изложении на простейших примерах для уравнений идеальной газовой динамики и дано развитие основных идей за прошедшее время, не претендующих на полноту.

2. Допускаемая группа и групповая классификация

1. Первая задача группового анализа системы дифференциальных уравнений $S(\vec{x}, \vec{u}), \vec{x} \in R^n, \vec{u} \in R^m$ заключается в нахождении группы непрерывных преобразований в пространстве R^{n+m} , не меняющих систему *S*. По теории Ли однопараметрические подгруппы разыскивают как операторы $X = \vec{\xi} \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \partial_{\vec{u}}$ из условий инвариантности [4].

Система *S* может содержать произвольный элемент — функцию, зависящую от части переменных \vec{x} , \vec{u} и $\vec{u}_{\vec{x}}$.

- Вторая задача найти преобразования эквивалентности, сохраняющие вид системы S, но изменяющие лишь произвольный элемент.
- Задача групповой классификации перечислить произвольные элементы с точностью до преобразований эквивалентности, для которых допускаемая группа расширяется.

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Хабиров С.В.

Приведем решение этих задач на примере уравнений одномерной газовой динамики с плоскими волнами [5]:

закон сохранения массы

$$V_t + uV_x = Vu_x,$$

закон сохранения импульса

$$u_t + uu_x + Vp_x = 0$$

закон сохранения внутренней энергии

$$\varepsilon_t + u\varepsilon_x + pV\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Система замыкается уравнением состояния $\varepsilon = e(V, S)$, которое следует из термодинамического тождества

$$TdS = de + pdV \Rightarrow T = e_S, p = -e_V.$$

Здесь u — скорость; V — удельный объем ($\rho = V^{-1}$ — плотность); ε — удельная внутренняя энергия; p — давление; S — энтропия; T — температура. Из термодинамического тождества следуют уравнения для всех термодинамических параметров:

$$S_t + uS_x = 0,$$

$$p_t + up_x + Ve_{VV}u_x = 0,$$

$$T_t + uT_x = Ve_{SV}u_x.$$

Достаточно взять два из пяти уравнений для термодинамических параметров (мы возьмем уравнения для V и S, $p_x = -e_{VS}S_x - e_{VV}V_x$).

Замена $\tilde{s} = h(s)$ с любой гладкой функцией h является преобразованием эквивалентности. Если $e_{VV} = 0$, то линейное по V уравнение состояния эквивалентно следующему

$$\varepsilon \sim \begin{cases} SV + e(S), \ e_{VS} \neq 0; \\ EV + S, \ e_{VS} = 0. \end{cases}$$

Уравнение импульсов принимает вид

$$u_t + uu_x = VS_x$$
или 0.

Во втором случае система интегрируется

$$x = ut + h(u); S = S(u), V = g(u)(t + h'(u))$$

с тремя произвольными функциями.

В первом случае решим первую задачу группового анализа. Разыскиваем оператор, продолженный на производные

$$X = \xi^{i} \partial_{x^{i}} + \eta^{k} \partial_{u^{k}} + (D_{i} \eta^{k} - u_{j}^{k} D_{i} \xi^{j}) \partial_{u_{i}^{k}},$$

$$u^{1} = u, \ u^{2} = V, \ u^{3} = S; \ x^{1} = t, \ x^{2} = x$$

из условий инвариантности. Здесь ξ^i , $\eta^k - \phi$ ункции x^i , u^k ; $D_i = \partial_{x^i} + u_i^k \partial_{u^k}$.

Условие инвариантности уравнения для энтропии

$$X(S_t + uS_x) = 0,$$

где производные по переменной *t* исключены в силу уравнений системы, расщепляем по оставшимся производным (приравниваем нулю коэффициенты при степенях производных по *x*). В результате получим уравнения на координаты оператора *X*:

$$\begin{split} \xi_{V}^{x} &= u \xi_{V}^{t}, \ \eta_{V}^{S} = 0, \ \xi_{u}^{x} = u \xi_{u}^{t}, \ \eta_{t}^{S} + u \eta_{x}^{S} = 0, \\ \eta^{u} &= \xi_{t}^{x} + u (\xi_{x}^{x} - \xi_{t}^{t}) - u^{2} \xi_{x}^{t} - V \eta_{u}^{S}. \end{split}$$

Условие инвариантности уравнения для удельного объема

$$X(V_t + uV_x - Vu_x) = 0$$

расщепляется по производным переменной *x*. Учитывая предыдущие равенства, получим

$$\begin{aligned} \xi_{V}^{t} &= \xi_{V}^{x} = 0, \ \xi_{S}^{x} = \xi_{S}^{t} = 0, \ \eta_{V}^{V} = V \eta_{V}^{V} + V^{2} \eta_{uu}^{S}, \\ \eta_{u}^{V} &- \eta_{S}^{u} + V \xi_{x}^{t} = 0, \ \eta_{t}^{V} + u \eta_{x}^{V} = V \eta_{x}^{u}. \end{aligned}$$

Условие инвариантности уравнения для импульса приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \xi_{u}^{t} &= \xi_{u}^{x} = 0, \ \eta_{u}^{S} = \eta_{t}^{S} = \eta_{x}^{S} = 0, \ \xi_{t}^{x} = 0, \\ \eta^{V} &= V(E + \xi_{x}^{x}), \ \eta_{S}^{S} + E = \xi_{x}^{x} - 2\xi_{t}^{t}, \ \eta_{t}^{u} + u\eta_{x}^{u} = 0. \end{aligned}$$

Полученная переопределенная система уравнений интегрируется

$$\xi^{t} = Bt + B_{0}, \ \xi^{x} = x(2B + E + C) + At + A_{0},$$

$$\eta^{u} = A + u(B + E + C), \ \eta^{V} = V(2B + C + 2E),$$

$$\eta^{S} = CS + C_{0}$$

с семью произвольными постоянными. Обнуляя постоянные кроме одного, получим операторы алгебры Ли *L*₇. Базис удобно выбрать в виде:

$$\begin{aligned} \partial_x, \ t\partial_x + \partial_u, \ t\partial_t + x\partial_x, \ \partial_t, \\ x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \ V\partial_V - S\partial_S, \ \partial_S. \end{aligned}$$

Далее считаем $e_{VV} \neq 0$, $e_V \neq 0$, $e_S \neq 0$.

$$S_t + uS_x = 0, \quad p_t + up_x + Ve_{VV}u_x = 0,$$

$$T_t + uT_x = Ve_{sv}u_x.$$

Оператор преобразований эквивалентности разыскивается в виде продолженном на производные, входящие в уравнение [4]

$$\begin{split} Y &= \xi^{i} \partial_{x^{i}} + \eta^{k} \partial_{u^{k}} + \eta^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} + (\tilde{D}_{i} \eta^{k} - u_{j}^{k} \tilde{D}_{i} \xi^{j}) \partial_{u_{i}^{k}} + \xi^{i} \partial_{e_{x^{i}}} + \\ &+ \xi^{u^{k}} \partial_{e_{u^{k}}} + (D_{V} \xi^{V} - e_{VV} D_{V} \eta^{V} - e_{VS} D_{V} \eta^{S}) \partial_{e_{VV}} + \\ &+ (D_{S} \xi^{V} - e_{VV} D_{S} \eta^{V} - e_{VS} D_{S} \eta^{S}) \partial_{e_{VS}}, \end{split}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta^{i} &= D_{i}\eta^{\varepsilon} - e_{V}D_{i}\eta^{V} - e_{S}D_{i}\eta^{S}, \\ \zeta^{u^{k}} &= D_{u^{k}}\eta^{\varepsilon} - e_{V}D_{u^{k}}\eta^{V} - e_{S}D_{u^{k}}\eta^{S}, \\ \tilde{D}_{i} &= \partial_{x^{i}} + u_{i}^{k}\partial_{u^{k}} + (e_{V}V_{i} + e_{S}S_{i})\partial_{\varepsilon}, D_{i} = \partial_{x^{i}}, \\ D_{u^{k}} &= \partial_{u^{k}} + e_{u^{k}}\partial_{\varepsilon} + \varepsilon_{Vu^{k}}\partial_{e_{V}} + \varepsilon_{Su^{k}}\partial_{e_{S}} + \dots \end{aligned}$$

Координаты оператора ξ^i , η^k , η^{ε} зависят от переменных x^i , u^k , ε . Для уравнения состояния выполняются уравнения

$$e_t = e_x = e_u = 0,$$

которые вместе с уравнениями системы удовлетворяют условиям инвариантности относительно оператора Y [4]. Условия инвариантности получаются действием оператора Y на каждое уравнение системы в силу всех уравнений системы. Получается тождество в продолженном на производные пространстве всех переменных. Расщепление по независимым переменным дает уравнения для координат оператора Y и новое уравнение на функцию *е*. Это уравнение тоже должно быть инвариантным относительно оператора Y. В результате получится классификация системы по уравнениям состояния, для которых преобразования эквивалентности различны.

Действуем оператором Y на уравнение для энтропии, исключаем производные по t в силу системы. Полученное тождество расщепляем по производным от переменной x:

$$\begin{split} uD_V \xi^t &= D_V \xi^x, \ u\xi^t_u - \xi^x_u = 0, \ D_V \eta^S = 0, \ \eta^u &= \xi^x_t + u(\xi^x_x - \xi^t_t) - u^2 \xi^t_x, \\ \eta^S_t + u\eta^S_x = 0 \ \Rightarrow \ \eta^S_t = \eta^S_x = 0. \end{split}$$

Условия инвариантности для удельного объема приводят к равенствам

$$D_V \xi^t = 0, \quad D_V \xi^x = 0, \quad \Rightarrow \quad D_V \eta^u = 0;$$

$$D_S \xi^t = 0, \quad D_S \xi^x = 0 \quad \Rightarrow \quad D_S \eta^u = 0;$$

$$\eta_u^V = -V \xi_x^t, \quad \eta_t^V + u \eta_x^V = V \eta_x^u.$$

Условия инвариантности уравнения для скорости дают

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{u}^{t} &= \boldsymbol{\xi}_{u}^{x} = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{\eta}_{u}^{V} = V\boldsymbol{\xi}_{x}^{t} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\eta}_{u}^{V} = \boldsymbol{\xi}_{x}^{t} = \boldsymbol{0}, \\ 2\boldsymbol{e}_{VS}(\boldsymbol{\xi}_{x}^{x} - \boldsymbol{\xi}_{t}^{t}) &= D_{S}D_{V}\boldsymbol{\eta}^{\varepsilon} - V^{-1}\boldsymbol{e}_{V}D_{S}\boldsymbol{\eta}^{V}, \\ 2\boldsymbol{e}_{VV}(\boldsymbol{\xi}_{x}^{x} - \boldsymbol{\xi}_{t}^{t}) &= D_{V}^{2}\boldsymbol{\eta}^{\varepsilon} - \boldsymbol{e}_{V}D_{V}(V^{-1}\boldsymbol{\eta}^{V}), \\ \boldsymbol{\eta}_{u}^{t} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{\eta}_{x}^{u} &= V\boldsymbol{e}_{VV}\boldsymbol{\eta}_{x}^{V}. \end{aligned}$$

Условие инвариантности уравнений для функции *е* имеют вид: $\eta_u^{\varepsilon} = 0$, $\eta_t^{\varepsilon} = e_V \eta_t^V$, $\eta_x^{\varepsilon} = e_V \eta_x^V$.

Изучение совместности полученной переопределенной системы определяет координаты оператора Y:

$$\begin{split} \xi^{t} &= Nt^{2} + Bt + B_{0}, \ \xi^{x} = Ntx + N_{0}x + At + A_{0}, \\ \eta^{u} &= u(-Nt + N_{0} - B) + Nx + A, \\ \eta^{S} &= \eta(V, S, \varepsilon), \ D_{V}\eta = 0; \\ \eta^{V} &= V(Nt + N_{0}) + \sigma(V, S, \varepsilon), \ VD_{V}\sigma = \sigma, \\ \eta^{\varepsilon} &= Ve_{V}Nt + \mu(V, S, \varepsilon), \end{split}$$

где каждая из величин N, B, B_0 , N_0 , A, A_0 удовлетворяет равенствам $D_V N = 0$, $D_S N = 0$. Остаются два равенства

$$2e_{VS}(-Nt+N_0-B) = D_S D_V (Ve_V Nt+\mu) - V^{-1} e_V D_S \sigma,$$

$$2e_{VV}(-Nt+N_0-B) = D_V^2 (Ve_V Nt+\mu).$$

Совместность этих равенств дает $D_S = 0$. Расщепляем по *t*:

$$ND_SD_V(Ve_V + 2e) = 0, ND_V^2(Ve_V + 2e) = 0,$$

$$D_SD_V(\mu - 2e(N_0 - B)t) = 0, D_V^2(\mu - 2e(N_0 - B)) = 0.$$

Вместо функций $h(t, x, u, \varepsilon)$ рассмотрим функций $\tilde{h}(t, x, V, S) = h(t, x, u, e(V, S))$. Тогда равенства $D_V h = 0, D_S h = 0$ равносильны следующим $\tilde{h}_V = 0, \tilde{h}_S = 0$ и величины N, B, B_0, N_0, A, A_0 можно считать постоянными, $\eta^S = \eta(S), \eta^V = V(Nt + N_0) + EV, \eta^{\varepsilon} = Ve_V Nt + \mu(V, S), N(Ve_V + 2e) = 0, \mu = 2e(N_0 - B) + KV + \kappa(S).$

Уравнение для функции e(V, S) записано с точностью до преобразования $\tilde{e} = e + K_1 V + \kappa_1(S)$, которое не меняет систему уравнений. Если $Ve_V + 2e \neq 0$, то N = 0 и произвольным постоянным B, B_0 , N_0 , A, A_0 , K и произвольным функциям $\kappa(S)$, $\eta(S)$ отвечают операторы

$$\begin{aligned} \partial_t, \ \partial_x, \ t\partial_x + \partial_u, \ t\partial_t + x\partial_x; \\ x\partial_x + u\partial_u - V\partial_V + 2\varepsilon\partial_\varepsilon; \ V\partial_\varepsilon, \ \eta(S)\partial_S, \ \kappa(S)\partial_\varepsilon, \ V\partial_V. \end{aligned}$$

Первые четыре оператора допускаются системой с произвольной функцией e(V,S). Они образуют алгебру L_4 — ядро допускаемых групп. Остальные операторы задают преобразование эквивалентности

$$\begin{split} \Pi_a: \quad \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon + aV, \ \Pi_b: \ \tilde{x} = bx, \ \tilde{u} = bu, \ \tilde{V} = b^{-1}V, \\ \tilde{e}(\tilde{V}, S) &= b^2 e(V, S); \ \Pi_{n(S)}: \ \tilde{S} = n(S), \\ \tilde{e}(V, \tilde{S}) &= e(V, S); \ \Pi_{m(S)}: \ \tilde{e} = e + m(S). \end{split}$$

Здесь a, b > 0 — постоянные; n(S), m(S) — произвольные функции. Допускается также дискретное преобразование Π_b с b = -1.

Если $Ve_V + 2e = 0$, то с точностью до преобразования $\Pi_{n(S)}$ уравнение состояния принимает вид $e = V^{-2}S$. К ядру добавляются операторы: $V\partial_V + 2S\partial_S$, $t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u + tV\partial_V - 2t\epsilon\partial_{\epsilon}$, $x\partial_x + u\partial_u - V\partial_V + 2\epsilon\partial_{\epsilon}$ с преобразованиями Π_b , Π_l : $\tilde{V} = lV$, $\tilde{S} = l^2S$ и Π_c : $\tilde{t} = \frac{t}{1 - ct}$, $\tilde{x} = \frac{x}{1 - ct}$, $\tilde{u} = u + c(x - tu)$, $\tilde{V} = \frac{V}{1 - ct}$, $\tilde{\epsilon} = \epsilon(1 - ct)^2$, которые допускаются системой и уравнением состояния.

Перейдем к задаче групповой классификации системы:

$$S_t + uS = 0, V_t + uV_x = Vu_x,$$

$$u_t + uu_x = V(e_{VV}V_x + e_{VS}S_x)$$

с некоторой функцией e(V, S). Разыскивается оператор X, удовлетворяющий условиям инвариантности системы. Условия инвариантности уравнения для энтропии S приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} \xi_{u}^{x} &= u\xi_{u}^{t}, \ \xi_{V}^{x} = u\xi_{V}^{t}, \ \eta_{V}^{S} = 0, \ \eta_{u}^{S} = 0, \ \eta_{t}^{S} = 0, \\ \eta_{x}^{S} &= 0, \ \eta^{u} = \xi_{t}^{x} + u(\xi_{x}^{x} - \xi_{t}^{t}) - u^{2}\xi_{x}^{t}. \end{aligned}$$

Условия инвариантности для удельного объема Vуточняют координаты оператора ${\cal X}$

$$\begin{aligned} \xi_V^t &= \xi_V^x = 0 = \eta_V^u, \ \xi_u^t = \xi_u^x = 0, \ \xi_S^t = \xi_S^x = 0 = \eta_S^u, \\ V\eta_V^V &= \eta^V, \ \eta_u^V + V\xi_x^t = 0, \ \eta_t^V + u\eta_x^V = V\eta_x^u. \end{aligned}$$

Условия инвариантности для скорости дают

$$\eta_u^V = V\xi_x^t \Rightarrow \eta_u^V = \xi_x^t = 0; \quad \eta_t^u + u\eta_x^u = Ve_{VV}\eta_x^V,$$

$$2Ve_{VV}(\xi_x^x - \xi_t^t) = (Ve_{VV}\eta^V)_V + Ve_{VVS}\eta^S,$$

$$2Ve_{VS}(\xi_x^x - \xi_t^t) = Ve_{VV}\eta_S^V + (Ve_{VS})_V\eta^V + (Ve_{VS}\eta^S)_S$$

Исследование условий совместности полученной переопределенной системы определяют представление для координат оператора *X*:

$$\begin{split} \xi^{t} &= Nt^{2} + Bt + B_{0}, \ \xi^{x} = Ntx + N_{0}x + At + A_{0}, \\ \eta^{u} &= u(N_{0} - B - Nt) + Nx + A, \\ &] \eta^{V} = V(Nt + N_{0} + \lambda(S)), \ \eta^{S} = \eta(S). \end{split}$$

Остаются два равенства

$$2a_{VV}(-Nt + N_0 - B) =$$

$$= (2e_{VV} + Ve_{VVV})(Nt + N_0 + \lambda(S)) + e_{VVS}\eta(S),$$

$$2e_{VS}(-Nt + N_0 - B) = e_{VS}\eta' + Ve_{VV}\lambda' +$$

$$+ (Ve_{VS})_V(Nt + N_0 + \lambda) + e_{VDD}\eta.$$

Расщепляем эти равенства по переменной *t*:

$$N(3e_V + Ve_{VV})_V = N(3e_V + Ve_{VV})_S = 0 \implies N(Ve_V + 2e - KV - \kappa(S)) = 0.$$

Преобразования эквивалентности обнуляют постоянную K и функцию $\kappa(S)$. Случай $Ve_V + 2e = 0$ уже рассмотрен. Далее считаем $Ve_V + e \neq 0 \Rightarrow N = 0$. Первое равенство интегрируется дважды по V:

$$Ve_V(N_0 + \lambda) + 2e(B - N_0) + \eta e_S = v_1(S)V + v(S).$$

Подстановка во второе равенство дает

$$\mathbf{v}' = e_V \lambda' \; \Rightarrow \; \lambda' = \mathbf{v}_1' = 0 \; \Rightarrow \; \lambda = E, \; \mathbf{v}_1 = K.$$

Координаты оператора Х уточняются

$$\xi^{t} = Bt + B_{0}, \ \xi^{x} = N_{0}x + At + A_{0},$$

$$\eta^{u} = u(N_{0} - B) + A, \ \eta^{V} = V(N_{0} + E), \ \eta^{S} = v(S); \quad (1)$$

$$Ve_{V}(N_{0} + E) + 2e(B - N_{0}) + \eta(S)e_{S} = KV + v(S).$$

Если функция e(V, S) общего вида, то расщепление уравнения для e дает

 $N_0 = B$, E = -B, $\eta = 0$, K = 0, $\nu = 0$.

Оставшимся постоянным B_0 , A_0 , A, B соответствуют операторы ядра $L_4: \partial_t, \partial_x, t\partial_x + \partial_u, t\partial_t + x\partial_x$.

Пусть функция *е* удовлетворяет уравнению типа (1)

$$\tilde{N}_0 V e_V + \tilde{\eta}(S) e_S = \tilde{B} e + \tilde{K} V + \tilde{\nu}(S).$$

Преобразование эквивалентности $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_{n(S)}, \Pi_{m(S)}$ изменяют коэффициенты уравнения

$$\begin{split} \tilde{N}_0 V e_V + \tilde{\eta}(n(S))n'(S)^{-1} e_S &= \tilde{B}e + \\ + V b^{-3} (\tilde{K} + a(\tilde{B} - \tilde{N}_0)) + b^{-2} \tilde{\nu}(n(S)) + \\ &+ \tilde{B}m(S) - \tilde{\eta}n'^{-1}m'. \end{split}$$

Если
 $\tilde{\eta}\neq 0,$ то выбором $n(S)(n'=\tilde{\eta})$ и
 m(S) уравнение приводится к виду

$$e_S + \tilde{N}_0 V e_V = \tilde{B}e + V b^{-3} (\tilde{K} + a(\tilde{B} - \tilde{N}_0)).$$

Если $ilde{N}_0
eq ilde{B}$, то выбором a получим

$$e_S + kVe_V = ne, \ k \neq n \ \Rightarrow \ e = = e^{nS}g(I), \ I = Ve^{-kS}$$

Если $ilde{N}_0 = ilde{B}
eq 0$, то выбором b получим

$$e_S + kVe_V = ke + \delta V, \ \delta = 0$$
или 1, $k \neq 0 \Rightarrow$
 $e = \delta k^{-1}V \ln V + Vg(I).$

Если $\tilde{N}_0 = \tilde{B} = 0$, то

$$e_S = V \Rightarrow e = VS + g(V).$$

Пусть $\tilde{\eta}=0$ \Rightarrow $\tilde{N}_0 \neq 0$ (иначе $e_{VV}=0$). Уравнение примет вид

$$Ve_V = \tilde{B}e + Vb^{-3} \left((\tilde{B} - 1)a + \tilde{K} \right) + b^{-2} \nu(n(S)) + \tilde{B}m(S).$$

Если $\tilde{B} \neq 0$ или 1, то выбором *m* и *a* получим

$$Ve_V = ke \Rightarrow e = SV^k \ (k \neq 1).$$

Если $\tilde{B} = 0$, то выбором a, n(S) и m(S) получим

$$Ve_V = S$$
, $\Rightarrow e = S \ln V$.

Если $\tilde{B} = 1$, то выбором *m*, *n* и *b* получим

$$Ve_V = e + V \Rightarrow e = V(\ln V + S).$$

Получили 6 случаев выбора функции e(V, S), когда допускаемая алгебра может быть шире, чем ядро L₄.

1) $e = e^{nS}g(I), I = Ve^{-kS}, n \neq k$. Подстановка в (1) дает равенство, в котором надо разделить переменные *I* и *S*:

$$Ig'(N_0 + E - k\eta(S)) + g(2B - 2N_0 + n\eta) = KIe^{(k-n)S} + \nu(S)e^{-nS}$$
(2)

Если *g* — произвольно, то обнуляя коэффициенты, получим

$$K = 0, \ \nu = 0, \ \eta = C_0 = \text{const}, \ N_0 = B + \frac{1}{2}nC_0,$$

 $E = C_0(k - \frac{1}{2}n) - B.$

Постоянным В и Со отвечают операторы

$$t\partial_t + x\partial_x$$
 из ядра, $n(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V + 2\partial_S$.

Последний оператор добавляется к ядру.

Дифференцируем уравнение (2) по *S* и *I*:

$$\left(-kIg''+(n-k)g'\right)\eta'=K(k-n)e^{(k-n)S}.$$

Здесь переменные разделились. Отсюда следует при $\eta' \neq 0$

$$-kIg' + ng = MI + M_0, M\eta = Ke^{(k-n)S} + M_1,$$

 $M_0\eta = ve^{-nS} + M_2.$

Подстановка этих выражений в (1) дает (в случае $M \neq 0$):

$$g\left(\frac{n}{k}(N_0 + E) + 2B - 2N_0\right) - \frac{1}{k}(MI + M_0) + IM_1 = -M_2.$$

Коэффициент при g, I надо обнулить (иначе $e_{VV} = 0$). Тогда получим соотношения

(1)

$$\eta = Ce^{(k-n)S} + C_0, \ K = MC, \ E = kC_0 - N_0,$$

 $B = N_0 - \frac{1}{2}nC_0.$

Произвольным постоянным C_0, C, N_0 отвечают операторы

$$t\partial_t + x\partial_x$$
, $n(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V + 2\partial_S$, $e^{(k-n)}\partial_S$.

Ядро расширяется на два базисных оператора. При M = 0 имеем $B = (1 - \frac{n}{2k})N_0 - \frac{n}{2k}E, \eta(S) - \frac{n}{2k}E$ любое. Дополнительные к ядру операторыт таковы

$$n(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V, \eta(S)\partial_S.$$

В случае $\eta' = 0 \Rightarrow \eta = C_0, K = 0, \nu = M_0 e^{mS}$. Соотношение (2) определяет уравнение для функции g:

$$Ig' = mg + m_0 \Rightarrow g = GI^m + m_0 \begin{cases} -m^{-1}, & m \neq 0; \\ \ln |I|, & m = 0. \end{cases}$$

Подстановка в (2) дает

$$g(m(N_0 + E - kC_0) + 2B - 2N_0 + nC_0) =$$

= $M_0 - m_0(N_0 + E - kC_0).$

Так как $g \neq \text{const}$ (иначе $e_v = 0$), то определяем M_0 и $B = N_0(1 - \frac{1}{2}m) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(mk - n)C_0$. Свободным постоянным N_0 , E, C_0 отвечают операторы $t\partial_t + x\partial_x$ (из ядра) и два дополнительных оператора

$$m(x\partial_x + u\partial_u) + 2V\partial_V, (n - mk)(x\partial_x + u\partial_u) + 2\partial_S.$$

2) $e = \delta k^{-1} V \ln V + V g(I)$, $I = V e^{-kS}$, $k \neq 0$, $\delta = 0$ или 1. Уравнение (1) принимает вид:

$$Ig' (N_0 + E - k\eta(S)) + g(E + 2B - N_0) =$$

= K + vI⁻¹e^{-kS} - $\delta k^{-1}(N_0 + E)$ -
- $\delta k^{-1}(E + 2B - N_0)(k + \ln |I|).$ (3)

Если *g* — произвольная функция, то расщепление по I дает

$$N_0 = B + \frac{1}{2}kC_0, \ \eta = C_0, \ E = -B + \frac{1}{2}kC_0, \nu = 0, \ K = \delta k^{-1}(N_0 + E).$$

Свободным параметрам В и С0 отвечают растяжения из ядра и дополнительный оператор

$$k(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V + 2\partial_S.$$

Дифференцирование по S уравнение (3) разделяет переменные при $\eta' \neq 0$

$$-kI^2g'\eta' = (\mathbf{v}e^{-kS})' \Rightarrow$$
 $m_0k\eta + M_0 = \mathbf{v}e^{-kS}, \ g = m_0I^{-1}, \ \delta = 1($ иначе $e_V = 0)$

Подстановка в (3) и расщепление по *I* дает

$$N_0=E+2B,\;K=\delta k^{-1}(N_0+E),$$
 $M_0=2m_0(B+E-N_0),\;\eta(S)-$ произвольное.

Свободные параметры задают дополнительные к ядру операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \eta(S)\partial_S.$$

При $\eta' = 0 \Rightarrow \eta = C_0$, $\nu = Me^{kS}$ и уравнение (3) принимает вид:

$$\begin{split} Ig' &= mg + m_0 + m_1 I^{-1} + m_2 \ln |I| \Rightarrow \\ g &= -\frac{m_0}{m} - \frac{m_2}{m^2} + \frac{m_1}{1 - m} I - \frac{m_2}{m} \ln |I| + G_0 I^m \\ & \Pi p \mu \ m \neq 0, 1; \\ g &= -m_1 + I \left(m_0 \ln |I| + \frac{1}{2} m_2 (\ln I)^2 \right) + G_0 I \\ & \Pi p \mu \ m = 1; \\ g &= m_0 \ln |I| - m_1 I^{-1} + \frac{1}{2} m_2 (\ln |I|)^2 + G_0 \\ & \Pi p \mu \ m = 0. \end{split}$$

Подстановка в (3) и расщепление определяет постоянные K и M. При $m \neq 0, 1$ остается соотношение

$$\left(\frac{m_2}{m}-\frac{\delta}{k}\right)(E+2B-N_0)=0.$$

Если $km_2 \neq \delta m$, то дополнительные операторы к ядру —

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \ \partial_S.$$

Если $m_2 k = m \delta$, то свободные параметры определяют дополнительные к ядру операторы

$$x\partial_x + u\partial_u V\partial_V, \ \partial_S.$$

При *m* = 1 расщепление приводит к соотношениям

$$B + E = \frac{1}{2}kC_0, \ (km_2 - \delta)(N_0 - E - 2B) = 0.$$

Если $km_2 \neq \delta$, то допускаемые операторы будут такие же, как для произвольной функции g(I). В случае $km_2 = \delta$ к ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + V\partial_V, kV\partial_V + 2\partial_S.$$

При *m* = 0 расщепление дает

$$m_2(2B + E - N_0) = 0,$$

$$(m_0 + \delta k^{-1})(2B + E - N_0) + m_2(N_0 + E - kC_0) = 0.$$

Если $m_2 \neq 0$ или $m_2 = 0$, $km_0 + \delta \neq 0$, то инвариантность будет как при *g* произвольном. Если $m_2 = 0$,

 $km_0 + \delta = 0$, то свободные параметры задают дополнительные к ядру операторы:

$$x\partial_x + u\partial_u, V\partial_V, \partial_S.$$

3) e = VS + g(V), $\delta = 1$ (иначе $e_S = 0$). Уравнение (1) принимает вид

$$Vg'(N_0 + E) + 2g(B - N_0) =$$

= KV + v(S) - V\eta(S) - VS(E + 2B - N_0).

Дифференцирование по S и расщепление по V дает

$$v = M$$
, $\eta = S(N_0 - E - 2B) + C_0$.

Уравнение (1) уточняется

$$Vg'(N_0 + E) + 2g(B - N_0) = KV + M - C_0V$$
 (4)

и имеет вид

$$Vg' = mg + m_1V + m_0$$

с общим решением с точностью до преобразований эквивалентности

a) $g = GV^m, m \neq 0, 1,$

б)
$$g = m_1 V \ln V$$
, $m = 1$; в) $g = m_0 \ln V$, $m = 0$.
Если функция g общего вида, то $N_0 = B$,

E = -B, $\eta = 0$ и допускаемые операторы только из ядра.

В случае а) из (4) получим $E = -2m^{-1}B + N_0(2m^{-1}-1), \eta = 2(1-m^{-1})(N_0-B)S$. К ядру добавляется оператор

$$m(x\partial_x + u\partial_u) + 2V\partial_V + 2(m-1)S\partial_S.$$

В случае б) из (4) следует $N_0 = B$, $\eta = C_0 - (E+B)S$ и к ядру добавляются два оператора

$$V\partial_V - S\partial_S, \ \partial_S.$$

В случае в) из (4) следует $N_0 = E + 2B$, $\eta = C_0$ и к ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \ \partial_S.$$

4) $e = SV^k$, $k \neq 1$. Уравнение (1) расщепляем по V: K = 0, v = 0, $\eta = -S(2B + (k - 2)N_0 + kE)$. К ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2S\partial_S, \ V\partial_V - kS\partial_S,$$

5) $e = S \ln V$. Уравнение (1) расщепляем по V: $K = 0, v = S(N_0 + E), \eta(S) = 2S(N_0 - B)$. К ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2S\partial_S, V\partial_V.$$

6) $e = V(\ln V + S)$. Расщепление уравнения (1) по V дает $N_0 = 2B + E$, $\eta = K - 2B - 2E$. К ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V - 2S\partial_S, \ \partial_S$$

Итак, решена задача групповой классификации одномерной газовой динамики. Результат уточняет групповую классификацию для пространственной газовой динамики из работы [1].

К задачам этого пункта относится классификация бесконечных групп преобразований, заданных дифференциальными уравнениями [6, 7].

3. Структура допускаемых групп

- Построение оптимальной системы: перечислить все подгруппы с точностью до внутренних автоморфизмов.
- Построение графа вложенных подгрупп с точностью до внутренних автоморфизмов.

Выбирается удобный базис алгебры Ли допускаемой группы, чтобы представить алгебру в виде полупрямой суммы идеала *J* и подалгебры *N*. Сначала перечисляются подалгебры в *N* с точностью до внутренних автоморфизмов. Для каждой подалгебры вычисляется стационарная подгруппа автоморфизмов, действующая в идеале *J*. Неподобные подалгебры в *J* записываются в удобном базисе.

Рассмотрим пример ядра допускаемых алгебр для одномерной газовой динамики. Алгебра Ли *L*₄ с базисом из операторов

$$X_1 = \partial_x, X_2 = \partial_t, X_3 = t\partial_x + \partial_u, X_4 = t\partial_t + x\partial_x$$

имеет таблицу из трех ненулевых коммутаторов $[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i$: $[X_1, X_4] = X_1$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_2, X_4] = X_2$.

Автоморфизмы вычисляются по правилу

$$\frac{dX'}{da_i} = [X', X_i], \ X'|_{a_i=0} = X = x^j X_j, \ i = 1, 2, 3, 4.$$

Простые вычисления дают автоморфизмы:

$$A_{1}: x^{1'} = x^{1} - x^{4}a_{1};$$

$$A_{2}: x^{1'} = x^{1} - x^{3}a_{2}, \ x^{2'} = x^{2} - x^{4}a_{2};$$

$$A_{3}: x^{1'} = x^{2}a_{3} + x^{1}.$$

$$A_{4}: x^{1'} = bx^{1}, \ x^{2'} = bx^{2}, \ b = e^{a_{4}}.$$

При b = -1 имеем дискретный автоморфизм, не изменяющий таблицу коммутаторов.

Алгебра L_4 раскладывается в полупрямую сумму абелева идеала $\{X_1, X_2\}$ и абелевой подалгебры $\{X_3, X_4\}$. Подобные подалгебры связаны автоморфизмами. Неподобные подалгебры абелевой подалгебры таковы 0, $X_3 + \alpha X_4$, X_4 , $\{X_3, X_4\}$.

К каждой подалгебре добавляем подалгебры общего вида из абелева идеала. С помощью автоморфизмов приводим комбинацию к простейшему виду.

К нулевой подалгебре для одномерных подалгебр добавляем $x^1X_1 + x^2X_2$. Если $x^2 \neq 0$, то автоморфизм A_3 делает $x^1 = 0$. Неподобные подалгебры таковы X_2 , X_1 , $\{X_1, X_2\}$.

К подалгебре $X_3 + \alpha X_4$ для одномерных подалгебр добавляем $x^1 X_1 + x^2 X_2$ и с помощью A_1 и A_2 делаем $x^1 = x^2 = 0$. Для двумерных подалгебр добавки имеют вид $\{X_3 + \alpha X_4 + x^1 X_1 + x^2 X_2, y^1 X_1 + y^2 X_2\}$. Если $y_1 \neq 0$, то автоморфизмы A_2 , A_3 и замена базиса дают $\{X_3 + \alpha X_4, X_2\}$. Коммутатор этих операторов должен быть их линейной комбинацией. Это условие подалгебры не выполняется. Значит $y_2 = 0$ и подалгебра подобна $\{X_3 + \alpha X_4, X_1\}$ при $\alpha \neq 0$ или $\{X_3 + \delta X_2, X_1\}$ при $\alpha = 0$, $\delta = 0$ или 1. Трехмерные подалгебры подобны следующим $\{X_3 + \alpha X_4, X_1, X_2\}$ при $\alpha \neq 0$, $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Добавки линейных комбинаций к подалгебре *X*₄ приводят к неподобным подалгебрам

 X_4 , $\{X_2, X_4\}$, $\{X_1, X_4\}$, $\{X_1, X_2, X_4\}$.

Подалгебра $\{X_3, X_4\}$ порождает одну трехмерную подалгебру $\{X_1, X_3 + \delta X_2, X_4\}$. Построенную оптимальную систему можно представить в виде графа вложенных подалгебр. Удобно представить граф в виде табл. 1 [2], в которой оператор X_j заменен на *j*, подалгебра имеет номер (r, i), r — размерность, *i* — порядковый номер в данной размерно-

Таблица 1

r	i	Базис $X_j \to j$	Подалгебры
3	1	1, 2, 3	L_4
	2	1, 2, 3+ α 4, ($\alpha \neq 0$)	L_4
	3	1, 2, 4	L_4
	4	1, 3+δ2, 4 (δ=0,1)	L_4
2	1	1, 2	3.1, 2,3
	2	1, 3+ α 4 ($\alpha \neq 0$)	$3.2, 4 (\delta = 0)$
	3	1, 4	3.3, 4
	4	1, 3+δ2 (δ=0,1)	3.1, 4
	5	2,4	3.3
1	1	1	2.1, 2, 3, 4
	2	2	2.1, 5
	3	$3+\alpha X_4$	2.2 ($\alpha \neq 0$), 4
			$(\alpha = 0, \delta = 0)$
	4	δ2+3	2.4
	5	4	2.3, 5

сти. В последнем столбце указаны номера подалгебр, в которые вкладывается подалгебра рассматриваемой строки.

4. Расслоение и подмодели

Структура допускаемой группы позволяет находить классы точных решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Для этого надо найти инварианты подгрупп.

 Построение базиса дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования для каждой подгруппы из оптимальной системы.

Операторы подалгебры X_i продолжаются на производные любого порядка $X_i^{(k)}$. В каждом порядке можно вычислить инварианты $I_j^{(k)}$: $X_i^{(k)} = 0$. Существуют операторы инвариантного дифференцирования, которые производят инварианты высшего порядка из инвариантов низшего порядка. Дифференциальные инварианты образуют базис, если из них получаются все инварианты с помощью операторов инвариантного дифференцирования [4]. Например, рассмотрим подалгебру 3.1 из §2. Продолженный на производные первого порядка базис имеет вид:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t,$$

$$X_3 = t\partial_x + \partial_u - u_x\partial_{u_t} - V_x\partial_{V_t} - S_x\partial_{S_t},$$

Уравнения для инвариантов $X_i I = 0$ имеют полный набор функционально независимых решений

$$V, S, V_x, S_x, u_x, u_t + uu_x, V_t + uV_x, S_t + uS_x.$$

Отсюда определяем операторы инвариантного дифференцирования D_x , $Z = D_t + uD_x$. Базис состоит из инвариантов

$$V, S, u_x = U_1, u_t + uu_x = U_0.$$

Система уравнений одномерной газовой динамики записывается через дифференциальные инварианты

$$U_0 = V e_{VV} D_x V + V e_{VS} D_x S, ZV = V U_1, YS = 0.$$
 (5)

 Расслоение системы на классы подобных решений относительно допускаемой подгруппы (автоморфная система) и уравнений для представителей классов (разрешающая система) [8, 9]. Например, для подалгебры 3.1 назначим дифференциальные инварианты базиса функциями инвариантов нулевого порядка

 $u_x = U_1(V, S), \ u_t + uu_x = U_0(V, S).$ (6)

Исследуем совместность в силу уравнений (5):

$$U_{0V}V_{x} + U_{0S}S_{x} = U_{1}(VU_{1})_{V},$$

$$e_{VV}V_{x} + e_{VS}S_{x} = V^{-1}U_{0} \Rightarrow$$

$$V_{x} = N(V,S), S_{x} = M(V,S),$$

$$V_{t} = VU_{1} - uN, S_{t} = -uM.$$

Условия дальнейшей совместности определяют разрешающую систему для функций *U*₀, *U*₁.

$$VM_V + M = 0,$$

 $VN_V + N = U_1 + (\ln U_1)_V + VM(\ln U_1)_S.$

Автоморфная система состоит из уравнений (5) и (6).

 Построение подмоделей и точных решений для подгрупп из оптимальной системы, которые вложены друг в друга согласно графа вложенных подалгебр. Подмодели подразделяются на три типа.

Первый тип — инвариантные подмодели на подалгебрах малой размерности, когда из инвариантов нулевого порядка (точечные инварианты) определяются все функции. Например, для подалгебры 1.5 оператор $X_4 = t\partial_t + x\partial_x$ имеет инварианты $I = \frac{x}{t}$, u, V, S. Последние 3 инварианта назначаются новыми функциями переменной I: u = u(I), V = V(I), S = S(I). Это представление решения поставим в систему одномерной газовой динамики

$$S'(u-I) = 0, V'(u-I) = Vu',$$

 $u'(u-I) = V(e_{VV}V' + e_{VS}S').$

Если u = I, то V = 0, S — произвольная функция. Решение не имеет физического смысла.

При $u \neq I$ решение либо постоянно, либо

$$u = I \pm V \sqrt{e_{VV}}, \ e_{VVV} V V' = \mp 2 \sqrt{e_{VV}}, \ S = S_0$$

выражается квадратурами с любым уравнением состояния.

Второй тип — частично инвариантные решения. Они бывают регулярными и нерегулярными [10], когда из точечных инвариантов не определяются все функции. Представление решения — это назначение одних инвариантов функциями других. Если другие инварианты не содержат значений искомой функции, то это — регулярные частично инвариантные решения.

Рассмотрим пример подалгебры 2.4. Базисные операторы $X_1 = \partial_x$, $X_3 + \delta X_2 = \delta \partial_t + t \partial_x + \partial_u$ имеют точечные инварианты *V*, *S*, u - t ($\delta = 1$) или t ($\delta = 0$).

При $\delta = 0$ представление решения V(t), S(t), u = u(t, x) задает регулярное частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1. Подстановка в систему уравнений определяет решение

$$S = S_0, \quad V = V_0 t, \quad u = \frac{x}{t}$$

с точностью до преобразований допускаемой группы. Это решение определяет движение газа из точечного источника по прямым мировым линиям в вакуум на бесконечности.

При $\delta = 1$ представление

$$S(\alpha)$$
, $V(\alpha)$, $u = t + U(\alpha)$, $\alpha(t, x)$, $\alpha_x \neq 0$

задает нерегулярное частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1. Подстановка в систему определяет решение

$$S = S_0, \ \alpha = x - \frac{1}{2}t^2, \ V' + VU'^2 = VV'e_{VV}$$

с одной произвольной функцией $V(\alpha)$.

Третий тип — дифференциально инвариантные подмодели, когда некоторые дифференциальные инварианты базиса назначаются новыми функциями других [11].

Например, для подалгебры 3.1 все инварианты базиса назначим функциями от $\alpha(t, x) \neq \text{const:}$

$$V(\alpha)$$
, $S(\alpha)$, $u_x = U_1(\alpha)$, $u_t + uu_x = U_0(\alpha)$.

Вместо а можно взять любую функцию от а. Подстановка в систему дает $Z = D_t + UD_x$, S'Za = 0, $V'Za = VU_1$, $U_0 = V(e_{VV}V' + e_{VS}S')a_x$. Совместность уравнений $u_t = U_0 - uU_1$, $u_x = U_1$ дает уравнение для а

$$U_1'Z\alpha = U_0'\alpha_x - U_1^2.$$

Если $Z\alpha = 0$, то $U_1 = 0$, $U'_0 = 0 \Rightarrow u = U_0 t + C$, $\alpha_x = \kappa(\alpha) = U_0 V^{-1} (e_{VV} V' + e_{VS} S')^{-1}$, $\alpha_t = -(U_0 t + C) \kappa(\alpha) \Rightarrow \alpha = x - 2^{-1} U_0 t^2 - Ct$ с точностью до функционального произвола. Подмодель содержит одно уравнение

$$e_{VV}V' + e_{VS}S' = U_0V^{-1},$$

функция $S(\alpha)$ произвольна.

Если $Z\alpha \neq 0$, то $S = S_0$, $V' \neq 0$. При V' = 0 имеем $U'_0 = 0$, $U_1 = 0$ первый случай. Можно считать $\alpha = V$, $V_t + uV_x = VU_1$, $U_0 = VV_x e_{VV}$.

Совместность для V дает интегрируемые уравнения

$$U_0 = C_0 U_1 V e_{VV}, \ U_1 = C_1 V^{-1} (C_0^2 e_{VV} - 1).$$

Теперь можно интегрировать совместную переопределенную систему для функций *и* и *V*:

$$C_0 u = V + C_1 t,$$

$$C_0^2 (V e_V - e) - \frac{1}{2} V^2 = C_1 (C_0 x + \frac{1}{2} C_1 t^2) + C_2.$$

С помощью графа вложенных подалгебр можно находить точные решения у подмоделей, не имеющих симметрий. Для этого надо согласовать инварианты вложенных подалгебр, чтобы инварианты надалгебры содержались в базисе инвариантов подалгебры. Тогда решения подмодели надалгебры будут решениями подмодели подалгебры для одного и того же дефекта. Дефект подмодели подалгебры может уменьшится, а ранг увеличиться [2].

5. Другие задачи группового анализа

Сформулируем другие задачи группового анализа. Методы решения некоторых задач хорошо развиты, но для некоторых возможно нет алгоритмических подходов.

 Законы сохранения для модели, подмоделей и интегралы. Определение новых обобщенных решений (сильные и слабые разрывы, предельные линии, коллапсы, центрированные волны).

Есть несколько методов нахождения законов сохранения: инвариантность лагранжиана (теорема Нетер–Ибрагимова) [12], прямой метод и с помощью операторов размножения [13–15].

 Групповой анализ подмоделей, преобразование Беклунда подмоделей, неточечные преобразования Ли–Беклунда [16, 17].

Пример группового анализа подмодели одномерной газовой динамики приведен выше. Это инвариантная подмодель на двумерной алгебре переносов для трехмерной модели. Для некоторых подмоделей найдены интегралы и надо производить групповую классификацию по произвольным элементам интегралов [18].

 Физическая интерпретация точных групповых решений, сопряжение через слабые и сильные разрывы. Критерии инвариантности и частичной инвариантности краевых задач [19–22]. Приближенные симметрии для модели и подмоделей, введение малого параметра и обоснование асимптотик (асимптотическое или строгое стремление к точному решению).

Примером может служить линеаризация на точном решении [5]. Малый параметр обычно вводится из физических соображений, но можно его ввести с помощью симметрии краевых условий, отличных от симметрий уравнений. Тогда приближения по групповому параметру будут инвариантны относительно выбранной симметрии. Если малый параметр введен, то вычисляют приближенные симметрии [23]. Можно вычислить приближенные симметрии по-другому. Условие инвариантности одного из уравнений системы записывать с точностью до малой величины. Значит вектор из координат оператора приближенно касается многообразия системы.

13. Построение инвариантных уравнений и инвариантных отображений (конкомитантов). Например, для псевлогрупп можно определить инвариантные уравнения [24]. Конкомитанты определяют интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений по известной допускаемой группе симметрий.

Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
- [2] Мукминов Т.Ф., Хабиров С.В. Граф вложенных подалгебр 11-и мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 121–143. DOI: 10.33048/semi.2019.16.006
- [3] Овсянников Л.В. Некоторые задачи, возникающие в групповом анализе дифференциальных уравнений // Динамика сплошной среды: сб.научн.тр. / Акад. наук СССР, Сиб.отд-ние, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1974. Вып. 18. С. 211–238.
- [4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 399 с.
- [5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2003. 336 с.
- [6] Хабиров С.В. Бесконечные непрерывные группы преобразований трехмерного пространства, задаваемые системами дифференциальных уравнений первого порядка // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН. 1972. Вып. 12. С. 131–146.
- [7] Овсянников Л.В. О бесконечных группах отображений, задаваемых дифференциальными уравнениями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 148, № 1. С. 36–39.
- [8] Овсянников Л.В. Групповое расслоение уравнений пограничного слоя // Динамика сплошной среды. 1969. Вып. 1. С. 24–36.

- [9] Чиркунов Ю.А. Групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости // Известия АН. Механика твердого тела. 2009. Т. 426, № 5. С. 605–607.
- [10] Овсянников Л.В. Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Доклады РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156-159. MathNet: dan4403
- [11] Хабиров С.В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701. MathNet: smj1100
- [12] Ibragimov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Applications 333. No. 1 (2007), C. 311-328. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078
- [13] Чиркунов Ю.А. Метод А-операторов и законы сохранения для уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 53–60. eLIBRARY ID: 11839328
- [14] Хабиров С.В., Чиркунов Ю.А. Элементы симметрийного анализа дифференциальных ураврений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ. 2012. 659 с.
- [15] Хабиров С.В. О законах сохранения для вязкой жидкости // Труды Имех УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 40–43. DOI: 10.21662/uim2017.1.006
- [16] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [17] Хабиров С.В. Проблема Беклунда для эволюционных уравнений второго порядка / Препринт БФ АН СССР. Уфа. 1986. 35 с.
- [18] Khabirov S.V. Group analysis of the plane steady submodel of ideal gas with varying entropy // MDPI. Mathematics. 2021. V. 9, issue 16. Pp. 1–15. DOI: 10.3390/math9162006
- [19] Меньщиков В.М. О продолжении инвариантных решений уравнений газовой динамики через ударную волну // Динамика сплошной среды. Вып. 4. Новосибирск. 1969. С. 163–169.
- [20] Меньщиков В.М. О непрерывном сопряжении инвариантных решений // Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск. 1972. С. 70–84.
- [21] Пухначев В.В. Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично инвариантными решениями уравнений Навье-Стокса // Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск. 1972. С. 125–137. eLIBRARY ID: 37264575
- [22] Хабиров С.В. Автомодельное схождение ударной волны по теплопроводному газу // ПММ. 2009. Т. 73., вып. 5. С. 731–740. eLIBRARY ID: 12868891
- [23] Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Приближенные группы преобразований // Дифференцальные уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732. MathNet: de8212
- [24] Khabirov S.V. Classification of three dimensional Lie algebras in R³ and their differential invariants // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2010. V. 31, No. 2. P. 152–156. DOI: 10.1134/S199508021002006X

ISSN 2658-5782

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.005 DOI:10.21662/mfs2022.1.005 17 (2022), **1-3**, 51-62

Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

The main tasks of group analysis of differential equations of mechanics

Khabirov S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Group analysis of differential equations uses the Lie theory of correspondence between continuous transformation groups and Lie algebras of first-order differentiation operators. Differential equations of mechanics necessarily admit an extensive group of transformations. Lie theory studies the structure of the algebra of this group. The group analysis of the equations of mechanics uses the structure of the admissible algebra to produce submodels and exact solutions, to study the boundary value problems of submodels and the behavior of the mechanical medium for exact solutions. The main tasks of group analysis are formulated and simple examples of their solutions are given.

Keywords: equations of mechanics, group analysis, lie theory, submodels, exact solutions

References

- Ovsannikov L.V. The submodel program. Gaz dynamika // PMM. 1994. Vol. 58., № 4. Pp. 30–55. (in Russian)
- Mukminov T.F., Khabirov S.V. Graph of nested subalgebras of the 11-dimensional algebra of continuum symmetries // Siberian Electronic Mathematical News. 2019. Vol. 16. Pp. 121– 143. (in Russian) DOI: 10.33048/semi.2019.16.006
- [3] Ovsannikov L.V. Some problems arising in the group analysis of differential equations // Dynamics of a continuous medium / Academy of Sciences of the USSR, siberian branch, Institute of Hydrodynamics. Novosibirsk, 1974. Vol. 18. Pp. 211–238. (in Russian)
- [4] Ovsannikov L.V. Group analysis of differential equations. M.: Science. 1978. 399 p. (in Russian)
- [5] Ovsannikov L.V. Lectures on the basics of gas dynamics. M. Igevsk: Institute of computer research. 2003. 336 p. (in Russian)
- [6] Khabirov S.V. Infinite continuous groups of transformations of three-dimensional space defined by systems of first-order differential equations // Dynamics of a continuous medium. Novosibirsk: Institute of Hydrodynamics SB RAS. 1972. Vol. 12. Pp. 131–146. (in Russian)
- [7] Ovsannikov L.V.On infinite groups of maps given by differential equations // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1963. Vol. 148, № 1. Pp. 36–39. (in Russian)
- [8] Ovsannikov L.V. Group stratification of boundary layer equations // Dynamics of a continuous medium. 1969. Vol. 1. Pp. 24– 36. (in Russian)
- [9] Chirkunov Y.A. Group stratification of the Lame equations of the classical dynamic theory of elasticity // Izvestia AN. Solid state mechanics. 2009. Vol. 426, № 5. Pp. 605–607. (in Russian)

- [10] Ovsannikov L.V. Regular and irregular partially invariant solutions // Dokl. RAS. 1995. Vol. 343, № 2. Pp. 156–159. (in Russian) MathNet: dan4403
- [11] Khabirov S.V. Classification of differentiall invariant submodels // Siberian Mathematical Journal. 2004. Vol. 45, № 3. Pp. 562–579.
 DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf
- Ibragimov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Application. 2007. Vol. 333, No 1. Pp. 311–328.
 DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078
- [13] Chirkunov Y.A. Method of A-operators and conservation laws for the equations of gas dynamics // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2009. Vol. 50. Pp. 213–219. DOI: 10.1007/s10808-009-0029-7
- [14] Khabirov S.V, Chirkunov Y.A. Elements of symmetric analysis of differential equations of continuum mechanics. Novosibirsk: NSTU. 2012. 659 p. (in Russian)
- [15] Khabirov S.V. On conservation laws for a viscous liquid // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. T. 12 (2017), № 1. C. 40-43. (in Russian) DOI: 10.21662/uim2017.1.006
- [16] Ibragimov N.H. Transformation Groups to Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1983. 280 c. (in Russian)
- [17] Khabirov S.V The Backlund problem for second-order evolutionary equations / Preprint of the BFAN USSR. Ufa. 1986. 35 p. (in Russian)
- [18] Khabirov S.V. Group analysis of the plane steady submodel of ideal gas with varying entropy // MDPI. Mathematics. 2021. V. 9, issue 16. Pp. 1–15. DOI: 10.3390/math9162006

- [19] Menshikov V.M. On the continuation of invariant solutions of gas dynamics equations through a shock wave // Dynamics of a continuous medium. Vol. 4. Novosibirsk. 1969. Pp. 163–169. (in Russian)
- [20] Menshikov V.M. On the continuous conjugation of invariant solutions // Dynamics of a continuous medium. Vol. 10. Novosibirsk. 1972. Pp. 70-84. (in Russian)
- [21] Pukhnachev V.V. Unsteady motions of a viscous fluid with a free boundary described by partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations // Dynamics of a continuous medium. Vol. 10. Novosibirsk. 1972. Pp. 125–137. (in Russian) eLIBRARY ID: 37264575
- [22] Khabirov S.V. Self-similar convergence of a shock wave in a heat conducting gas // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73, Issue 5. Pp. 524–531. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.11.005
- [23] Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Approximate groups of transformations // Partial Differential Equations. Vol. 29, No. 10. (1993). Pp. 1487–1504. MathNet: de8212
- [24] Khabirov S.V. Classification of three dimensional Lie algebras in R³ and their differential invariants // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2010. V. 31, No. 2. Pp. 152–156. DOI: 10.1134/S199508021002006X

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 63-73



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.006 DOI: 10.21662/mfs2022.1.006 УДК 534.1; 539.3

Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Обзор исследований лаборатории МТТ за 2020–2022 годы

Шакирьянов М.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В статье приводится обзор научных исследований лаборатории «Механика твердых тел» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН за 2020-2022 годы. Все исследования опубликованы в виде статей (в списке литературы исключением являются две работы, зарегистрированные в Реестре программ для ЭВМ) в известных отечественных и/или зарубежных научных журналах по механике. В течении рассматриваемых трех лет был решен ряд новых задач аэрогидроупругости и получены важные результаты динамического поведения тонкостенных элементов конструкций, взаимодействующих с внешней и внутренней сплошными средами. В частности, в статической и динамической постановках рассмотрен линейный изгиб консольного стержня, нагруженного всесторонним давлением и продольной силой. Определены области притяжения прогиба к верхнему и нижнему равновесным положениям двухопорной трубы при ее пространственных изгибно-вращательных колебаниях. Изучено взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода. Исследовано влияние внутренней и внешней присоединенных масс сплошных сред на частоту собственных колебаний трубы, движущейся с ускорением в поперечном направлении. Вычислены собственные частоты изгибных колебаний защемленного по концам стержня микро- и нанометрового поперечного сечения. Из решения обратной задачи по измененным значениям собственных частот найдены координата и величина присоединенной массы. Также рассмотрены линейные колебания микро- и наноструны с изменяющимся давлением в газовой среде с учетом поверхностных эффектов. С использованием молекулярно-динамической модели с сокращенным числом степеней свободы рассчитаны собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок различного диаметра в условиях плоского деформированного состояния. Кроме того, часть работ была посвящена изучению явления всплытия подводного газового трубопровода и определению его параметров арочного выброса. Представленные в настоящем обзоре научные статьи расположены в хронологическом порядке. По всем статьям даны их краткие содержания и сформулированы основные выводы.

Ключевые слова: стержень, трубопровод, микро- и нанорезонаторы, собственные частоты, поверхностные эффекты, плоский и пространственный изгиб, вибрация опор

1. Введение

Работа сотрудников лаборатории в указанном выше отрезке времени была направлена на реализацию тем государственного задания «Развитие теории прямых и обратных задач устойчивости и колебаний в аэрогидроупругих системах» (№ 0246-2019-0088), грантов РФФИ «Динамика тонкостенных элементов конструкций при действии ударного и пульсационного давления» (№ 18-01-00150) и РНФ «Развитие теории деформирования микронанопластинок, пленок с учетом поверхностных эффектов» (№ 22-21-00578).

2. Публикации 2020 года

Линейная устойчивость упругой цилиндрической оболочки, содержащей несжимаемую идеальную жидкость, при ударе по торцу в осевом направлении в предположении о мгновенном установлении сжатия по всей длине рассмотрена в [1]. Основное внимание уделяется анализу волнообразования в условиях контактного взаимодействия с

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Шакирьянов М.М.



Рис. 1. Сравнение отношений размеров волн, образующихся на поверхности оболочки, пустой (светлые кружочки) и заполненной водой (темные кружочки)

жидкостью. Приводятся также результаты экспериментального исследования волнообразования в оболочке с жидкостью и без жидкости. Дается сравнение их с теоретическими данными. Показано уменьшение размеров волн по окружности и длине оболочки, содержащей жидкость, по сравнению с пустой оболочкой.

На рис. 1 приведено сравнение отношений размеров волн, образующихся на поверхности оболочки, пустой (светлые кружочки) и заполненной водой (темные кружочки). Размеры волн по окружности обозначены через l_{μ} , а по длине оболочки *l_x* (*R* — радиус оболочки). Результаты носят качественный характер и показывают уменьшение размеров волн для оболочки с водой по сравнению со случаем пустой оболочки (или отношений размеров l_x/l_y и числа волн по окружности $2\pi R/l_y$). Разброс экспериментальных данных объясняется в основном наличием начальных отклонений от идеальной цилиндрической формы оболочки. Имеется качественное соответствие данных эксперимента и теории (светлые и темные кружочки больших размеров). По теории число полуволн по длине пустой оболочки равно $\sqrt{N/(2N_E)}$, а с жидкостью $\sqrt{3N/(5N_E)}$, где N_E — критическое значение продольной силы; *N* — сила удара по торцу оболочки.

В работе [2] определены собственные частоты изгибных колебаний проволоки с поперечным сечением микро- и наноразмеров. Показано значительное влияние на спектр частот поверхностных эффектов, связанных с различием упругих характеристик основного объема резонатора и приповерхностного слоя, а также среднего давления среды типа легкого газа на поверхность резонатора.

Обзор исследований по трем подходам в решении задач идентификации локальных дефектов стержней и трубопроводов и смежных задач дается в [3]. В первом подходе локальные дефекты моделируются условиями сопряжения, во втором — дельта функциями, входящими в дифференциальное уравнение, в третьем подходе продольные полости и трещины моделируются непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью. В первой части обзора представлены работы, посвященные идентификации дефектов распределенных механических систем с помошью собственных частот, а также с помощью проходящих и отраженных волн. Вторая часть обзора посвящена работам, использующим второй и третий подходы — моделирование дефектов дельта функциями и непрерывными участками стержня с измененной жесткостью, площадью поперечного сечения и плотностью.

Влияние условий закрепления по контуру круглой пластины, находящейся под давлением, на ее осесимметричный изгиб изучено в [4]. Принимаются уточненные значения поперечной распределенной силы, зависящей от давления газа и разностей площадей выпуклой и вогнутой поверхностей. Учитывается также сила сжатия срединной поверхности, возникающая в результате обжатия пластины по толщине. Определены прогибы в линейной и нелинейной постановках

В [5] рассматриваются динамика жидкости в цилиндрической емкости и импульсное воздействие на днище при ударе по ее верхнему концу. Изучается случай, когда при ударе в столбе жидкости возле днища возникает кавитация. Исследование проводится в условиях известных экспериментов по разрушению бутылки в результате удара по ее верхнему концу. Применяются одномерные модели гидродинамики, линейной акустики и несжимаемой жидкости. Уравнения гидродинамики рассчитываются классическим методом С.К. Годунова. Изменение ускорения днища описывается кусочно-постоянной функцией, а кавитация моделируется одиночной кавитационной полостью в виде цилиндрического слоя между днищем и столбом жидкости. Кавитация возникает при падении давления жидкости ниже давления насыщенного пара. Показывается, что разрушение бутылки в экспериментах происходит вследствие гидроудара, вызванного коллапсом кавитационной полости. Влияние волн в столбе жидкости на его удар по днищу незначительно. При уменьшении давления на внешней поверхности жидкости от атмосферного ударное воздействие на днище убывает. Устанавливается также оптимальная высота столба жидкости для достижения больших давлений на днище.

Изгибные колебания трубопровода под действием переменного давления транспортируемой жидкости и вертикального колебательного движения опор исследованы в [6, 7]. Одна из опор трубопровода неподвижна относительно основания, другая — может скользить по нему. Течением жидкости внутри трубопровода пренебрегается. Учитывается взаимное влияние продольной и окружной деформаций, внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии трубы. Рассмотрена первая форма колебаний. Отдельно изучены нелинейные вынужденные, параметрические колебания и их взаимодействие. Для амплитуд колебаний получены приближенные аналитические формулы. Приводится сравнение результатов приближенного аналитического и численного решений.

В [8] представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения.

На основе предположения о начальной деформированной форме трубопровода без начальных напряжений в [9] определено критическое усилие сжатия. Трубопровод находился под действием внутреннего и внешнего давлений, сжимающей силы. По трубопроводу протекает жидкость с заданной плотностью. Учитывались осесимметричное расширение трубы и ее продольное укорочение, изменение температуры стенки трубы. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей под действием вышеуказанных факторов.

В [10] рассмотрено напряженно-деформированное состояние (НДС) трубы, оболочки и пленки из неоднородного упругого материала под действием внутреннего давления. Решение задачи представлено гипергеометрическими рядами. Приводятся результаты вычислений для толстостенной неоднородной трубы, неоднородной оболочки и очень тонкой неоднородной оболочки. Аналитическое решение эффективно при анализе напряженно-деформированного состояния цилиндра с тонким неоднородным слоем. Показано, что в неоднородном цилиндре радиальные напряжения и перемещения меньше, чем в однородном. Установлено, что тангенциальные напряжения в неоднородной оболочке по радиусу уменьшаются в большей степени.

Собственные изгибные колебания кровеносного сосуда с движущейся кровью, находящегося под действием растягивающей силы и давления в сосуде, исследованы в [11]. Учитываются силы инерции кровеносного сосуда, кориолисовы и центробежные силы, обусловленные движением крови. Определяются волновые числа, при использовании граничных условий находится частотное уравнение. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной параметр, относительную массу крови на единицу длины кровеносного сосуда и, как следствие, массовый расход крови по кровеносному сосуду.

В [12] дано обоснование учета воздействия эквивалентного продольного осевого усилия S_x , зависящего от параметров эксплуатации трубопровода (внутреннего давления p_0 и температурного перепада Δt) и совместных деформаций трубы с грунтом. В первой постановке задачи о НДС трубопровода учитывается воздействие S_x, а во второй постановке задачи этим воздействием пренебрегается. Задачи решены методом конечных элементов в перемещениях. Расчетным путем показано, что за счет действия S_x при значениях параметров эксплуатации: $p_0 = 9,0$ МПа; $\Delta t = 29,0$ °С значения экстремальных изгибных напряжений увеличиваются в два раза по сравнению с соответствующими характеристиками НДС трубопровода для случая пренебрежения воздействием S_x. Из решения задачи в первой постановке найдены критические значения параметров эксплуатации, определяющих потерю устойчивости трубопровода.

В [13] приведены решения прямой и обратной задач о продольных колебаниях стержня с переменной площадью поперечного сечения. Закон изменения площади сечения моделируется в виде экспоненциальной функции от многочлена степени *n*. Метод реконструкции данной функции основан на представлении фундаментальной системы решений прямой задачи в виде ряда Маклорена по переменным *x* и λ. Представлены примеры решения для различных функций сечения и различных краевых условий. Показано, что для восстановления *n* неизвестных коэффициентов многочлена требуется п собственных значений, причем решение двойственно. Однозначное решение получено только для случая упругого закрепления на одном из концов стержня. С помощью «зашумления» входных данных произведена численная оценка погрешности метода. Показано, что погрешность нахождения переменной площади сечения менее 1 % при погрешности собственных значений продольных колебаний не более 0,0001.

Внешнее и внутреннее сопротивления сплошных сред при ускоренном движении трубопровода рассмотрены в [14]. Недеформируемый трубопровод бесконечной длины, окруженный идеальной несжимаемой жидкостью, движется с ускорением перпендикулярно своей оси. Трубопровод имеет круговое поперечное сечение. Транспортируемая газожидкостная среда в трубе включает в себя граничащие области с двумя фазами: жидкой и газовой. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области. Влиянием сил гравитации на поперечные движения частиц сред пренебрегается. Получена формула, определяющая суммарную присоединенную массу трубопровода. Числовые расчеты выполнены при конкретных значениях входных параметров. Результатам вычислений дан анализ.

Влияние внутреннего переменного давления на изгибные колебания трубопровода на двух опорах исследовано в [15, 16]. Транспортируемая среда в трубопроводе состоит из жидкой и газовой фаз. Предполагается, что течение газа в осевом направлении происходит внутри жидкой круговой цилиндрической области. Скоростью течения газа пренебрегается. Учитывается влияние ускорения движения трубопровода в поперечном направлении на изменение давления в жидкости. Получены численное и приближенное аналитическое решения нелинейного дифференциального уравнения установившихся изгибных колебаний трубы. Рассмотрен конкретный числовой пример и дан анализ результатов вычислений.

В [17] представлена задача, определяющая вид граничного условия на правом конце стержня по собственным частотам его колебаний. Учитываются также поперечные колебания стержня. Предполагается, что левый конец стержня зажат, а правый конец недоступен для визуального осмотра. На правом конце стержня может быть представлено одно из десяти типов граничных условий: защемленное, закрепленное, свободный конец, роликовое, пять видов упругого крепления и инерционный элемент на конце стержня. Граничные условия на правом конце стержня можно определить по трем частотам собственных колебаний. Преимущество и новизна данной работы заключается в использовании минимального количества собственных частот для решения задачи. Также оценивается погрешность результата. Стержни переменного сечения используются во многих деталях и механизмах. Например, конические стержни нашли широкое применение в ударных механизмах. Прочность таких деталей непосредственно зависит от собственных частот колебаний.

В [18] рассмотрен метод, позволяющий численно найти переменное сечение упругого стержня по собственным частотам продольных колебаний. Предполагается, что площадь поперечного сечения изменяется вдоль оси и описывается экспоненциальной функцией от многочлена степени *n*. Граничное условие на левом конце жесткое, а на правом — упругое. Показано, что для определения *n* неизвестных коэффициентов функции сечения требуется *n* собственных частот.

3. Публикации 2021 года

Области притяжения прогиба к верхнему и нижнему равновесным положениям двухопорного трубопровода при его пространственных колебаниях определяются в [19, 34]. Предполагается, что опоры совершают вертикальные высокочастотные колебания с равными амплитудами и фазами. Используются нелинейные уравнения изгиба и углового движения трубопровода вокруг оси, проходящей через опоры. Для решения задачи применяется теория движения маятника Капицы. В случае превалирующего влияния внутреннего давления в трубе над ее весом на значение *W*₀ статического прогиба средней точки пролета для определения угла θ₁ поворота плоскости изгиба вблизи положений динамического равновесия получено уравнение

$$\sin \theta_1 \left[\pi g (k^2 + W_0^2) + 2W_0 (s_0 \Omega)^2 \cos \theta_1 \right] = 0,$$
$$W_0 = W_p + W_g \cos \theta_1,$$

где $k^2 = \pi \rho [(R+h)^4 - R^4]/m$, $m = \rho_0 F_0 + \rho F$, $F_0 = \pi R^2$, $F = \pi [(R+h)^2 - R^2]$; R, h, ρ , ρ_0 — внутренний радиус, толщина стенки, плотности материала трубы и заполняющей ее жидкости; W_p и W_g — составляющие статического прогиба, обусловленные внутренним давлением и весом трубы; g — гравитационное ускорение; s_0 , Ω — амплитуда и циклическая частота колебаний основания.

Из равенства $\sin \theta_1 = 0$ следуют корни 0 и л, которые представляют собой нижнюю и верхнюю точки притяжения. При $\sin \theta_1 \neq 0$ равенство нулю выражения в квадратных скобках с учетом значения W_0 дает

$$egin{aligned} \cos heta_1 &= -rac{\pi g(W_p+W_g\cos heta_1)}{2(s_0\Omega)^2} imes \ & imes \left(1+rac{k^2}{(W_p+W_g\cos heta_1)^2}
ight). \end{aligned}$$

Этим уравнением определяется то значение угла θ_1 , выше которого изогнутый вверх трубопровод имеет тенденцию к медленному движению к вертикальному положению (к верхней точке $\theta_1 = \pi$). Ниже этого значения θ_1 изогнутый трубопровод опускается к естественному нижнему положению ($\theta_1 = 0$).

Установлено, что превалирующее влияние на изгиб внутреннего давления среды в трубопроводе над его весом и превышение момента сил вибрации опор над моментом сил гравитации обусловливают наличие верхнего и нижнего равновесных положений и соответствующих областей притяжения. При вертикальных колебаниях опор рассмотрен случай преобладающего влияния на изгиб внутреннего давления. Предполагается, что вибрации опор происходят с малой амплитудой по сравнению со статическим прогибом и с большой частотой по сравнению с низшей частотой его изгибных колебаний. Условие равенства момента распределенных по длине трубопровода сил гравитации и момента сил вибрации опор определяет границу областей выпучивания к нижнему и верхнему положениям. Около этой границы мало влияние на изгиб центробежных и кориолисовых сил. В рамках принятых приближений нет влияния высших форм изгибных колебаний трубопровода на границу областей притяжения. Предельные значения областей притяжения получаются при малой гравитации и сильной вибрации опор или при большой гравитации и слабой вибрации. В случае преобладания сил веса над распределенной силой от внутреннего давления имеется только нижнее положение равновесия. Сильное влияние на поведение системы оказывает значение критического внутреннего давления, при достижении которого труба между опорами испытывает выпучивание (по линейной теории). Необходимым, но недостаточным условием существования верхнего положения динамического равновесия является превышение внутреннего давления над его критическим значением.

Линейный изгиб консольного стержня, находящегося под всесторонним давлением и продольной силой, в статической и динамической постановках рассмотрен в [20]. Учитывается поперечная распределенная сила на стержень, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности. Сжимающая сила может быть неизменного направления и изменяющейся при изгибе. В частности, следящая сила образуется в результате действия давления на концевое сечение стержня. Дается сравнение с классической задачей об устойчивости. Изучены особенности одновременного действия сил неизменного и изменяющегося направлений.

В [21] рассматривается радиальная динамика однослойной углеродной нанотрубки при динами-ческом сжатии в линейной постановке. Применяет-

ся уравнение изгибной деформации тонкостенной цилиндрической оболочки (кругового кольца), основанное на гипотезах Кирхгоффа. Привлекается эффективный параметр, полученный сравнением собственных частот в рамках молекулярной динамики и теории упругих оболочек. Прикладываемое внешнее давление изменяется ступенчато и далее остается постоянным в пределах рассматриваемого времени. В зависимости от отношения этого давления к критическому значению статического давления и зучаются режимы колебательного движения и экспоненциального возрастания прогиба. Эти величины представляются также через число атомов углерода, образующих круговое кольцо.

Собственные частоты изгибных колебаний резонатора с прямоугольным сечением на шарнирных опорах определены в [22]. Учитывается поверхностный эффект, обусловленный взаимодействием давления газа и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей резонатора. Изучено изменение спектра частот при наличии на поверхности резонатора присоединенной сосредоточенной и равномерно распределенной масс. Из решения обратной задачи определяются присоединенные массы по изменению собственных частот. Указанный первый поверхностный эффект дает увеличение собственных частот для одних материалов и уменьшение для других. Он приводит к изменению эффективных жесткостей при растяжении-сжатии и изгибе. В случае круглой проволоки ввиду увеличения ее удельной поверхности усилие растяжения N и изгибающий момент имеют вид (первый поверхностный эффект):

$$N = K_* \varepsilon, \qquad M = D_* \kappa, \qquad K_* = K(1 + \beta),$$
$$D_* = D(1 + 2\beta), \qquad \beta = \frac{4E_s}{Fd},$$

где K и D — жесткости без учета поверхностного эффекта; ε , к — продольная деформация и изменение кривизны осевой линии при изгибе; d — диаметр проволоки; E и E_s — модули упругости основного объема и поверхностного слоя. В этой модели не вводятся на рассмотрение толщина поверхностного слоя (поэтому E и E_s имеют разные размерности). Наибольшее внимание уделено анализу влияния второго поверхностного эффекта на изгиб, устойчивость и колебания пластин, пленок микрои нанопроволок и струн. Он определяется числом

и нанопроволок и струн. Он определяется числом Ильгамова $\frac{p_m}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2$ в выражении распределенной поперечной нагрузки на пластину при ее цилиндрическом изгибе:

$$q = p_1 - p_2 + \frac{p_m}{E} \left(\frac{L}{h}\right)^2$$
, $p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$,

где p_1 и p_2 — давления, действующие на поверхности пластины.

В [23] определены собственные частоты изгибных колебаний защемленного по концам стержня микро- и нанометрового поперечного сечения. Учитывается поверхностный эффект, обусловленный взаимодействием давления газа и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей стержня, появляющейся при изгибе. Рассмотрено изменение спектра частот при наличии на поверхности резонатора присоединенной сосредоточенной и равномерно распределенной масс. Из решения обратной задачи определяются координата и величина присоединенной массы по изменению собственных частот.

Линейные колебания микро- и наноструны при изменении давления в газовой среде рассмотрены в [24]. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый эффект обусловлен различием упругих свойств в поверхностном слое и в объеме материала. В зависимости от используемого материала эффективная жесткость при растяжении может быть выше или ниже обычной жесткости. Второй эффект обусловлен взаимодействием давления среды и разности площадей выпуклой и вогнутой сторон круглой поверхности, возникаюшей при отклонении от прямой. Эти эффекты выражаются безразмерными параметрами. Решение определяется в зависимости от заданного закона изменения давления во времени. Показано, что с ростом давления происходят уменьшение амплитуды и увеличение частоты колебаний, которые связаны с вакуумированием. В обратной задаче определяется закон изменения давления, а также параметр первого эффекта.

С использованием молекулярно-динамической модели с сокращенным числом степеней свободы в [25] рассчитаны собственные частоты изгибных колебаний УНТ различного диаметра в условиях плоского деформированного состояния. Показано, что теория тонких цилиндрических оболочек дает высокую точность в оценке частот малоамплитудных собственных колебаний даже для УНТ относительно малого диаметра. Показано, что с ростом амплитуды частота собственных колебаний уменьшается, что согласуется с литературными данными. Полученные результаты необходимы для дизайна терагерцовых резонаторов на основе УНТ и высокоточных наносенсоров массы и силы, основанных на эффекте электромеханической связи, который проявляют УНТ.

В [26] рассмотрена краевая задача для круглой пластины под действием двустороннего давления газа. В соотношениях задачи используется уточнен-

ное выражение для поперечной распределенной силы. Сила складывается из среднего избыточного давления и разности давлений, действующих на обе поверхности пластины, а также из искривления, возникающего при изгибе. Показано влияние граничных условий на значения прогиба, а также учтено усилие сжатия срединной поверхности, возникающее в результате уменьшения толщины пластины. Исследован линейный и нелинейный осесимметричный изгибы.

Результаты расчета технологического режима работы газовой скважины в глубокозалегающих месторождениях со сложными горно-геологическими условиями приведены в [27]. Совместно решены задачи гидравлики и температуры потока газа по скважине, теплопроводности горной породы. Дифференциальное уравнение движения потока газа зависит от распределения температуры по глубине скважины, а дифференциальное уравнение сохранения энергии — от распределения давления по глубине скважины. Поэтому при их решении аналитическим методом используется метод последовательных приближений: на начальном этапе при решении уравнения движения газа используется среднее значение температуры, а при решении температурной задачи потока газа — найденное распределение давления по глубине скважины. В численном методе решения задачи система дифференциальных уравнений движения потока газа в скважине и сохранения энергии интегрируется совместно с дифференциальным уравнением в частных производных (двумерное уравнение теплопроводности), описывающим изменение температуры горной породы. Система дифференциальных уравнений решена методом Рунге-Кутта с помощью специальной встроенной функции MathCAD. Обработка применяемых в расчетах результатов эксперимента осуществляется с помощью статистической математической модели. Результаты решения аналитическими и численными методами, расчеты по инженерным формулам (функции давления и температуры потока газа, а также замеренные значения этих характеристик) представлены в виде графиков функций давления и температуры по глубине скважины. В тестовом примере представлен расчет технологического режима работы скважины Р-1 Комсомольского (Пяку-Пуровского) месторождения.

В [28] по заданным частотам продольных колебаний неоднородного прямолинейного стержня определяется функция изменения его плотности. Предполагается, что плотность изменяется вдоль оси стержня и описывается полиномиальной функцией. Такой подход позволяет установить закон изменения плотности по конечному набору собственных частот.

Программа для ЭВМ, позволяющая вычислять внешнюю и внутреннюю присоединенные массы трубопровода, приведена в [29].

Последовательность применения численного метода Рунге–Кутта, преобразования Фурье и отображений Пуанкаре при рассмотрении нелинейных изгибных колебаний трубопровода с учетом внутренней присоединенной массы представлена программой для ЭВМ [30].

4. Публикации 2022 года

Низшая частота изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом определяется в [31]. Дается вывод выражения распределенной поперечной нагрузки на пластину в предположении ее цилиндрического изгиба. Поверхности пластины контактируют со средой разной плотности и давления. Среда может быть сжимаемой в процессе деформации поверхности и несжимаемой. Определяется влияние на изгиб взаимодействия среднего давления и изменения кривизны срединной поверхности, а также присоединенной массы газовой среды.

В [32] рассмотрены линейные колебания микро- и наноструны с изменяющимся давлением в газовой среде. При этом учитываются два поверхностных эффекта. Первый обусловлен различием упругих свойств в приповерхностном слое и в основном объеме материала. В зависимости от материала эффективная жесткость на растяжение может быть больше или меньше, чем обычная жесткость. Второй эффект обусловлен наличием разности сил давления среды на выпуклой и вогнутой сторонах круговой поверхности, появляющейся при отклонении от прямой линии. Эти эффекты определяются безразмерными параметрами. Решение находится в зависимости от заданного закона изменения давления по времени. Повышение давления приводит к уменьшению амплитуды и повышению частоты колебаний. С вакуумированием связаны увеличение амплитуды и уменьшение частоты. В обратной задаче определяется закон изменения давления, а также параметр первого эффекта.

Простейшая модель всплытия пролета подводного газового трубопровода между двумя опорами разработана в [33]. Учитываются вес трубопровода с транспортируемой средой, выталкивающая сила воды, поперечные распределенные силы, обусловленные давлениями на внутреннюю и внешнюю поверхности, изменением кривизны осевой линии при изгибе, а также уменьшение давления воды и газа на стенки трубы при ее подъеме. Рассматривается линейный статический изгиб. Модель описывает подъем трубопровода до положения, когда его верхняя часть совпадает с поверхностью воды. Определены условия всплытия трубопровода.

В [35] дается обзор исследований взаимодействия давлений на обе стороны тонкой упругой пластины и цилиндрической оболочки и изменения кривизны их срединной поверхности при изгибе. Влияние среднего давления устанавливалось до сих пор через уточнение распределенной поперечной силы в известных уравнениях изгиба длинной цилиндрической оболочки. В данной работе это влияние учитывается при выводе уравнения изгиба с волнообразованием по окружности и отсутствии волн по ее длине.

Определение параметров трубы при формировании арочного выброса рассмотрено в [36]. Учитывается взаимное влияние изгиба трубопровода, внутреннего и внешнего давлений, действия сил сжатия, течения жидкости по трубопроводу с заданной плотностью, осесимметричного расширения трубы и ее продольного сжатия, изменения температуры стенки трубы, образования арочных выбросов. Упругий трубопровод закреплен на зажимных скользящих опорах, не препятствующих протеканию жидкости внутри трубопровода вдоль его оси. На опорах и прогиб, и угол поворота равны нулю. Трубопровод подвергается продольному сжатию. Сила сжатия, давление внутри и снаружи трубопровода и скорость течения жидкости по трубопроводу изменяются независимо друг от друга. В работе рассматривается статическое взаимодействие неустойчивостей в зависимости от силы сжатия, внутреннего и внешнего давлений, скорости течения жидкости, осесимметричного расширения трубы и изменения температуры стенки трубы. Жесткость на изгиб, растягивающие усилия и внешнее гидростатическое давление стабилизируют трубопровод, а силы сжатия, внутреннее гидростатическое давление, движение жидкости с любой скоростью внутри трубопровода и повышение температуры стенки трубы дестабилизируют его. С увеличением предела текучести материала трубопровода и расстояния между опорами растет и допустимая амплитуда арочного выброса. При увеличении внутреннего давления трубопровода допустимая амплитуда арочного выброса имеет тенденцию к снижению.

5. Заключение

Результаты решения представленных выше новых задач устойчивости и колебаний в аэрогидроупругих системах прежде всего имеют практический интерес. Они могут найти применение в энергетике, нефтегазовой промышленности, технологических машинах, вакуумной, авиационной и ракетно-космической технике, медицине. В частности, результаты изучения собственных изгибных колебаний кровеносного сосуда могут быть использованы для акустического метода определения скорости крови и ее массового расхода.

Цель исследований, в частности, заключается в определении значений параметров системы трубопровод-транспортируемый продуктвибрирующие опоры, при достижении которых возникают опасные режимы колебаний. На этапе проектирования эти данные позволяют предусмотреть защитные мероприятия. Постоянное и переменное внутреннее и внешнее давления могут приводить к среднему перемещению трубопровода (как нелинейный эффект). Например, явление всплытия подводного газового трубопровода, более тяжелого, чем выталкивающая сила воды, объясняется одновременным действием температурного расширения, осевого сжатия, поперечной распределенной нагрузки, обусловленной взаимодействием давления газа и воды и кривизной осевой линии. Такое равновесное положение сооружения является недопустимым для его эксплуатации. До сих пор не разработан механизм всплытия трубопровода вследствие изменения гидростатического давления при его подъеме и колебаний давления газа, что отмечено в литературе. Часть результатов, относящихся к наноэлементам, необходима для дизайна терагерцовых резонаторов на основе углеродных нанатрубок и высокоточных наносенсоров массы и силы, основанных на эффекте электромеханической связи.

Список литературы

- [1] Ильгамов М.А. Устойчивость цилиндрической оболочки с жидкостью при осевом ударе // Изв. УНЦ РАН. 2020. № 2. С. 14-19. DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-2-14-19
- Ильгамов М.А. Спектр частот проволочного микро- и нанорезонатора // ДАН. Физика, Технические науки. 2020. Т. 494. С. 17–20.
 DOI: 10.31857/S2686740020050089
- [3] Ахтямов А.М., Ильгамов М.А. Обзор исследований по идентификации локальных дефектов стержней // Проблемымашиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 3–15. DOI: 10.31857/S0235711920020042
- [4] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Dependence of axisymmetric bending of a circular plate on boundary conditions and pressure on its surface // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. Vol. 41, No. 7. P. 1216–1221. DOI: 10.1134/51995080220070197
- [5] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Мустафин И.Н. Ударная кавитация жидкости в цилиндрической емкости // Ученые записки Казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2020. Т. 162. Кн. 1. С. 27–37. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37

- [6] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Вынужденные и параметрические колебания трубопровода // Изв. УНЦ РАН. 2020. № 3. С. 5–11. DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11
- [7] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Взаимодействие вынужденных и параметрических колебаний трубопровода // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 6. С. 66–69. DOI: 10.15372/PMTF20200608
- [8] Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 12–18. DOI: 10.31857/S0568528120020073
- [9] Хакимов А.Г. К статической устойчивости трубопровода // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, Вып. 4. С. 612–617. DOI: 10.21883/JTF.2020.04.49086.214-19
- [10] Хакимов А.Г., Беляев А.Б., Шакирьянов М.М., Мухамадеев В.Р. К расчету трубы из неоднородного упругого материала // Вестник УГАТУ. 2020. Т. 24, № 1(87). С. 25–31. eLIBRARY ID: 42909040
- [11] Тимербулатов В.М., Тимербулатов Ш.В., Хакимов А.Г. Определение массового расхода крови в кровеносном сосуде по собственным частотам изгибных колебаний // ДАН РАН. Физика, Технические науки. 2020. Т. 492, № 1. С. 88–91. DOI: 10.31857/S2686740020030116
- [12] Бахтизин Р.Н., Зарипов Р.М., Коробков Г.Е., Масалимов Р.Б. Оценка влияния внутреннего давления, вызывающего дополнительный изгиб трубопровода // Записки Горного института. 2020. Т. 242. № 2. С. 160–168. DOI: 10.31897/PMI.2020.2.160
- [13] Утяшев И.М., Аитбаева А.А., Юлмухаметов А.А. Определение закона изменения сечения стержня по собственным частотам колебаний // Изв. УНЦ РАН. 2020. № 4. С. 19–24. DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-19-24
- [14] Шакирьянов М.М., Юлмухаметов А.А. Внешняя и внутренняя присоединенные массы трубопровода // Известия УНЦ РАН. Механика. 2020. № 3. С. 12–16. DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-12-16
- [15] Shakiryanov M.M., Yulmukhametov A.A. Effect of an Internal Attached Mass on Nonlinear Pipeline Oscillations // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49, No. 9. Pp. 1–8. DOI: 10.3103/S1052618820090113
- [16] Yulmukhametov A.A., Shakiryanov M.M., Utyashev I.M. Bending vibrations of the pipeline under the influence of the internal added mass // AIP Conference Proceedings 2288, 030093 (2020). DOI: 10.1063/5.0028885
- [17] Aitbaeva A.A., Utyashev I.M. Identification of the rod end fixing by natural frequencies of transverse vibration // International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM). Samara, Russia. 2020. Pp. 1–5.
- [18] Utyashev I.M., Yulmuhametov A.A., Aitbaeva A.A. The inverse problem of the oscillation of a rod with a variable cross section // Journal of Physics: Conference Series. 2288, 030093 (2020). DOI: 10.1088/1742-6596/1697/1/012088
- [19] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // ДАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 496. С. 55– 59. DOI: 10.31857/S2686740021010053
- [20] Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость консольного стержня под действием давления на его поверхности и продольной силы // Известия РАН. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 77-88. DOI: 10.31857/S0572329921040061

- [21] Дмитриев С.В., Ильгамов М.А. Радиальная реакция углеродной нанотрубки на динамическое давление // ДАН. Физика, Технические науки. 2021. Т. 501. С. 8–13. DOI: 10.31857/S2686740021060080
- [22] Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7, No. 2. Pp. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848
- [23] Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Зависимость спектра частот микро- и нанорезонатора от давления и присоединенной массы // Контроль. Диагностика. 2021. Т. 24, № 6. С. 58–64. DOI: 10.14489/td.2021.06.pp.058-064
- [24] Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic oscillations of microand nanostrings in gaseous medium // Fluid Dynamics. 2021. Vol. 56, No. 8. Pp. 1062–1069. DOI: 10.1134/S0015462821080073
- [25] Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С. Собственные частоты изгибных колебаний углеродных нанотрубок // Журнал технической физики. 2021. Т. 91, Вып. 11. С. 1732–1738. DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21
- [26] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. On the Effect of Average Pressure on a Nonlinear Boundary Value Problem for a Circular Plate // Lobachevskii journal of mathematics. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1982–1988. DOI: 10.1134/S1995080221080138
- [27] Хайруллин Б.А., Шарафиев Э.А., Пономарев А.И., Зарипов Р.М. Расчет технологического режима работы газовой скважины с учетом реальных свойств потока газа и теплообмена с горной породой // 72-я научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых УГНТУ. Сб. материалов конференции. 2021. УГНТУ. Т. 2. С. 132.
- [28] Utyashev I.M. Determination of the variable density of the rod from natural frequencies of longitudinal vibrations // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 2099 012049. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012049

- [29] Юлмухаметов А.А., Шакирьянов М.М. Программа для вычисления внешней и внутренней присоединенных масс трубопровода, транспортирующего жидкость или газ. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021668941; заявл. 11.11.2021; регистрация в Реестре программ для ЭВМ 22.11.2021. еLIBRARY ID: 47434316
- [30] Юлмухаметов А.А., Шакирьянов М.М. Нелинейные изгибные колебания трубопровода с учетом внутренней присоединенной массы. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021669592; заявл. 10.11.2021; регистрация в Реестре программ для ЭВМ 30.11.2021. eLIBRARY ID: 47434976
- [31] Ильгамов М.А., Хакимов А.А. Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // Известия РАН. МТТ. 2022. № 3. С. 88–96. DOI: 10.31857/S0572329922030084
- [32] Ильгамов М.А., Утяшев И.М. Непериодические колебания микро- и наноструны в газовой среде // ПММ. 2022. Т. 86, Вып. 1. С. 66–76. DOI: 10.31857/S0032823522010052
- [33] Ильгамов М.А. Модель всплытия подводного трубопровода // ДАН. Физика, Технические науки. 2022. Т. 504. С. 12–16. DOI: 10.31857/S2686740022030087
- [34] Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М. Положения упругого равновесия трубопровода с вибрирующими опорами // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 3. С. 183–192. DOI: 10.15372/PMTF20220318
- [35] Ильгамов М.А. Влияние среднего давления на изгиб длинной цилиндрической оболочки // Изв. УНЦ РАН. 2022. № 3. С. 5– 11. DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11
- [36] Khakimov A.G. Determining Pipeline Parameters during the Formation of Arched Ejection // 15th International Conference on Mechanics. Resource and Diagnostics of Materials and Structures. Proceedia Structural Integrity. 2022. V. 40. Pp. 214– 222.

DOI: 10.1016/j.prostr.2022.04.029
ISSN 2658-5782

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.006 DOI:10.21662/mfs2022.1.006 17 (2022), **1-2**, 63-73

Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

Review of research solid mechanics laboratory for 2020–2022

Shakir'yanov M.M.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center RAS, Ufa

The article presents an overview of the research of the Laboratory of Solid Mechanics IMech UFRS RAS for 2020-2022. All studies were published as articles (there are two exceptions in the list of references, registered in the Register of Computer Programs) in well-known domestic and (or) foreign scientific journals on mechanics. During the three years under consideration, a number of new problems of aerohydroelasticity were solved and important results were obtained on the dynamic behavior of thin-walled structural elements interacting with external and internal continuous media. In particular, the linear bending of a cantilever rod loaded with all-round pressure and longitudinal force is considered in static and dynamic formulations. The areas of attraction of the deflection to the upper and lower equilibrium positions of a two-support pipe during its spatial bending-rotational vibrations are determined. The interaction of forced and parametric vibrations of the pipeline has been studied. The influence of the internal and external added masses of continuous media on the frequency of natural vibrations of a pipe moving with acceleration in the transverse direction is studied. The eigenfrequencies of bending vibrations of a micro- and nanometer-sized rod clamped at the ends are calculated. From the solution of the inverse problem for the changed values of natural frequencies, the coordinate and magnitude of the added mass are found. Linear oscillations of micro- and nanostrings are also considered when the pressure in a gaseous medium changes, taking into account surface effects. Using a model of molecular dynamics with a reduced number of degrees of freedom, the eigenfrequencies of bending vibrations of carbon nanotubes (CNTs) of different diameters are calculated under conditions of a plane-deformed state. In addition, part of the work was devoted to the study of the phenomenon of the ascent of an underwater gas pipeline and the determination of its buoyancy parameters.

The scientific articles presented in this review are arranged in chronological order. For all articles, their summary is given and the main conclusions are formulated.

Keywords: rod, pipeline, micro- and nanoresonators, natural frequencies, surface effects, plane and spatial bending, vibration of supports

References

- Ilgamov M.A. [Stability of a cylindrical shell with liquid under axial impact] // Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2020. No. 2. Pp. 14–19 (in Russian). DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-2-14-19
- Ilgamov M.A. Frequency spectrum of a wire micro- and nanoresonator // Doklady Physics. 2020. V. 65, No. 9. P. 326– 329. DOI: 10.1134/S1028335820090049
- [3] Akhtyamov A.M., Ilgamov M.A. Overview of local rod defect detection studies // Journal of machinery manufacture and reliability. 2020. V. 49, Is. 2. Pp. 87-97. DOI: 10.3103/S1052618820020041
- [4] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. Dependence of axisymmetric bending of a circular plate on boundary conditions and pressure on its surface // Lobachevskii journal of mathematics. 2020. Vol. 41, No. 7. P. 1216–1221. DOI: 10.1134/S1995080220070197

- [5] Aganin A.A., Ilgamov M.A., Mustafin I.N. [Shock cavitation of a liquid in a cylindrical container] // Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskiye nauki. [Scientific notes of Kazan University. Series: physical and mathematical sciences]. 2020. V. 162. No. 1. Pp. 27–37 (in Russian). DOI: 10.26907/2541-7746.2020.1.27-37
- Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. [Forced and parametric oscillations of the pipeline] // Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS].2020. No. 3. Pp. 5–11 (in Russian).
 DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11
- [7] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. Interaction between forced and parametric vibrations of a pipeline // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. V. 61, No. 6. P. 964–967. DOI: 10.1134/S0021894420060085
- [8] Khakimov A.G. Flow around a Circular Cylindrical Shell // Fluid Dynamics. 2020. V. 55, No. 2. P. 154–161. DOI: 10.1134/S001546282002007X

- Khakimov A.G. Static Stability of a Pipeline // Technical Physics. 2020. V. 65, No.4. P. 587–592.
 DOI: 10.1134/S106378422004012X
- [10] Khakimov A.G., Belyaev B.A., Shakir'yanov M.M., Muhamadeev V.R. [To the calculation of a pipe from an inhomogeneous elastic material] // Vestnik UGATU. [Bulletin of USATU]. 2020. V. 24, No. 1 (87). Pp. 25–31 (in Russian). eLIBRARY ID: 42909040
- [11] Timerbulatov V.M., Timerbulatov S.V., Khakimov A.G. Determination of the mass-flow rate of blood vessel using nanural frequencies of flexural vibrations. Doklady Phisics. V. 65, No. 5. 2020. P. 190–193. DOI: 10.1134/S1028335820050110
- [12] Bakhtizin R.N., Zaripov R.M., Korobkov G.E., Masalimov R.B. [Essessment of internal pressure effect, causing additional bending of the pipeline] // Записки Горного института. [Notes of the Mining Institute]. 2020. V. 242, No.2. Pp. 160–168 (in Russian).

DOI: 10.31897/PMI.2020.2.160

- [13] Utyashev I.M., Aitbaeva A.A., Yulmuhametov A.A. [Determination of the law of change in the cross section of the rod by natural vibration frequencies] // Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2020. No. 4. Pp. 19–24 (in Russian). DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-4-19-24
- [14] Shakir'yanov M.M., Yulmuhametov A.A. [External and internal attached masses of the pipeline] Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2020. No. 3. Pp. 12–16 (in Russian). DOI: 10.31040/2222-8349-2020-0-3-12-16
- [15] Shakiryanov M.M., Yulmukhametov A.A. Effect of an Internal Attached Mass on Nonlinear Pipeline Oscillations // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49, No. 9. Pp. 1–8. DOI: 10.3103/S1052618820090113
- [16] Yulmukhametov A.A., Shakiryanov M.M., Utyashev I.M. Bending vibrations of the pipeline under the influence of the internal added mass // AIP Conference Proceedings 2288, 030093 (2020). DOI: 10.1063/5.0028885
- [17] Aitbaeva A.A., Utyashev I.M. Identification of the rod end fixing by natural frequencies of transverse vibration // International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM). Samara, Russia. 2020. Pp. 1–5.
- [18] Utyashev I.M., Yulmuhametov A.A., Aitbaeva A.A. The inverse problem of the oscillation of a rod with a variable cross section // Journal of Physics: Conference Series. 2288, 030093 (2020). DOI: 10.1088/1742-6596/1697/1/012088
- [19] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. Dynamic equilibrium positions of bent pipeline with vibrating supports // Doklady Physics. 2021. V. 66, No. 2. P. 51–54. DOI: 10.1134/S1028335821020026
- [20] Ilgamov M.A. Bending and stability of the cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force // Mechanics of Solids. 2021. V. 56, No. 4. P. 495–504. DOI: 10.3103/S0025654421040087
- [21] Dmitriev S.V., Ilgamov M.A. The radial response of a carbon nanotube to dynamic pressure // Doklady Physics. 2021. V. 66, No. 12. P. 336–340. DOI: 10.1134/S102833582112003X
- [22] Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7, No. 2. Pp. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848
- [23] Il'gamov M. A., Khakimov A.G. [Dependence of the frequency spectrum of micro- and nano- resonators on pressure and attached mass]// Kontrol'. Diagnostika. [Control. Diagnostics]. 2021. V. 24, (6). P. 58–64 (in Russian). DOI: 10.14489/td.2021.06.pp.058-064

- [24] Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic oscillations of microand nanostrings in gaseous medium // Fluid Dynamics. 2021. Vol. 56, No. 8. Pp. 1062–1069. DOI: 10.1134/S0015462821080073
- [25] Dmitriev S.V., Sunagatova I.R., Ilgamov M.A., Pavlov I.S. Natural frequencies of bending vibrations of carbon nanotubes // Technical Physics. 2022. V. 67, No. 1. P. 7–13. DOI: 10.1134/S1063784222010042
- [26] Ilgamov M.A., Moiseeva V.E. On the Effect of Average Pressure on a Nonlinear Boundary Value Problem for a Circular Plate // Lobachevskii journal of mathematics. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1982–1988. DOI: 10.1134/S1995080221080138
- [27] Khairullin B.A., Sharafiev E.A., Zaripov R.M. Ponomarev A.I. [Calculation of the technological mode of operation of a gas well, taking into account the real properties of the gas flow and heat exchange with rock] // 72-ya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya studentov, aspirantov i molodykh uchenykh UGNTU. Sb. materialov konferentsii .[72nd Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists of USPTU. Sb. conference materials]. 2021. UGNTU. V. 2. P. 132 (in Russian).
- [28] Utyashev I.M. Determination of the variable density of the rod from natural frequencies of longitudinal vibrations // Journal of Physics: Conference Series. 2021. 2099 012049. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012049
- [29] Yulmukhametov A.A., Shakir'yanov M.M. [A program for calculating the external and internal attached masses of a pipeline transporting liquid or gas] // Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM % 2021668941; zayavl. 11.11.2021; registratsiya v Reyestre programm dlya EVM 22.11.2021. [Certificate of state registration of the computer program No. 2021668941; dec. 11.11.2021; registration in the Register of computer programs on 22.11.2021] (in Russian). eLIBRARY ID: 47434316
- [30] Yulmukhametov A.A., Shakir'yanov M.M. [Nonlinear Flexural Vibrations of a Pipeline Taking into Account the Internal Attached Mass] // Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2021669592; zayavl. 10.11.2021; registratsiya v Reyestre programm dlya EVM 30.11.2021. [Certificate of state registration of the computer program No. 2021669592; dec. 10.11. 2021; registration in the Register of computer programs on 30. 11. 2021. (in Russian). eLIBRARY ID: 47434976
- [31] Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence pressure on the lowest oscillation frequency of a plate. // Mech. Sol. V. 57, No. 3. 2022. P. 524-531.
 DOI: 10.3103/S0025654422030141
- [32] Ilgamov M.A., Utyashev I.M. Nonperiodic Oscillations of Microand Nanostrings in a Gaseous Medium // Fluid Dynamics. 2021.
 V. 56, No. 8. Pp. 1062–1069.
 DOI: 10.1134/S0015462821080073
- [33] Ilgamov M.A. Model of underwater pipeline flotation // Doklady Physics. 2022. V. 67, No. 5. Pp. 123–127. DOI: 10.1134/S1028335822050020
- [34] Ilgamov M.A., Shakir'yanov M.M. Positions of elastic equilibrium of a pipeline with vibrating supports // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2022. V. 63, No. 3. P. 533-541. DOI: 10.1134/S002189442203018X
- [35] Ilgamov M.A. Effect of mean pressure on the bending of a long cylindrical shell // Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN. [Proceedings of the Ufa Scientific Center of the RAS]. 2022. No. 3. Pp. 5-11 (in Russian). DOI: 10.31040/2222-8349-2022-0-3-5-11
- [36] Khakimov A.G. Determining Pipeline Parameters during the Formation of Arched Ejection // 15th International Conference on Mechanics. Resource and Diagnostics of Materials and Structures. Procedia Structural Integrity. 2022. V. 40. Pp. 214–222. DOI: 10.1016/j.prostr.2022.04.029

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 74-96



Многофазные системы



http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.007 DOI: 10.21662/mfs2022.1.007 УДК 621.865.8 Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Синтез новых моделей микрогидродинамики в исследованиях лаборатории «Робототехника и управление в технических системах»¹

Даринцев О.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Робототехника является междисциплинарным научным направлением, поэтому при решении ряда задач возникает необходимость проведения исследований, характерных для других областей науки. Так, при синтезе новых типов оборудования в лаборатории «Робототехника и управление в технических системах» потребовались более точные характеристики отдельных узлов и агрегатов, что привело в итоге к проведению целого цикла работ по микрогидродинамике. Особый интерес в выполненных работах представляет разработка новых микроустройств, так как это предполагает построение единого комплекса новых математических и компьютерных моделей, связывающих гидродинамику, теорию упругости, процесс теплопереноса, параметрическую оптимизацию и теорию управления. Первыми были получены модели, описывающие движение поршня, закрепленного упругой пружиной, в трубе с учетом влияния сухого и вязкого видов трения. Методом факторного вычислительного эксперимента были получены аналитические зависимости для основной детали агрегата дозирования топлива сервопоршня. Далее строились математические и компьютерные модели для проведения анализа течения жидкости через канал с изменяемой геометрией. По результатам моделирования была уточнена конструкция нового микромеханического устройства — пьезоэлектрического микронасоса, состоящего из упругой трубки и расположенных на ней кольцевых пьезоэлементов, последовательное колебание которых создает ненулевое среднее течение жидкости. В ходе адаптации модели была получена эффективная конструкция устройства сглаживания пульсаций расхода жидкости. Разрабатывались и просчитывались эти устройства для использования в системе жидкостного охлаждения капиллярного микрозахвата. Был проведен параметрический анализ процесса охлаждения горячей стороны элемента Пельтье микрозахвата при изменении следующих параметров схвата: размеры и форма радиатора, скорость течения охлаждающей жидкости и коэффициент теплопередачи. Результаты анализа колебаний температуры радиатора при нестационарном течении жидкости подтвердили предполагаемые зависимости эффективности охлаждения от выбранной геометрии радиатора и низкочастотных колебаний расхода жидкости.

Ключевые слова: микрогидродинамика, микроробототехника, гидросопротивление, динамически изменяемая геометрия канала, пьезоэлектрический микронасос, капиллярный микрозахват, жидкостная система охлаждения

1. Введение

Работы в области робототехники, а в последнее время, и в микромеханике, МЭМС, микроробототехнике, стимулируют увеличение объема исследований в смежных областях науки и техники. Ярким примером такого влияния служит прогресс в микрогидродинамике, где не снижаются темп и объемы исследований последние три десятилетия [1]. Интерес к данной области связан с особенностями течения жидкости в микро- и наномасштабах, позволяющими разрабатывать устройства с новыми или даже не имеющими аналогов в традиционных макросистемах свойствами. Базовые характеристики микроустройств в значительной мере зависят от принципа работы и конструкции источников дав-

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № FWGZ-2019-0089.

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН © Даринцев О.В.

ления — микронасосов, а также жиклеров (гидросопротивлений). Так, малые площади проходных сечений требуют более тщательной изоляции жидкости от рабочих элементов и полного отсутствия фактора загрязнения. Поэтому наибольшее распространение получили перистальтические насосы, так как в них контакт с рабочей жидкостью имеет только гибкая трубка [2], а подвижные элементы конструкции, являющиеся основным источником загрязнения, от жидкости изолированы. При расчетах производительности насоса в макросистемах используются только эмпирические формулы, не учитывающие специфику применения и масштабный фактор, не анализируется величина пульсаций расхода жидкости, поэтому для микросистем со сверхмалыми скоростями течения и величинами расходов требуется разработка более точных математических и компьютерных моделей.

С уменьшением масштаба системы число Рейнольдса становится малым, а число Пекле может оставаться большим. Малое число Рейнольдса $(\text{Re} = \rho u R / \mu \sim 1 \div 100,$ где ρ — объемная плотность; *и* — скорость течения жидкости; *R* — ширина канала; µ — динамическая вязкость) подразумевает ламинарный характер течения, соответствующий как большинству технических микроустройств, так и биологическим системам [3]. А большое число Пекле ($Pe = uR/\chi \sim 10^2 \div 10^4$, где χ — коэффициент температуропроводности) означает, что конвективный (адвективный) перенос тепла преобладает над диффузионным [4], следовательно, в микроустройствах (микротеплообменник, система охлаждения, микрозахват) необходимо учитывать оба механизма теплопереноса [5].

Интенсивный рост производства микроэлектромеханических систем и широкое внедрение микророботов и микротехнологических комплексов является весомым стимулом для разработки новых перспективных устройств, обеспечивающих бережное манипулирование микрокомпонентами. Сотрудниками лаборатории «Робототехника и управление в технических системах» (РУТС) разработан и исследуется капиллярный микрозахват [6-8] для манипуляций с плоскими микрообъектами и мембранами, обладающими достаточной площадью плоской стороны, но недостаточной толщиной, для надежного и неразрушающего удержания пальцевыми захватами [9]. Создание макета данного микрозахвата, построенного на базе миниатюрного варианта термоэлектрического модуля (элемента Пельтье) [10], предполагает использование жидкостного охлаждения для отвода тепла от горячей поверхности элемента Пельтье.

В работе [11] проведен анализ энергоэффективности использования активного охлаждения термоэлектрического модуля (ТЭМ) с помощью активной воздушной или жидкостной системы охлаждения. Воздушное охлаждение в силу высокого теплового сопротивления воздуха имеет низкий КПД. Эффективность системы охлаждения зависит от охлаждающего вещества. В работе [12] проведено сравнение эксперимента с моделированием системы охлаждения камеры с помощью элемента Пельтье с двумя вариантами отвода тепла: создаваемый вентилятором воздушный поток или текущая через радиатор жидкость. При расходе жидкости порядка 20 мл/с обеспечивался отвод тепловой мощности до 230 Вт. Жидкостное охлаждение позволяло снизить температуру на 19°С по сравнению с пассивной системой охлаждения, а воздушное на 10°С. Также показано, что с уменьшением размера камеры эффективность жидкостного охлаждения по сравнению с воздушным возрастает. Жидкостная система охлаждения более компактна, но требует наличия внешнего насоса для циркуляции жидкости с требуемыми параметрами.

Для охлаждения электронных устройств одним из требований для системы охлаждения является ее размер, а эффективность охлаждения зависит от конструктивных особенностей элементов активной зоны и физических свойств жидкости [13]. В микроканалах отвод тепла происходит за счет конвективного теплопереноса жидкостью и возрастает с увеличением скорости жидкости. В работе [14] в качестве системы жидкостного охлаждения испытаны три микротеплообменника с каналами шириной δW, составленными из длинных смещенных полос T1 ($\delta W = 1.22$ мм), коротких смещенных полос Т2 ($\delta W = 1.22$ мм) и с каналами в виде шевронной структуры T3 ($\delta W = 1.69$ мм). Проведено сравнение с традиционным теплообменником с прямыми каналами Т4 ($\delta W = 0.69$ мм). При размерах теплообменника 50 × 50 мм с расходом жидкости 230 мл/мин, тепловой мощностью нагревателя 40 Вт, температурой жидкости на входе 30°С максимальная температура составила 60°С для Т4, 51°С для Т1, 48°С для Т2 и 44°С для Т3.

В работе [15] показано, что нельзя пренебрегать как эффектами вязкой диссипации во входной области прямого канала, так и зависимостью вязкости от температуры по всей длине канала. В работе [16] показано, что температурная зависимость вязкости жидкости оказывает значительное влияние на величину расхода жидкости, особенно при малом значении перепада давления, приложенного к микроканалу. Таким образом, для отвода тепловой мощности от элемента Пельтье требуется разработка жидкостной системы охлаждения с новой конструкцией комплектного миниатюрного насоса. Для обеспечения требуемых режимов работы микрозахвата необходима разработка соответствующих математических и компьютерных моделей, учитывающих специфику микрогидродинамики.

Известные типы микронасосов применяются во многих областях [17]: биологические системы и медицина (система доставки лекарств), системы охлаждения (прокачка хладагента через теплообменник), исследование космоса (высоковакуумные насосы), перекачивание жидкости с высокой скоростью (центробежные насосы с высоким числом Рейнольдса), перекачивание специальных жидкостей (электродинамические и магнитогидродинамические насосы). Производимые в настоящее время модели микронасосов трудно адаптировать для системы охлаждения микрозахвата, поскольку требуется микронасос не только с малым расходом, но и малых габаритов, с гибкой широкодиапазонной системой управления. Кроме того, разработанные для этих микронасосов теоретические модели также основаны на эмпирических данных, что не позволяет провести полную геометрическую оптимизацию конструкции и определить способы реализации оптимальных режимов работы. С другой стороны, генерация течения жидкости в упругом микроканале относится к области междисциплинарной физики, а именно, к взаимодействию жидкости и упругого тела [18]. Все это требует при разработке новых технических устройств построения новых математических моделей, связывающих гидродинамику, теорию упругости, процесс теплопереноса, параметрическую оптимизацию и теорию управления устройством.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированного внешним воздействием (перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, сотрудниками лаборатории РУТС разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для полунатурного моделирования сложных технических устройств широкого модельного ряда. Так, модель поршня для осциллирующего перепада давления, учитывающая пять параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения), была построена в работе [19] методами факторного вычислительного эксперимента 2-го порядка.

С развитием математических и компьютерных моделей появились пакеты численного моделирования, использующие метод конечных элементов (КЭ), которые позволяют проводить моделирование устройств с практически произвольной геометрией [20]. В работе [21] была построена осесимметричная компьютерная модель для взаимодействия ньютоновской жидкости с гиперэластичным несжимаемым телом и с применением моделирования методом КЭ проведен анализ устойчивости дифференциальных уравнений, записанных в вариационной форме в пакете численного моделирования FreeFem++ [22]. Разработана модель микронасоса, создающего течение жидкости (с расходом до 50 мкл/с) в плоском канале с погруженным в него пьезоэлементом с поперечным изгибом [23].

В работе [24] представлена методика построения элемента вычислительного стенда в виде аналитической формулы на основе трехмерного моделирования течения жидкости через эластичный микроканал, деформируемый пьезоэлементом по гармоническому закону, с вариантами использования полученных результатов в практических приложениях. Синтезирована компьютерная модель управления режимом течения жидкости, индуцированного приложенным вдоль канала перепадом давления, с учетом величины перепада давления и частоты сжатия трубки пьезоэлементом. Модель является частью жидкостной системы охлаждения микрозахвата.

В работе [25] предложена осесимметричная компьютерная модель пьезоэлектрического микронасоса, состоящего из эластичной трубки и системы круговых пьезоэлектрических элементов, а также проведен анализ режимов его работы. На границе пьезоэлементов с трубкой задаются граничные условия Дирихле. При несимметричном порядке колебаний пьезоэлементов от пьезоэлементов с одной стороны создается большее гидросопротивление [26-28], чем с другой, что приводит к генерации ненулевого среднего потока жидкости. Получены зависимости среднего расхода жидкости от времени, частоты колебаний пьезоэлементов и внутреннего диаметра трубки. В [29] на границе пьезоэлементов с трубкой задаются граничные условия Дирихле или Неймана, проводится параметрический анализ работы микронасоса и определяются режимы, при которых отсутствует обратное распространение тепла от микрозахвата к микронасосу. При малых частотах колебаний пьезоэлементов (меньше 1 кГц) модели имели высокую погрешность, что ограничивало область применения более высокими частотами.

В следующих разделах будут рассмотрены примеры приведенных выше моделей, акцент в описании работ и результатов сделан на специфичность подходов к моделированию, обусловленных не только размерным фактором, но и особенностями областей применения.

2. Влияние течения жидкости на движение поршня в трубе

В работе [30] исследуется осесимметричное течение жидкости с границей, перпендикулярной течению (рис. 1). Аналитически выведены уравнения для радиальной и осевой компонент скорости и давления течения жидкости в трубе конечной длины с подвижной правой границей, а также определены граничные условия на подвижной границе. Получено численное решение задачи на конечно-разностной сетке итерационным методом Ньютона-Рафсона [31] для различных скоростей движения границы. Полученное распределение скоростей и давления можно использовать в качестве начального приближения вблизи оси для численной схемы расчета течения топлива в трубе с подвижным поршнем в гидромеханических исполнительных механизмах, а также для оценки изменения давления, вызываемого течением жидкости вблизи подвижной границы поршня.

Исследование влияния трения между внутренними частями технических элементов на характер движения элементов является актуальной задачей, так как позволяет определить параметры, при которых трение будет минимальным, а коэффициент полезного действия максимальным. С точки зрения трибологии различают различные виды трения, прежде всего *сухое* и *вязкое* трение. В первом приближении коэффициент сухого трения λ является коэффициентом пропорциональности



Рис. 1. Осесимметричное течение жидкости с границей, перпендикулярной течению, вблизи оси трубы конечной длины. Течение направлено вдоль оси Oz, труба ограничена плоскостями z = 0 и $z = z_0$ (подвижная граница)

между силой трения F_f и силой нормальной реакции N_n (закон Амонтона–Кулона [32]). Сила вязкого трения проявляется при движении твердого тела по поверхности жидкости и определяется напряжением, создаваемым жидкостью на поверхности твердого тела. Величина силы вязкого трения F_v ньютоновской жидкости пропорциональна площади контакта и градиенту скорости в направлении, перпендикулярном движению (закон Ньютона). Коэффициентом пропорциональности является величина динамической вязкости жидкости μ [33]. Таким образом, для определения силы вязкого трения, действующей на твердую поверхность, необходимо решить гидродинамическую задачу движения жидкости. В работе [34] показано движение поршня радиуса r₁ и массой *m* внутри цилиндра радиуса $r_2 = r_1 + h (h - зазор между$ поршнем и цилиндром), заполненного жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ, под действием периодического по времени перепада давления $\Delta p f(t), f(t) = \cos(\omega t)$ (рис. 2). Уравнения движения поршня (второй закон Ньютона) и гидродинамики (Навье-Стокса) с условиями залипания на границе цилиндра и поршня записывались с помощью метода конечных разностей и решались численно методом Ньютона. Было получено, что сила, действующая со стороны жидкости на поршень может приводить как к ускорению, так и к замедлению (вязкое трение) скорости поршня. Наличие сухого трения смещает положение равновесия и сдвиг по фазе относительно фазы градиента давления.

В работе [35] продолжено исследование влияния различных видов сил трения на движение поршня в цилиндрической трубе с учетом дополнительного действия жесткости пружины, а также определяются условия, когда кривизной трубы можно пренебречь и свести гидродинамическую задачу к плоскому параллельному течению жидкости с комбинированным пуазейлевским и сдвиговым (с одной фиксированной и одной инертной границей) воздействиями. Совместное воздей-



Рис. 2. Схема течения жидкости в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами

ствие жесткости пружины и сухого трения проводит к тому, что точка равновесия определяется наличием жесткости пружины ($z_p = 0$), а период колебаний — наличием силы сухого трения (колебания происходят на частоте перепада давления, а не на собственной частоте). С ростом как жесткости пружины, так и силы сухого трения амплитуда колебаний поршня уменьшается. Для малых сил трения (как сухого, так и вязкого) выход на периодический режим движения происходит за большое количество циклов. В системе с пружиной влияние вязкого трения значительно. При больших перепадах давления кривизной трубы можно пренебречь и свести задачу к нестационарному параллельному течению в плоском капилляре.

В работе [36] рассматривается техническое устройство, состоящее из двух коаксиальных цилиндров, где внешний цилиндр неподвижен, а внутренний движется под действием перепада давления, приложенного к его торцам. Исследуется влияние на движение внутреннего цилиндра двух видов трения — сухого трения, возникающего при взаимодействии стенок цилиндров, и вязкого трения, возникающего при течении вязкой жидкости в зазоре между цилиндрами. Показана необходимость учета различия в значениях максимальной силы трения покоя и силы трения скольжения. Определено, что сила вязкого трения оказывает небольшое влияние на динамику движения внутреннего цилиндра, а режим течения в зазоре сильно зависит от ширины самого зазора. Проведена оценка динамических свойств технического устройства как элемента системы управления. На рис. 3 показана зависимость скорости поршня v_p для различных значений силы сухого трения F_f .



Рис. 3. Скорость внутреннего цилиндра v_p от времени t: (a) при отсутствии (-) и наличии сухого трения $F_f = 4$ H (- -) и $F_f = 5$ H (···); (b) при сухом трении $F_f = 7$ H: (-) $n_f = 1$; (- -) $n_f = 0.95$. Форма управляющего сигнала (-)

Видно, что даже незначительное изменение силы трения покоя $F_g = n_f F_f$, где $n_f - 6$ езразмерный коэффициент, может привести к значительному изменению скорости (на рис. 3(б) уменьшение n_f на 5 % увеличивает максимальную скорость на 65 %).

3. Элементы агрегата дозирования топлива

Практический опыт эксплуатации систем управления газотурбинным двигателем (ГТД) показал необходимость исследования динамических характеристик устройства дозирования топлива с учетом распределения его по контурам топливного коллектора до поступления в камеру сгорания. В работе [37] представлена нелинейная математическая модель функционирования агрегата дозирования топлива, учитывающая работу распределительного клапана, который включает в себя два поршня и три топливных контура. Предложена методика определения начальных условий для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей перемещения сервопоршня и поршня клапана постоянного перепада давлений. В работе [38] численно исследуется движение поршня в цилиндрической трубе с учетом сухого и вязкого трений и упругости пружины. Определены факторы процесса для моделей с сухим и вязким трением. Предложена схема проведения полного факторного вычислительного эксперимента [39], где в качестве целевых функций выбран расход топлива в единицу времени и расход топлива за период установившегося течения.

В работе [40] обосновывается необходимость использования уравнений Навье-Стокса [41] для расчета характеристик элементов исполнительных механизмов. Для этого проводится численное моделирование (в программе Elmer FEM) течения жидкости в канале круглого сечения и определяются расход жидкости и максимальная скорость течения жидкости в зависимости от перепада давления, приложенного к входу и выходу канала. Показана зависимость порогового перепада давления и расхода топлива от температуры с учетом изменения вязкости и плотности топлива. Сравниваются результаты, полученные двумя методами расчета: на базе уравнения Бернулли, на котором основаны инженерные расчетные методики, и на базе уравнений Навье-Стокса, учитывающих вязкость жидкости. Показано, что для адекватного учета динамических характеристик в элементах исполнительных механизмов необходимо использовать математические модели течения жидкости (топлива), основанные на уравнениях Навье-Стокса.



Рис. 4. Зависимость расхода топлива от перепада давления по уравнениям Навье-Стокса (сплошная линия) и Бернулли (штриховая линия) при температуре топлива 20°С (тонкие линии) и -20° С (толстые линии)

Это связано с тем, что данные уравнения учитывают вязкость жидкости, которая значительно меняется при изменении температуры топлива, в то время как в уравнение Бернулли [42], на базе которых основаны все инженерные методы расчета, не входят параметры, существенно влияющие на динамику течения жидкости. Различия в результатах моделирования зависимости расхода жидкости от перепада давления для разных температур показаны на рис. 4.

В работе [43] проводится сравнение существующих методов моделирования элементов топливной автоматики. Предлагается новый подход, позволяющий оценить влияние конструктивных факторов элемента на его динамические свойства уже как элемента системы автоматического управления ГТД. Суть метода в том, что принципиальная (конструкторская) схема заменяется ориентированным графом, то есть сохраняется связь между реальной конструкцией и математическим описанием. В этом случае математическая модель агрегата дозирования топлива (АДТ) описывается тремя подсистемами уравнений:

- первая подсистема уравнений это система дифференциальных уравнений, отражающая закон изменения координаты положения подвижных элементов (поршней, причем не одного, а всех) АДТ во времени;
- вторая подсистема уравнений описывает взаимосвязь потоков в узлах и контурах сети. Ее решение позволяет определить величины внутренних потоков (расходов топлива) в системе;

 третья подсистема уравнений составляется по зависимости величины расхода жидкости от перепада давления на каждой из внутренних дуг. Решение данной подсистемы уравнений позволяет определить давления в узлах сети.

Дополнительно учитывается влияние силы трения на движения поршня. На рис. 5 показано влияние сухого трения на динамику движения поршня с пружиной жесткостью k_p (геометрия и обозначения представлены на рис. 6). С ростом силы сухого трения амплитуда и скорость движения поршня уменьшаются, также уменьшается количество периодов установления периодического движения. Отметим, что в промежутки периода, когда величина силы сухого трения F_0 выше силы, создаваемой жидкостью $S_p(p_1 - p_2)$, поршень останавливается, и, следовательно, на какой-то момент времени происходит потеря управляемости элементом.

В работе [19] исследуются режимы работы основного элемента топливной автоматики — сервопоршня дозирующей иглы. Рассматривается движение поршня длиной *L*, радиуса *R* и массой m_p внутри трубы круглого сечения бесконечной длины, заполненной жидкостью (рис. 6). Система приводится в движение за счет перепада давления $\Delta p \cdot \cos(\omega t), \omega = 2\pi f$, где f — частота колебаний перепада давления; $\Delta p = (p_1 - p_2)$ — амплитуда перепада давления; p_1 и p_2 — значения давлений слева и справа от поршня соответственно.

Построены математическая и компьютерная модели сервопоршня. Выбраны факторы вычислительного эксперимента и функции отклика. Предложена аппроксимация функций отклика в виде полинома с линейными, парными и квадратичными вкладами факторов. Определены существенные факторы динамики поршня и их взаимодействия,



Рис. 5. Фазовая диаграмма движения поршня при $k_p = 1000$ H/м, $F_0 = 1$ H (слева), $F_0 = 3$ H (справа)



Рис. 6. Геометрия задачи. Поршень — сплошная линия; элемент трубы — штриховая линия

а также погрешность аппроксимации. Установлены температурные зависимости параметров, что позволяет провести адекватное моделирование работы элемента с учетом динамических изменений в этом элементе в процессе работы. Показан способ объединения отдельных элементов вычислительного стенда в систему.

Показано, что за конечное количество периодов (от 5 до 13) перепада давления устанавливается периодический и симметричный отклик системы (перемещение поршня). Форма отклика в области больших давлений имеет вид ступеньки, с уменьшением величины силы трения скольжения форма становится более гармонической (близкой к форме перепада давления). На динамику движения поршня наибольшее влияние оказывают упругость пружины, амплитуда перепада давления с положительной связью и частота перепада давления с отрицательной связью. На сдвиг фазы перемещения поршня относительно перепада давления влияют амплитуда перепада давления, сила трения и отношение сил трения.

Представлены способ построения управляющего сигнала для связанного элемента стенда по функциям отклика; схема расчета скорости нагрева из-за работы силы трения (порядка 0.25 градусов в секунду); дополнительная величина силы трения (порядка 1 ньютон), возникающая за счет теплового расширения; влияние нагрева на изменение жесткости пружины.

В работе была предложена схема элемента вычислительного стенда сервопоршня, связывающая управляющий сигнал (форма внешнего перепада давления) с функциями отклика (динамика перемещения поршня) и учитывающая изменение параметров под действием температуры (изменение силы трения поршня и упругости пружины в результате нагрева) в ходе эксплуатации элемента. Главным преимуществом данного подхода является замена полного моделирования (требующего больших вычислительных ресурсов) аппроксимацией, позволяющей проводить расчеты функций отклика в реальном времени.

Компьютерное моделирование поршня с антикавитационным покрытием

Одним из важнейших направлений развития нанотехнологий является возможность создания разнообразных материалов с принципиально новыми свойствами. Применение нанотехнологий дает дополнительные преимущества, связанные как просто со снижением общего веса технического устройства, так и с переходом к более совершенным конструкциям различных устройств, например, топливных агрегатов. В работе [44] представлено исследование возможности получения наноструктурированного алюминиевого сплава и изготовления из него одного из элементов топливного агрегата — устройства дозирования топлива и доказана возможность такого получения. В дальнейшем предполагается исследовать сплав 6061 как менее легированный и невосприимчивый к коррозии.

Кавитационному разрушению подвержены практически все известные конструкционные материалы, причем данное разрушение деталей начинается с тонких поверхностных слоев [45]. Поэтому задача определения оптимального материала для изготовления поверхности подвижного элемента для повышения ее износостойкости, термической и механической прочности, а также стойкости к кавитационному разрушению, является важной. Решение данной задачи позволит в дальнейшем обеспечить безопасность устройства дозирования топлива и долгосрочность его работы. Так, например, в работе [46] было предложено выполнение поршня из алюминиевого сплава, содержащего упрочненную интенсивной пластической деформацией головку с ультрамелкозернистой структурой материала, торец которой обработан лазером для уменьшения вероятности появления кавитации в ходе работы поршня. Анализ возможности применения антикавитационного покрытия для поршня представлен в работе [47].

Рассматривается задача определения оптимального материала для изготовления поверхности подвижного элемента (поршня), который обладает повышенной стойкостью к кавитационному разрушению, с целью обоснования целесообразности применения конструкционных материалов для изготовления поршней в элементах топливной автоматики. На основе трехмерного численного моделирования уравнений упругости [48] исследуются условия, при которых кавитационное схлопывание пузырька на поверхности поршня, изготовленной из различных конструкционных материалов, может привести к



Рис. 7. Геометрия модели в декартовой системе координат: S_1 – для случая одиночного пузырька; $S_2^{({\rm I})}$ и $S_2^{({\rm II})}$ – для случая пары пузырьков

необратимым деформациям поршня. Давление, действующее на поршень, определялось из модели схлопывания несферического пузырька с образованием кумулятивной струйки. Изучено влияние на поверхность схлопывания как одиночного пузырька, так и пары пузырьков, расположенных на различном расстоянии друг от друга. Геометрия модели представлена на рис. 7.

На рис. 8(а) показаны профили деформации для одиночного пузырька и двух пузырьков, схлопывающихся на различных расстояниях друг от друга. Возможность кавитационного разрушения поршня за счет превышения предела текучести при схлопывании пузырьков показана на рис. 8(б). Видно, что парное схлопывание пузырьков увеличивает эффективное напряжение в области воздействия на ≈ 15 %. Максимум напряжений представляет собой круг с двойным диаметром одиночного пузырька; для пары пузырьков напряжения распределяются в виде суперпозиции двух окружностей с двойным диаметром пузырька и центрами в центрах схлопывающихся пузырьков.

Расчеты показали, что при специальной обработке поверхность поршня станет более устойчивой к эрозионному разрушению; деформации локализованы вблизи области, к которой приложена сила, на расстоянии порядка двух диаметров пузырька; кавитационное разрушение материала связано с порогом текучести и размером зерен, не зависит от модуля Юнга и обратно пропорционально коэффициенту Пуассона; одновременное схлопывание двух пузырьков на расстоянии порядка одного–двух размеров пузырька увеличивает максимальное давление на поверхность и, следовательно, увеличивает вероятность необратимой деформации поверхности.



Рис. 8. Перемещение u_x (*a*) и эквивалентные напряжения σ_v (*б*) вдоль оси Oz (y = L/2) для одиночного пузырька с z = L/2 (зеленая линия); двух пузырьков с $z = L/2 - 2R_b$ и $z = L/2 + 2R_b$ (красная линия); двух пузырьков с $z = L/2 - 4R_b$ и $z = L/2 + 4R_b$ (синяя линия)

Следует отметить, что в данной работе проведена оценка возможности наступления пластических деформаций (достижения предела текучести), а сами пластические деформации не рассматривались. Как показано в работе [49] после достижения предела текучести при рассмотрении пластических деформаций от времени на поведение системы величина модуля Юнга будет иметь влияние.

5. Компьютерное моделирование течения жидкости через гидросопротивление

В работе [26] разработана компьютерная модель жиклера как элемента вычислительного стенда. Для этого была изучена динамика течения жид-



Рис. 9. Геометрия и сетка канала для цилиндрического (сверху) и острокромочного (снизу) жиклеров

кости через цилиндрическую трубу с жиклерами разных радиусов при различных значениях перепада давления на основе решения уравнений Навье– Стокса методом конечных элементов в открытом инженерном пакете Elmer FEM. Получено правило перевода перепада давления (входного параметра) в расход топлива (функцию отклика) с помощью интерполяционных формул. Проведено сравнение результатов моделирования течения через цилиндрический и острокромочный жиклеры (рис. 9).

На рис. 10 показана зависимость расхода жидкости Q от перепада давления Δp в трубе и цилиндрическом жиклере для различной ширины проходного отверстия R₁. Видно, что в области низкого перепада давления $Q \sim \Delta p$, а в области высокого перепада давления $Q \sim \Delta p^{1/2}$. В промежуточной области $1^{-1} < \Delta p < 10^3$ Па можно построить аппроксимацию $Q(\Delta p, R_1)$ по данным численного моделирования. Численные расчеты динамики жидкости в цилиндрическом и острокромочном жиклерах показали, что при проектировании технических систем желательно использовать цилиндрические жиклеры, поскольку они повышают статическую точность элемента. С помощью гидродинамического критерия подобия был проведен анализ областей применимости полученных результатов, который позволяет сделать вывод, что результаты могут быть применены как к устройствам топливной автоматики (сантиметровый и метровый масштабы), так и к микроэлектромеханическим устройствам (микронный масштаб).

В работе [16] исследуется стационарное течение технической жидкости, индуцированное перепадом давления, в канале с цилиндрическим жиклером для всей рабочей области температур. Уравнения Навье–Стокса решаются численно в осесимметричной геометрии методом конечных элементов. Получены температурные зависимости ма-



Рис. 10. Расход топлива Q в зависимости от разности давлений Δp : в трубе (линия 1) и в цилиндрическом жиклере для $R_1 = 4$ мм (линия 2), $R_1 = 3$ мм (линия 3) $R_1 = 2$ мм (линия 4) и $R_1 = 1$ мм (линия 5). Сплошная линия асимптотическое решение; пунктирные — аппроксимация; символы — результат численного моделирования

териальных параметров ряда жидкостей, наиболее используемых в технических устройствах. Построена модель цилиндрического жиклера в виде элемента вычислительного стенда, учитывающая перепад давления, радиус проходного отверстия жиклера и температуру жидкости для областей с малым и большим перепадами давления.

На рис. 11 показана зависимость расхода жидкости от перепада давления для температур $T = \{-40^{\circ}, 0^{\circ}, 40^{\circ}, 160^{\circ}\}$ С. В области малых перепадов давления Δp расход жидкости Q увеличивается с ростом температуры Т и пропорционален Δp (сплошные линии на рис. 11). Размер данной области зависит от *T*, поскольку при малых Δp число Рейнольдса Re, характеризующее течение, мало и обратно пропорционально кинематической вязкости $v(T) = \mu(T) / \rho(T)$. Так, например, для $T = 160^{\circ}$ С имеем область $\Delta p < 10^{-3}$ Па, а для $T = -40^{\circ}$ С — $\Delta p < 1$ Па. В области высоких перепадов давления Δp зависимость расхода жидкости О от температуры слабо выражена и О пропорционален корню от Δp (пунктирная линия на рис. 11). Данная область также зависит от температуры *T*, но в меньшей степени, чем в случае малых Δp .

Полученные результаты дополняют модель [26] и позволяют построить аналитическую модель в виде элемента вычислительного стенда стационарного течения жидкости в цилиндрическом жиклере, которая учитывает перепад



Рис. 11. Расход жидкости в зависимости от перепада давления для различных температур при R₁ = 2 мм. Символы — численный расчет; сплошные линии — аппроксимация для малых давлений; пунктирная линия — аппроксимация для больших давлений



Рис. 12. Осесимметричная геометрия системы трубагидросопротивление-труба. Oz — ось симметрии; z_1z_2 — гидросопротивление

давления, радиус проходного отверстия жиклера и температуру жидкости. Обобщенная модель обладает высокой точностью (относительная погрешность не более 10^{-5} % для малых перепадов давления и не более 1 % для больших) по четырем численным расчетам для малых Δp и трем для больших Δp .

В работе [27] исследуется стационарное течение через систему элементов трубагидросопротивление-труба для определения зависимости расхода жидкости от приложенного к системе перепада давления и геометрии системы (рис. 12). Уравнения Навье-Стокса решались численно в осесимметричной геометрии методом конечных элементов на неравномерной расчетной сетке.

Получено, что область нелинейного падения давления в системе элементов локализована на длине трех радиусов входного отверстия, что позволило построить модель системы произвольной длины с фиксированной длиной гидросопротив-



Рис. 13. Зависимость расхода жидкости *Q* от нормированной длины системы элементов *L*/*R*₀: сплошная линия — численный расчет, синие круги — аппроксимация N1; зеленые круги — аппроксимация N2

ления. Построен эквивалент трубы для системы элементов с гидросопротивлением. На рис. 13 показана зависимость расхода жидкости Q от нормированной длины системы элементов *L*/*R*₀ для полного численного моделирования (сплошная линия) и по приближенным аналитическим формулам (модифицированная формула Хагена– Пуазейля с зависимостью от радиуса проходного отверстия N1 и формула для трубы с длиной, равной длине смежных элементов, и перепадом давления, уменьшенным на перепад давления в гидросопротивлении N2). Видно, что аппроксимация хорошо согласуется с полным численным моделированием. Данное исследование особенно актуально для гидроэлементов микроэлектромеханических систем, поскольку позволяет провести оптимизацию геометрии системы элементов для получения необходимых рабочих параметров технического устройства.

6. Течение жидкости в канале с динамически изменяемой геометрией

В работе [28] изучается течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением). В процессе моделирования использовалась неравномерная адаптивная расчетная сетка (рис. 14 и 15).



Рис. 14. Адаптивная расчетная сетка в различные моменты времени при стационарном поперечном сжатии границы



Рис. 15. Адаптивная расчетная сетка в различные моменты времени при стационарном продольном движении границы



Рис. 16. Изолинии модуля скорости |**u**| в различные моменты времени при стационарном продольном движении границы

Получено, что в геометрии с поперечным сжатием гидросопротивления течение является ламинарным без образования вихрей. При продольном перемещении гидросопротивления расход жидкости остается постоянным с образованием устойчивых вихрей (рис. 16), перемещающихся вдоль канала со скоростью движения гидросопротивления. Поскольку профиль скорости в широком диапазоне параметров системы остается параболическим, была предложена аналитическая формула расхода жидкости, который зависит от ширины отверстия нелинейно (в обеих геометриях канала). На основе результатов моделирования построена аналитическая модель, учитывающая расход жидкости от ширины проходного отверстия гидросопротивления, которая содержит четыре интерполяционных параметра (рассчитываемых по четырем точкам из одного моделирования полной модели). Полученную модель можно использовать в качестве элемента вычислительного стенда для определения расхода жидкости в рассматриваемой системе.

Моделирование динамического изменения геометрии открывает большие возможности при разработке новых технических устройств. Например, продольное движение гидросопротивления можно использовать для создания течения в канале с постоянным давлением, а поперечное сжатие для регулирования расхода жидкости в канале с ненулевым перепадом давления.

В работе [50] исследуется трехмерная компьютерная модель различных режимов течения жидкости через канал, деформируемый пьезоэлементом. Рассматривается влияние двух видов деформаций трубки на форму ее внутренней поверхности, которая, в свою очередь, определяет геометрию канала, по которому течет жидкость, а именно, деформаций, описываемых граничными условиями Дирихле и Неймана на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента. Изучаются два режима течения жидкости в микроканале: один конец канала закрыт и течение происходит за счет деформации трубки, режим позволяет провести тестирование компьютерной модели; оба конца канала открыты и течение происходит как за счет деформации трубки, так и за счет приложенного к слою перепада давления. Геометрия модели представлена на рис. 17.

Получены следующие результаты: расход жидкости зависит от частоты сжатия пьезоэлемента и при отсутствии перепада давления не зависит от физических параметров жидкости. Это теоретически дает возможность реализации гидравлического микропривода с линейной «механической» (расходной) характеристикой; под действием перепада давления к периодической составляющей расхода жидкости добавляется постоянная составляющая обратно пропорциональная вязкости жидкости; подбором параметров (частота, перепад давления) можно получить режим, соответствующий выдавливанию капель. С ростом частоты объем выдавливаемой за период капли уменьшается.



Рис. 17. Геометрия и основные обозначения модели сжатия трубки пьезоэлементом



Рис. 18. Зависимости расходов жидкости (слева – вода; справа – уайт-спирит), протекающей через правую границу, от частоты пьезоэлемента *f* при постоянном градиенте давления *G* = 2 кПа/м (сверху) или от градиента давления *G* при постоянной частоте *f* = 1 кГц (снизу). Линии: 1 – минимальный расход *Q_{min}*; 2 – максимальный расход *Q_{max}*; 3 – средний расход *Q_a*; 4 – пограничный режим *Q_{min}* = 0

В работе [24] на основе численного моделирования течения жидкости через упругую трубку, деформируемую пьезоэлементом, построены аналитические модели управления расходом жидкости за счет частоты колебаний пьезоэлемента или изменения приложенного с слою градиента давления (рис. 18). Показаны варианты использования полученных результатов в практических приложениях. Например, в системе жидкостного охлаждения полученное соотношение между параметрами системы позволяет определить режим течения, предотвращающий втекание нагретой жидкости через выходное отверстие канала. Результаты планируется использовать при разработке вычислительного стенда капиллярного микрозахвата, содержащего две трубки (на входе и выходе) с пьезоэлементами, с разделом устройства на две части — с динамически изменяемой и неизменной геометриями, — что значительно упростит полное численное моделирование.

7. Пьезоэлектрический микронасос

В работе [23] предлагается двумерная компьютерная модель течения жидкости в плоском канале под действием приложенного перепада давления с погруженным в него плоским керамическим пьезоэлектрическим приводом, изгибающимся в поперечном направлении пропорционально приложенному электрическому напряжению *U* (рис. 19).

Предложена математическая модель связанной системы жидкость-пьезопривод в вариационной форме для численного моделирования методом конечных элементов. Поскольку задание граничных условий Дирихле на перемещение в данной задаче затруднительно, была построена эквивалентная схема деформаций пьезопривода с использованием граничных условий Неймана. Рассчитаны деформации и эквивалентные напряжения фон Мизеса на пьезоприводе. Проведен анализ влияния геометрии канала и образуемого пьезоприводом гидродинамического сопротивления на динамику течения жидкости. Предложен алгоритм адаптивного динамического перестроения расчетной сетки канала при деформациях, превышающих размер конечных элементов. При симметричном управляющем сигнале, подаваемом на пьезопривод, асимметрия геометрии приводит к нарушению симметрии расхода жидкости в пределах пе-



Рис. 19. Геометрия модели. Канал: стенка Γ_1 , входное Γ_2 и выходное Γ_3 отверстия. Пьезопривод: зафиксированная Γ_5 и гибкая Γ_4 части

риода как по величине расхода жидкости, так и по времени. В отсутствии перепада давления при низких частотах колебаний пьезоэлемента (порядка обратного времени релаксации скорости) средний по периоду расход жидкости отличен от нуля и растет с увеличением частоты. При наличии перепада давления между входным и выходным отверстиями канала средний расход жидкости пропорционален перепаду давления; на низких частотах — обратно пропорционален частоте; с ростом частоты — выходит на насыщение. На основе результатов численного моделирования предложены различные варианты новых микрогидродинамических технических устройств, генерирующих течение жидкости с помощью пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом: микронасос, создающий течение в замкнутом контуре; регулятор расхода жидкости и дозатор объема жидкости.

В работе [25] моделируется работа пьезоэлектрического микронасоса, состоящего из упругой эластичной микротрубки (материал — силиконовая резина) круглого сечения и размещенной на ней системы из кольцевых керамических пьезоэлементов (число пьезоэлементов — один, три или пять). Геометрия устройства представлена на рис. 20.

Пьезоэлементы формируют поток рабочей жидкости путем радиального сжатия. Численно исследуются два режима работы данного устройства. В первом режиме работы к микроканалу приложен перепад давления, и колебания пьезоэлемента ре-



Рис. 20. Геометрия модели (*a*); прототип микронасоса (б); верхняя (в) и нижняя (г) части корпуса микронасоса

гулируют расход протекающей жидкости. Данный режим можно использовать для модуляции расхода жидкости. Во втором режиме течение создается колебаниями пьезоэлементов по определенным схемам: при симметричной схеме (один пьезоэлемент или симметричное сжатие нескольких элементов) средний по времени расход жидкости равен нулю; при несимметричной схеме (часть пьезоэлементов формирует гидросопротивление, а другие создают несимметричное из-за гидросопротивления течение) возможна генерация отличного от нуля среднего по времени течения в положительном направлении (рис. 21). Моделирование проводилось на неравномерной адаптивной расчетной сетки решением уравнений Навье-Коши [51] и Навье-Стокса [41] в осесимметричной геометрии. Данный режим позволит использовать устройство в качестве пьезоэлектрического микронасоса, имеющего малый размер и позволяющего перекачивать небольшие объемы жидкости.

По результатам численного моделирования получены следующие результаты. Для создания течения жидкости необходимо задавать асимметричный режим работы пьезоэлементов. При выборе схемы колебания системы пьезоэлементов, в которой сначала происходит одновременное сжатие всех пьезоэлементов, а затем пьезоэлементы по одному последовательно (от левого к правому) разжимаются, получается, что первоначальное сжатие всех пьезоэлементов симметрично «выталкивает» жидкость из трубки и формирует гидросопротивление. При последующем растяжении пьезоэлемент создает асимметричное «всасывание» жидкости, т.к. гидросопротивление находится только с правой стороны. За время отработки всей схемы в положительном направлении протекает больше жидкости, чем в обратном, т.е. средний расход жидкости положительный. Со временем средний расход



Рис. 21. Этапы деформации канала системой из трех пьезоэлементов

жидкости увеличивается до тех пор, пока система не выйдет на насыщение (рабочий режим). С ростом частоты колебаний пьезоэлементов и с увеличением их количества средний прокачиваемый объем жидкости увеличивается, а с уменьшением радиуса канала — уменьшается. В пределах рабочих параметров устройства, при которых частота колебаний пьезоэлементов составляет несколько кГц, за время выхода на рабочий режим порядка 1 с микронасос длиной 10 мм и радиуса 5 мм с пятью пьезоэлементами создает течение со средним расходом жидкости несколько нл/с.

На основе результатов численных расчетов получена приближенная аналитическая формула, связывающая основные параметры рабочего режима (время выхода на рабочий режим и средний расход жидкости) с параметрами системы (количество и частота колебаний пьезоэлементов, радиус микроканала). Данная формула позволяет построить элемент вычислительного стенда для оценки режимов работы рассматриваемого устройства, а также управлять самим устройством в реальном времени.

В [52] проведена серия вычислительных экспериментов для различного количества пьезоэлементов и набора значений для плотности расчетной сетки и определена величина систематической погрешности моделирования. Предложен способ компенсации систематической погрешности с помощью дополнительного приложенного к каналу перепада давления. Данный способ позволил снизить погрешность на два порядка. Представленный в работе подход к снижению систематической погрешности позволит повысить точность моделирования режимов работы пьезоэлектрического микронасоса.

В расширенной модели [29] проводится сравнение режимов работы микронасоса для граничных условий Неймана (ГУН) и граничных условий Дирихле (ГУД). ГУН означают «мягкий» пьезоэлемент, форма которого при сжатии меняется (но не меняется область контакта), а ГУД — «жесткий» пьезоэлемент, форма которого при сжатии не меняется. ГУД обеспечивают двукратное увеличение расхода жидкости Q_a по сравнению с ГУН. Средний расход жидкости Q_a от 500 пл/с (для частоты f > 2.5 кГц при ГУН; для $f > 2\,$ кГц при ГУД) препятствует распространению тепла от микрозахвата внутрь микронасоса. Результаты моделирования показали, что полученная модель может быть использована для разработки компактного микронасоса с гибкой системой управления режимами прокачки жидкости для охлаждения микрозахвата. Получена аналитическая формула, связывающая *Q_a* с параметрами режима работы микронасоса, которую можно использовать в системе управления устройством в реальном времени.

В работе [53] представлены математическая и компьютерная модели пьезоэлектрического микронасоса. Методом ортогонального центрального композиционного планирования (ОЦКП) [19, 54] проведен параметрический анализ рабочего режима пьезоэлектрического микронасоса в зависимости от внутреннего и внешнего радиусов трубки и частоты колебаний пьезоэлементов. Получено, что эффективность работы насоса увеличивается при увеличении внутреннего радиуса трубки R₁ и частоты f и уменьшении относительной толщины стенки трубки R_2/R_1 . Полученные при разработке прототипа микронасоса приближенные аналитические формулы позволят определить параметры устройства для обеспечения необходимого среднего расхода жидкости. При применении микронасоса для подачи жидкости в камеру охлаждения микрозахвата необходимо обеспечить расход жидкости Q_a > 800 пл/с, предотвращающий теплоперенос в обратном направлении. Для этого нужно использовать трубку с внутренним диаметром $R_1 > 1.25$ мм и систему из пяти пьезоэлементов с частотой колебаний f > 1.5 кГц при величине радиального сжатия 5 мкм.

8. Система охлаждения капиллярного микрозахвата

В работе [8] представлено компьютерное численное моделирование двумерной модели системы жидкостного охлаждения камеры микрозахвата. На рис. 22 обозначены границы изучаемой мо-



Рис. 22. Геометрия микрозахвата. Сечение *Oxz* с вертикальным *G*₁ и горизонтальным *G*₂ расположением входного и выходного каналов (*a*); сечение *Oxy* для радиатора с *i* ребрами *G*₃(*i*) (*б*)

дели: внутренняя стенка Γ_1 ; контакт радиаторжидкость Γ_2 ; входное Γ_3 и выходное Γ_4 отверстия; контакт радиатор-элемент Пельтье Γ_5 . Рассматривается геометрия с вертикальным G_1 и горизонтальным G_2 расположением входного и выходного каналов. Геометрия в горизонтальной плоскости $G_3(i)$ строится с различным количеством радиаторов i = 1, 2, 3, 5. Отметим, что G_1, G_2 и $G_3(i)$ не являются сечениями одной конструкции, а относятся к разным вариантам конструкции микрозахвата.

Построены математические модели течения жидкости; переноса тепла жидкостью; теплообмена между жидкостью и радиатором; теплообмена между радиатором и элементом Пельтье. Уравнения гидродинамики и переноса тепла записывались в вариационной форме и решались в программе численного моделирования [22].

Определены правила выбора размеров радиатора для различного количество ребер, обеспечивающих оптимальный отвод тепла охлаждающей жидкостью. Проанализированы различные механизмы, участвующие в переносе тепла: теплообмен между жидкостью и радиатором; движение жидкости; теплопроводность в самой жидкости.

Для нестационарного течения под действием осцилляций расхода жидкости температура радиатора T_m выходит на периодический колебательный режим с частотой f, а пиковые значения за период могут значительно превышать температуру в стационарном режиме, что необходимо учитывать при проектировании технического устройства. Время установления периодического режима совпадает со временем установления стационарного режима для случая постоянной амплитуды скорости.

В системах контроля и управления техническим устройством необходимо менять параметры работы в реальном времени. Простые аналитические формулы для системы управления в виде элемента вычислительного стенда (ЭВС) строятся с помощью аппроксимаций результатов полного численного моделирования. Поскольку решаемая задача зависит от нескольких параметров, то влияние этих параметров на эффективность охлаждения определялась с помощью метода ОЦКП. Изучено влияние на эффективность охлаждения радиатора следующих параметров: геометрии внутренней камеры микрозахвата и радиатора, расположение входного и выходного каналов, вводимая в систему тепловая мощность, скорость течения жидкости во входном канале. В геометрии G₁ и G₂ с элементом Пельтье мощностью W = 1 Вт радиатор нагревается до температуры $\Delta T_m \approx 8 \div 26^\circ$ С в зависимости от коэффициента теплопередачи между жидкостью и радиатором α и скорости жидкости u_m . В G_3 при тех же параметрах — до $\Delta T_m \approx 3 \div 16^{\circ}$ С и с ростом количества ребер радиатора ΔT_m снижается. Нестационарное течение охлаждающей жидкости может значительно снизить эффективность системы охлаждения. На основе результатов компьютерного моделирования получены аналитические формулы, которые можно использовать в системе управления микрозахватом.

В работе [55] проводится математическое и компьютерное исследование системы жидкостного охлаждения капиллярного микрозахвата. Построены математические модели течения жидкости через камеру микрозахвата, нагрева радиатора горячей стороной элемента Пельтье и передача тепла от



Рис. 23. Зависимость ΔT [°C] от времени t для геометрий G_2 (красные линии), G_3^1 (синие линии) и G_3^3 (зеленые линии). Смена режима работы с W = 1 Вт на режим W = 0.5 Вт (сплошные линии) или W = 0 Вт (пунктирные линии). Асимптоты рабочих режимом обозначены тонкими сплошными линиями. $\alpha = 1.5$ кВт/(м²·K); $u_m = 2$ см/с; размеры камеры 8×8 мм. Аналитические аппроксимации — черные пунктирные линии. Закрашенные области — «быстрое» переключение режимов

радиатора жидкости. Для компьютерного моделирования уравнения записывались в вариационной форме и решались методом конечных элементов в программе решения дифференциальных уравнений FreeFem++. Для повышения точности расчетов использовалась динамическая адаптивная расчетная сетка. Поскольку физические величины зависят от температуры, проведена аппроксимация этих величин по табличным значениям в виде полиномов с помощью метода наименьших квадратов. Для контроля точности и продолжительности расчета определялась тепловая мощность, выводимая жидкостью из системы. Расчет продолжался пока эта величина не совпадала с вводимой в систему тепловой мощностью с точностью 0.1 %. Определялись следующие величины: максимальная установившаяся на радиаторе температура и время выхода системы охлаждения на рабочий режим. Проведен анализ переключения системы охлаждения с одного рабочего режима на другой. Получено, что время установления рабочего режима совпадает с продолжительностью переключения на другой режим работы и не зависит от тепловой мощности элемента Пельтье, что позволило предложить механизм «быстрого» переключения режимов. По результатам численного расчета построены однопараметрические аналитические аппроксимации для зависимости температуры радиатора от времени, а также продолжительности «быстрого» переключения (примеры переключений показаны на рис. 23). Методом ОЦКП проведен анализ зависимости максимальной установившейся температуры радиатора и времени выхода на рабочий режим от размера радиатора и камеры. На базе проведенных вычислительных экспериментов получено, что с увеличением размера радиатора эффективность системы охлаждения увеличивается, но требуется большее время для установления рабочего режима.

Компьютерная модель пьезоэлектрического микронасоса была адаптированна для расчетов устройства для сглаживания низкочастотных пульсаций расхода жидкости (демпфер перепада давления) [56]. Данное устройство может быть использовано для сглаживания пульсаций течения жидкости на выходе перистальтических насосов и уменьшения колебаний температуры на радиаторе в системе охлаждения микрозахвата.

9. Заключение

Приведенные в этой работе методики, специфические подходы к синтезу моделей и ориентированность результатов на их использование в процедурах синтеза конструкций робототехнических устройств с экстремальными эксплуатационными характеристиками подтверждают междисциплинарный характер робототехники как направления науки и техники, требующего использования не столько системного, сколько комплексного подхода к решению поставленных проблем. Также следует отметить, что в ходе исследований активно использовалось свободное программное обеспечение. В работе [57] приведены примеры построения модели с применением *FreeFem++* [22]/*Gmsh* [58] и FreeCAD [59]/CalculiX [60] (с использованием интерфейса программы и параметрического скрипта на языке Python). В работе [54] предложены скрипты Scilab [61] для повышения точности аппроксимации методом наименьших квадратов, а также приведена схема проведения вычислительных экспериментов методом ортогонального центрального композиционного планирования. В [62] проведен анализ свободных программных средств для динамической визуализации результатов моделирования нестационарных физических явлений. На примере решения пяти физических задач (модифицированное логистическое уравнение Ферхюльста-Пирла [63] для популяционной динамики; естественная тепловая конвекция Рэлея–Бенара [64]; автоколебательная химическая реакция Белоусова-Жаботинского [65] на примере модели брюсселятора; колебание груза на упругом растяжимом стержне в поле тяжести; кинематика модульного колесного мобильного робота [66-68]) показаны способы анимации параметрических аналитических зависимостей в Gnuplot [69], отображения двумерных пространственно распределенных динамических процессов с помощью видеофайла, построения трехмерной модели в программе компьютерной графики Blender [70]. Дополнительно представлен способ повышения эффективности использования вычислительных ресурсов с помощью разделения вычислительного этапа и этапа обработки и визуализации результатов моделирования на примере универсального Python-скрипта для построения трехмерных траекторий по внешним исходным данным в Blender.

С точки зрения практики особый интерес представляют методики получения и непосредственно сами аналитические решения, которые позволяют реализовать системы управления в реальном времени даже на бортовых компьютерах, обладающих скромными вычислительными возможностями. Анализ результатов моделирования работы системы охлаждения микрозахвата, в свою очередь, позволил найти способы сокращения межоперационного времени при микроманипуляциях за счет работы в окрестностях рабочей точки элемента Пельтье.

Список литературы

 Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // Micro and Nano Engineering. 2019. V. 2. Pp. 76–91. DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003

- [2] Berg J.M., Dallas T. Peristaltic Pumps. Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics (eds. by Li D.). New York: Springer, 2015. Pp. 2693–2701. DOI: 10.1007/978-0-387-48998-8_1198
- [3] Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p. DOI: 10.1007/978-90-481-9029-4
- [4] Patankar S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow". Taylor and Francis, 1980.
- [5] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems. Cham: Springer. 2016. 164 p. DOI: 10.1007/978-3-319-23312-3
- [6] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Капиллярный микрозахват с обратной связью. Патент на изобретение № 2261795. Опубл. 10.10.2005. Бюл. № 28. https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_ servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [7] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_2
- [8] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вычислительные технологии. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20. DOI: 10.25743/ICT.2021.26.2.002
- [9] Raval S., Patel B. A Review on Grasping Principle and Robotic Grippers // International Journal of Engineering Development and Research. 2016. Vol. 4. Pp. 483–490.
- [10] DiSalvo F.J. Thermoelectric Cooling and Power Generation // Science. 1999. Vol. 285, No. 5428. Pp. 703–706. DOI: 10.1126/science.285.5428.703
- [11] Deasy MJ., Baudin N., O'Shaughnessy S.M., Robinson AJ. Simulation-driven design of a passive liquid cooling system for a thermoelectric generator // Applied Energy. 2017. V. 205. Pp. 499-510. DOI: 10.1016/j.apenergy.2017.07.127.
- [12] Afshari F. Experimental and numerical investigation on thermoelectric coolers for comparing air-to-water to air-to-air refrigerators // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. 2020. DOI: 10.1007/s10973-020-09500-6
- Jami F. Tullius, Robert Vajtai, Yildiz Bayazitoglu. A Review of Cooling in Microchannels // Heat Transfer Engineering. 2011.
 V. 32, No. 7–8. Pp. 527–541.
 DOI: 10.1080/01457632.2010.506390
- [14] Chien-Yuh Yang, Chun-Ta Yeh, Wei-Chi Liu, Bing-Chwen Yang. Advanced Micro-Heat Exchangers for High Heat Flux // Heat Transfer Engineering. 2007. V. 28, No. 8–9. Pp. 788-794, DOI: 10.1080/01457630701328676
- [15] Nonino C., Del Giudice S., Savino S. Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipation Effects in Microchannel Flows With Uniform Wall Heat Flux, Heat Transfer Engineering. 2010. V. 31, No. 8. Pp. 682–691. DOI: 10.1080/01457630903466670
- [16] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9. DOI: 10.21662/uim2016.1.001
- [17] Laser DJ., Santiago J.G. A review of micropumps // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2004. V. 14. Pp. R35-R64. DOI: 10.1088/0960-1317/14/6/R01

- [18] Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Eds. by Bungartz HJ., Schäfer M. Heidelberg: Springer. 2006. 401 p. DOI: 10.1007/3-540-34596-5
- [19] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. Рр. 26–41. eLIBRARY ID: 28886942
- [20] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006. 237 p.
- [21] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // Fluids. 2017. V. 2, No. 2. Pp. 34–53. DOI: 10.3390/fluids2020034
- [22] Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265. DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [23] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232. DOI: 10.21662/mfs2019.4.029
- [24] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждение микрозахвата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750. DOI: 10.17587/mau.20.740-750
- [25] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_43
- [26] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // Известия Уфимского научного центра РАН. 2015. № 4. С. 20–25. eLIBRARY ID: 25732231
- [27] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба-гидросопротивление-труба // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149. DOI: 10.21662/uim2016.2.021
- [28] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66. DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [29] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164. DOI: 10.25103/jestr.142.19
- [30] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Осесимметричное течение вблизи критической точки на подвижной границе // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2010. Т. 7, № 1. С. 82–190. DOI: 10.21662/uim2010.1.016
- [31] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.Г. Численные методы. 8-е изд. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.
- [32] Сивухин Д.В. Общий курс физики. М.: Наука. 1979. Т. І. Механика. 520 с.
- [33] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

- [34] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние различных видов силы трения на движение поршня в трубе // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2011. Т. 8, № 1. С. 257-265. DOI: 10.21662/uim2011.1.025
- [35] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Движение поршня в цилиндрической трубе с учетом вязкого трения // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2012. Т. 9, № 2. С. 107–112. DOI: 10.21662/uim2012.2.059
- [36] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э. Ш., Денисова Е.В. Влияние различных видов силы трения в системе двух коаксиальных цилиндров // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 10. С 54–59. eLIBRARY ID: 22307858
- [37] Насибуллаева Э. Ш., Денисова Е.В., Насибуллаев И.Ш. Расширенная математическая модель функционирования агрегата дозирования топлива // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2011. Т. 8, № 1. С. 249–256. DOI: 10.21662/uim2011.1.024
- [38] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э. Ш., Денисова Е.В. Схема проведения вычислительного эксперимента для построения элемента исследовательского стенда агрегата дозирования топлива // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2014. Т. 10, № 1. С. 87–89. DOI: 10.21662/uim2014.1.016
- [39] Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука. 1976. 280 с.
- [40] Денисова Е.В., Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Черникова М.А. Течение жидкости в канале при малых перепадах давления: сравнение уравнений Бернулли и Навее-Стокса // Известия Уфимского научного центра РАН. 2014. № 4. С. 17-23. eLIBRARY ID: 24326738
- [41] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [42] Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. 2000. 615 p. DOI: 10.1017/CB09780511800955
- [43] Денисова Е.В., Насибуллаева Э. Ш., Насибуллаев И.Ш. Исследование динамических процессов в элементах топливной автоматики // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 5. С. 31–36.
- [44] Денисова Е.В., Мурашкин М.Ю., Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Применение наноструктурных материалов в топливной автоматике // Нано- и микросистемная техника. 2014. № 8. С. 47–52. eLIBRARY ID: 21884314
- [45] Хватов Б.Н. Влияние состояния поверхностного слоя на кинетику кавитационного разрушения гидротурбинной стали // Вестник ТГТУ. 2002. Т. 8, № 3. С. 507–512. eLIBRARY ID: 18909409
- [46] Патент на изобретение № 2550287, приоритет изобретения 30.12.2013 г. «Поршень с антикавитационной обработкой поверхности для устройства дозирования топлива», авторы: Урманчеев С.Ф., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В., Черникова М.А., Мурашкин М.Ю., Насибуллаев И.Ш.
- [47] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Исследование кавитационной устойчивости поверхности алюминиевого поршня // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 143–151. DOI: 10.21662/uim2017.2.021
- [48] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука. 1987. 248 с.

- [49] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Хисматуллина Н.А. Деформация поверхности тела при ударе водяной струи // Известия Уфимского научного центра РАН. 2015. № 3. С. 12–18. eLIBRARY ID: 24216955
- [50] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10. DOI: 10.21662/mfs2018.3.001
- [51] Sandberg G., Wernberg P.-A., Davidsson P. Fundamentals of Fluid-Structure Interaction. In Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration // CISM International Centre for Mechanical Sciences. V. 505. Vienna: Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-3-211-89651-8_2
- [52] Насибуллаев И.Ш. Снижение систематической погрешности среднего расхода жидкости в осесимметричной компьютерной модели пьезоэлектрического микронасоса // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 1. С. 20–31. DOI: 10.21662/mfs2021.1.004
- [53] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Dependence of the Piezoelectric Micropump Operating Mode on Its Geometry // Journal of Physics: Conference Series. V. 2096, No. 1 P. 012081. DOI: 10.1088/1742-6596/2096/1/012081
- [54] Насибуллаев И.Ш. Использование свободных программ для обработки и визуализации результатов научных исследований // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 58–71. DOI: 10.21662/mfs2021.2.009
- [55] Насибуллаев И.Ш. Аналитический анализ переключения рабочего режима в двумерной модели системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2021. Т. 25, № 3(93). С. 120–131. DOI: 10.54708/19926502_2021_25393120
- [56] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Осесимметричная модель микроустройства со сглаживанием пульсаций потока жидкости // В сборнике: XIV всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2021. Материалы XIV мультиконференции: в 4 т. Ростов-на-Дону. 2021. С. 49–51. eLIBRARY ID: 47458521
- [57] Насибуллаев И.Ш. Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX для моделирования статических задач упругости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3-4. С. 183-200. DOI: 10.21662/mfs2020.3.129
- [58] Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and postprocessing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 79, No. 11. P. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579

- [59] FreeCAD homepage. https://www.freecadweb.org/ (дата обращения: 22.01.2022 г.)
- [60] Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications. Wiley. 2004. DOI: 10.1002/0470021217
- [61] Campbell S.L., Chancelier J.-Ph., Nikoukhah R. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4. 2010. Springer, New York, NY. 330 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-5527-2
- [62] Насибуллаев И.Ш. Использование свободного ПО для визуализации результатов моделирования динамических процессов // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 121–143. DOI: 10.21662/mfs2021.3.016
- [63] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. Москва: Наука. 1985. 181 с.
- [64] Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М: Эдиториал УРСС. 247 с.
- [65] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм. Сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Институт прикладной физики АН СССР. 1981. 287 с.
- [66] Darintsev O.V., Nasibullayev I.S., Bogdanov D.R. Inspection of pipelines of complex topology using an adaptive, scalable multi-segment mobile robot // Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1426. Pp. 137-150. DOI: 10.1007/978-3-030-88458-1 11
- [67] Nasibullayev I., Darintsev O., Bogdanov D. In-Pipe Modular Robot: Configuration, Displacement Principles, Standard Patterns and Modeling // Smart Innovation, Systems and Technologies. 2022. Vol. 232. Pp. 85–96. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-16-2814-6.8
- [68] Мигранов А.Б., Богданов Д.Р., Даринцев О.В., Насибуллаев И.Ш., Копьев А.С. Модульный мобильный робот для проведения инспекции трубопроводов сложной топологии // В сборнике: XIV всероссийская мультиконференция по проблемам управления МКПУ-2021. Материалы XIV мультиконференции: в 4 т. Ростов-на-Дону. 2021. С. 196–198. eLIBRARY ID: 47458488
- [69] Gnuplot homepage. http://www.gnuplot.info/ (дата обращения: 07.12.2021)
- [70] Филиппов С.В. Программная платформа Blender как среда моделирования объектов и процессов естественно-научных дисциплин // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 230. 42 с.

DOI: 10.20948/prepr-2018-230

ISSN 2658-5782

17 (2022), **1-2**, 74-96



Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.007 DOI:10.21662/mfs2022.1.007

Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

Synthesis of new microfluidics models in the research in the "Robotics and Control in Technical Systems" laboratory

Darintsev O.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC of the RAS, Ufa, Russia

Robotics is an interdisciplinary scientific direction, therefore, when solving a number of problems, it becomes necessary to conduct research that is typical for other areas of science. So, when synthesizing new types of equipment in the «Robotics and Control in Technical Systems» laboratory, more accurate characteristics of individual components and assemblies were required, which ultimately led to a whole cycle of work on microfluidics. Of particular interest in the work performed is the development of new microdevices, since this involves the construction of a single complex of new mathematical and computer models that link hydrodynamics, elasticity theory, heat transfer process, parametric optimization and control theory. The first models were obtained that describe the movement of a piston fixed by an elastic spring in a pipe, taking into account the influence of dry viscous types of friction. By the method of factorial computational experiment, analytical dependencies were obtained for the main part of the fuel dosing unit - servo piston. Next, mathematical and computer models were built to analyze the fluid flow through a channel with variable geometry. Based on the simulation results, the design of a new micromechanical device - a piezoelectric micropump consisting of an elastic tube and annular piezoelements located on it, the sequential oscillation of which creates a non-zero average fluid flow, was refined. In the course of the adaptation of the model, an effective design of the device for smoothing fluid flow pulsations was obtained. These devices were developed and calculated for use in the liquid cooling system of capillary microgripper. A parametric analysis of the process of cooling the hot side of the Peltier element of the microgripper was carried out with a change in the following gripper parameters: the size and shape of the radiator, the coolant flow rate and the heat transfer coefficient. The results of the analysis of temperature fluctuations of the radiator under unsteady fluid flow confirmed the expected dependences of the cooling efficiency on the chosen geometry of the radiator and low-frequency fluid flow fluctuations.

Keywords: microfluidics, microrobotics, hydraulic resistance, dynamically variable channel geometry, piezoelectric micropump, capillary microgripper, fluid cooling system

References

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics. Micro and Nano Engineering. 2019. V. 2. Pp. 76–91. DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- Berg J.M., Dallas T. Peristaltic Pumps. Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics (eds. by Li D.). New York: Springer, 2015. Pp. 2693–2701. DOI: 10.1007/978-0-387-48998-8_1198
- [3] Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p. DOI: 10.1007/978-90-481-9029-4
- [4] Patankar S.V., "Numerical heat transfer and fluid flow". Taylor and Francis, 1980.

- [5] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems. Cham: Springer. 2016. 164 p. DOI: 10.1007/978-3-319-23312-3
- [6] Darintsev O.V., Migranov A.B. [Capillary micro-grip with feedback] Capilarnyi microzahvat s obratnoi svazju. Patent RF No. 2261795 RU, [Published] Opublikovano 10.10.2005. Byul. N. 28 (in Russian). https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_ servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [7] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_2

- [8] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system]. *Vychislitel'nyye tekhnologii* [Computational technologies]. 2021. V. 26. No. 2. Pp. 4–20 (in Russian). DOI: 10.25743/ICT 2021 26.2 002
- [9] Raval S., Patel B. A Review on Grasping Principle and Robotic Grippers. International Journal of Engineering Development and Research. 2016. Vol. 4. Pp. 483–490.
- [10] DiSalvo F.J. Thermoelectric Cooling and Power Generation. 1999. Science. Vol. 285, no. 5428. Pp. 703–706. DOI: 10.1126/science.285.5428.703
- [11] M.J. Deasy, N. Baudin, S.M. O'Shaughnessy, A.J. Robinson. Simulation-driven design of a passive liquid cooling system for a thermoelectric generator. Applied Energy. V. 205, 2017, pp. 499-510, DOI: 10.1016/j.apenergy.2017.07.127.
- [12] Afshari F. Experimental and numerical investigation on thermoelectric coolers for comparing air-to-water to air-to-air refrigerators. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. 2020. DOI: 10.1007/s10973-020-09500-6
- Jami F. Tullius, Robert Vajtai, Yildiz Bayazitoglu. A Review of Cooling in Microchannels. Heat Transfer Engineering. 2011. V. 32, No 7–8. P. 527–541.
 DOI: 10.1080/01457632.2010.506390
- [14] Chien-Yuh Yang , Chun-Ta Yeh , Wei-Chi Liu, Bing-Chwen Yang. Advanced Micro-Heat Exchangers for High Heat Flux. Heat Transfer Engineering. 2007. V. 28, No 8–9. Pp. 788-794, DOI: 10.1080/01457630701328676
- [15] C. Nonino, S. Del Giudice, S. Savino. Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipation Effects in Microchannel Flows With Uniform Wall Heat Flux, Heat Transfer Engineering. 2010. V. 31, No 8. Pp. 682–691. DOI: 10.1080/01457630903466670
- [16] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The effect of temperature on the dynamics of fluid flow in technical systems with jets]. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 1. P. 1–9 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2016.1.001
- [17] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps. Journal of Micromechanics and Microengineering. 2004. V. 14. Pp. R35–R64. DOI: 10.1088/0960-1317/14/6/R01
- [18] Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Eds. by Bungartz HJ., Schäfer M. Heidelberg: Springer. 2006. 401 p. DOI: 10.1007/3-540-34596-5
- [19] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit] Razrabotka kompyuternoy modeli osnovnogo elementa agregata dozirovaniya topliva. Vychislitelnye tehnologii [Computational Technologies]. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41. (In Russian). eLIBRARY ID: 28886942
- [20] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006. 237 p.
- [21] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems. Fluids. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53. DOI: 10.3390/fluids2020034
- [22] Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265. DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [23] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., [Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel] Dvumernaya dinamicheskaya model' vzaimodeystviya zhidkosti i p'yezoelektricheskogo privoda s poperechnym izgibom v ploskom kanale. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 220–232 (In Russian). DOI: 10.21662/mfs2019.4.029

- [24] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems] *Modelirovaniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom elastichnyy mikrokanal sistemy okhlazhdeniye mikrozakhvata*. Mechatronics, automation, control [*Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*]. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian). DOI: 10.17587/mau.20.740-750
- [25] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore. DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_43
- [26] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Dynamics of fluid flow in technical systems with jets] Dinamika techeniya zhidkosti v tekhnicheskikh sistemakh s zhiklerami. Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No. 4. Pp. 20–25 (In Russian). eLIBRARY ID: 25732231
- [27] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The fluid flow through a system of connected elements of a technical device such as pipe-hydraulic resistance-pipe] Techeniye zhidkosti cherez sistemu svyazannykh elementov tekhnicheskogo ustroystva tipa trubagidrosoprotivleniye-truba. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 2. Pp. 141–149 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2016.2.021
- [28] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through hydraulic resistance with dynamically changing geometry] Techeniye zhidkosti cherez gidrosoprotivleniye s dinamicheski izmenyayemoy geometriyey. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 59–66 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [29] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump. Journal of Engineering Science and Technology Review. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164. DOI: 10.25103/jestr.142.19
- [30] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Axisymmetric flow near the critical point on the moving boundary] Osesimmetrichnoye techeniye vblizi kriticheskoy tochki na podvizhnoy granitse. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2010. V. 7, No 1. Pp. 82–190 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2010.1.016
- [31] Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.G. [Numerical methods. 8th ed. Moscow: Basic Knowledge Laboratory] *Chislennyye* metody. 8-ye izd. M.: Laboratoriya Bazovykh Znaniy. 2000. (In Russian)
- [32] Sivukhin D.V. [General course of physics. V. I. Mechanics. M.: Science] Obshchiy kurs fiziki. M.: Nauka. 1979. T. I. Mekhanika. 1979. 520 p. (In Russian)
- [33] Sedov L. I. [Continuum mechanics. V. 1. M.: Nauka] Mekhanika sploshnoy sredy. T. 1. M.: Nauka. 1970. 492 p. (In Russian)
- [34] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Influence of various types of frictional force on the movement of the piston in the pipe] Vliyaniye razlichnykh vidov sily treniya na dvizheniye porshnya v trube. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2011. V. 8, No 1. Pp. 257–265 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2011.1.025

- [35] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The movement of the piston in a cylindrical tube with viscous friction] Dvizheniye porshnya v tsilindricheskoy trube s uchetom vyazkogo treniya. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2012. V. 9, No 2. Pp. 107–112 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2012.2.059
- [36] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Influence of different types of friction force in the system of two coaxial cylinders] Vilyaniye razlichnykh vidov sily treniya v sisteme dvukh koaksial'nykh tsilindrov. Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye. 2014. No 10. Pp. 54–59 (In Russian). eLIBRARY ID: 22307858
- [37] Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V., Nasibullayev I.Sh. [Full-size mathematical model of the fuel metering unit] Rasshirennaya matematicheskaya model' funktsionirovaniya agregata dozirovaniya topliva. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RANJ. 2011. V. 8, No 1. Pp. 249–256 (In Russian). DOI: 10.21662/uim2011.1.024
- [38] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Scheme of the computational experiment for the construction of an element of the research stand of the fuel metering unit] Skhema provedeniya vychislitel'nogo eksperimenta dlya postroyeniya elementa issledovatel'skogo stenda agregata dozirovaniya topliva. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2014. V. 10, No 1. Pp. 87–89. DOI: 10.21662/uim2014.1.016
- [39] Adler Yu.P., Markova Ye.V., Granovskiy Yu.V. [Design of experiment in the search for optimal conditions] Planirovaniye eksperimenta pri poiske optimalnykh usloviy. M.: Nauka, 1976. 280 p. (in Russian).
- [40] Denisova E.V., Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Chernikova M.A. [Fluid flow in a channel at low pressure drops: a comparison of the Bernoulli and Navier-Stokes equations] Techeniye zhidkosti v kanale pri malykh perepadakh davleniya: sravneniye uravneniy Bernulli i Nav'ye-Stoksa. Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2014. No 4. Pp. 17–23. eLIBRARY ID: 24326738
- [41] Landau L.D., Lifshitz E.M. Theoretical physics. V. 6. Fluid Mechanics. M.: Nauka, 1988. 736 p. (In Russian).
- [42] Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. 2000. 615 p. DOI: 10.1017/CB09780511800955
- [43] Denisova E.V., Nasibullaeva E.Sh., Nasibullayev I.Sh. [Study of dynamic processes in the elements of fuel automation] *Issledovaniye dinamicheskikh protsessov v elementakh toplivnoy avtomatiki*. Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye. 2014. № 5. Pp. 31– 36 (In Russian).
- [44] Denisova E.V., Murashkin M.Yu., Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Application of nanostructured materials in fuel automation] *Primeneniye nanostrukturnykh materialov v* toplivnoy avtomatike. Nano- and microsystem technology [Nano- i mikrosistemnaya tekhnika]. 2014. No 8. Pp. 47–52 (In Russian). eLIBRARY ID: 21884314
- [45] Khvatov B.N. [Influence of the state of the surface layer on the kinetics of cavitation destruction of hydroturbine steel] Vliyaniye sostoyaniya poverkhnostnogo sloya na kinetiku kavitatsionnogo razrusheniya gidroturbinnoy stali. Vestnik TSTU. 2002. V. 8, No 3. Pp. 507-512 (In Russian). eLIBRARY ID: 18909409
- [46] Invention Patent No. 2550287, Invention Priority Dec. 30, 2013 «Piston with anti-cavitation surface treatment for fuel dosing device», authors: Urmancheev S.F., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V., Chernikova M.A., Murashkin M.Yu., Nasibullayev I.Sh. (In Russian)

- [47] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of the cavitational stability of an aluminum piston surface based on a three-dimensional model] *Issledovaniye kavitatsionnoy ustoychivosti poverkhnosti alyuminiyevogo porshnya. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova], Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, No 2. Pp. 143–151 (In Russian).
 DOI: 10.21662/uim2017.2.021
- [48] Landau L.D., Lifshitz E.M. [Theoretical physics. V. 7. Theory of Elasticity] Teoreticheskaya fizika. T. 7. Teoriya uprugosti. M.: Nauka. 2003. P. 259. (in Russian).
- [49] Aganin A.A., Ilgamov M.A., Khismatullina N.A. [Deformation of the body surface when hit by a water jet] *Deformatsiya* poverkhnosti tela pri udare vodyanoy strui. Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No 3. Pp. 12–18 (In Russian). eLIBRARY ID: 24216955
- [50] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. [Study of fluid flow through a channel deformed by piezoelement] Izucheniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom kanal. Mnogofaznyye sistemy [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (In Russian). DOI: 10.21662/mfs2018.3.001
- [51] Sandberg G., Wernberg P.A., Davidsson P. Fundamentals of Fluid-Structure Interaction. In Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration. CISM International Centre for Mechanical Sciences. V. 505. Vienna: Springer, 2009. DOI: 10.1007/978-3-211-89651-8_2
- [52] Nasibullayev I.Sh. [Reducing the systematic error of the average fluid flow rate in axisymmetric computer model of piezoelectric micropump] Snizheniye sistematicheskoy pogreshnosti srednego raskhoda zhidkosti v osesimmetrichnoy komp'yuternoy modeli p'yezoelektricheskogo mikronasosa. Mnogofaznyye sistemy [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No 1. Pp. 20–31. (In Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.1.004
- [53] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Dependence of the Piezoelectric Micropump Operating Mode on Its Geometry. Journal of Physics: Conference Series. V. 2096, no. 1 P. 012081. DOI: 10.1088/1742-6596/2096/1/012081
- [54] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software for processing and visualization of scientific research results] *Ispol'zovaniye* svobodnykh programm dlya obrabotki i vizualizatsii rezul'tatov nauchnykh issledovaniy. Multiphase Systems [*Mnogofaznyye sistemy*]. 2021.
 V. 16, No 2. Pp. 58–71 (In Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.2.009
- [55] Nasibullayev I.Sh. [Analytical analysis of operating mode switching in a 2D model of a fluid cooling system of the microgripper] Analiticheskiy analiz pereklyucheniya rabochego rezhima v dvumernoy modeli sistemy zhidkostnogo okhlazhdeniya mikrozakhvata. Vestnik USATU [Vestnik UGATU]. 2021. Vol. 25, N. 3 (93). Pp. 120– 131 (in Russian). DOI: 10.54708/19926502_2021_25393120
- [56] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. [Axisymmetric model of a microdevice with smoothing of fluid flow pulsations] Osesimmetrichnaya model' mikroustroystva so sglazhivaniyem pul'satsiy potoka zhidkosti. In: XIV All-Russian Multi-Conference on Control Problems MKPU-2021. Materials of the XIV multiconference: in 4 vol. Rostov-on-Don. [V sbornike: XIV vserossiyskaya mul'tikonferentsiya po problemam upravleniya MKPU-2021]. 2021. Pp. 49–51 (In Russian). eLIBRARY ID: 47458521
- [57] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems] *Primeneniye svobodnykh programm FreeFem++/Gmsh i FreeCAD/CalculiX dlya modelirovaniya staticheskikh strukturnykh zadach*. Multiphase Systems [*Mnogofaznyye sistemy*]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 183–200 (In Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.3.129

- [58] Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and postprocessing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 79, No. 11. P. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579
- [59] FreeCAD homepage. https://www.freecadweb.org/ (accessed: 22.01.2022 r.)
- [60] Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications. Wiley. 2004. DOI: 10.1002/0470021217
- [61] Campbell S.L., Chancelier J.-Ph., Nikoukhah R. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4. 2010. Springer, New York, NY. 330 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-5527-2
- [62] Ηαcибуллаев И.Ш. [Application of free software to visualize the results of simulation of dynamic processes] *Ispol'zovaniye* svobodnogo PO dlya vizualizatsii rezul'tatov modelirovaniya dinamicheskikh protsessov. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]. 2021. V. 16, No 3–4. Pp. 121–143 (In Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.3.016
- [63] Bazykin A.D. [Mathematical biophysics of interacting populations] Matematicheskaya biofizika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy. Moskva: Nauka. 1985. 181 p. (In Russian).
- [64] Getling A.V. [Rayleigh-Benard convection. Structures and dynamics] Konvektsiya Releya-Benara. Struktury i dinamika. M: Editorial URSS. 247 p. (In Russian).
- [65] Belousov B.P. [Periodically acting reaction and its mechanism] Periodicheski deystvuyushchaya reaktsiya i yeye mekhanizm. Collection

of abstracts on radiation medicine for 1958 [Sbornik referatov po radiatsionnoy meditsine za 1958 g.]. M: Medgiz. 1959 (In Russian).

- [66] Darintsev O.V., Nasibullayev I.S., Bogdanov D.R. Inspection of pipelines of complex topology using an adaptive, scalable multi-segment mobile robot. Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1426. Pp. 137-150. DOI: 10.1007/978-3-030-88458-1_11
- [67] Nasibullayev I., Darintsev O., Bogdanov D. In-Pipe Modular Robot: Configuration, Displacement Principles, Standard Patterns and Modeling. Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 232, pp. 85–96. Springer, Singapore. 2022. DOI: 10.1007/978-981-16-2814-6_8
- [68] Migranov A.B., Bogdanov D.R., Darintsev O.V., Nasibullaev I.Sh., Kopev A.S. Modular mobile robot for inspection of pipelines of complex topology. In: XIV All-Russian Multi-Conference on Control Problems MKPU-2021. Materials of the XIV multiconference: in 4 vol. Rostov-on-Don. [V sbornike: XIV vserossiyskaya mul'tikonferentsiya po problemam upravleniya MKPU-2021]. 2021. Pp. 196–198 (In Russian). eLIBRARY ID: 47458488
- [69] Gnuplot homepage. http://www.gnuplot.info/ (accessed: 07.12.2021)
- [70] Filippov S.V. [Blender software platform as an environment for modeling objects and processes in natural sciences] *Programmnaya platforma Blender kak sreda modelirovaniya ob'yektov i protsessov yestestvenno-nauchnykh distsiplin*. Preprints of IAM im. M.V. Keldysh [*Preprinty IPM im. M.V.Keldysha*]. 2018. No. 230. 42 p. (In Russian). DOI: 10.20948/prepr-2018-230

96

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 97-112



Многофазные системы



http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.008 DOI: 10.21662/mfs2022.1.008 УДК 532.5; 534.2; 552.3 Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Дисперсные среды: рассеяние звуковых волн, стратификация в закрученных потоках и процессы осаждения¹

Урманчеев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Представлен краткий обзор по трем задачам из области механики многофазных сред, связанных с изучением динамического поведения дисперсных систем в различных условиях и способах взаимодействия с внешними полями или окружающей средой. Задачи являются составной частью научного проекта «Гидродинамические эффекты в многофазных и термовязких средах при волновых и тепловых воздействиях». Обзор проведен в контексте вектора развития современных исследований в соответствующих направлениях. В рамках решения задачи по рассеянию акустических волн на множестве сферических пузырьков или капель с учётом их звукопроницаемости был развит метод быстрых мультиполей для расширения возможностей его применения в рассмотренных случаях. На основе теорем сложения для сферических волновых функций впервые получена формула для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер, произвольно расположенных в пространстве. Важным аспектом исследований стала оценка области в пространстве параметров задачи, в которой эффекты многократного рассеяния являются существенными. Вторая задача связана с математическим моделированием закрученного турбулентного потока, содержащего частицы дисперсной фазы. Для численных исследований температурной стратификации в вихревой трубе создан алгоритм и компьютерный код с использованием ортогонализированной конечно-объемной сетки с выделением пристеночного слоя. Проведен ряд параметрических исследований, в частности, рассмотрена зависимость температуры выходящего воздуха в канале холодной диафрагмы в зависимости от диаметра диафрагмы. С целью повышения эффективности геологоразведки при решении третьей задачи для описания процесса магматического рудообразования предложена система уравнений, основанная на методах механики многофазных сред и термогидродинамики. Математическая модель предусматривает теплообмен потока магматического расплава с окружающими его вмещающими породами, а также выделение тяжелых и лёгких фракций из базальтовой магмы при её охлаждении. Полученные в ходе вычислительного эксперимента результаты свидетельствуют о возможности периодически-неоднородного характера распределения рудообразующих фракций.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, система звукопроницаемых сфер, температурная стратификация, энергоразделение, циклострофическое приспособление, магматическое рудообразование, дифференциация

1. Введение

Программа исследований по теме, указанной в названии, связана с установлением фундаментальных закономерностей в гидродинамических процессах, происходящих при воздействии температурных и акустических полей. В настоящем обзоре представлены некоторые результаты по задачам, выполняемым в рамках темы. К ним относятся: взаимодействие сферических пузырьков и капель с источником волн акустического диапазона; температурная стратификация жидкостей и газов, содержащих дисперсные частицы в вихревых трубах; моделирование процессов дифференциации магматических расплавов при течении в субвулканических камерах с учетом теплообмена с окружающими горными породами.

¹Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Урманчеев С.Ф.

Цель исследований состоит в определении взаимного влияния акустических, гидродинамических и термодинамических параметров рассмотренных систем и, при этом, изучение закономерностей распределения частиц дисперсной фазы, физических свойств объектов исследований, эффектов стратификации и локализации.

Формирование поля акустического рассеяния при взаимодействии источника звука с совокупностью звукопроницаемых сферических частиц

Рассеяние волн на множестве частиц — одна из важнейших задач акустики и квантовой теории поля. Поскольку в последние десятилетия основное внимание было приковано к решению обратных задач, развитие математических методов решения прямых задач происходило сравнительно медленными темпами, хотя публикации решений конкретных задач никогда не прекращались. Общее представление о теоретических и экспериментальных методах в области рассеяния звука от одиночных абсолютно твердых и звукопроницаемых частиц можно получить из монографии В.Т. Гринченко, И.В. Вовка и В.Т. Мацыпуры (2009) [1]. Однако рассмотрение совокупности множества частиц, сложность поставленных задач требует развития соответствующих методов вычислений, так как при описании взаимодействия каждой частицы со всеми остальными, производительность даже мошных вычислительных систем быстро исчерпывается с увеличением размерности задачи и числа частиц. Принципиально важный вклад в этом направлении был внесен благодаря исследованиям нашего коллеги Н.А. Гумерова. Так, в работах Н.А. Гумерова и Р. Дураисвами (Nail A. Gumerov and Ramani Duraiswami, 2002, 2004) [2, 3], была рассмотрена задача рассеяния волн от множества сфер. С целью решения задачи авторы разработали вычислительную методику, основанную на методе Т-матрицы с использованием теории переноса и переразложения мультипольных решений уравнения Гельмгольца для быстрого и точного рекурсивного вычисления матричных элементов. Сферическим частицам задавались радиусы, импедансы и значения их координат. Разработанный ими метод быстрых мультиполей оказался намного быстрее, чем другие численные методы, основанные на дискретизации пространства или сферических поверхностей. Следует при этом отметить, что существует некоторый нижний предел эффективности метода: его выгодно применять при трехмерной постановке задачи с достаточно большим числом частиц.

Однако для математического обеспечения измерений в акустической диагностике требуется более общая постановка задач, чем в существующих публикациях. В частности, необходим учет звукопроницаемости частиц, их расположения в пространстве и еще целого ряда сопутствующих геометрических факторов. С целью адекватного описания физических процессов, связанных с воздействием источников звука на дисперсные среды, Э.Ш. Насибуллаевой была осуществлена постановка ряда новых задач по рассеянию акустических волн от пузырьков газа в жидкости и капель жидкости в газе или в другой жидкости. Одновременно ею был развит метод быстрых мультиполей для расширения возможностей его применения в указанных случаях.

Исходная формулировка поставленных задач заключалась в исследовании рассеяния акустической волны на системе N сфер различных радиусов a_1, a_2, \ldots, a_N произвольным образом расположенных в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой — дисперсионной фазой, которая характеризуется плотностью ро и скоростью звука с₀. Сферы являются звукопроницаемыми и волна внутри них распространяется уже в среде дисперсной фазы с плотностью ρ_v и скоростью звука с_v. Рассмотрены два варианта звукового воздействия: на систему сфер падает либо плоская волна с нормальным вектором $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$ к ее фронту, либо сферическая волна от монопольного источника излучения, расположенного в произвольной точке *M_s* трехмерного пространства. Схема для системы сфер и основные обозначения представлены на рис. 1. Задачи решены при двух существенных предположениях: во-первых, центры сфер неподвижны и, во-вторых, радиальное движение сферической поверхности отсутствует.



Рис. 1. Схема задачи и основные обозначения в разных системах отсчета

Следуя основным положениям метода быстрых мультиполей [2] задача была сведена к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала $\psi(\mathbf{r})$ в произвольной точке **r**:

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия S_v , сквозь которую проходит волна:

$$\left(\Psi(\mathbf{r}) - \Psi_{\text{int}}^{(v)} \right) \Big|_{S_v} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \Psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{S_v} = 0, \quad v = 1, 2, \dots, N.$$

$$(2)$$

В формулах (1) и (2) k_0 — волновое число для внешней среды; $\psi_{\text{int}}^{(v)}$ — комплексный потенциал внутри v-й сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом k_v для среды внутри сферы.

При этом потенциал внешнего поля представляется в виде суммы потенциалов падающего поля $\psi_{in}(\mathbf{r})$ и поля рассеяния $\psi_{scat}(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\rm in}(\mathbf{r}) + \psi_{\rm scat}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{scat}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial\psi_{\rm scat}}{\partial r}-ik_0\psi_{\rm scat}\right)=0$$

которое соответствует затуханию волн на бесконечности.

Однако в исходном варианте техника разложения по мультиполям [2], была разработана для случая звуконепроницаемых сфер, когда падающая волна не проходит через границу раздела сред. Обобщение указанного метода для расчета звукопроницаемых сфер, центры которых лежат на одной оси, проведено в работах [4, 5]. Алгоритм для расчета множества сфер, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, представлен в работе [6]. Для численной реализации алгоритмов разработаны программные коды на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [7] для решения системы линейных алгебраических уравнений в осесимметричном и общем случаях. Для осесимметричной задачи получено свидетельство о регистрации программы [8].

При численной реализации метода быстрых мультиполей решение сводится к бесконечномерной системе матричных уравнений и одним из главных вопросов является выбор репрезентативного числа членов *n*_{tr} при усечении полученных рядов, поскольку при малом числе *n*_{tr} точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет объем памяти, необходимой для расчета и, соответственно, машинное время. В работах [4,9] при расчете звукопроницаемых сфер проведено сравнение двух рациональных подходов к усечению рядов в разложении по мультиполям. В работах Э.Ш. Насибуллаевой применялся комбинированный подход, то есть, сначала производилось усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе, определяемом эмпирическими формулами, указанными в статьях [2] и [10], и вычислялось минимальное значение *n*_{tr}. Затем, начиная с этой минимальной величины, применяется подход [11], основанный на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда, до достижения необходимой точности.

Полученные численные результаты позволяют наглядно продемонстрировать картину распределения давления вне и внутри совокупности сфер, в том числе для определения зон повышения и понижения давления. Так, для осесимметричного случая в работе [5] анализ полученных расчетных данных и построенных диаграмм показал, что в рассмотренных случаях увеличение радиуса сферы приводит к росту максимального значения давления за сферой. В случае длинных волн, когда физические параметры внешней и внутренней сред отличаются незначительно, рассеяние практически отсутствует, а в коротковолновом случае — напротив, становится существенным, но только если плотность и скорость звука внутри сфер меньше соответствующих параметров внешней среды. При малых волновых числах вне резонанса распределение давления вокруг воздушных пузырьков в воде аналогично распределению давления вокруг мягких звуконепроницаемых сфер; при малых волновых числах для случая капель воды в воздухе распределение давления во внешней среде аналогично распределению давления вокруг жестких звуконепроницаемых сфер.

В работах [6, 12] было исследовано акустическое рассеяния от слоя равномерно распределенных сфер одного радиуса (рис. 2). На рис. 3 для наглядности приведена одна из диаграмм распределения нормированного давления, полученная в работе [6]. Численные расчеты позволили установить зоны повышенного и пониженного давления как результат наложения падающей и рассеянных от системы сфер волн. Важно при этом отметить, что рассеивающий слой играет роль двумерной дифракционной решетки, имеющей раз-



Рис. 2. Рассеивающий слой из 121 равномерно распределенных в плоскости *Oyz* звукопроницаемых сфер одного радиуса *a*: δl – наименьшее расстояние между центрами сфер; M_s – монопольный источник излучения; M_c – расчетная точка

личную степень прохождения акустических волн, которая зависит от соотношений физических параметров внешней и внутренней сред. Показано также, что изменение наименьшего расстояния между сферами существенно меняет картину и качественно, и количественно. Это связано с тем, что взаимодействие между сферами сильно зависит от плотности расположения сфер в конфигурации.

В случае акустического воздействия заданной интенсивности на воздушные пузырьки, находящиеся в воде, установлено, что давление перед слоем в результате отражения возрастает в 1,8 раз, а



Рис. 3. Диаграмма распределения нормированного давления $|p/p_{in}|$ для конфигурации капель воды в воздухе в плоскости x = 0, содержащей центры сфер, при $\delta l = 3a$ и $k_0a = 1$ в первой четверти

за слоем давление падает более, чем в 5 раз.

В работе [13] впервые получено явное выражение для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер. Формула выведена с помощью теорем сложения для сферических волновых функций и применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, а также для произвольного внешнего воздействия. Исследование полного сечения рассеяния, на основании формулы, полученной в [13] позволило выявить параметрическую область, в которой эффектами многократного рассеяния пренебрегать нельзя.

Развитие темы исследований по данному направлению будет связано с дальнейшим усложнением математических моделей рассматриваемых задач, в которых предполагается хаотическое расположение частиц дисперсной фазы и их подвижность в окрестности заданного положения. Особенно интересным представляется исследование рассеяния звукового воздействия на дисперсные системы с учетом колебаний, связанных с изменением объема и формы частиц, а также с возможностью излучения акустических волн самими частицами.

3. Численное моделирование процессов температурной стратификации

Со времени обнаружения Ж. Ранком (J. Ranque, 1933) [14] эффекта температурной стратификации в вихревом потоке газа в трубе, позднее названной его именем, опубликовано огромное количество научных статей и зарегистрировано множество патентов с предложениями по совершенствованию этого, на первый взгляд, достаточно простого устройства. Но, собственно говоря, систематические исследования температурного разделения начались после публикации Р. Хилша (R. Hilsch, 1947) [15], в которой он привел свои экспериментальные данные по исследованию процессов в вихревой трубе. Суть эффекта можно объяснить достаточно просто: при тангенциальной подаче воздуха в трубу на одном её конце, происходит разделение потока на высокотемпературную и низкотемпературную составляющие. Причём «горячий» выход находится в кольцевом отверстии на периферии трубки, а «холодный» — на ее оси.

Интересно отметить, что обнаружение температурной стратификации было связано с исследованиями Ж. Ранка процессов в циклонах– пылеуловителях [14]. Более поздние исследования [16] позволили установить некоторые параметры трубок Ранка, при которых температурное разделение достигает максимальных значений. В частности, в работе А.П. Меркулова [16] предлагается проводить выбор диаметра D вихревой трубы в пределах от 5 до 35 мм, так как в этом диапазоне с увеличением диаметра происходит уменьшение температуры газа на «холодном» выходе. Дальнейшее увеличение диаметра трубы ведёт уже к снижению эффекта температурной стратификации. Так же, экспериментально, была установлена характерная длина трубы: $L \sim 9D$. Диаметр отверстия для выхода «холодного» воздуха приблизительно определён значением $d \sim 0.45D$, а площадь кольцевого отверстия для выхода «горячего» воздуха сопоставима с площадью сечения входного отверстия для подачи воздуха. Давление на входе ограничивается величиной $p_0 \leqslant 6 \cdot 10^5$ Па, при температуре $T_0 \sim 300 \,^{\circ}$ K.

Несмотря на широкое применение труб Ранка в различных областях техники и большое число исследований, включающих, в том числе, теоретические работы, общепринятая теория температурной стратификации отсутствует.

Не все предложенные подходы заслуживают внимания, поэтому отметим здесь лишь те из них, которые могут быть рассмотрены в качестве исходных для постановки и решения новых задач, связанных с применением эффекта Ранка в современных технологических процессах таких, как, например, непрерывная осушка газа.

Прежде всего обратимся к обширному обзору А.Ф. Гуцола [17], в котором проведен тщательный анализ работ полувекового периода с 1947 по 1996 годы, выявлены недостатки и некоторые внутренние противоречия ряда предлагаемых теорий при трактовке экспериментальных исследований. Автором обзора предложена собственная гипотеза, смысл которой описан следующей фразой: «Благодаря наличию трения и турбулентности как на выходе из тангенциального сопла, так и в самой трубе имеются элементы потока, двигающиеся с различными скоростями, т.е. имеющие разную кинетическую энергию при прочих равных параметрах». В результате, в центре вихря оказываются частицы входящего в трубу газа, имеющие наименьшую кинетическую энергию. Разделение частиц происходит в поле центробежных сил из-за различия их тангенциальных скоростей. В этом обзоре, также, предложена и физическая схема, позволяющая строить модель развития процесса разделения частиц газа в зависимости от их энергии в турбулентном потоке, позволившая сделать целый ряд оценок, связанных с энергоразделением в закрученном потоке газа. Следует отметить, что в соответствии с предложенными в статье гипотезой

и схемой, полноценную математическую модель целесообразно было бы представить с учётом некоторого распределения частиц газа по энергиям, например, на основе уравнений Больцмана с функцией распределения Максвелла.

Оригинальная и достаточно убедительная модель температурной стратификации была предложена в работе М.В. Калашника и К.Н. Вишератина [18]. Она основана на идее циклострофического приспособления, то есть приведения системы к балансу между градиентом давления и центробежной силой. В работе показано, что циклострофический процесс носит нестационарный волновой характер и при достаточно больших начальных скоростях вращения сопровождается ощутимым падением температуры газа в окрестности оси трубы. Когда тангенциальная скорость газа на входе достигает величины, равной приблизительно половине скорости звука и выше, температура на оси может доходить до -100 °C и ниже. В то же время газ в пристеночной области нагревается. Математическое описание процесса приспособления выполнено с использованием системы уравнений газовой динамики для осесимметричного закрученного течения идеального политропного газа. На основе анализа математической модели в классе точных стационарных решений получено уравнение циклострофического баланса. Решение было представлено в виде суммы стационарной сбалансированной и нестационарной составляющих. Наблюдаемый в экспериментах интенсивный шум в акустическом диапазоне свидетельствует, по мнению авторов, о волновом характере процесса циклострофического приспособления, а сбалансированное стационарное состояние поддерживается при незатухающих акустических колебаниях.

При всех достоинствах представленной в [18] модели, она обладает естественными ограничениями при описании множества конструктивных особенностей, которыми экспериментаторы и инженеры снабжают свои оригинальные устройства по энергоразделению. Это, во-первых, относится к одномерному описанию процесса циклострофического приспособления, во-вторых, модель построена для идеального газа, не предусматривающего наличие вязкости, в-третьих, при рассматриваемых в задаче скоростях газа необходим учёт турбулентности потока. В частности, при моделировании возникающих в трубке Ранка приосевых возвратных течений, очевидно, необходимы двух- или трехмерные модели. Объяснение эффекта Ранка на основе принципа минимизации интегрального лагранжиана было выполнено в работе В.Г. Усыченко [19]. Автор утверждает, что ему удалось качественно описать «причину образования вынужденного вихря и снижения температуры наполняющих его молекул; тенденцию к увеличению числа Маха; отклонение радиального распределения температуры газа от закона адиабаты; механизм возникновения турбулентности». Несмотря на отсутствие конкретных результатов, польза статьи заключается, прежде всего, в обосновании возможности существования энергоразделения в вихревой трубе с точки зрения синергетики.

Новый импульс для развития технологий температурной стратификации был дан в работах А.И. Леонтьева [20–22], в которых он предложил принципиально новую схему энергоразделения. В 1998 году он получил патент на способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (приоритет 1996 г.), которое позволяет сохранить полное давление одного из потоков и способствует построению различных многокаскадных и комбинированных схем.

Принцип действия трубы Леонтьева основан на газодинамическом эффекте температурной стратификации, который заключается в следующем: разность количества теплоты, получаемой от работы сил трения за счет диссипативных процессов в пограничном слое сжимаемого газа и количества теплоты, которое может быть отведено за счёт теплопроводности при данной температуре приводит к разности между температурой пристенного слоя газа и температурой торможения в основном потоке. Данное обстоятельство и применяется для энергоразделения. А.И. Леонтьевым и его коллегами был выполнен значительный объём теоретических и экспериментальных исследований по совершенствованию «трубы Леонтьева», методам расчета и промышленным приложениям. Эти работы были отражены в обзорных статьях [23, 24], в которых был также приведен подробный анализ вихревой стратификации температуры в системах, основанных на эффекте Ранка и других методах энергоразделения.

Интересным примером использования энергоразделения в трубе Леонтьева может служить безогневой подогрев газа, предложенный в работе E.B. Цветовой и ее коллег [25].

Так или иначе, но к настоящему времени уже существует достаточное количество и математических моделей, и методов расчёта различных способов температурной стратификации. Все они построены на предложенных их авторами допущениях и приближениях. Между тем, всестороннее исследование газодинамических процессов даже в простейших системах энергоразделения требует использования методов численного моделирования, которые позволяют снять ограничения, связанные с размерностью задачи и геометрическими особенностями конструкции, учётом турбулентности, наличия дисперсной фазы в потоке, фазовых превращений и других факторов.

Построение математической модели процесса температурной стратификации в трёхмерной области для турбулентного потока газа в рамках заявленной темы было предпринято К.И. Михайленко [26–28] (Рис. 4). С этой целью к настоящему времени была построена и детально исследована оптимальная структура расчётной сетки для учёта



Рис. 4. Распределение турбулентной вязкости в канале диафрагмы холодного выхода и в районе завихрителя вихревой трубы (а) и распределение температуры в канале холодного выхода, области завихрителя и прилегающей области основного канала вихревой трубы (б)



Рис. 5. Схема расчетной области: внешняя стенка (а), показанная темной сеткой; периодические границы (б) обозначены более светлой сеткой; также на схеме буквами показаны: область подачи сжатого газа (в) с направляющим патрубком; завихритель (г); выходной канал диафрагмы холодного воздуха (д); конус диафрагмы горячего выхода и области, на которых устанавливается граничное условие для выходящего газа (ж)

возможных конструктивных элементов, влияющих на эффективность температурной стратификации. Отдельно была рассмотрена задача о закрученном потоке монодисперсной смеси. Математическая модель процесса представлена уравнениями газовой динамики для дисперсионной фазы и кинетическими уравнениями Больцмана — для дисперсной фазы. Численное исследование системы уравнений модели выполнено с помощью решателя MPPICFoam (Multiphase Particle-in-Cell method) пакета OpenFOAM [29]. В результате получены распределения скоростей частиц в сепараторе.

В результате подготовлена и исследована с точки зрения сходимости ортогонализированная конечно-объемная сетка с пристеночным слоем (Рис. 5). Показана высокая эффективность параллельных вычислений при моделировании динамики газа в рассматриваемой области на высокопроизводительном вычислительном кластере [30, 31]. С использованием рассмотренного подхода проведен ряд параметрических исследований, в частности, рассмотрена зависимость температуры выходящего воздуха в канале холодной диафрагмы в зависимости от диаметра диафрагмы [32, 33].

Рассмотрена возможность моделирования динамики двухфазной системы газ–дисперсная среда [34] в канале вихревой трубы при использовании математической модели, основанной на применении больцмановской функции распределения при описании динамики дисперсной фазы (Рис. 6). Показано, что с соблюдением некоторых ограничений, такой подход допустим и может быть использован при моделировании в среде OpenFOAM [29].

В целом, в этом направлении выполнен большой объём вычислений по тестированию и адаптации трёхмерной численной модели закрученного потока газа с присутствием в нем дисперсной фазы для решения конкретных прикладных задач. Для широкого диапазона турбулентных течений были определены оптимальные, с точки зрения температурной стратификации потока, геометрические параметры входного и выходного сечений вихревой трубы.

Численное моделирование течения магмы по трещинам и каналам горных пород и проблемы магматического рудообразования

Образование большинства рудных месторождений связано магматическими процессами в земной коре. В этой связи центральное место в теории магматогенных гидротермальных месторождений занимает проблема математического моделирования формирования рудоносных флюидов, осаждения и дифференциации (перераспределения) компонентов в процессе их охлаждения [35, 36].

Сама магма представляет собой природную жидкость, обычно это силикатный расплав, обогащенный летучими компонентами (H₂O, CO₂, CO, H₂S и др.). Подвижность магмы, как и других жидкостей, определяется ее вязкостью, зависящей от химического состава и температуры. Последнее об-



Рис. 6. Вычислительная сетка модели трубы и распределение дисперсных частиц в трубе при наличии закрученного потока воздуха

стоятельство будет играть ведущую роль при дальнейшем изложении. Наименьшая вязкость присуща мантийным магмам с малым содержанием кремнезема (SiO₂), находящимся на достаточно большой глубине и имеющим высокую температуру — до 1600–1800 °C. Магмы, образовавшиеся за счет плавления вещества верхней континентальной коры при дегидратации минералов при температуре 700–600 °C максимально насыщены кремнеземом и обладают уже достаточно высокой вязкостью.

Прежде всего отметим, что течение магмы происходит в достаточно узких каналах, образованных трещинами горных пород, имеющих значительно более низкую температуру, чем магматический расплав. Обычно предполагается, что во вмещающих породах задан геотермальный вертикальный перепад температуры от 20 °C на верхней границе условной трещины и до 1500 °C — на нижней границе.

Характерные скорости движения магматического расплава при фильтрационном режиме определяются диапазоном от нескольких сантиметров до нескольких метров в год. С другой стороны, согласно расчетам, проведенным по полевым измерениям, скорость истечения ультраосновных магм по трещинам может достигать средней скорости 10 м/с. Отметим, что ультраосновными магматическими горными породами называют отряд магматических горных пород (ультрабазитов, гипербазитов), содержащих кремнезем (SiO₂) в пределах 30–45 %. Как правило, они содержат большое количество MgO.

Рассматривая процессы течения магматического расплава в трещинах горных пород, мы имеем дело с особенностями течения термовязких сред в каналах с интенсивным теплообменом. В соответствии с результатами предыдущих исследований в области термовязких сред, зависимость вязкости расплава от температуры в значительной мере определяет гидродинамические параметры потока. Следовательно, математические модели целесообразно строить, основываясь на связных уравнениях термогидродинамики с учетом этой зависимости.

Ранее, в работах [37–44] были рассмотрены особенности свободной конвекции в жидкостях, вязкость которых зависит от температуры в соответствии с аррениусовской кинетикой или вообще является немонотонной функцией. Здесь предполагается, что магма представляет собой однородную несжимаемую неньютоновскую жидкость со степенным законом вязкого трения Оствальда-де-Ваале. Сообразно данным работ [45, 46] вязкость магмы может быть представлена выражением:

$$\mu = \left[\mu_1 \exp\left(\frac{T_A}{T}\right) + \mu_2 \exp\left(\frac{T_B}{T - T_C}\right)\right] \times \\ \times \left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right\}^{\frac{n-1}{2}},$$

где μ_1 — вязкость магмы при температуре очага T_0 ; μ_2 — вязкость магмы при температуре застывания магмы T_C ; T_A — температура в ядре; T_B — температура застывшей магмы. Для представления о значениях рассматриваемых величин отметим, что в работах [47–50] принимались следующие значения: $\mu_1 = 0.04, 0.4, 4, 40, 400, 4 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^4$; $\mu_2 = 2$; $T_A = 6800 \,^\circ$ C; $T_B = 500 \,^\circ$ C; $T_C = 1040 \,^\circ$ C. Степенной показатель неньютоновских свойств жидкости можно принять, в соответствии с данными работы [51], равным n = 1.9, 2.4.

В рамках развития теории и методов гидродинамики термовязких жидкостей, а также для выполнения контракта с ООО «НН Технические сервисы», К.В. Моисеевым был решен ряд задач, связанных с течением базальтовой магмы в системе каналов, разделенных субвулканической камерой в условиях динамической дифференциации при формировании сульфидных руд в интересах месторождений ПАО «ГМК "Норильский никель"», в частности, для Курейского и Хараелахского интрузивов.

На рис. 7(*a*) представлены поля скорости потока магмы с обособлениями после прохождения количества магмы, равной 10 объемам выделенного участка субвулканической камеры. Имеет место установившийся ламинарный профиль. На рис. 7(б) приведено поле температуры потока магмы с обособлениями совместно с температурой вмещающих пород. После прохождения 10 объемов заметен разогрев вмещающих пород. На рис. 8 приведена объемная доля сульфидной (рис. 8(*a*)) и легкой (рис. 8(б)) фаз на выходе из субвулканической камеры. Из рис. 8(а) видно, что в конце камеры происходит увеличение объемной доли сульфидной фазы у подошвы субвулканической камеры, то есть наблюдается осаждение. На рис. 8(6)приведена объемная доля легкой фазы на выходе из нее, то есть в конце камеры происходит увеличение объемной доли сульфидной фазы у кровли субвулканической камеры. В начале камеры доли сульфидной и легкой фаз были равномерно распределены по сечению потока магмы.

Далее были рассмотрены задачи осаждения и всплытия соответствующих компонентов магмы. В процессе теплообмена с вмещающими породами магма охлаждается, что способствует выделению из состава магматического расплава компонентов в виде тяжёлых или лёгких фракций, образующих многофазную смесь дисперсных частиц. В целом, магму следует рассматривать как дисперсную систему, состоящую из дисперсионной фазы — базальтового расплава и дисперсной фазы — капель ликвированных сульфидов, более тяжелой силикатной жидкости, автолитов, ксенолитов, сростков и кристаллов оливина и других компонентов, включая летучие. Таким образом, следует подчерк-



Рис. 7. Поля скорости потока магмы с обособлениями (*a*) и температуры в потоке магмы с окружающими его вмещающими породами (*б*)

Многофазные системы



Рис. 8. Объемные доли сульфидной (а) и легкой (б) фаз на выходе из субвулканической камеры

нуть, что в составе дисперсной фазы может находится два или большее число компонентов, которые практически не смешиваются и химически не реагируют друг с другом. В поле силы тяжести происходит их разделение или, иначе говоря, дифференциация. При этом предполагается, что частицы дисперсной фазы движутся с равновесной скоростью, соответствующей скорости потока дисперсионной фазы. Скоростная неоднородность учитывается только в направлении вектора ускорения силы тяжести.

С целью описания процесса дифференциации фаз была разработана математическая модель, в основе которой лежат принципы механики многофазных сред. Модель многофазной смеси включает уравнения неразрывности и уравнения движения для дисперсионной, а также, для каждой компоненты дисперсионной, а также, для каждой компоненты дисперсной фазы. Кроме того, для определения распределения температурного поля принято во внимание уравнение внутренней энергии дисперсной системы в форме притока тепла или уравнение теплопроводности. Представленная модель динамики многофазной смеси позволяет рассчитать среднее содержание дисперсных частиц в единице объема.

Далее представлены результаты расчетов в случае открытого Курейского интрузива мощностью 1500 м, выходной канал которого расположен во фронтальной части интрузива на одной стороне с дайкой.

На рис. 9 приведены линии тока базальтовой магмы с обособлениями (рис. 9(*a*)), поле температуры в интрузиве и окружающих породах (рис. 9(*б*)), объемная доля обособлений (сульфидной фазы) в

горизонтальном сечении интрузива (рис. 9(в)), объемная доля обособлений (легкой фазы) в горизонтальном сечении интрузива (рис. 9(г)). Результаты даны для Курейского интрузива при наличии выходного канала.

Из рис. 9(*a*) видно, что течение базальтовой магмы с обособлениями имеет структуру, в соответствии с которой при наличии выходного канала во фронтальной части интрузива базальтовая магма прорывается к нему, а впоследствии течение охватывает все поперечное сечение интрузива. На некотором расстоянии от дайки поток магмы становится равномерным до достижения фронтальной границы, после чего поток базальтовой магмы разгоняется, устремляясь в выходной канал.

Из рис. 9(б) следует, что при течении горячей базальтовой магмы с обособлениями холодный интрузив интенсивно разогревается, а также происходит разогрев вмещающих интрузив пород.

Рис. 9(в) наглядно демонстрирует, что при течении смеси базальтовой магмы с малой долей обособлений (менее 0.01%) в камере интрузива наблюдается осаждение тяжелой сульфидной фазы в виде полосчатых структур с объемной долей содержания до 10⁻³ д. ед. или 0.1%.

На рис. 9(*г*) видно, что при течении смеси базальтовой магмы с малой долей обособлений (менее 0.01%) незначительное объемное содержание легкой фазы (10⁻⁵ д. ед. или 0.001%) наблюдается на периферии интрузива. В этом случае часть легкой фазы выносится с потоком базальтовой магмы.

Таким образом можно сделать вывод, что в открытых интрузивах возможен процесс дифференциации и образования рудоносных тел.



Рис. 9. Линии тока базальтовой магмы с обособлениями (*a*), поле температуры в интрузиве и окружающих породах (*б*), объемная доля обособлений (сульфидной фазы) в горизонтальном сечении интрузива при прохождении 1 объема (*в*), объемная доля обособлений в горизонтальном сечении интрузива при прохождении 10 объемов (*г*) для Курейского интрузива при наличии выходного канала

5. Заключение

Подводя итоги обзора можно сделать некоторые выводы.

Результаты исследований при решении задачи о взаимодействии источника звука со слоем звукопроницаемых сферических частиц представляет интерес с точки зрения идентификации данных измерений при акустической диагностике пузырьковых и капельных систем в технологических установках и для анализа последствий воздействия ультразвука и волн давления на экранирующие слои, состоящие из частиц дисперсной фазы, если гипотезы механики многофазных сред оказываются неприменимыми для описания физической модели рассматриваемого процесса. Изучение характеристик рассеяния позволит внести поправки на коэффициенты отражения и прохождения акустических волн при взаимодействии со слоем дисперсных частиц, а также оценить влияние звукопроницаемости частиц на энергию волн как отражённых от слоя, так и прошедших сквозь него.

Анализ научной литературы свидетельствует, что сложность процессов, происходящих в закрученных потоках, тем более при наличии дисперсной фазы такова, что для их описания необходимы численные модели, которые могли бы позволить с достаточной степенью точности учесть, как все особенности конструкции вихревых труб, так и гидродинамические и теплофизические особенности процесса течения в этих трубах. Например, было показано, что эффективность температурной стратификации в трубах Ранка в значительной степени определяется геометрическими параметрами входного и выходных сечений.

Аналогичным образом обстоит дело и с проблемой формирования рудных отложений. Методы математического моделирования при посредстве вычислительного эксперимента позволяют повысить точность прогнозирования локализации тех или иных рудных месторождений, образующихся при истечении магматического расплава.

Представленные работы выполнены в рамках государственного задания № 0246-2019-0052 и являются значительным вкладом в решение важных технических задач и развития новых технологий.

Список литературы

- [1] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Elsevier, 2004. 520 p. DOI: 10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5
- [4] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. DOI: 10.21662/mf52019.2.016
- [5] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101. DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [7] LAPACK Linear Algebra PACKage. https://netlib.sandia.gov/lapack/ (accessed: 24.10.2022).
- [8] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от коаксиальных сфер при внешнем воздействии. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020618862 от 05.08.2020 г. eLIBRARY ID: 43889013
- [9] Насибуллаева Э.Ш. Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3-4. С. 176-182. DOI: 10.21662/mfs2020.3.128
- [10] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, no 5. Pp. 3048-3058.
 DOI: 10.1121/1.423886
- [12] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 50–57. DOI: 10.21662/mfs2021.2.008
- [13] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 4. С. 383–398. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [14] Ranque GJ. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // Journal de Physique et Le Radium. 1933. V. 4. P. 112s-114s (in French).
- [15] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // Review of Scientific Instruments. 1947. V. 18. P. 108–113. DOI: 10.1063/1.1740893
- [16] Меркулов А.П. Вихревой эффект и его применение в технике. М.: Машиностроение, 1969. 182 с.
- [17] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // УФН. 1997. Т. 167, № 7. С. 665–687. DOI: 10.3367/UFNr.0167.199706е.0665
- [18] Калашник М.В., Вишератин К.Н. Циклострофическое приспособление в закрученных газовых потоках и вихревой эффект Ранка // ЖЭТФ. 2008. Т. 133, вып. 4. С. 935–947. eLIBRARY ID: 11517654
- [19] Усыченко В.Г. Эффект Ранка как явление самоорганизации // ЖТФ. 2012. Т. 82, вып. 3. С. 67–74. eLIBRARY ID: 20325506

- [20] Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // ДАН. 1997. Т. 354, № 4. С. 475–477. eLIBRARY ID: 25515403
- [21] Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // ТВТ. 1997. Т. 35, № 1. С. 157. eLIBRARY ID: 25515598
- [22] Леонтьев А.И. Способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (Труба Леонтьева). Патент на изобретение РФ № 2106581. Кл. МПК-6: F25B9/02.10.03.1998.
- [23] Леонтьев А.И. Газодинамические методы температурной стратификации (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 6–26. eLIBRARY ID: 25641770
- [24] Бурцев С.А., Леонтьев А.И. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // ТВТ. 2014. Т. 52, № 2. С. 310–322. DOI: 10.7868/S0040364413060069
- [25] Цветова Е.В., Ковальногов В.Н., Хахалев Ю.А. Моделирование и исследование процесса газодинамической температурной стратификации для повышения эффективности редуцирования природного газа // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2021. Т. 10, № 2(54). С. 54– 58. DOI: 10.46548/21vek-2021-1054-0010
- [26] Баширова К.И., Михайленко К.И. Трехмерное моделирование ударной трубы в пакете OpenFOAM // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 3. С. 621–626. eLIBRARY ID: 36476517
- [27] Mikhaylenko C.I. A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 72–78. DOI: 10.21662/mfs2021.2.010
- [28] Михайленко К.И. Исследование вычислительных сеток для моделирования динамики воздуха в канале вихревой трубы средствами пакета OpenFOAM // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 1. С. 56–66. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.5
- [29] Баширова К.И Моделирование осаждения закрученного потока разреженной гранулированной среды в цилиндрической области методом MP-PIC // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 144–148. DOI: 10.21662/mfs2021.3.017
- [30] Газизов Р.К., Лукащук С.Ю., Михайленко К.И. Разработка параллельных алгоритмов решения задач механики сплошной среды на основе принципа пространственной декомпозиции // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2003. Т. 4, № 1. С. 100–107. eLIBRARY ID: 42340448
- [31] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И., Хазиев Л.Х. Прямое численное моделирование эффекта Ранка // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2011) : Труды международной научной конференции, Москва. Москва: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. С. 539–547. eLIBRARY ID: 22641213
- [32] Михайленко К.И. Зависимость перераспределения температуры в вихревой трубе от геометрии завихрителя // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 174–179. DOI: 10.21662/uim2017.2.026
- [33] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: Outlet parameter dependencies of cold air production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158, Issue 3. 032032. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032032
- [34] Михайленко К.И., Валеева Ю.Р. Моделирование осаждения мелкодисперсной взвеси из воздуха при прохождении волн давления // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 3. С. 328–333. eLIBRARY ID: 21014483

- [35] Радько В.А. Модель динамической дифференциации интрузивных траппов северо-запада Сибирской платформы // Геология и геофизика. 1991. № 11. С. 19–27.
- [36] Радько В.А. Фации интрузивного и эффузивного магматизма Норильского района. СПб.: Картографическая фабрика ВСЕ-ГЕИ, 2016. 226 с.
- [37] Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 4(24). С. 51–59. eLIBRARY ID: 9484545
- [38] Кулешов В. С., Моисеев К. В., Хизбуллина С. Ф., Михайленко К. И., Урманчеев С. Ф. Особенности конвективных течений аномально термовязкой жидкости // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 5. С. 16–26. eLIBRARY ID: 29255015
- [39] Кулешов В. С., Моисеев К. В., Урманчеев С. Ф. Периодические структуры при конвекции аномально термовязкой жидкости // Вестник БашГУ. 2017. Т. 22. № 2. С. 297–302. eLIBRARY ID: 29729319
- [40] Моисеев К. В., Хизбуллина С. Ф., Бахтизин Р. Н., Урманчеев С. Ф., Кулешов В. С., Алфёров А. В. Математические модели термогравитационной конвекции неоднородной жидкости // Нефтегазовое дело. 2017. Т. 15. № 2. С. 165–170. eLIBRARY ID: 29931683
- [41] Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Изолированные режимы течений при конвекции аномально термовязкой жидкости в плоской ячейке // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 484–494. DOI: 10.1134/S0032823519030093
- [42] Kuleshov V. S., Moiseev K. V., Urmancheev S. F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54, P. 983--990. DOI: 10.1134/S0015462819070097
- [43] Кулешов В. С., Моисеев К. В. Конвекция термовязкой жидкости в ячейке, подогреваемой сбоку // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 67–72. DOI: 10.21662/mfs2019.1.010

- [44] Moiseev K. V., Kuleshov V. S., Bakhtizin R. N. Free convective of a linear heterogeneous liquid in a square cavity at side heating // SOCAR Proceedings. 2020. №.4, P. 108–116. DOI: 10.5510/OGP20200400472
- [45] Титов В.В., Федотов С.А. Математическое моделирование подъема вязкой магмы по вертикальной дайке. Препринт ИАЭ-3470/16. М.: ИАЭ, 1981. 24 с.
- [46] Kaddiri M., Naimi M., Raji A., Hasnaoui M. Thermal convection within a square cavity filled with non-newtonian power-law fluids and differentially heated with uniform heat fluxes // International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology. 2010. No. 8(88). P. 57–69. eLIBRARY ID: 15632654
- [47] Михайлова-Филиппова М.И., Федотов С.А Теплообмен потока магмы со стенками трещины-дайки: математическая модель и алгоритм расчета // Вулканология и сейсмология. 1994. № 6. С. 17-23.
- [48] Федотов С.А., Михайлова-Филиппова М.И. Течение магм в дайках разной мощности (по данным математического моделирования при вязкости, зависящей от температуры) // Вулканология и сейсмология. 1994. № 6. С. 24–43.
- [49] Михайлова Филиппова М.И., Федотов С.А. Течение магмы по цилиндрическому каналу, питающему вулкан: математическая модель // Вулканология и сейсмология. 1996. № 6. С. 20– 30.
- [50] Федотов С.А., Михайлова–Филиппова М.И. Непрерывное течение магмы с убывающим расходом по цилиндрическому каналу, питающему вулкан: условия длительного существования // Вулканология и сейсмология. 1997. № 1. С. 3–16.
- [51] Babeyko A.Y., Sobolev S.V., Trumbull R.B., Oncken O., Lavier L.L. Numerical models of crustal scale convection and partial melting beneath the Altiplano-Puna plateau // Earth Planet. Sci. Lett. 2002. V. 199. P. 373–388. DOI: 10.1016/S0012-821X(02)00597-6

ISSN 2658-5782

17 (2022), **1-2**, 97-**112**



Multiphase Systems



http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.008 DOI:10.21662/mfs2022.1.008

Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

Dispersed media: scattering of sound waves, stratification in swirling flows and sedimentation processes

Urmancheev S.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

A brief review on three problems from the multiphase media mechanics area related to the study of the dynamic behavior of disperse systems under various conditions and methods of interaction with external fields or the environment is presented. The problems are an integral part of the scientific project «Hydrodynamic effects in multiphase and thermoviscous media under wave and thermal effects». The review is carried out in the context of the vector of development of modern research in the relevant areas. As a part of solving the problem of acoustic wave scattering by a set of spherical bubbles or drops, taking into account their sound permeability, the fast multipole method was developed to expand the possibilities of its application in the considered cases. On the basis of addition theorems for spherical wave functions, a new formula for the total scattering cross section for a set of interacting sound-permeable spheres arbitrarily located in space is obtained. An important aspect of the research was the estimation of the region in the parameter space of the problem, in which the effects of multiple scattering are significant. The second problem is related to mathematical modeling of a swirling turbulent flow containing particles of a dispersed phase. For numerical studies of temperature stratification in a vortex tube, an algorithm and a computer code were created using an orthogonalized finite-volume mesh with separation of the near-wall layer. A number of parametric studies have been carried out, in particular, the dependence of the temperature of the outgoing air in the cold diaphragm channel depending on the diameter of the diaphragm has been considered. In order to increase the efficiency of geological exploration in solving the third problem for describing the process of magmatic ore formation, a system of equations based on the methods of mechanics of multiphase media and thermohydrodynamics is proposed. The mathematical model provides for the heat exchange of the magmatic melt flow with the surrounding host rocks, as well as the release of heavy and light fractions from basaltic magma during its cooling. The results obtained in the course of the computational experiment indicate the possibility of a periodically inhomogeneous nature of the distribution of ore-forming fractions.

Keywords: acoustic scattering, system of sound-permeable spheres, temperature stratification, energy separation, cyclostrophic adaptation, igneous ore formation, differentiation

References

- Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. [Osnovy akustiki] Basics of acoustics. Kiev: Naukova Dumka, 2009. 867 p. (in Russian).
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Elsevier, 2004. 520 p. DOI: 10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5
- [4] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in

Russian). DOI: 10.21662/mfs2019.2.016

- [5] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University*) [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93– 101 (in Russian). DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293
- [6] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye texnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian). DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003

- [7] LAPACK Linear Algebra PACKage. https://netlib.sandia.gov/lapack/ (accessed: 24.10.2022).
- [8] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from coaxial spheres under external action]. Certificate of state registration of the computer program No. 2020618862 (publ.: 05.08.2020) (in Russian). eLIBRARY ID: 43889013
- [9] Nasibullaeva E.Sh. [Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 176–182 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.3.128
- [10] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.
 DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, no 5. Pp. 3048-3058.
 DOI: 10.1121/1.423886
- [12] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 2. Pp. 50–57 (in Russian).
 DOI: 10.21662/mfs2021.2.008
- [13] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set of sound-permeable spheres in 3d space] // Vychislitel'naya mexanika sploshnyx sred [Computational Continuum Mechanics]. 2022. V. 15, No. 4. Pp. 383–398 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [14] Ranque GJ. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // Journal de Physique et Le Radium. 1933. V. 4. P. 112s–114s (in French).
- [15] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // Review of Scientific Instruments. 1947. V. 18. P. 108–113. DOI: 10.1063/1.1740893
- [16] Merkulov А.Р. Меркулов А.П. Vortex effect and its application in technology M.: Mashinostroenie, 1969. 182 p. (in Russian)
- [17] Gutsol A.F. The Ranque effect // Physics-Uspekhi. 1997. V. 40, No 6. Pp. 639-658.
 DOI: 10.1070/PU1997v040n06ABEH000248
- [18] Kalashnik M.V., Visheratin K.N. Cyclostrophic adjustment in swirling gas flows and the Ranque–Hilsch vortex tube effect // J. Exp. Theor. Phys. 2008. V. 106. Pp. 819–829. DOI: 10.1134/S1063776108040225
- [19] Usychenko V.G. The Ranque effect as a self-organization phenomenon // Tech. Phys. 2012. V. 57. Pp. 379–385 DOI: 10.1134/S1063784212030164
- [20] Leont'ev A.I. Temperature stratification of supersonic gas flow // Physics. Doklady. 1997. V. 42, No 6. Pp. 309–311. eLIBRARY ID: 25515403
- [21] Leont'ev A.I. Gas-dynamic method of energy separation of gas flows // High Temperature. 1997. V. 35, No 1. Pp. 155–157. eLIBRARY ID: 25515598
- [22] Leont'ev A.I. The method of temperature stratification of gas and a device for its implementation (Leont'ev's pipe). Patent Russian Federation No 2106581.
- [23] Leont'ev A.I. Gas-dynamic methods of temperature stratification (a review) // Fluid Dynamics. 2002. V. 37, No 4. Pp. 512–529. DOI: 10.1023/A:1020629000437

- [24] Burtsev S.A., Leontiev A.I. Study of the influence of dissipative effects on the temperature stratification in gas flows (Review) // High Temp. 2014. V. 52. Pp. 297–307. DOI: 10.1134/S0018151X13060060
- [25] Tsvetova E.V., Kovalnogov V.N., Khakhalev Yu.A.Modeling and research of the process of gas dynamic temperature s tratification to increase the efficiency of reducing natural gas // Bulletin of Ulyanovsk University. 2021. V. 10, No 2(54). Pp. 54–58. DOI: 10.46548/21vek-2021-1054-0010
- [26] Bashirova K.I., Mikhaylenko K.I. Three-dimensional simulation of a shock tube with OpenFOAM software Vestnik Bashkirskogo Universiteta. 2018. V. 23, No 3. Pp. 621–626. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2018.3.8
- [27] Mikhaylenko C.I. A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 72–78. DOI: 10.21662/mfs2021.2.010
- [28] Mikhaylenko K.I. Investigation of computational meshes for modeling the air dynamics in a vortex tube channel by Open-FOAM software. Computational Continuum Mechanics. 2022. V. 15(1). Pp. 56–66. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.5
- [29] Bashirova K.I. Simulation of the sedimentation of a swirling flow of a rarefied granular medium in a cylindrical region by MP-PIC method. Multiphase Systems. 2021. V. 16(3–4). Pp. 144– 148 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.3.017
- [30] Gazizov R.K., Lukashuk S.Yu., Mikhaylenko C.I. Development of parallel algorithms for solving problems of continuum mechanics based on the domain decomposition method [Razrabotka parallel'nyx algoritmov resheniya zadach mexaniki sploshnoj sredy na osnove principa prostranstvennoj dekompozicii] // Bulletin of UGATU. 2003. V. 4, No 1. Pp. 100– 107. (in Russian) eLIBRARY ID: 42340448
- [31] Marin D.F., Mikhaylenko C.I., Khaziev L.Kh. The direct numerical simulation of the Ranque effect [Pryamoe chislennoe modelirovanie effecta Ranka] // Parallel numerical technology. Moscow. 2011. Pp. 539–547. eLIBRARY ID: 22641213
- [32] Mikhaylenko C.I. Dependence of the temperature distribution in the vortex tube on the geometry of the swirler. Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2017. V. 12(2). Pp. 174– 179. DOI: 10.21662/uim2017.2.026
- [33] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: Outlet parameter dependencies of cold air production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158, Issue 3. 032032. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032032
- [34] Mikhaylenko K.I., ValeevaYu.R. Highly Dispersed Medium Sedimentation from Air under Pressure Forces // Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie). 2013. V. 14. Pp. 328–333. eLIBRARY ID: 21014483
- [35] Radko V.A. Model of dynamic differentiation of intrusive traps in the northwest of the Siberian Platform [Model' dinamicheskoj differenciacii intruzivnyx trappov severo-zapada Sibirskoj platformy] // Russian Geology and Geophysics. 1991. No. 11. Pp. 19–27 (in Russian).
- [36] Radko V.A. The facies of intrusive and effusive magmatism in the Norilsk region. St. Petersburg: Cartographic factory of VSEGEI, 2016. 226 p.
- [37] Ilyasov A.M., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Numerical simulation of thermoconvection in a liquid for the case when viscosity is a quadratic function of temperature [Chislennoe modelirovanie termokonvekcii zhidkosti s kvadratichnoj zavisimosť yu vyazkosti ot temperatury] // Siberian Journal of Industrial Mathematics [Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki]. 2005. Vol. 8, No. 4(24). Pp. 51–59. eLIBRARY ID: 9484545

- [38] Kuleshov V. S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mikhaylenko K.I., Urmancheev S.F. The phenomena of convection anomalous thermoviscous fluid flow // Methamatical modelling. 2017. T. 29. № 5. C. 16–26. eLIBRARY ID: 29255015
- [39] Kuleshov V. S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Periodic structures during convection of an anomalously thermoviscous liquid // Bulletin of BashSU. 2017. T. 22. № 2. C. 297–302. eLIBRARY ID: 29729319
- [40] Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Bakhtizin R. N., Urmancheev S.F., Kuleshov V. S., Alferov A. V. Mathematical models of thermogravitational convection of an inhomogeneous fluid // Oil and gas business. 2017. T. 15. № 2. C. 165–170. eLIBRARY ID: 29931683
- [41] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Isolated convection modes for the anomalous thermoviscous liquid in a plane cell // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54, No. 7. C. 983–990. DOI: 10.1134/S0015462819070097
- [42] Kuleshov V. S., Moiseev K. V., Urmancheev S. F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54, P. 983--990. DOI: 10.1134/S0015462819070097
- [43] Kuleshov V. S., Moiseev K.V. Convection of a thermoviscous liquid in a cell heated from the side // Multyphase systems. 2019. V. 14, No 1. Pp. 67–72. DOI: 10.21662/mfs2019.1.010
- [44] Moiseev K. V., Kuleshov V. S., Bakhtizin R. N. Free convective of a linear heterogeneous liquid in a square cavity at side heating // SOCAR Proceedings. 2020. №.4, P. 108–116. DOI: 10.5510/OGP20200400472
- [45] Titov V.V., Fedotov S.A. Mathematical modeling of the ascent of viscous magma along a vertical dike [Matematicheskoe modelirovanie pod"yoma vyazkoj magmy po vertikal'noj dajke]. Preprint IAE-3470/16. Moscow: IAE, 1981. 24 p.

- [46] Kaddiri M., Naimi M., Raji A., Hasnaoui M. Thermal convection within a square cavity filled with non-newtonian power-law fluids and differentially heated with uniform heat fluxes // International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology. 2010. No. 8(88). P. 57–69. eLIBRARY ID: 15632654
- [47] Mikhailova-Filippova M.I., Fedotov S.A. Heat transfer of a magma flow with the walls of a fissure-dyke: a mathematical model and calculation algorithm [Teploobmen potoka magmy so stenkami treshchiny-dayki: matematicheskaya model' i algoritm rascheta] // Journal of Volcanology and Seismology. 1994. No. 6. Pp. 17–23 (in Russian).
- [48] Fedotov S.A., Mikhailova-Filippova M.I. Magma flow in dikes of different thickness (based on data of mathematical modeling with temperature-dependent viscosity) [Techenie magmy v dajkax raznoj moshchnosti (po dannym matematicheskogo modelirovaniya pri vyazkosti, zavisyashchej ot temperatury)] // Journal of Volcanology and Seismology. 1994. No. 6. Pp. 24–43 (in Russian).
- [49] Mikhailova-Filippova M.I., Fedotov S.A. Magma flow through a cylindrical channel feeding a volcano: a mathematical model [Techenie magmy po tsilindricheskomu kanalu, pitayushchemu vulkan: matematicheskaya model'] // Journal of Volcanology and Seismology. 1996. No. 6. Pp. 20–30 (in Russian).
- [50] Fedotov S.A., Mikhailova-Filippova M.I. Continuous flow of magma with decreasing flow through a cylindrical channel that feeds a volcano: conditions for long-term existence [Nepreryvnoe techenie magmy s ubyvayushchim raskhodom po tsilindricheskomu kanalu, pitayushchemu vulkan: usloviya dlitel'nogo sushchestvovaniya] // Journal of Volcanology and Seismology. 1997. No. 1. Pp. 3–16 (in Russian).
- [51] Babeyko A.Y., Sobolev S.V., Trumbull R.B., Oncken O., Lavier L.L. Numerical models of crustal scale convection and partial melting beneath the Altiplano-Puna plateau // Earth Planet. Sci. Lett. 2002. V. 199. P. 373–388. DOI: 10.1016/S0012-821X(02)00597-6

ISSN 2658-5782

Том 17 (2022), № 1-2, с. 113-121



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.009 DOI: 10.21662/mfs2022.1.009 УДК 123.45:57

Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

Динамика давления жидкости в трещине гидроразрыва при изменяющихся режимах работы скважины ¹

Шагапов В.Ш.*, Башмаков Р.А.**, Фокеева Н.О.*/***, Шамматова А.А.****

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа **Башкирский государственный университет, Уфа ***ООО «РН-БашНИПИнефть», Уфа

****Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

В настоящее время гидроразрыв пласта — один из наиболее эффективных методов интенсификации добычи углеводородов. В работе описываются переменные режимы работы скважины, устанавливается связь между изменяющимся расходом жидкости на скважине и давлением в трещине и пласте. Для этого находится решение интегро-дифференциального уравнения, описывающего изменение давления в трещине гидроразрыва пласта при известном изменении давления на скважине или по заданному дебиту.

По данным изменения давления на забое при непродолжительном включении насосов, поддерживающих постоянный дебит и последующего выключения насосов (П-образное изменение дебита), удобно определять характеристики трещины гидроразрыва пласта по формулам, предлагаемым в работе. Результаты работы могут быть использованы при гидродинамических исследованиях скважин.

Ключевые слова: гидроразрыв пласта, нефтяная скважина, дебит скважины, динамика давления в трещине ГРП, переменные режимы работы скважин

1. Введение

В настоящее время одним из основных способов интенсификации добычи углеводородов является гидроразрыв пласта (ГРП). Возникшие или расширившиеся существовавшие трещины при закачке расклинивающей жидкости, соединяясь между собой, становятся проводниками нефти или воды. Трещины связывают скважину с удаленными зонами пласта, расширяя достигаемую территорию и облегчая транспортировку нефти к скважине при извлечении жидкости или увеличивая отток флю-

- © Фокеева Н.О.
- © Шамматова А.А

ида от скважины при нагнетании. Созданные трещины закрепляются проппантом с целью предотвращения их смыкания после прекращения подачи жидкости под большим давлением. Моделирование процесса гидроразрыва и фильтрации жидкости в окрестности скважины с ГРП достаточно сложный процесс. Развитие вычислительной техники позволяет совершенствовать модели, однако современный уровень пока не позволяет отказаться от приближенного описания процессов или пренебрежения какими-либо из них.

В литературе, описываются различные методы создания трещин в нефтяных пластах (см. [1]).

В работе [1] А.С. Gringarten, H.J. Ramey Jr., а также статье Cinco L., Heber, Samaniego V., F., and N. Dominguez A. [2] выделяются различные периоды фильтрации по характеру изменения забойного давления, предлагается система дифференциальных уравнений, описывающая фильтрацию флюи-

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, https://rscf.ru/project/21-11-00207/

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Шагапов В.Ш.

[©] Башмаков Р.А.

да в трещине ГРП и пласте вокруг трещины. В статьях [2–6] описана работа скважины с вертикальной трещиной ГРП в режимах постоянного расхода или постоянного давления на скважине.

В представленной работе изучается распределение давления в вертикальной трещине ГРП при различных режимах работы скважины: при изменяющемся давлении на скважине и при изменяюшемся дебите скважины; установлена связь между динамикой расхода жидкости на скважине и давлением. Найдены точное аналитическое и приближенное аналитическое решения системы уравнений, описывающих фильтрацию флюида в трещине ГРП. Результаты работы сопоставлены с практическими данными, полученными на реальных скважинах. По данным изменения давления на забое при непродолжительном включении насосов, поддерживающих постоянный дебит и последующего выключения насосов (П-образное изменение дебита), удобно определять характеристики трещины ГРП по формулам, предлагаемым в работе.

2. Основные уравнения

В работах [2–6] приведена математическая модель, описывающая фильтрацию флюида из скважины в трещину ГРП и далее в пласт или из него в трещину и, затем, в скважину.

Рассматривается вертикальная нефтяная скважина. Параллельно оси скважины расположена трещина, полученная путем гидроразрыва пласта. Считается, что трещина симметрична, закреплена проппантом, препятствующим смыканию. Проницаемость трещины предполагается существенно более высокой, чем проницаемость пласта.

В силу симметричности данной задачи достаточно рассматривать одно крыло трещины. Направим ось *Ох* вдоль направления трещины, поместив



Рис. 1. Схема течения жидкости: (а) из скважины в трещину и из трещины в пласт; (b) вид сверху

начало отсчета на стенку скважины. Ось *Оу* определим перпендикулярно плоскости трещины, отсчет ведется от стенки трещины (Рис. 1).

Считаем пласт однородным, высота трещины h_f существенно больше ее ширины d_f , давление в трещине слабо изменяется с глубиной. Такая упрощенная модель позволяет отказаться от введения третьей пространственной координаты — глубины. Нижние индексы f, p при переменных означают, что рассматриваются значения, относящиеся к трещине и пласту соответственно, а индекс 0 используется для начального «невозмущенного» значения.

Пусть первоначальное давление в пласте и трещине равно P_0 , давление в трещине P_f , давление в пласте P_p :

$$\Delta P_i = P_i - P_0 \ (i = f, p) \,.$$

Заметим, что P_p есть функция координат x, y и времени $t, P_f - функция от x$ и t.

Для описания распределения давления в пласте и трещине запишем систему уравнений (см. [3–6]):

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} = \left. \mathfrak{a}_f \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\mathfrak{a}_p}{d_f} \left(\frac{\partial \Delta P_p}{\partial y} \right) \right|_{y=0}, \quad (1)$$
$$\left(0 < x < l_f \right).$$

$$\frac{\partial \Delta P_p}{\partial t} = \mathfrak{a}_p \frac{\partial^2 \Delta P_p}{\partial y^2}, \quad \left(0 < x < l_f, \ 0 < y < \infty\right)$$
(2)

где $\mathfrak{x}_i = \frac{k_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ — коэффициент пьезопроводности; k_i — коэффициент проницаемости; rho_0 плотность жидкости; C — скорость звука для флюида; m_i — пористость (i = p, f); μ — вязкость флюида; l_f — длина; d_f — ширина трещины.

Уравнение (1), описывающее фильтрацию флюида в трещине, отличается от классического уравнения пъезопроводности последним слагаемым, отвечающим за переток жидкости между пластом и трещиной ГРП.

Краевые условия запишем виде:

$$\Delta P_p \big|_{y=0} = \Delta P_f, \quad \Delta P_p \big|_{y\to\infty} = \Delta P_f \Big|_{y\to\infty} = 0.$$

Система уравнений (1)–(2) в работе [4] сводится к одному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial \Delta P_f}{\partial t} = \mathfrak{a}_f \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} - \frac{2m_p \mathfrak{a}_p}{m_f d_f} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \mathfrak{a}_p(t - \tau)}} \,.$$
(3)

Здесь считаем, что при $t \to -\infty$ система находится в покое, т.е.

$$\Delta P_f\Big|_{t=-\infty} = \Delta P_p\Big|_{t=-\infty} = 0.$$

Левая часть уравнения (3), отвечающая за упругоемкость флюида в трещине, несущественна (см. [5]).

Поэтому будем вместо (3) пользоваться упрощенным уравнением

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \chi \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \Delta P_f(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\pi (t - \tau)}}, \qquad (4)$$

где

$$\chi = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\varpi_p}}{\varpi_f}.$$

3. Точные аналитические решения для трещины бесконечной длины

В работе [5] приведено решение уравнения (4) для случая резкого изменения давления на фиксированную величину $\Delta P_{(w)} = \text{const}$ в некоторый момент времени т.

Рассмотрим решение (4) в предположении, что длина трещины бесконечна ($l_f = \infty$).

Пусть до момента времени т нефть в трещине и пласте находилась в покое:

$$\begin{split} \Delta P_f &= 0 \qquad (t < \mathfrak{r}, x > 0), \\ \Delta P_f &= \Delta P_{(w)} \qquad (t \geqslant \mathfrak{r}, x = 0). \end{split}$$

Если происходит нагнетание флюида в пласт через трещину, то $\Delta P_{(w)} > 0$. А если отбор флюида, то $\Delta P_{(w)} < 0$. Решение уравнения (4), описывающее распределение давления в трещине ГРП при приведенных условиях и удовлетворяющее условию $\Delta P_f \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, можно записать, согласно результатам работы [9], в виде

$$\Delta P_f = \Delta P_{f(w)} \operatorname{Gil} \left(\sqrt{\chi/2} \cdot x(t-\tau)^{-1/4} \right),$$

где

$$\operatorname{Gil}(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(z\eta^{1/4})}{\eta} e^{-\eta - z\eta^{1/4}} d\eta$$

На основе этого решения можно определить формулу для объемного расхода флюида в одном крыле трещины на единицу высоты трещины:

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left(\frac{\partial P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} =$$
$$= -\Delta P_{f(w)} \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \int_0^\infty e^{-(t-\tau)\xi^4} d\xi.$$

Отсюда

$$q = -rac{3.6}{\pi} \sqrt{rac{\chi}{2}} rac{d_f k_f}{\mu} rac{P_{f(w)}}{(t- au)^{1/4}}, \quad t > au$$

Рассмотрим теперь случай, когда давление на забое изменяется в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Считаем, что до момента времени τ_1 скорости течения жидкости и перепады давления в трещине и пласте равны нулю $v_f\Big|_{t<\tau_1} = 0, v_p\Big|_{t<\tau_1} = 0, \Delta P_f\Big|_{t<\tau_1} = \Delta P_{(w)0} = 0, P_p\Big|_{t<\tau_1} = 0.$ В момент времени τ_1 начинается работа скважины и давление на скважине, приняв значение $\Delta P_{(w)1}$, поддерживается постоянным до момента времени τ_2 . С момента времени τ_2 до момента времени τ_3 давление на скважине $\Delta P_{(w)2}$ и т. д.

Тогда решение, описывающее изменение давления в трещине может быть записано в виде

$$\Delta P_f(t,x) = \sum_{i=1}^n H(t-\tau_i) (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) \times$$

$$\times \operatorname{Gil}\left(\sqrt{\chi/2}x(t-\tau_i)^{-\frac{1}{4}}\right).$$
(5)

Здесь функция Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Далее, учитывая, что, согласно закону Дарси расход жидкости на единицу высоты трещины

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left(\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}$$

получим

$$q = -\frac{3.6}{\pi} \frac{d_f k_f}{\mu} \sqrt{\chi/2} \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) \times (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) (t - \tau_i)^{-1/4}.$$
(6)

То есть по формулам (5)–(6) можно, зная изменение давления на забое скважины, описать динамику давления в трещине ГРП и расход жидкости на скважине.

Пусть теперь до момента времени τ скважина и пласт находились в состоянии покоя. В момент времени τ начинается работа скважины в режиме поддержания постоянного расхода жидкости (q = const). В работе [5] приведено автомодельное решение уравнения (4) для этого случая:

$$\Delta P_f = -\frac{q\mu(t-\tau)^{1/4}}{d_f k_f \sqrt{\chi/2}} \cdot \operatorname{Zil}(z), \qquad (7)$$
$$z = \sqrt{\chi/2} \cdot x(t-\tau)^{-1/4}, \ (t \ge \tau),$$

где специальная функция ${
m Zil}(z)$ определяется, как

$$\operatorname{Zil}(z) = \int_{z}^{+\infty} \operatorname{Gil}(\zeta) \, d\zeta$$

Подставляя в выражение (7) значение x = 0, получим закон изменения перепада давления на скважине

$$\Delta P_{(w)} = \frac{\text{Zil}(0) \, q\mu}{d_f k_f \sqrt{\chi/2}} (t - \tau)^{1/4}.$$

Используя линейность уравнения (4), мы можем обобщить полученные выражения для ΔP_f и $\Delta P_{f(w)}$ на случай, когда дебит принимает постоянные значения q_1, q_2, \ldots, q_n в промежутках времени $[\tau_1, \tau_2), [\tau_2, \tau_3), \ldots, [\tau_n, \infty)$:

$$\begin{split} \Delta P_f(t,x) &= -\frac{\mu}{d_f k_f \sqrt{\chi/2}} \times \\ &\times \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{H}(t-\tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t-\tau_i)^{1/4} \right) \\ &\times \operatorname{Zil}(\sqrt{\frac{\chi}{2}} x (t-\tau_i)^{-1/4}) \right). \end{split}$$

 $\Delta P_f(t,x)$ — давление в трещине ГРП. Величину q_0 считаем равной нулю.

Для перепада давления между значениями забоя скважины и пластом $\left(\Delta P_{f(w)} = \Delta P_f(t,0)\right)$ получим

$$\Delta P_{f(w)} = \frac{-\mu \operatorname{Zil}(0)}{d_f k_f \sqrt{\chi/2}} \times \left(\sum_{i=1}^n (t - \tau_i)^{1/4} \operatorname{H}(t - \tau_i)(q_i - q_{i-1}) \right).$$
(8)

Подставим в (8) выражение для χ из (4), тогда:

$$\Delta P_{f(w)} = -\operatorname{Zil}(0) \frac{\mu^{3/4} \rho_0^{1/4} C^{1/2}}{d_f^{1/2} k_f^{1/2} m_p^{1/4} k_p^{1/4}} \times \left(\sum_{i=1}^n (t - \tau_i)^{1/4} \mathrm{H}(t - \tau_i)(q_i - q_{i-1}) \right).$$

Для практических целей можно брать значение ${
m Zil}(0)=0.78$ (см. [4, 5]).

Приближенные аналитические решения, полученные с помощью метода последовательной смены стационарных состояний для трещины бесконечной длины

Согласно методу последовательной смены стационарных состояний (ПССС) [7] уравнение (2) решается приближенно в предположении, что пласт в каждый момент времени условно разделен на «возмущенную» и «невозмущенную» зоны. В невозмущенной зоне давление считается равным первоначальному. Расстояние l от трещины до границы невозмущенной зоны определяется количеством жидкости, перетекшей из трещины в пласт, $t > \tau$, где τ — время начала работы скважины.

$$l_p = \sqrt{2\varpi_p(t-\tau)}$$
.

При этом в невозмущенной зоне решается уравнение установившейся фильтрации, т.е. считаем что давление в пласте определяется линейной функцией по координате *у*:

$$\Delta P_p = -\Delta P_f \frac{y}{l_p}, \qquad t \ge \tau.$$
(9)

В (9) время *t* входит как параметр.

В уравнении (1) для задач, имеющих наибольший практический интерес, можно пренебречь слагаемым в левой части, отвечающим за упругоемкость жидкости в трещине, также как мы это сделали в разделе 2. То есть вместо (1) будем рассматривать уравнение

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = -\frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\varpi_p}{\varpi_f} \left(\frac{\partial \Delta P_p}{\partial y} \right) \right|_{y=0}$$

Откуда, учитывая (9) запишем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \frac{\chi}{\sqrt{2(t-\tau)}} \Delta P_f,
\chi = \frac{2}{d_f} \frac{m_p}{m_f} \frac{\sqrt{\varpi_p}}{\varpi_f}, \quad t \ge \tau.$$
(10)

Решая (4), получим

$$\Delta P_f = C_1 \exp\left(-x\sqrt{\chi/\sqrt{2(t-\tau)}}\right) + C_2 \exp\left(x\sqrt{\chi/\sqrt{2(t-\tau)}}\right),$$
(11)

где $t \ge \tau$, $0 < x < l_f$, l_f — длина трещины; C_1 и C_2 — произвольные константы.

Рассмотрим решение (11) в предположении, что длина трещины бесконечна $(l_f = \infty)$. Сравнение полученных в работе приближенных формул с полевыми испытаниями показывает, что предположение о бесконечной длине трещины для большинства реальных ГРП вполне допустимо и дает хорошо согласующиеся с практикой результаты.

Пусть до момента времени τ нефть в трещине и пласте находилась в покое ($v_p = v_f = 0$, $P_p = 0$, $P_f=0$). Тогда, из условия $P_f
ightarrow 0$ при $x
ightarrow \infty$, получим, что $C_2=0$, откуда

$$\Delta P_f = \Delta P_{f(w)} \exp\left(-x\sqrt{\chi/\sqrt{2(t-\tau)}}\right). \quad (12)$$

Здесь $P_{f(w)}$ — значение давления на скважине, установившееся в момент времени т.

Отсюда можем определить расход (дебит) нефти на единицу высоты трещины:

$$q = \frac{d_f k_f}{\mu} \left(\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} =$$

$$= -2^{1/4} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \frac{\Delta P_{f(w)}}{(t-\tau)^{1/4}}, \quad t > \tau.$$
(13)

Обобщим формулы (12) и (13) для случая, когда давление принимает кусочно-постоянные значения, изменяясь скачкообразно в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. Считаем, что скорости течения жидкости до момента времени τ_1 , и перепады давления в трещине и пласте равны нулю $(v_f|_{t<\tau_1} = 0, v_p|_{t<\tau_1} = 0, \Delta P_f|_{t<\tau_1} = \Delta P_{(w)0} = 0, P_p|_{t<\tau_1} = 0$. В момент времени τ_1 начинается работа скважины и давление на скважине, приняв значение $\Delta P_{(w)1}$, поддерживается постоянным до момента времени τ_2 . С момента времени τ_2 до момента времени τ_3 давление на скважине равно $\Delta P_{(w)2}$ и т.д.

Тогда решение, полученное методом ПССС, описывающее изменение давления в трещине, может быть записано в виде

$$\Delta P_f(t,x) = \sum_{i=1}^n H(t-\tau_i) \left(\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1} \right) \times \\ \times \exp\left(-2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \frac{x}{(t-\tau_i)^{1/4}} \right).$$

Дебит (расход) жидкости на единицу высоты трещины на скважине будет равен

Ed.k.

$$q = -2^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \frac{u_f \kappa_f}{\mu} \times \left(\sum_{i=1}^n H\left(t - \tau_i\right) \left(\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1} \right) \left(t - \tau_i\right)^{-1/4} \right)$$

Отсюда можно найти количество жидкости, извлекаемое из двух рукавов трещины высоты h_f :

$$V = 2h_f \int_{\tau_1}^t q(\tau) d\tau = 2^{1/4} \sqrt{\frac{\chi}{2}} \frac{d_f k_f}{\mu} \frac{4}{3} \times \left(\sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) \left(\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1} \right) (t - \tau_0)^{3/4} \right).$$

Рассмотрим далее работу скважины в режиме постоянного расхода. Исходное состояние пласта и трещины такое же, как и в предыдущем случае, расход жидкости при $t < \tau$ нулевой. Требуется определить эволюцию распределения давления в трещине P_f и закон изменения давления в скважине $\Delta P_{f(w)}$.

Из закона Дарси

$$q = \left. \frac{d_f k_f}{\mu} \left(\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x} \right) \right|_{x=0}, \qquad t > \tau \,.$$

Воспользуемся решением (11) уравнения (10). Т.к. $\Delta P_f \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, получаем, что $C_2 = 0$, и, используя (9), получаем что

$$\Delta P_f = -\frac{\mu q}{d_f k_f} \frac{1}{\sqrt{\chi / \sqrt{2(t-\tau)}}} \times \exp\left(-x \sqrt{\chi / \sqrt{2(t-\tau)}}\right).$$

Отсюда на скважине при x = 0

$$\Delta P_{f(w)} = -\frac{q\mu(t-\tau)^{1/4}}{2^{1/4}d_f k_f \sqrt{\chi/2}}$$

Используя линейность системы уравнений (1)–(2) можем обобщить полученные выражения для P_f и $P_{f(w)}$ на случай, когда дебит принимает постоянные значения q_1, q_2, \ldots, q_n в промежутках времени $[\tau_1, \tau_2), [\tau_2, \tau_3), \ldots, [\tau_n, \infty)$:

$$\Delta P_f = \frac{-\mu}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{\chi/2}} \times \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{H}(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{1/4} \times \right) \times \exp\left(-x \sqrt{\chi/\sqrt{2(t - \tau_i)}}\right).$$
(14)

Величину q_0 считаем равной нулю. Для перепада давления между значениями забоя скважины и пластом ($\Delta P_{f(w)} = \Delta P_f(t, 0)$) запишем

$$\Delta P_{f(w)} = \frac{-\mu}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{\chi/2}} \times \left(\sum_{i=1}^n (t - \tau_i)^{1/4} H(t - \tau_i)(q_i - q_{i-1}) \right).$$
(15)

В случае П-образного изменения расхода на скважине (Рис. 2), то есть когда расход в начальный момент времени t = 0 изменяется на величину q, а затем возвращается в момент времени τ к



Рис. 2. П-образное изменение дебита



Рис. 3. Изменение давления на скважине при П-образном изменении дебита



Рис. 4. Эволюция давления в трещине ГРП при П-образном изменении дебита

нулевому значению, получим из (11) формулу для определения изменения давления в трещине ГРП при $0 < t < \tau$:

$$\Delta P_f = \frac{-\mu}{d_f k_f \sqrt{\chi/\sqrt{2}}} q t^{1/4} \exp(-x \sqrt{\chi/\sqrt{2t}}),$$

при $t > \tau$:

$$\Delta P_f = -\mu q \left(t^{1/4} \exp(-x\sqrt{\chi/\sqrt{2t}}) - (t-\tau)^{1/4} \times \exp(-x\sqrt{\chi/\sqrt{2(t-\tau)}}) \right) / d_f k_f \sqrt{\chi/\sqrt{2}}.$$

Отсюда при *x* = 0 получаем закон изменения давления на скважине.

$$\Delta P_{f(w)} = \begin{cases} \frac{-\mu}{d_f k_f \sqrt{\chi/\sqrt{2}}} q t^{1/4}, & 0 < t < \tau, \\ \frac{-\mu}{d_f k_f \sqrt{\chi/\sqrt{2}}} q (t^{1/4} - (t - \tau)^{1/4}), & t \ge \tau. \end{cases}$$

Для параметров пласта и трещины определены следующие значения: $\rho_0 = 860 \text{ кг/m}^3$; $m_f = 0.1$; $\mu = 10^{-2} \text{ Па·с; } C = 1500 \text{ м/c; } k_p = 10^{-14} \text{ m}^2$; $m_p = 0.1$; $k_f = 10^{-10} \text{ m}^2$; $d_f = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

На Рис. 3 показано давление на скважине при П-образном изменении дебита (Рис. 2) до величины q = 1 в начальный момент t = 0 и возврата в значение 0 через 1 сутки. При П-образном изменении дебита образуется характерный зубец на кривой изменения давления. По величине зубца могут быть определены параметры трещины ГРП. На Рис. 4 показана эволюция давления в трещине ГРП при П-образном изменении дебита скважины, соответствующему Рис. 2. Кривая 1 соответствует моменту времени $\tau = 1/4$ сут.; кривая 2 - 1 сут.; кривая 3 - 1 сут. 2 часа.; кривая 4 - 2 суток.

Рассмотрим теперь двухступенчатый перепад расхода жидкости на скважине (Рис. 5). Пусть до момента времени t = 0 расход жидкости на единицу высоты трещины равен 0 в момент времени t = 0 вырастет на величину q_1 и поддерживается постоянным до момента времени τ , далее вновь поменяется до величины q_2 (Рис. 5). Тогда можно определить изменение давления в трещине на основе формулы (11). При $0 < t < \tau$:

$$\Delta P_f = \frac{-\mu q_1 t^{1/4}}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{\chi/2}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\chi}{\sqrt{2t}}}\right),$$

при $t > \tau$: $\Delta P_f = -\mu \left(q_1 t^{1/4} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\chi}{\sqrt{2t}}}\right) + (q_2 - q_1) \times (t - \tau)^{1/4} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\chi}{\sqrt{2(t - \tau)}}}\right)\right) / 2^{1/4} d_f k_f \sqrt{\chi/2}.$



Рис. 5. Двухступенчатое изменение расхода жидкости



Рис. 6. Изменение давления на скважине при двухступенчатом изменении расхода жидкости



Рис. 7. Эволюция давления в трещине ГРП при двухступенчатом изменении расхода жидкости

Найдем изменение давления на скважине:

$$\Delta P_{f(w)} = \begin{cases} \frac{-\mu q_0 t^{1/4}}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{\chi/\sqrt{2}}}, & 0 < t < \tau, \\ \frac{-\mu (q_1 t^{1/4} + (q_2 - q_1)(t - \tau)^{1/4})}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{\chi/\sqrt{2}}}, & t > \tau. \end{cases}$$

На Рис. 6 показана динамика давления на скважине при ступенчатом изменении дебита (Рис. 5), до величины q = 1 в начальный момент t = 0 и до величины q = 2 через 1 сутки. На Рис. 7 показана эволюция давления в трещине ГРП при ступенчатом изменении давления на скважине, соответствующему Рис. 5. Кривая 1 соответствует моменту времени $\tau = 1/4$ сут.; кривая 2 - 1 сут.; кривая 3 - 1 сут. 2 часа.; кривая 4 - 2 суток.

В случае, если имеются подобные изменения давления в начальный момент времени эксплуатации скважины и соответствующее изменение дебита, или есть значения давления и дебита после длительной работы скважины в режиме постоянного расхода и последующего резкого изменения режима работы, то с помощью формулы (12) можно определить параметры трещины ГРП.

Особенно удобно определять параметры трещины при П-образном изменении дебита скважины исходя из формулы (14).

Выразив величину χ и используя значения коэффициентов пьезопроводности из формул (1) и (2) получим

$$\chi = \frac{2\sqrt{k_p}\sqrt{m_p}\sqrt{\mu}}{C\sqrt{\rho_0}d_fk_f}$$

и из (14) найдем проводимость трещины:

$$d_f k_f = \frac{q^2 \sqrt{\tau}}{2 \left(\Delta P_{(w)}(\tau) \right)^2} \cdot \frac{\mu^{3/2}}{\sqrt{k_p}} \cdot \frac{C \sqrt{\rho}}{\sqrt{m_p}}$$

5. Сравнение с промысловыми данными

На Рис. 8 представлена кривая изменения дебита во времени для реальной промысловой скважины [9]. Для параметров скважины и пласта использованы следующие данные: $\mu = 0.00115$; $k_p = 10^{-15}$ м²; $m_p = 0.17$. Величины всех параметров, входящих в формулы, обычно являются известными, кроме проводимости трещины $d_f \cdot k_f$. Значение этого параметра можно определить из Побразного закона изменения дебита и соответствующего изменения давления на забое скважины.



Рис. 8. Промысловый дебит



Рис. 9. Сопоставление давления: исходных промысловых данных (красный), точные аналитические решения (зеленый), приближенные решения методом ПССС (синий)

На Рис. 9 приведено сопоставление исходного промыслового давления (красная кривая), результатов вычислений по точным аналитическим формулам (8) (зеленый пунктир) и приближенным методом ПССС (15) (синие точки). По первым значениям скачков дебита и соответствующим значениям реального давления на скважине предварительно была определена проводимость трещины по формуле (15).

6. Заключение

В результате работы получены точные и приближенные аналитические решения системы уравнений мало отличающиеся от точных, но более удобные с практической точки зрения. На основе этих выражений появляется возможность определить дебит или забойное давление при заданном законе изменения давления на забое или дебита скважины и эволюцию давления в трещине ГРП. Решения сопоставлены с практическими данными, полученными на реальных скважинах. Результаты работы могут быть применены для интерпретации данных гидродинамических исследований скважин и определения проводимости трещины ГРП.

Список литературы

- [1] Gringarten A.C., Henry J.R. Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Horizontal Fracture, Partial Penetration, or Restricted Entry // SPE J. 1974. V. 14. Pp. 413–426. DOI: 10.2118/3819-PA
- [2] Heber Cinco L., F. Samaniego V., N. Dominguez A. Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture // SPE J. 1978. V. 18. Pp. 253–264. DOI: 10.2118/6014-PA
- [3] Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2019. № 5. С. 6-14. DOI: 10.1134/S0568528119050050
- [4] Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 5. С. 121–130. DOI: 10.15372/PMTF20170512
- [5] Нагаева З.М., Шагапов В.Ш. Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, № 3. С. 319–329. eLIBRARY ID: 29364383
- [6] Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование неустановившейся фильтрации жидкости в пласте с трещиной гидроразрыва // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 4. С. 116-125. DOI: 10.15372/PMTF20220412
- [7] Charnyi, I. A. Underground Hydrogasdynamics. Moscow, Gostoptekhizdat. 1963. (in Russian)
- [8] Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. приближенное решение задачи об упругом режиме фильтрации в трещине, находящейся в нефтяном пласте // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, No 1. C. 206-215. eLIBRARY ID: 42335233
- [9] Башмаков Р.А., Фокеева Н.О., Шагапов В.Ш. Давление и дебит при переходных режимах работы скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Прикладная математика и механика. 2022. Т. 86, Вып. 6. С. 998–1012. DOI: 10.31857/50032823522060017

ISSN 2658-5782

17 (2022), **1-2**, 113-121



Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.009 DOI:10.21662/mfs2022.1.009



Received: 19.04.2022 Accepted: 27.06.2022

Fluid Pressure Dynamics in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes

Shagapov V.Sh.*, Bashmakov R.A.**, Fokeeva N.O.*/***, Shammatova A.A.****

*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia **Bashkir State University, Ufa, Russia ***LLC "RN-BashNIPIneft", Ufa, Russia ****Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

At present, hydraulic fracturing is one of the most effective methods for intensifying hydrocarbon production. The paper describes the transient-well-operation modes of the well, establishes a connection between the changing fluid flow in the well and the pressure in the fracture and reservoir. With this purpose, a solution is found to the integro-differential equation that describes the change in pressure in the hydraulic fracture with a known change in pressure in the well or at a given flow rate.

Based on the bottomhole pressure change data for a short-term pump operation that maintains a constant flow rate and subsequent pump shutdown (Π -shaped flow rate change), it is convenient to determine the characteristics of a hydraulic fracture using the formulae proposed in the paper. The results of the work can be used in hydrodynamic studies of wells.

Keywords: hydraulic fracturing, oil well, flow rate, hydraulic fracture pressure dynamics, transient-well-operation modes

References

- Gringarten A.C., Henry J.R. Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Horizontal Fracture, Partial Penetration, or Restricted Entry // SPE J. 1974. V. 14. Pp. 413– 426. DOI: 10.2118/3819-PA
- [2] Heber Cinco L., F. Samaniego V., N. Dominguez A. Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture // SPE J. 1978. V. 18. Pp. 253–264. DOI: 10.2118/6014-PA
- [3] Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Unsteady Flow through a Porous Stratum with Hydraulic Fracture // Fluid Dynamics. 2019. V. 54. Pp. 594–602. DOI: 10.1134/S0015462819050057
- [4] Shagapov V.S., Nagaeva Z.M. On the theory of seepage waves of pressure in a fracture in a porous permeable medium // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2017. V. 58. Pp. 862–870. DOI: 10.1134/S0021894417050121
- [5] Nagaeva Z.M., Shagapov V.Sh. Elastic seepage in a fracture located in an oil or gas reservoir // Journal of Applied Mathemat-

ics and Mechanics. 2017. V. 81, Issue 3. Pp .214-222. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.08.013

- [6] Khabibullin I.L., Khisamov A.A. Modeling of unsteady fluid filtration in a reservoir with a hydraulic fracture // J. Appl. Mech. Tech. Phy. 2022. V. 63. Pp. 652–660. DOI: https://doi.org/10.1134/S0021894422040125
- [7] Charnyi, I. A. Underground Hydrogasdynamics. Moscow, Gostoptekhizdat. 1963. (in Russian)
- [8] Shagapov V.S., Nagaeva Z.M. Approximate Solution of the Problem on Elastic-Liquid Filtration in a Fracture Formed in an Oil Stratum // J. Eng. Phys. Thermophy. 2020. V. 93. Pp. 201–209. DOI: 10.1007/s10891-020-02109-4
- [9] Bashmakov R.A., Fokeeva N.O., Shagapov V.SH. Some features of fluid filtration in a hydraulic fracture under transient conditions of well operation // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2022. V. 86, Issue. 6. Pp. 998–1012. (in russian) DOI: 10.31857/S0032823522060017



Многофазные системы



Принята: 20.02.2022

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.010.pdf

К юбилею Саида Федоровича Урманчеева



20 февраля 2022 года главному научному сотруднику ИМех УФИЦ РАН, заведующему лабораторией «Механика многофазных систем», доктору физико-математических наук, профессору, Заслуженному деятелю науки Республики Башкортостан, Председателю Башкирского отделения Российского акустического общества, члену Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, нашему доброму другу и коллеге Саиду Федоровичу Урманчееву исполнилось 70 лет.

Саид Федорович Урманчеев в 1975 году окон-

чил Московский энергетический институт (технический университет) по специальности «Динамика и прочность машин», квалификация инженер механик–исследователь. В 1975–1977 годах служил офицером в рядах Военно–воздушных сил Советской Армии.

Работу по специальности начал в 1977 году в Отраслевой лаборатории гибких трубопроводов Уфимского авиационного института (УГАТУ) на должности инженера, затем младшего научного сотрудника. Занимался расчетом гофрированных оболочек, устойчивостью гибких элементов конструкций газотурбинных двигателей, изучением амплитудно–частотных характеристик силовых компенсаторов сильфонного типа. Выполнил цикл исследований по анализу статистических свойств разнотолщинности листовых материалов, применяемых в авиационной промышленности, и влиянию этих свойств на процесс деформации материалов при обработке давлением.

С 1980 года перешел в Отдел физики и математики Башкирского филиала АН СССР, а после структурной реорганизации Отдела работал в Институте математики Башкирского научного центра Уральского отделения АН СССР. Здесь были выполнены работы по применению численных методов к распространению ударных волн в твёрдых телах с учётом физико-химических превращений. Рассмотрены задачи о распространении ударных волн в грунте, численном моделировании детонации конденсированных взрывчатых веществ, откольном разрушении стальных толстостенных цилиндров при воздействии скользящей детонации и установлены особенности схождения откольных колец. По материалам этих исследований была подготовлена кандидатская диссертация.

В 1990 году был переведён в Институт механики многофазных систем Сибирского отделения

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

РАН (г. Тюмень) для проведения исследований по распространению волновых процессов в насыщенных пористых средах. На основе уравнений механики многофазных сред была построена обобщенная математическая модель для классической задачи Френкеля-Био. При рассмотрении линеаризованных уравнений было получено дисперсионное соотношение для распространения линейных волн в двухфазных системах. В частных случаях при предельных переходах из полученного соотношения следовали: формула Вуда для вычисления скорости звука в гомогенной смеси в длинноволновом приближении, формула для определения «замороженной» скорости звука в коротковолновом приближении, а также другие известные формулы. Было получено также фундаментальное неравенство, характеризующее связь между произведением значений скоростей распространения быстрой волны и медленной волны, с одной стороны, и произведением скоростей распространения звука в материалах фаз, с другой стороны. Численные исследования по разработанной модели позволили установить механизм возникновения и природу быстрой и медленной волн в пористых средах с различными физико-механическими и реологическими свойствами, насыщенных жидкостью или газом при воздействии на них ударных волн и волн конечной амплитуды.

В 1992 году Саид Федорович поступил на работу старшим преподавателем в Башкирский государственный университет на кафедру механики сплошных сред математического факультета. С 1993 года работает в должности доцента, а с 2006 года — в должности профессора той же кафедры.

С 1993 года Саид Федорович Урманчеев работает в Институте механики Уфимского научного центра РАН (УНЦ РАН) в должности старшего научного сотрудника, продолжая преподавательскую деятельность в университете. С февраля 2000 года назначен заведующим лабораторией «Механика многофазных систем». В мае 2001 года избран по конкурсу на должность заместителя директора Института по научной работе, а в июле 2003 года назначен исполняющим обязанности директора Института. 20 декабря 2005 года избран на должность директора ИМех УНЦ РАН. С 2006 года по 2017 год был директором ФГБУН «Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра Российской академии наук», а с февраля 2017 года — главный научный сотрудник, заведующий лабораторией «Механика многофазных систем» того же института, а после реорганизаци — Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской

академии наук (ИМех УФИЦ РАН).

С 1993 года в ИМех УФИЦ РАН до настоящего времени им был выполнен цикл исследований по гидрогазодинамике течений с физико– химическими превращениями, математическому моделированию технологических процессов и по гидродинамике термовязких сред. В частности:

- разработана математическая модель течения реагирующего газа в канале при наличии диффузионного погранслоя и методика расчета блочных катализаторов сотового типа, применяемых для систем очистки отходящих газов;
- установлены закономерности течения вязкой жидкости сквозь искривлённый слой пористой среды насыпного типа; получена формула для оценки толщины пограничного слоя в пористой среде;
- изучено влияние сжимаемости частиц дисперсной фазы двухфазной смеси на их группирование при воздействии вибраций;
- разработана макрокинетическая модель изменения вязкости нефтяных дисперсных систем и установлено её соответствие феноменологическим моделям классической реологии;
- впервые установлены закономерности течения жидкостей с локальной температурной аномалией вязкости, предложено объяснение самопроизвольного перекрытия сечения канала теплообменника при расслоенном течении жидкой серы;
- разработана математическая модель взаимодействия потока реагирующего газа с мелкодисперсным катализатором; на основе результатов вычислительного эксперимента предложена схема возможных конструктивных изменений подачи реагентов для дожигания остаточного кислорода в рабочей камере лифтреактора с целью предотвращения образования фенолов и выброса их в атмосферу;
- выполнены численные исследования для определения условий эффективного смешения реагентов в модели турбулентного реактора для процесса полимеризации бутадиена с использованием титанового катализатора;
- определена роль межфазных взаимодействий при распространении волны детонации стехиометрической газовой смеси в инертной пористой среде;

- разработан алгоритм вычислительного эксперимента и проведены численные исследования полимеразно-цепной реакции амплификации ДНК в конвективной ячейке Рэлея-Бенара; определены параметры конвективной ячейки для эффективного осуществления реакции;
- получена система уравнений для исследования гидродинамической устойчивости термовязких жидкостей в неоднородном по сечению температурном поле, фактически являющихся обобщением классического уравнения Орра-Зоммерфельда. Определены критические значения числа Рейнольдса как функции параметра, характеризующего экспоненциальную или линейную зависимость вязкости от температуры. При численном исследовании построены спектры собственных значений полученной системы уравнений.

Саидом Федоровичем Урманчеевым был выполнен цикл работ в области приложения методов гидродинамики многофазных сред в технологических процессах с целью повышения их эффективности в рамках совместных исследований в ГУП Институт нефтехимпереработки Республики Башкортостан. Эти работы были востребованы на промышленных предприятиях нефтегазовой отрасли Республики Башкортостан.

Список научных, научно-методических и научно-популярных работ Саида Федоровича Урманчеева насчитывает свыше 200 публикаций, в том числе 50 статей, в изданиях, индексируемых в базах WoS и SCOPUS или включенных в перечень ВАК, а также имеет 5 патентов на изобретения.

Саид Федорович Урманчеев принимал активное участие в работе многих важнейших Российских и Международных конференций по механике: Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (1986, 2006, 2011, 2015, 2019); Российской национальной конференции по теплообмену (1994, 2006); Международного конгресса по теоретической и прикладной механике (ІСТАМ-2012); Международных конференций по многофазным потокам (ICMF 2013, 2016); Международных и Европейских симпозиумов по волнам и вихрям (Vortices and Waves, 2011; Waves in Fluids, 2013; Fluxes and Structures in Fluids, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015); Международной конференции по вычислительным методам в науке и технологиях (ICCMSE-2017) и других конференциях, общей численностью свыше пятидесяти научных мероприятий.

В качестве члена Российского национального

комитета по теоретической и прикладной механике и Председателя Башкирского отделения Российского акустического общества, Саид Федорович Урманчеев за период времени с 2000 год по 2021 год был организатором 23-х Российских и Международных научных конференций под эгидой Минобрнауки РФ, Президиума РАН, ОЭММПУ РАН и EUROMECH. В частности, был председателем оргкомитета конференции «Динамика многофазных систем», (г. Уфа 2007, 2010, 2012), сопредседателем научно-технической конференции «Мавлютовские чтения» (г. Уфа, 2006, 2011, 2016), членом оргкомитета конференции «Вихри и волны в сложных средах» (г. Москва, 2008–2016).

Под руководством Саида Федоровича Урманчеева успешно защищены 7 кандидатских диссертаций (К.И. Михайленко, 1999; В.Н. Киреев, 2004; А.М. Ильясов, 2005; С.В. Лукин, 2007; С.Ф. Хизбуллина, 2007; К.В. Моисеев, 2009; Д.М. Балапанов, 2011). Все они продолжают научную работу в НИИ и ВУЗах Республики Башкортостан, Российской федерации и за пределами страны. В настоящее время он является научным руководителем 3-х аспирантов и научным консультантом 2-х соискателей степени доктора наук.

В настоящее время Саид Федорович Урманчеев является профессором кафедры Математического моделирования БашГУ и кафедры Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем УГАТУ. Им читаются курсы лекций «Механика сплошных сред», «Математические модели механики деформируемых твердых тел», «Гидродинамика» и спецкурсы по различным разделам механики многофазных сред. Им подготовлено более 50-ти дипломированных специалистов, магистров и бакалавров.

За многолетнюю и плодотворную работу в сфере науки и образования Саид Федорович Урманчеев награжден Почётной Грамотой Российской академии наук (2001), Почетной Грамотой Академии наук Республики Башкортостан (2012), Почетной Грамотой Министерства образования и науки Российской Федерации (2012), Благодарностью Президента Российской Федерации (2018), Почетной грамотой городского округа город Уфа Республики Башкортостан (2022) и др.

Коллектив журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляет своего коллегу, члена редколлегии журнала Саида Федоровича Урманчеева с юбилеем и желает ему прекрасного самочувствия, творческого вдохновения и активности, новых замечательных успехов на благо нашего Отечества!

Основные публикации

- Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчеев С.Ф. Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36. No 4. C. 87–96. eLIBRARY ID: 17358775
- Губайдуллин А.А., Дудко Д.Н., Урманчеев С.Ф. Воздействие воздушных ударных волн на преграды, покрытые пористым слоем //Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. № 3. С. 7–20. eLIBRARY ID: 13026371
- Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады Академии наук. 2004. Т. 396. № 2. С. 204–207. eLIBRARY ID: 17352428
- Киреев В.Н., Хизбуллина С.Ф., Урманчеев С.Ф. Моделирование течения слоя жидкой серы в канале теплообменника // Нефтегазовое дело. 2005. № 3. С. 333–338. eLIBRARY ID: 11790650
- Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 4(24). С. 51–59. eLIBRARY ID: 9484545
- Лукин С.В., Губайдуллин А.А., Урманчеев С.Ф. Закономерности отражения волн давления от твердых поверхностей, покрытых пористым слоем // Нефтегазовое дело. 2006. Т. 4. № 1. С. 35–40. eLIBRARY ID: 11790653
- Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф., Хизбуллина С.Ф., Кутуков С.Е. Моделирование течения реологически сложной нефти на начальном участке «горячего» трубопровода // Нефтегазовое дело. 2006. Т. 4. № 1. С. 259–262. eLIBRARY ID: 11790687
- Шагапов В.Ш., Султанов А.Ш., Урманчеев С.Ф. К решению задачи об отражении линейных волн в флюиде от насыщенного этим флюидом пористого полупространства // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 5(279). С. 16–26. eLIBRARY ID: 16515917
- 9. Мингалеев В.З., Захаров В.П., Ионова И.А., Мусин А.А., Урманчеев С.Ф., Берлин А.А., Монаков Ю.Б. Кинетическая неоднородность титанового катализатора при интенсификации перемешивания реакционной смеси в процессе полимеризации бутадиена // Высокомолекулярные соединения. Серия Б. 2008. Т. 50. № 12. С. 2174– 2180.

eLIBRARY ID: 11624822

 Ахтямов А.М., Урманчеев С.Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11. № 4(36). С. 19–24. eLIBRARY ID: 11673127

- Urmancheev S.F., Kireev V.N., Khizbullina S.F. Numerical simulation of thermoreversible polymer gel filtration // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2009. Vol. 58. P. 1025–1027. eLIBRARY ID: 18094756
- Шайдаков В.В., Урманчеев С.Ф., Полетаева О.Ю., Балапанов Д.М., Мусаев М.В., Шайдаков Е.В. Магнитодинамическая коагуляция механических примесей в потоке жидкости // Нефтегазовое дело. 2009. Т. 7. № 2. С. 134– 138. eLIBRARY ID: 17923760
- Балапанов Д.М., Урманчеев С.Ф. Роль межфазных взаимодействий при газовой детонации в инертной пористой среде // Письма в Журнал технической физики. 2010. Т. 36. № 13. С. 71–80. eLIBRARY ID: 16515917
- 14. Урманчеев С.Ф., Мингалеев В.З., Морозов Ю.В., Насыров И.Ш., Захаров В.П., Монаков Ю.Б. Оптимизация числа диффузор-конфузорных секций в турбулентном реакторе применительно к синтезу полимеров // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. 2012. Т. 55. № 7. С. 90–92. eLIBRARY ID: 17791717
- Moiseev K.V., Volkova E.V., Urmancheev S.F. Effect of convection on polymerase chain reaction in a closed cell // Procedia IUTAM. Cep. "IUTAM Symposium on Waves in Fluids: Effects of Nonlinearity, Rotation, Stratification and Dissipation"2013. P. 172–175. DOI: 10.1016/j.piutam.2013.04.022
- Khizbullina S.F., Urmancheev S.F. Oscillation regimes of dynamic parameters changing in couette flow of anomalous thermoviscous liquids // Procedia IUTAM. Cep. "IUTAM Symposium on Waves in Fluids: Effects of Nonlinearity, Rotation, Stratification and Dissipation"2013. P. 153–160. DOI: 10.1016/j.piutam.2013.04.019
- Моисеев К.В., Хизбуллина С.Ф., Бахтизин Р.Н., Урманчеев С.Ф., Кулешов В.С., Алфёров А.В. Математические модели термогравитационной конвекции неоднородной жидкости // Нефтегазовое дело. 2017. Т. 15. № 2. С. 165–170. eLIBRARY ID: 29931683
- Кулешов В.С., Моисеев К.В., Хизбуллина С.Ф., Михайленко К.И., Урманчеев С.Ф. Особенности конвективных течений аномально термовязкой жидкости // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 5. С. 16–26. eLIBRARY ID: 29255015
- Urmancheev S., Kireev V. The transient flow of liquid with non-monotonous temperature dependent viscosity in a plane channel // AIP Conference Proceedings. Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2017, ICCMSE 2017. 2017. P. 200009. DOI: 10.1063/1.5012485

125

- Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mikhaylenko K.I., Urmancheev S.F. Convective flows of anomalous thermoviscous fluid // Mathematical Models and Computer Simulations. 2018. Vol. 10. No. 4. P. 529–537. DOI: 10.1134/S2070048218040087
- Сапсай А.Н., Шарафутдинов З.З., Урманчеев С.Ф. Работоспособность бурильной колонны при строительстве подводных переходов трубопроводов методом наклонно направленного бурения // Нефтяное хозяйство. 2018. № 5. С. 88–93. DOI: 10.24887/0028-2448-2018-5-88-92
- Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчеев С.Ф. Изолированные режимы течений при конвекции аномально термовязкой жидкости в плоской ячейке // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 3. С. 484–494. DOI: 10.1134/S0032823519030093
- Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчеев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 3. С. 478–483. DOI: 10.1134/S003282351903007X
- Сапсай А.Н., Шарафутдинов З.З., Урманчеев С.Ф. Определение оптимального радиуса кривизны скважины для сооружения подводного перехода // Нефтяное хозяйство. 2019. № 2. С. 90–93.
 DOI: 10.24887/0028-2448-2019-2-90-93
- Шарафутдинов З.З., Урманчеев С.Ф., Исламов И.Р. Протаскивание трубопровода в скважину, построенную в осложненных горно-геологических условиях // Нефтяное хозяйство. 2019. № 11. С. 139–143.
 DOI: 10.24887/0028-2448-2019-11-139-143

- Kireev V., Nizamova A., Urmancheev S. The hydraulic resistance of thermoviscous liquid flow in a plane channel with a variable cross-section // Journal of Physics: Conference Series. 2019. P. 032014. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032014
- Шарафутдинов З.З., Урманчеев С.Ф., Капаев Р.А. Оценка готовности скважины к протаскиванию трубопровода при строительстве подводного перехода // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2020. Т. 10. № 5. С. 470–478. DOI: 10.28999/2541-9595-2020-10-5-470-478
- Шарафутдинов З.З., Исламов И.Р., Груздев В.А., Зотов В.О., Капаев Р.А., Урманчеев С.Ф. Оценка состояния ствола скважины для протаскивания трубопровода при сооружении подводных переходов // Нефтяное хозяйство. 2020. № 1. С. 96–101. DOI: 10.24887/0028-2448-2020-1-96-101
- Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of laminar-turbulent transition for the coolant flow in a plane heat-exchanger channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. T. 42. № 9. P. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249
- Garafutdinov R.R., Chemeris D.A., Sakhabutdinova A.R., Chemeris A.V., Moiseev K.V., Urmancheev S.F., Mikhaylenko C.I., Privalov L.Y. Convective polymerase chain reaction in standard microtubes // Analytical Biochemistry. 2022. Vol. 641. P. 114565. DOI: 10.1016/j.ab.2022.114565

ISSN 2658-5782



Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.011.pdf

Общественная и спортивная жизнь в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

Налобина Е.А., Насибуллаева Э.Ш., Юлмухаметова Ю.В., Сираева Д.Т., Валиев А.А., Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

1. Первичная профсоюзная организация ИМех УФИЦ РАН

Первичная профсоюзная организация (ППО) Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМех УФИЦ РАН) входит в состав Объединенной профсоюзной организации работников учреждений УФИЦ РАН, являющейся региональной организацией Профсоюза работников Российской академии наук. В текущем году Профсоюз работников РАН также отмечает 30-летие со дня образования. На базе ППО ИМех УФИЦ РАН постоянно действует профсоюзный комитет (рис. 1), в который входят председатель Совета молодых ученых (СМУ), ответственный за спортивный сектор в ИМех УФИЦ РАН, а также представители от администрации и научных сотрудников.

Председатели профкомитета ИМех УФИЦ РАН:

- **1993–1994 гг.** ведущий специалист по кадрам Сизова Галина Николаевна;
- 1995–2000 гг. главный научный сотрудник Жибер Анатолий Васильевич;
- 2001–2005 гг. ведущий программист Кенина Светлана Рюриковна;
- 2005–2011 гг. старший научный сотрудник Галимзянов Марат Назипович;

© Сираева Д.Т.



Рис. 1. Заседание профкома, 2021 год

- 2011–2022 гг. ведущий инженер по НТИ Налобина Елена Александровна;
- 2022 г.-наст. вр. старший научный сотрудник Насибуллаева Эльвира Шамилевна.

Профком ИМех УФИЦ РАН ведет свою работу по следующим направлениям.

Организационное. Организация, проведение и участие в профсоюзных и научно-практических мероприятиях и акциях, проводимых под эгидой Профсоюза работников РАН. В рамках этого направления проходили: в мае 2010 г. XV Поволжская Ассамблея профсоюза работников РАН (г. Казань, рис. 2(а)), в августе 2019 г. XXIV Сибирско-Поволжская ассамблея Профсоюза РАН (г. Красноярск, рис. 2(б)), в сентябре 2021 г. XXV Всероссийская ассамблея Профсоюза работников РАН (г. Санкт-Петербург—г. Сортавала, рис. 2(в)), активное участие в которых принимали председатели профкома нашего Института. Члены профкома делегируются на Съезды и конференции Профсоюза работников РАН, принимают участие в меропри-



Получена: 19.04.2022 Принята: 27.06.2022

[©] Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

[©] Налобина Е.А.

[©] Насибуллаева Э.Ш.

[©] Юлмухаметова Ю.В.

[©] Валиев А.А.

[©] Юлмухаметов А.А.



Рис. 2. XV Поволжская Ассамблея профсоюза работников РАН (а), XXIV Сибирско–Поволжская ассамблея Профсоюза РАН (б), XXV Всероссийская ассамблея Профсоюза работников РАН (в)

ятиях и акциях, направленных на повышение финансирования науки и устранение региональных дисбалансов в оплате труда научных работников. Представители профкома ИМех УФИЦ РАН входят в состав Ученого совета, комиссий по разработке Коллективного договора УФИЦ РАН, оценки результативности научной деятельности, конкурсов научных и творческих работ.

Коммуникативное. Взаимодействие с региональными органами власти, некоммерческими организациями и профсоюзными объединениями Республики Башкортостан. Содействие в налаживании контактов между профсоюзными организациями обособленных структурных подразделений УФИЦ РАН, Поволжского региона и центрального аппарата Профсоюза РАН. Взаимодействие со СМУ для решения насущных проблем и определения планов совместных действий для улучшения условий работы и правовой защиты сотрудников Института. Члены профкома принимают участие в выездных заседаниях и пленумах региональных организаций Профсоюза РАН.

Социальное. Консультации в решении вопросов по улучшению жилищных условий молодых ученых — претендентов на получение государственных жилищных сертификатов и при выделении квартир в ведомственном доме. Содействие в получении путевок на санаторно-курортное лечение для сотрудников и членов их семей, а также путевок в лагеря и санатории для детей членов профсоюза (до 2021 г.). Обеспечение детей сотрудников Института новогодними подарками. Поздравление и оказание материальной помощи пенсионерам ко Дню пожилого человека. Покупка абонементов в театры. Оказание материальной помощи нуждающимся сотрудникам. Финансовая помощь для спортивного сектора Института. Защита трудовых прав сотрудников Института.

Информационное. Распространение информации об акциях и мероприятиях Профсоюза РАН всероссийского и регионального уровня.

Культмассовое. Совместное со СМУ коллективное празднование Нового года, 23 февраля, 8 марта, участие в творческих конкурсах и концертах, а также проведение детского Новогоднего утренника (см. раздел 2). Проведение совместно с Объединенным комитетов профсоюзов УФИЦ РАН конкурсов фотографий и детских поделок и рисунков (рис. 3).

Спортивное. Участие в Спартакиадах, проводимых УФИЦ РАН, а также соревнованиях городского уровня (см. раздел 3). По мере необходимости осуществляется материальная помощь в покупке спортивного инвентаря для проведения соревнований и тренировок.



Рис. 3. Выставка-конкурс «Весенняя пора», 2018 год (а), выставка-конкурс для детей «Осенняя пора» и фотоконкурс «Мир глазами ученых», 2019 год (б)

2. Совет молодых ученых ИМех УФИЦ РАН

В ИМех УФИЦ РАН действует Совет молодых ученых, который входит в состав СМУ УФИЦ РАН. Членами СМУ являются аспиранты, молодые ученые со степенью кандидата наук до 35 лет и со степенью доктора наук до 40 лет.

Председатели СМУ ИМех УФИЦ РАН:

- **2008–2011 гг.** научный сотрудник Зарипов Дамир Мунзирович;
- 2011–2012 гг. старший научный сотрудник Лукин Сергей Владимирович;
- 2012–2017, 2018–2020 гг. научный сотрудник Юлмухаметова Юлия Валерьевна;
- 2017–2018 гг. научный сотрудник Утяшев Ильнур Мирзович;
- 2020 г.-наст. вр. научный сотрудник Сираева Дилара Тахировна.

Основными целями и задачами СМУ являются представление и защита интересов молодых ученых Института; содействие их квалификационному росту; улучшение организации труда и отдыха; помощь в решении социальных проблем; выдвижение и поддержка инициатив, направленных на закрепление молодых научных кадров.

СМУ ИМех УФИЦ РАН ведет свою работу по следующим направлениям.

Организационное. Организация мероприятий, направленных на повышение квалификации молодых специалистов. Участие в подготовке и проведении научных и образовательных мероприятий УФИЦ РАН. Оказание помощи молодым ученым в получении грантов на научные исследования. Председатель СМУ ИМех УФИЦ РАН входит в состав Ученого совета, профкома, жилищной комиссии ИМех УФИЦ РАН, комиссии по стимулирующим надбавкам, комиссии по определению победителей конкурсов научных работ молодых ученых ИМех УФИЦ РАН.

В 2021–2022 гг. молодые ученые ИМех УФИЦ РАН успешно повысили свою квалификацию на курсе «Английский язык для академических целей», реализованном АНО «Управляющая компания научно-образовательного центра РБ».

Ежегодно в ИМех УФИЦ РАН проводится конкурс докладов среди молодых ученых. Более старшие коллеги, а именно, заведующие лабораториями во главе с директором Института, выслушивают доклады участников о проделанной за год



Рис. 4. Конкурс молодых ученых, апрель 2019 года

работе, оценивают выступления. По итогам конкурса директор в торжественной обстановке вручает грамоты победителям и участникам конкурса (рис. 4). Данное мероприятие очень важно для молодых сотрудников, так как дает возможность показать свои работы более старшим коллегам, услышать конструктивную критику и/или похвалу в свой адрес, а также получить дополнительный опыт публичных выступлений.

Представители СМУ активно участвуют в организации Фестивалей академической науки, которые адресованы для старших школьников и студентов, проявляющих интерес к научному и техническому творчеству, но еще окончательно не определившихся с выбором будущей профессии. Так, 24 октября 2018 года в ИМех УФИЦ РАН прошли мероприятия в рамках Всероссийского фестиваля науки NAUKA 0+ при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ. Данное мероприятие посетили около 70 учащихся школ и студентов университетов Уфы. В октябре 2022 года в ИМех УФИЦ РАН в рамках Фестиваля науки УФИЦ РАН планируется организация научно-познавательных лекций ведущими учеными института, а также проведение научно-популярной викторины «Эрудит».

Коммуникативное. Взаимодействие со СМУ УФИЦ РАН для обмена информацией среди молодых ученых УФИЦ РАН, участие в конкурсах молодых ученых УФИЦ РАН и спортивных соревнованиях, в том числе и в совместных сборных, а также в рамках проведения мероприятий с целью привлечения талантливой молодежи в академические институты. Взаимодействие с профсоюзом по вопросам защиты прав и улучшений условий работы молодых сотрудников Института.

СМУ ИМех УФИЦ РАН активно поддерживает мероприятия, организатором которых является СМУ УФИЦ РАН. Наш молодой ученый Сираева Д.Т. является победителем V и VI конкурсов музыкального и танцевального исполнительства среди сотрудников учреждений УФИЦ РАН в номинациях «Вокальное исполнительство» и «Эстрадное вокаль-



Рис. 5. III Бал-выставка научных достижений молодых ученых, 2020 год

ное исполнительство» (2018, 2019 гг.). 8 февраля 2020 года в Колонном зале Министерства сельского хозяйства молодые сотрудники нашего института приняли участие в III Бале – выставке научных достижений молодых ученых, приуроченном к празднованию Дня российской науки. III Бал был поддержан Фондом президентских грантов как образовательный проект, состоящий из курса танцевальных занятий, лекций по истории костюма и этикета, а также итогового Конкурса научных работ в виде стендовой сессии. В танцевальной программе Бала участвовали 2 наших сотрудника: Алексеев А.Ю. и Рафикова Г.Р. (рис. 5 (вверху)). В конкурсе научных работ приняли участие: Юлмухаметова Ю.В., Низамова А.Д. и аспирант Фокеева Н.О. (рис. 5 (внизу)). Низамова А.Д. стала победителем в подсекции «Физика и механика».

Социальное. Представляет интересы молодых ученых в вопросах улучшения условий труда, жилищных вопросах и организации досуга.

Информационное. Распространяет информации о конкурсах, фондах, грантах, конференциях, школах и иных мероприятиях по поддержке научной молодежи.

Культмассовое. Ни один праздник (Новый год, 8 марта, 14 февраля, 23 февраля) не проходит без веселых конкурсов, шуток, сценок от членов СМУ. Молодые ребята всегда готовы организо-



Рис. 6. Встречаем 2018 год

вать любое мероприятие под предводительством председателя СМУ. В Новый год за праздничным столом всегда присутствуют Дед Мороз и Снегурочка, иногда и другие персонажи подключаются к празднику (рис. 6).

Не остаются без внимания и дети сотрудников Института. В 2019 году в первый раз в стенах Института был проведен Новогодний утренник для детей (рис. 7). Дед Мороз и Снегурочка увлекли детей веселыми играми, конкурсами, песнями. Дети с удовольствием рассказывали новогодние стихи и получали сладкие подарки от Деда Мороза.

Спортивное. Сотрудники СМУ ИМех УФИЦ РАН принимают активное участие в спортивных соревнованиях различного уровня, о чем более подробно будет изложено в следующем разделе. Один из молодых сотрудников официально назначается ответственным за спортивных сектор Института: Рахимов А.А. (до 2010 г.), Валиев А.А. (2011– 2021 гг.), Юлмухаметов А.А. (2021 г.–наст.вр.).



Рис. 7. Детский новогодний праздник, 2019 год

3. Спортивный сектор ИМех УФИЦ РАН

В ИМех УФИЦ РАН активно работает спортивный сектор, сотрудники Института являются активными участниками спартакиады УФИЦ РАН, а также спортивных соревнований, проводимых на городском, республиканском и всероссийском уровнях (рис. 8).

Спартакиады в УФИЦ РАН проводится ежегодно и включают в себя такие виды спорта, как волейбол, баскетбол, мини футбол, настольный теннис, плавание, дартс, стрельба из лука, арчери таг, шашки, шахматы. Основные цели Спартакиады укрепление здоровья, пропаганда здорового образа жизни, развитие корпоративного духа сотрудников. За многолетнюю практику разработан регламент для каждого вида спорта, соревнования проходят в личном и общекомандном зачетах с приглашением опытных судей и под наблюдением медицинских работников.

Каждый год проводится масштабная Спартакиада по Октябрьскому району г. Уфа «Спорт и здоровье». Наши сотрудники в составе команды УФИЦ РАН принимают в ней участие в следущих видах



Рис. 8. Спортивные достижения

спорта: легкоатлетический бег, волейбол, минифутбол, лыжные гонки. Наш Институт принимает активное участие в Спартакиаде на Кубок биосферного резервата «Башкирский Урал», которая традиционно проводится в селе Нугуш Мелеузовского района, а в соревнованиях участвуют более 10 команд со всей республики. Спартакиада включает в себя такие виды спорта, как волейбол, бег на лыжах, стрельба из пневматической винтовки, шашки, шахматы, перетягивании каната, подтягивание на перекладине.

Достижения сотрудников ИМех УФИЦ РАН в спортивных сборных:

2014 год:

1 место в Открытом Кубке УНЦ РАН по футболу; *1 место* в Чемпионате УНЦ РАН по настольному теннис (впервые стали двухкратными чемпионами УНЦ РАН);

3 место по футболу в Открытом Кубке УНЦ РАН. **2015 год:**

3 место по настольному теннису в Открытом Первенстве УНЦ РАН;

3 место в Открытом Чемпионате УНЦ РАН по футболу.

2016 год:

3 место по волейболу в Спартакиаде УНЦ РАН.

2017 год:

2 место по русским шашкам в Спартакиаде УНЦ РАН;

3 место по футболу в Чемпионате УНЦ РАН по футболу.

2018 год:

3 место по плаванию в Спартакиаде научных организаций РБ.

2019 год:

2 место по женскому мини-футболу в Спартакиаде научных организаций РБ (рис. 9, вверху);

2 место по волейболу в Спартакиаде научных организаций РБ (рис. 9, внизу);

2 место по настольному теннису в Спартакиаде научных организаций РБ.

2020 год:

2 место в соревнованиях УФИЦ РАН по футболу;

3 место по волейболу в Спартакиаде научных организаций РБ;

3 место по настольному теннису в Спартакиаде УФИЦ РАН.

2021 год:

1 место по дартсу в Спартакиаде УФИЦ РАН (рис. 10);

3 место по волейболу в Спартакиаде научных организаций РБ;

3 место по волейболу в Спартакиаде научных организаций РБ.



Рис. 9. Женская сборная по мини-футболу: Юлмухаметова Ю.В., Низамова А.Д., Никонорова Р.Ф., Рафикова Г.Р., Выдрина А.Ф., Гайнуллина Э.Ф., Фокеева Н.О. с тренером Юлмухаметовым А.А., 2019 год (вверху). Объединенные команды ИМех и УФИБ по волейболу (от нашего института — Валиев А.А., Утяшев И.М., Юлмухаметов А.А.), 2019 год (внизу)

2022 год:

2 место по волейболу в Спартакиаде научных организаций РБ.

Достижения сотрудников Института в составе команд УФИЦ (УНЦ) РАН:

2018 год:

1 место в Спартакиаде на Кубок биосферного резервата «Башкирский Урал»;

2 место в подтягивании на перекладине в рамках спартакиады на Кубок биосферного резервата «Башкирский Урал».

2019 год:

1 место в подтягивании на перекладине в рамках спартакиады на Кубок биосферного резервата «Башкирский Урал»;

2 место в турнире по русским шашкам в рамках спартакиады на Кубок биосферного резервата «Башкирский Урал»;

3 место по волейболу в рамках спартакиады на Кубок биосферного резервата «Башкирский Урал».

2021 год:

2 место в эстафете по плаванию 4*25 м в Спартакиаде Октябрьского района г. Уфы.



Рис. 10. Соревнования по дартсу: первенство и в командном зачете (Налобина Е.А., Юлмухаметов А.А.) (вверху), и все 3 места в личном зачете (Валиев А.А., Юлмухаметов А.А., Выдрин Е.А.) (внизу), 2021 год

2022 год:

1 место по волейболу в Спартакиаде Октябрьского района г. Уфы (рис. 11);

2 место в Спартакиаде Октябрьского района г. Уфы; 2 место в легкоатлетической эстафете в спортивном фестивале Октябрьского района г. Уфы.



Рис. 11. Сборная УФИЦ РАН по волейболу (от нашего института — Юлмухаметов А.А.), 2022 год

Содержание

Михайленко К.И. Электронный журнал «Многофазные системы» Института механики им. Р.Р. Мавлютова1–4
Галимзянов М.Н. К тридцатилетию со дня основания Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН5–26
Механика жидкости и газа
Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Особенности формирования сверхкритических пароводяных струй (обзор)
Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование динамических явлений в водных пенах (обзор)
Хабиров С.В. Основные задачи группового анализа дифференциальных уравнений механики
Даринцев О.В. Синтез новых моделей микрогидродинамики в исследованиях лаборатории «Робототехника и управление в технических системах»
Урманчеев С.Ф. Дисперсные среды: рассеяние звуковых волн, стратификация в закрученных потоках и процессы осаждения
Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Фокеева Н.О., Шамматова А.А. Динамика давления жидкости в трещине гидроразрыва при изменяющихся режимах работы скважины113–121
Механика твердого тела
Шакирьянов М.М. Обзор исследований лаборатории МТТ за 2020–2022 годы
Портрет ученого
К юбилею Саида Федоровича Урманчеева122–126
Заметки ИМех
Налобина Е.А., Насибуллаева Э.Ш., Юлмухаметова Ю.В., Сираева Д.Т., Валиев А.А., Юлмухаметов А.А. Общественная и спортивная жизнь в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН 127–132

Contents

Mikhaylenko C.I. Electronic journal "Multiphase Systems" of the Mavlyutov Institute of Mechanics1–4
Galimzyanov M.N. To the thirtieth anniversary of the founding of the Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS5–26
Liquid & Gas Mechanics
Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. The formation features of supercritical steam-water jets (review)
Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Modeling of dynamic phenomena in aqueous foams (review)
Khabirov S.V. The main tasks of group analysis of differential equations of mechanics
Darintsev O.V. Synthesis of new microfluidics models in the research in the "Robotics and Control in Technical Systems"
Urmancheev S.F. Dispersed media: scattering of sound waves, stratification in swirling flows and sedimentation processes
Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Fokeeva N.O., Shammatova A.A. Fluid Pressure Dynamics in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes113–121
Solid Mechanics
Shakir'yanov M.M. Review of research solid mechanics laboratory for 2020–2022
Profiles
Anniversary of Said Fedorovich Urmancheev122–126