ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 16 (2021), № 3–4, с. 149–154

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2021.3.018
DOI: 10.21662/mfs2021.3.018
УДК 004.432.2, 004.942, 004.92, 517.938

Получена: 25.02.2021
Принята: 7.12.2021

О симметриях обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза

Бабков О.К., Мухаметова Г.З.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Уравнение Кортевега–де Фриза — нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка, играющее важную роль в теории нелинейных волн, в основном гидродинамического происхождения. Впервые было получено Жозефом Буссинеском в 1877 году, но подробный анализ был проведен уже Дидериком Кортевегом и Густавом де Фризом в 1895 году. Уравнение Кортевега–де Фриза, его аналоги и обобщения возникают в математических моделях в самых различных предметных областях.
Публикаций, в которых рассматривается с той или иной стороны уравнение Кортевега–де Фриза, насчитывается не менее нескольких тысяч наименований и авторы осознают невозможность написания хотя бы простого списка с перечислением этих публикаций. Тем не менее можно упомянуть, например [1, 2].
В работе рассматривается некоторое обобщение уравнения Кортевега–де Фриза, полученное путем введения произвольной функции, относительно которой производится групповая классификация. Найдены допустимые операторы обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза, основная алгебра допустимых операторов и возможные случаи расширения алгебры допустимых операторов для функции-коэффициента специального вида. Также вычислены таблицы коммутаторов полученных алгебр. При этом отмечен факт изоморфности допустимых алгебр в двух различных случаях спецификации функции-коэффициента обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза. Показано, что максимально возможная размерность алгебры допустимых операторов равна четырем и соответствует почти классическому уравнению Кортевега–де Фриза с возможным дополнительным линейным слагаемым. Во всех остальных случаях, если полученная алгебра допустимых операторов и расширяется, то до трехмерной алгебры Ли.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза, групповая классификация, допустимый оператор, алгебра Ли, таблица коммутаторов

1. Введение

Уравнение Кортевега–де Фриза хорошо известно примерами своих многочисленных применений. В одном из вариантов его можно представить в виде

$$u_t = 6uu_x + u_{xxx} \tag{1}$$

В работе рассматривается некоторое обобщение этого классического уравнения:

$$u_t = u_x F(u) + u_{xxx} \tag{2}$$

Мы изначально предполагаем нелинейность рассматриваемого уравнения, то есть предполагается, что функция $F(u)$ отлична от постоянной, $F'(u) \neq 0$.

В работе проводится вычисление базисов алгебр Ли точечных преобразований, допустимых для рассматриваемых уравнений. Вычисления проведены по схеме Ли–Овсянникова–Ибрагимова [3–5].

2. Операторы симметрии

Допустимые операторы симметрии будем искать в виде

$$X = A(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + B(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + H(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь $A(t,x,u)$, $B(t,x,u)$, $H(t,x,u)\dfrac{\partial}{\partial u}$ — пока неизвестные дифференцируемые функции переменных t,x,u. Продолжим этот оператор до третьего порядка и применим полученное продолжение к исходному уравнению. После очевидного расщепления возникшей системы определяющих уравнений сразу находятся производные коэффициентов оператора, равные нулю:

$$B_u = 0, \quad A_x = 0, \quad A_u = 0, \quad H_{uu} = 0.$$

Остается следующая система:

$$B_{xx} - H_{xu} = 0,$$

$$A_t - 3B_x = 0,$$

$$H_x F(u) - H_t + H_{xxx} = 0,$$

$$(A_t - B_x)F(u) + HF'(u) + B_t - B_{xxx} + 3H_{xu} = 0.$$

Так как $A_t = 3B_x$ и $A_x = 0$, то $B_{xx} = 0$.

Согласно первому уравнению, $H_{xu} = B_{xx}$, поэтому

$$H_{xu} = 0.$$

Рассмотрим оставшиеся два уравнения:

$$H_x F(u) - H_t + H_{xxx} = 0, \tag{3}$$

$$(A_t - B_x)F(u) + HF'(u) + B_t = 0. \tag{4}$$

Продифференцируем уравнение (4) по x дважды:

$$(A_{txx} - B_{xxx})F(u) + H_{xx}F'(u) + B_{txx} = 0.$$

Так как $A_x = 0$, $B_{xx} = 0$ то $H_{xx}F'(u) = 0$.

Поскольку $F'(u) \neq 0$, (уравнение нелинейно!), мы получаем $H_{xx} = 0$.

Дифференцирование уравнение (3) по переменной x дает

$$H_{xx}F(u) - H_{tx} + H_{xxxx} = 0.$$

Так как $H_{xx} = 0$, то $H_{tx} = 0$.

Продифференцируем уравнение (3) по t:

$$\frac{\partial}{\partial t} : H_x F(u) - H_t + H_{xxx} = 0,$$

$$H_{tx}F(u) - H_{tt} + H_{txxx} = 0.$$

Согласно полученному ранее, $H_{tx} = 0$, значит, $H_{tt} = 0$.

Таким образом, $H_{uu} = 0$, $H_{xu} = 0$, $H_{xx} = 0$, $H_{tx} = 0$, $H_{tt} = 0$.

Эти дифференциальные уравнения определяют вид функции $H(t,x,u)$:

$$H(t,x,u) = H_4 tu + H_3 t + H_2 x + H_1 u + H_0.$$

Здесь H_4, H_3, H_2, H_1, H_0 — постоянные коэффициенты.

Вернемся к уравнению (4) и найдем его вторую производную по t,x:

$$(A_{ttx} - B_{txx})F(u) + H_{tx}F'(u) + B_{ttx} = 0.$$

Поскольку $A_x = 0$, $H_{tx} = 0$, $B_{xx} = 0$, то, $B_{ttx} = 0$. Так как $A_t = 3B_x$, то $A_{ttt} = B_{ttx}$ и $A_{ttt} = 0$.

Таким образом, определяется вид функции $A(t,x,u)$:

$$A(t,x,u) = 3A_2 t^2 + 3A_1 t + A_0,$$

с постоянными коэффициентами A_2, A_1, A_0.

Теперь найдем вторую производную по t уравнения (4), получим уравнение

$$(A_{ttt} - B_{ttx})F(u) + H_{tt}F'(u) + B_{ttt} = 0.$$

Здесь $A_{ttt} = 0$, $B_{ttx} = 0$, $H_{tt} = 0$, а значит, $B_{ttt} = 0$.

Далее, найдем производную по u уравнения (3) и производную по x уравнения (4),

$$H_{ux}F(u) + H_x F'(u) - H_{tu} + H_{uxxx} = 0,$$

$$(A_{tx} - B_{xx})F(u) + H_x F'(u) + B_{tx} = 0.$$

В этих уравнениях $H_{ux} = 0$, $A_x = 0$, $B_{xx} = 0$, поэтому

$$H_x F'(u) - H_{tu} = 0, \quad H_x F'(u) + B_{tx} = 0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе, получаем $H_{tu} = -B_{tx}$, откуда $H_4 = -2A_2$. Таким образом, $B_u = 0$, $B_{xx} = 0$, $B_{ttx} = 0$, $B_{ttt} = 0$, $B_x = 2A_2 t + A_1$.

Таким образом, функция B удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, что позволяет определить ее вид, B_2, B_1, B_0 — постоянные коэффициенты:

$$B(t,x,u) = B_2 t^2 + 2txA_2 + B_1 t + xA_1 + B_0.$$

Итак, мы получили общий вид коэффициентов предполагаемого допустимого оператора:

$$A(t,x,u) = 3A_2 t^2 + 3A_1 t + A_0,$$

$$B(t,x,u) = B_2 t^2 + 2txA_2 + B_1 t + xA_1 + B_0,$$

$$H(t,x,u) = -2A_2 tu + H_3 t + H_1 u + H_2 x + H_0.$$

Подставим эти представления коэффициентов в уравнения (3) и (4). Это приведет нас к следующей, пока нерасщепленной, системе определяющих уравнений:

$$H_2 F(u) + 2uA_2 - H_3 = 0,$$

$$(4A_2t + 2A_1)F(u) +$$
$$+(-2A_2tu + H_3t + H_1u + H_2x + H_0)F'(u) +$$
$$+2tB_2 + 2A_2x + B_1 = 0.$$

Расщепляя эти уравнения по переменным t, x, получаем систему дифференциальных уравнений, которой должна удовлетворять функция $F(u)$:

$$H_2F(u) + 2uA_2 - H_3 = 0,$$
$$(H_1u + H_0)F'(u) + 2F(u)A_1 + B_1 = 0,$$
$$F'(u)H_2 + 2A_2 = 0,$$
$$(-2uA_3 + H_3)F'(u) + 4F(u)A_2 + 2B_2 = 0.$$

Третье уравнение этой системы является следствием ее первого уравнения (это его производная по переменной u), его можно исключить; остаются три уравнения

$$H_2F(u) + 2uA_2 - H_3 = 0, \qquad (5)$$

$$(H_1u + H_0)F'(u) + 2F(u)A_1 + B_1 = 0, \qquad (6)$$

$$(2uA_2 - H_3)F'(u) - 4F(u)A_2 - 2B_2 = 0, \qquad (7)$$

которым должна удовлетворять функция $F(u)$. Подобным уравнениям могут удовлетворять только вполне определенные функции: степенная, в том числе линейная, показательная или логарифмическая функции.

Приступим к разбору возможных случаев.

Имеем:

1. Если $F(u)$ – функция, отличная от перечисленных, $F'(u) \neq 0$, то все коэффициенты H_3, H_2, H_1, H_0, B_2, B_1, A_2, A_1 системы уравнений (5)–(7) должны быть равны нулю. Это означает, что для функции $F(u)$ общего вида допустимый оператор имеет вид

$$X = A_0\frac{\partial}{\partial t} + B_0\frac{\partial}{\partial x}$$

с произвольными постоянными коэффициентами A_0, B_0. Потому алгебра допустимых операторов уравнения

$$u_t = u_xF(u) + u_{xxx}$$

будет двумерной абелевой алгеброй Ли, порожденной операторами $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$:

$$L_2 = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right].$$

Операторы $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ во всех полученных ниже алгебрах являются обязательной составной частью базиса алгебры допустимых операторов.

Таблица коммутаторов абелевой алгебры Ли заполнена, очевидно, нулями.

2. Пусть $F(u)$ — линейная функция (с постоянными коэффициентами f_1, f_0),

$$F(u) = f_1u + f_0, \quad f_1 \neq 0.$$

На примере этого варианта покажем подробно процесс нахождения вида допустимого оператора

Подставим эту функцию в систему уравнений (5)–(7), сгруппируем слагаемые по степеням переменной u и приравняем к 0. Поскольку равенства должны выполняться при произвольных значениях переменной u, все коэффициенты полученных равенств должны быть равны нулю. Решаем полученную систему линейных уравнений и находим зависимости между коэффициентами допустимого оператора:

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0,$$
$$H_1 = -2A_1, \quad B_2 = -2A_1f_0 - H_1f_1.$$

Подставим полученные специализации переменных в общий вид коэффициентов допустимого оператора

$$A(t, x, u) = 3A_1t + A_0,$$
$$B(t, x, u) = (-2A_1f_0 - H_1f_1)t^2 + 2B_1t + xA_1 + B_0,$$
$$H(t, x, u) = -2A_1u + H_0.$$

Теперь подставляем эти выражения в общий вид допустимого оператора, перегруппировываем слагаемые по величинам A_0, A_1, B_0 и H_0:

$$X = A_0\frac{\partial}{\partial t} + B_0\frac{\partial}{\partial x} + H_0\left(-tf_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\right) +$$
$$+A_1\left(3t\frac{\partial}{\partial t} + (x - 2f_0t)\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Теперь можно сформировать базис алгебры допустимых операторов уравнения

$$u_t = (f_1u + f_0)u_x + u_{xxx}, \quad f_1 \neq 0.$$

Его образуют дифференциальные операторы первого порядка — выражения при коэффициентах A_0, A_1, B_0 и H_0:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = -f_1t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$
$$X_4 = 3t\frac{\partial}{\partial t} - (2f_0t - x)\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, алгебра допустимых операторов уравнения оказывается четырехмерной за счет появления дополнительных допустимых операторов X_3, X_4.

$$X_3 = -f_1 t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = 3t\frac{\partial}{\partial t} - (2f_0 t - x)\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов полученной алгебры Ли:

0	0	$-f_1X_2$	$3X_1 - 2f_0X_2$
0	0	0	X_2
f_1X_2	0	0	$-2X_3$
$-3X_1 + 2f_0X_2$	$-X_2$	$2X_3$	0

Если $F(u)$ не является линейной функцией, $F''(u) \neq 0$, то из системы определяющих уравнений (5)–(7) выводятся следующие ограничения:

$$H_2 = 0, \quad A_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad B_2 = 0,$$

После чего остается единственное уравнение, которому должна удовлетворять функция $F(u)$

$$(H_1 u + H_0)F'(u) + 2F(u)A_1 + B_1 = 0.$$

Уравнению такого вида может удовлетворять только одна из следующих функций

1. Степенная функция $F(u) = (au+b)^\lambda + f_0$, $\lambda \neq 0, 1$, $a \neq 0$; в этом случае алгебра операторов уравнения

$$u_t = \left((au+b)^\lambda + f_0\right) u_x + u_{xxx}, \quad a \neq 0, \quad \lambda \neq 0, 1$$

расширяется до трехмерной алгебры за счет присоединения допустимого оператора

$$X_3 = -3a\lambda t\frac{\partial}{\partial t} + a\lambda(2tf_0 - x)\frac{\partial}{\partial x} + 2(au+b)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов:

0	0	$-3X_1 + 2f_0X_2$
0	0	$-X_2$
$3X_1 - 2f_0X_2$	X_2	0

2. Экспоненциальная функция $F(u) = f_1e^{\lambda u} + f_0$, где $f_1, \lambda \neq 0$. Алгебра допустимых операторов уравнения $u_t = (f_1e^{\lambda u} + f_0)u_x + u_{xxx}$, $f_1, \lambda \neq 0$также трехмерна, за счет присоединения допустимого оператора

$$X_3 = -3\lambda t\frac{\partial}{\partial t} + \lambda(2tf_0 - x)\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов:

0	0	$-3X_1 + 2f_0X_2$
0	0	$-X_2$
$3X_1 - 2f_0X_2$	X_2	0

Заметим, что данная таблица коммутаторов совпадает с аналогичной таблицей предыдущего случая (при несовпадающих базисах). Для совершенно разных функций — коэффициентов уравнения алгебры допустимых операторов оказались изоморфны.

3. И, наконец, возможен вариант с логарифмической функцией

$$F(u) = f_1 \ln(au+b) + f_0$$

$$u_t = [f_1 \ln(au+b) + f_0]u_x + u_{xxx}, \quad a, f_1 \neq 0$$

с трехмерной алгеброй допустимых операторов, расширяющей двумерную основную алгебру допустимых операторов за счет присоединения оператора

$$X_3 = -af_1 t\frac{\partial}{\partial x} + (au+b)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов в этом случае имеет вид

0	0	$-f_1X_2$
0	0	0
f_1X_2	0	0

3. Заключение

В работе найдены допустимые операторы обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза: основная алгебра допустимых операторов — двумерная абелева алгебра Ли, и возможные случаи расширения алгебры допустимых операторов для функции-коэффициента специального вида. Найдены таблицы коммутаторов полученных алгебр.

Отмечен факт изоморфности допустимых алгебр в двух различных случаях спецификации функции-коэффициента обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза.

Максимально возможная размерность алгебры допустимых операторов равна четырем и соответствует почти классическому уравнению Кортевега–де Фриза с возможным дополнительным линейным слагаемым:

$$u_t = (f_1 u + f_0)u_x + u_{xxx}, \;\; f_1 \neq 0$$

Во всех остальных случаях, если алгебра допустимых операторов и расширяется, то до трехмерной алгебры Ли.

Список литературы

[1] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука. 1980. 319 с.

[2] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир. 1989. 326 с.

[3] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Издательство СО АН СССР. 1962. 240 с.

[4] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ. 1966. 132 с.

[5] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука. 1983. 280 с.

ISSN 2658–5782

16 (2021), **3–4**, 149–154

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2021.3.018
DOI: 10.21662/mfs2021.3.018

Received: 25.02.2021
Accepted: 7.12.2021

On the symmetries of the generalized Korteweg-de Vries equation

Babkov O.K., Mukhametova G.Z.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa

The Korteweg–de Vries equation is a third–order nonlinear partial differential equation that plays an important role in the theory of nonlinear waves, mainly of hydrodynamic origin. It was first obtained by Joseph Boussinesq in 1877, but a detailed analysis was already carried out by Diederik Korteweg and Gustav de Vries in 1895. The Korteweg–de Vries equation, its analogues and generalizations arise in mathematical models in a variety of subject areas. There are at least several thousand publications in which the Korteweg–de Vries equation is considered from one side or another, and the authors are aware of the impossibility of writing at least a simple list listing these publications. Nevertheless, it is possible to mention, for example, The paper considers some generalization of the Korteweg–de Vries equation obtained by introducing an arbitrary function with respect to which a group classification is performed. The admissible operators of the generalized Korteweg–de Vries equation, the basic algebra of admissible operators and possible cases of extension of the algebra of admissible operators for a coefficient function of a special kind are found. Tables of commutators of the obtained algebras are also calculated. At the same time, the fact of isomorphism of admissible algebras in two different cases of specification of the function-coefficient of the generalized Korteweg–de Vries equation is noted. It is shown that the maximum possible dimension of the algebra of admissible operators is equal to four and corresponds to the almost classical Korteweg–de Vries equation with a possible additional linear term. In all other cases, if the resulting algebra of admissible operators and extends, then to a three-dimensional Lie algebra.

Keywords: : Korteweg–de Vries equation, group classification, admissible operator, Lie algebra, commutator table.

References

[1] Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. Springer Science. 1984. 276 p.

[2] Newell A.C. Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia: SIAM. 1985. 260 p. DOI: 10.1137/1.9781611970227

[3] Ovsyannikov L.V. Group Properties of Differential Equations. Siberian Branch, USSR Academy of Sciences, Novosibirsk. 1962, 240 p. (in Russian).

[4] Ovsyannikov L.V. Lectures on the Theory of Group Properties of Differential Equations. World Scientific. 2013. 156 p. DOI: 10.1142/8762

[5] Ibragimov N.H. Transforamtion groups applies to mathematical phusics. Dordrecht: Riedel. 1985. 409.