

ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме тора¹

Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Задачи, в которых рассматривается фокусировка энергии волны в жидкости, связаны с проблемой создания гидроакустических аналогов лазерных систем, которые могли бы поглощать внешнее воздействие и переизлучать его с существенным увеличением амплитуды и концентрацией энергии в заданном направлении. В настоящей работе изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью. По результатам численных расчетов проанализирована зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия. Установлено, что в случае цилиндрического кластера амплитуда волнового сигнала за пузырьковой зоной в несколько раз превышает амплитуду для случая цилиндрического тороидального кластера.

Ключевые слова: цилиндрический канал, пузырьковый кластер, пузырьковая жидкость, волна давления, тороидальный пузырьковый кластер

1. Введение

Задачи, связанные с фокусировкой энергии волны в жидкости, связаны с проблемой создания гидроакустических аналогов лазерных систем, которые сначала могут поглощать внешнее воздействие, а потом переизлучать ее с существенным увеличением амплитуды и возможной концентрацией энергии в заданном направлении [1]. Отметим работы, посвященные анализу фокусировки энергии волн пузырьковыми средами. В работе [2] изучена динамика распространения импульсных сигналов в жидкости, содержащей пузырьковую завесу конечных размеров, показано, что в зависимости от временной протяженности первоначального импульса внутри завесы может происходить нарастание амплитуды давления выше, чем амплитуда исходного сигнала. В [3] в рамках модели Иорданского, Когарко, Виингардена (ИКВ) выполнены

численные исследования «накачки» сферического пузырькового кластера и формирования в кластере башнеобразного импульса давления. Показано, что изменением величины объемной концентрации газовой фазы удается регулировать координату пятна фокусировки волны. При этом амплитуда волны, излученная кластером в жидкость, может на 1–2 порядка превышать амплитуду волны, возбуждающей кластер. Результаты численного моделирования ударной волны с тороидальным пузырьковым кластером в жидкости и возникновение направленного излучения в жидкость приведено в [4]. Экспериментальному изучению взаимодействия плоской ударной волны со сферическим пузырьковым кластером в жидкости посвящена работа [5]. Показано, что взаимодействие плоской ударной волны со сферическим пузырьковым кластером в жидкости приводит к генерации уединенной волны давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду ударной волны. Установлено, что структура уединенной волны давления определяется не только параметрами кластера и амплитудой ударной волны, но и отношением диаметров кла-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0052)

стера и рабочего участка. В работе [6] экспериментально исследованы эволюция и структура ударной волны умеренной амплитуды в жидкости, содержащей пузырьковые кластеры. В этой работе получены опытные данные по скорости и структуре ударных волн умеренной амплитуды в жидкости, содержащей сферические пузырьковые кластеры, и проведено сравнение с теоретическими моделями. Показано, что для волн малой амплитуды уравнение Буссинеска хорошо описывает структуру переднего фронта осциллирующей ударной волны. Также показано, что резонансное взаимодействие пузырьковых кластеров в волне может приводить к усилению амплитуды осцилляций в ударной волне. В [7] численно исследована структура и динамика волнового поля, излучаемого пузырьковой системой в виде аксиального пузырькового цилиндра (шнура) в результате его возбуждения плоской ударной волной, распространяющейся вдоль оси в осесимметричной ударной трубе. Показано, что в результате последовательного возбуждения пульсаций пузырьковой зоны в шнуре и в окружающей жидкости формируется квазистационарная ударная волна.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью (рис. 1). Волновое движение в канале инициируется мгновенным повышением давления на границе $z = 0$ от равновесного p_0 до некоторого амплитудного значения $\Delta p_{\ell 0}$ и поддерживается все время расчета. Требуется определить динамику волнового процесса в канале при $t > 0$.

Используется полная система гидродинамических уравнений с учетом теплообменных процессов между жидкостью и газом в пузырьках. При этом рассматриваемая система использует основные допущения и упрощающие предположения [8], а именно:

- размеры пузырьков намного превышают молекулярно-кинетические размеры, но значительно меньше расстояний, на которых усредненные или макроскопические параметры смеси или фаз меняются существенно;
- пузырьки имеют сферическую форму одного и того же радиуса, а объемное содержание пузырьков α_{g0} существенно мало ($\alpha_{g0}^2 \ll 1$);
- пренебрегаем непосредственным взаимодей-

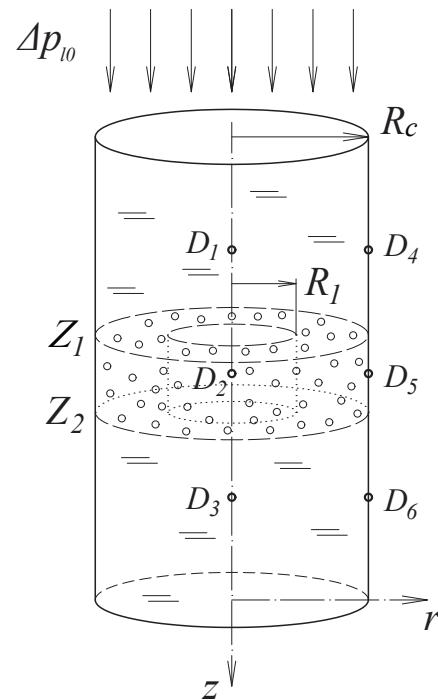


Рис. 1. Схема задачи: R_c и R_1 – радиусы канала и внутреннего тороидального кластера; Z_1 и Z_2 – координаты кластера; D_1 – D_6 – датчики давления

ствием пузырьков друг с другом и хаотическим движением пузырьков;

- отсутствуют процессы слипания, дробления и образования новых пузырьков;
- теплопроводность и вязкость существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и не проявляются в макроскопических процессах переноса импульса и энергии;
- давление газа внутри пузырьков считаем однородным.

В волновых процессах, имеющих место в жидкости с пузырьками, преобладающую роль играют механизмы диссипации, связанные с тепло-массообменными процессами, а не с относительным движением фаз. Поэтому при описании волновых процессов можно использовать односкоростную модель.

Кроме того, расчеты показывают, что даже при очень сильном сжатии пузырька ($p_\ell/p_0 \sim 10$, где p_ℓ – давление в жидкости), когда в пузырьке реализуется высокая температура, температура на

поверхности пузырька повышается незначительно ($T_\ell \approx 1.1 \cdot T_0$, где T_ℓ — температура в жидкости, а T_0 — начальная температура смеси) [8]. Давление в пузырьке при этом достигает значений, значительно превосходящих парциальное давление паров, соответствующих таким значениям температуры. Это обстоятельство говорит о несущественности межфазного массообмена. Следовательно, в случае газовых пузырьков можно пренебречь массообменом, а температуру жидкости считать постоянной ($T_\ell = T_0 = \text{const}$). Отметим, что этот вывод справедлив при не очень высоких давлениях и существенно упрощает задачу.

Для описания волнового движения с учетом вышесказанных допущений запишем систему макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{v_r}{r} + \rho_i \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \quad (i = l, g), \\ \frac{dn}{dt} + n \frac{v_r}{r} + n \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho \frac{dv_r}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial z} &= 0, \\ \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma-1)}{a} q, \quad w = \frac{da}{dt}, \\ \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \\ \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l, \end{aligned}$$

где a — радиус пузырьков; γ — показатель адиабаты для газа; t — время; p_i — давления фаз; ρ_i^0 — истинные плотности фаз; α_i — объемные содержания фаз; q — интенсивность теплообмена; n — число пузырьков в единице объема; w — радиальная скорость пузырьков; v_r, v_z — радиальная и осевая составляющие скорости. Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [9], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R определяется из уравнения Рейля–Ламба, а w_A — из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_\ell \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0}, \quad w_A = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0 C_\ell \alpha_g^{1/3}},$$

где ν_ℓ — вязкость жидкости; C_ℓ — скорость звука в «чистой» жидкости.

Будем полагать, что жидкость является линейно сжимаемой, а газ calorически совершенным:

$$p_\ell = p_0 + C_\ell^2 (\rho_\ell^0 - \rho_{\ell 0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g,$$

где R — газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем нижними индексами «0» снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением [8]:

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}.$$

где $T_0 = \text{const}$ — температура жидкости; c_g и λ_g — теплоемкость и теплопроводность газа; Nu и Pe — числа Нуссельта и Пекле.

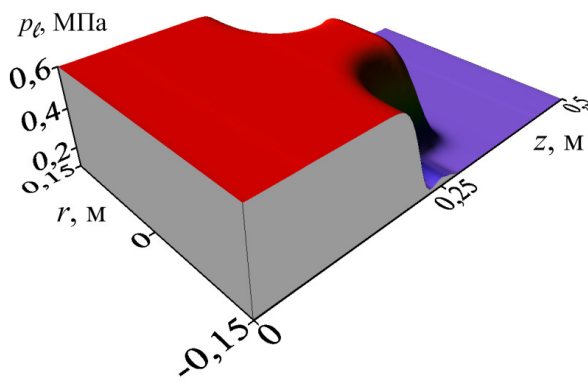
Из данной математической модели в частном случае при $\alpha_{g0} = 0$ следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство в свою очередь позволяет использовать сквозные методы расчета.

3. Методика численного расчета

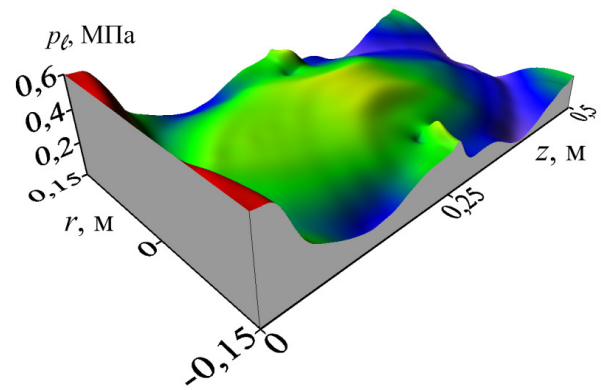
При численном решении задач гидродинамики, как и в ряде других областей, связанных с численными расчетами, основным критерием выбора используемого расчетного метода является сочетание точности, эффективности и экономичности применения. Для моделирования задач, связанных с распространением нелинейных волн и скачков большой амплитуды, наиболее предпочтительными в этом отношении оказываются методы, основанные на физической природе рассматриваемых процессов. В настоящей работе в качестве численного метода для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных была выбрана конечно-разностная схема, основанная на использовании метода Рунге–Кутты. Данная схема приспособлена для решения задач газовой динамики. Применительно к рассмотренным процессам отметим, что этот метод не требует задания специальных шаблонов разностных схем на границах расчетной области.

3.1. Уравнения в переменных Лагранжа

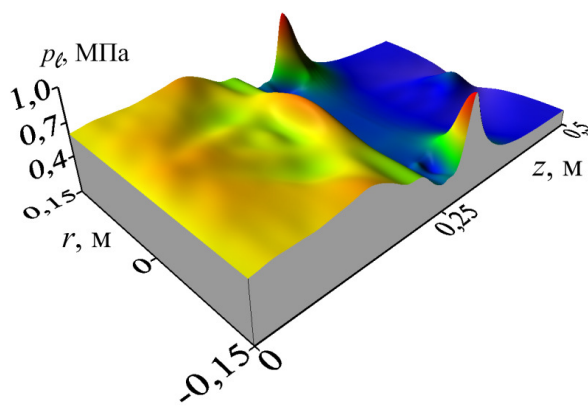
Для численного анализа задачи об эволюции волн давления в цилиндрическом канале, содержащем тороидальный коаксиальный пузырьковый



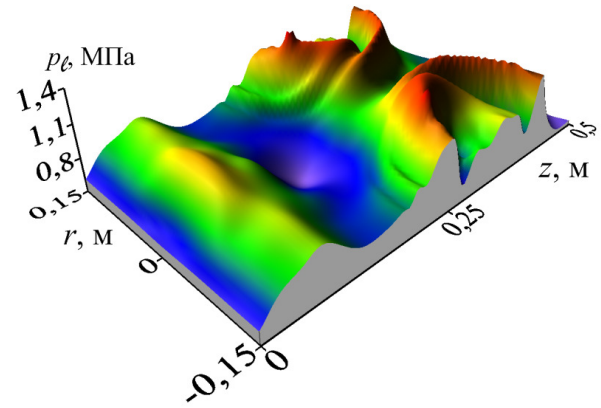
а) момент времени 0.236 мс



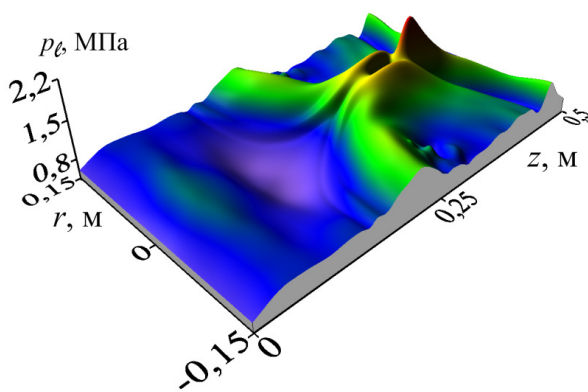
б) момент времени 0.402 мс



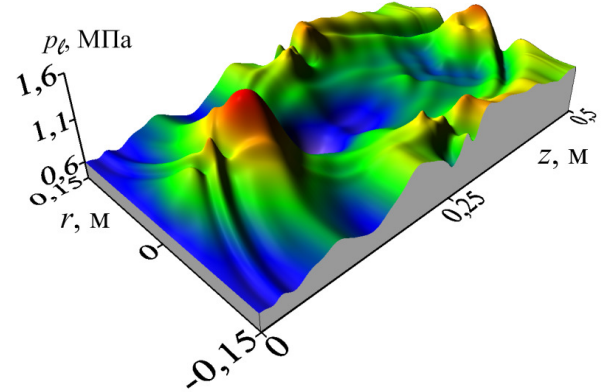
в) момент времени 0.530 мс



г) момент времени 0.772 мс



д) момент времени 0.804 мс



е) момент времени 0.888 мс

Рис. 2. Поля давлений в виде изобар, представленные для случая пристенного торoidalного пузырькового кластера в различные моменты времени

$\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м. Длина и радиус канала равны $L_z = 0.5$ м и $R_c = 0.15$ м. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{\ell 0} = 0.5$ МПа.

Под воздействием граничного давления $\Delta p(0, r) = p_0 + \Delta p_{\ell 0}$ в канале формируется волна

давления, которая распространяется вдоль положительного направления оси z и воздействует на кольцевой пузырьковый кластер. С течением времени из-за двумерного волнового движения происходит фокусировка волны в область сильно

сжимаемой пузырьковой жидкости [2, 3, 12, 13] (рис. 2(в)), а именно, на границе канала. Скорость волны в кольцевой пузырьковой зоне более, чем в 10 раз меньше скорости волны в «чистой» жидкости, поэтому за время взаимодействия волны с кольцевым пузырьковым слоем волна в «чистой» жидкости многократно успевае́т отразиться от границ $z = 0$ (где поддерживается граничное давление) и $z = Z_1$. Из-за фокусировки волны в пузырьковом слое, а также из-за многократных отражений на границах $z = 0$ и $z = Z_1$ амплитуда результирующей волны увеличивается по сравнению с амплитудой первоначальной волны. На рис. 2(г) распределение давления представлено в момент времени, когда волна воздействует на стенку цилиндрического канала, амплитуда волны при этом достигает приблизительно 1.5 МПа. В дальнейшем происходит «переизлучение» сигнала от тороидального кластера и фокусировка волны на оси канала (рис. 2(д)). Для данного случая пиковое значение давления на оси составило 2.4 МПа. Так как «переизлучение» происходит во все стороны, то в левый конец канала (сторона входа импульса давления) также распространяется сфокусированная волна на оси канала (рис. 2(е)). Таким образом, наличие пристеночной кольцевой пузырьковой зоны в цилиндрическом канале, заполненном жидкостью, приводит к увеличению амплитуды волны типа «ступенька», воздействующей через торцевую границу, из-за фокусировки волны в области сильно сжимаемого пузырькового кольца и многократных отражений от границы, где поддерживаются граничное давление и давление границ кольца.

Показания датчиков, расположенных на оси канала и на стенке, представлено на рис. 3. Осциллограммы датчиков приведены для «больших» времен, намного превышающих время распространения волны от границы $z = 0$ до границы пузырькового кластера, поэтому многочисленные осцилляции на осциллограммах связаны с многократными переотражениями волны на границах кластера и на границе $z = 0$, где постоянно поддерживается граничное давление амплитудой $\Delta p_{\ell 0} = 0.5$ МПа. Из показаний датчиков D_1, D_2, D_3 следует, что пристеночная пузырьковая зона приводит к увеличению амплитуды волны в осевой зоне цилиндрического канала более трех раз. Увеличению амплитуды происходит также на стенках канала, находящихся близко к кольцевому пузырьковому кластеру. Согласно показаниям датчиков D_4, D_5, D_6 амплитуда первоначальной волны увеличивается более, чем в два раза по сравнению с амплитудой первоначальной волны типа «ступенька». Таким образом,

по показаниям датчиков, которые одинаково отстоят от границы $z = 0$ (D_1 и D_4, D_2 и D_5, D_3 и D_6) следует, что амплитуда волны в осевой зоне канала больше, чем на стенке. Этот эффект связан с геометрической фокусировкой результирующей волны, сформировавшейся на кластере при ее движении к осевой зоне.

В дальнейшем были проведены исследования по влиянию амплитуды начального импульса на динамику максимального значения давления в канале. Было установлено, что при увеличении начальной амплитуды с 0,3 до 3,0 МПа максимальное значение давления на стенке канала увеличивается от 1,0 до 25,0 МПа. Для данного распределения начальной амплитуды проанализировано место возникновения максимального давления. Координата максимального значения амплитуды давления «регистрируемая» на стенке канала до значения первоначальной амплитуды 1,0 МПа соответствует зоне пузырькового кластера. При дальнейшем увеличении амплитуды происходит незначительное смещение (порядка нескольких мм) координаты максимума амплитуды давления в сторону увеличения координаты z .

Была исследована зависимость максимального значения амплитуды давления от объемного содержания газа при прочих одинаковых параметрах системы. Установлено, что с увеличением объемного содержания газа в пузырьковой зоне с 0.001 до 0.06 происходит увеличение максимального значения амплитуды волны, реализованного на стенке канала. При объемном содержании газа, меньше 0.0007, увеличения амплитуды практически не происходит.

Проведен анализ зависимости максимального значения амплитуды давления «регистрируемая» на стенке канала от линейных размеров кольцевого пузырькового слоя. Установлено, что данная зависимость носит немонотонный характер. Результаты численных расчетов показывают, что с увеличением линейных размеров пузырькового кольца с 0.01 до 0.05 м происходит увеличение максимальной амплитуды с 1.4 до 2.8 МПа. Дальнейшее увеличение размеров завесы приводит к снижению максимальной амплитуды давления, например, при $\Delta z = 0.07$ м амплитуда давления равна 2.0 МПа.

5. Заключение

Исследована динамика волн типа «ступенька» в канале с водой, содержащей соосный пузырьковый кластер в виде тороида. На основе численных расчетов установлены следующие закономерности:

– при определенных параметрах кластера про-

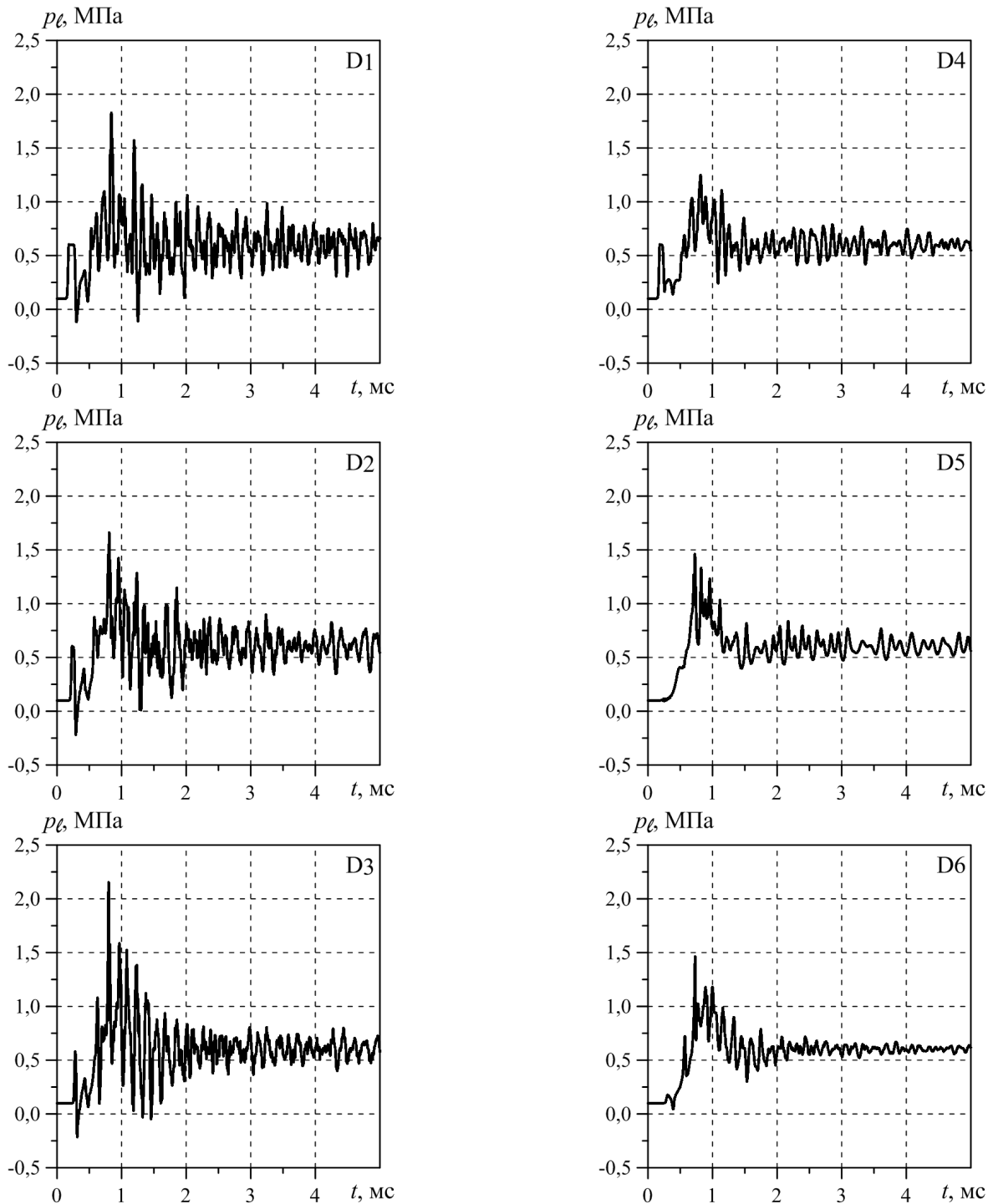


Рис. 3. Показания датчиков D_1, D_2, D_3 , расположенных на оси канала, и D_4, D_5, D_6 , расположенных на стенке на расстояниях $l_{D_1} = l_{D_4} = 0.15$ м, $l_{D_2} = l_{D_5} = 0.275$ м, $l_{D_3} = l_{D_6} = 0.35$ м от плоскости $z = 0$

исходит фокусировка волны давления на оси цилиндрического канала;

– увеличение амплитуды первоначальной волны до некоторого значения приводит к росту амплитуды результирующей волны, сфокусирован-

ной на оси канала, более, чем в десять раз. Дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны приводит к насыщению амплитуды результирующей волны;

– с увеличением внутреннего радиуса кластера

амплитуда результирующей волны на оси уменьшается. Существует критическое значение внутреннего радиуса кластера, зависящее от параметров системы (геометрических размеров кластера и канала, дисперсности и объемного содержания пузырьков в кластере), при котором амплитуда результирующей волны на оси канала меньше, чем амплитуда башнеобразного всплеска внутри пузырькового кластера.

Список литературы

- [1] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
- [2] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. eLIBRARY ID: 39274845
- [3] Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вшивков В.А. и др. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 6. С. 773–776. eLIBRARY ID: 44446961
- [4] Кедринский В.К., Вшивков В.А., Лазарева Г.Г. и др. Фокусировка осциллирующей ударной волны, излученной тороидальным облаком пузырьков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2004. Т. 125, вып. 6. С. 1302–1310. eLIBRARY ID: 16264217
- [5] Донцов В.Е. Взаимодействие ударной волны со сферическим газожидкостным кластером // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 1 (263). С. 3–11. eLIBRARY ID: 17249170
- [6] Донцов В.Е. Распространение волн давления в газожидкостной среде кластерной структуры // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 3 (271). С. 50–60. eLIBRARY ID: 15175928
- [7] Кедринский В.К., Вшивков В.А., Лазарева Г.Г. Формирование и усиление ударных волн в пузырьковом «шнуре» // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 5. С. 46–52. eLIBRARY ID: 15175963
- [8] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2 М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.
- [9] Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакции в газовой фазе // Физика горения и взрыва. 1989. № 6. С. 14–22. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE_ID=135857
- [10] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 432 с.
- [11] Гималтдинов И.К. Двумерные волны в пузырьковой жидкости. Дисс... д-ра физ.-мат. наук. 2005. <https://dlib.rsl.ru/01003305512>
- [12] Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Фокусировка волны давления на границе пузырьковой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 2. С. 507–512. eLIBRARY ID: 45759252
- [13] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Доклады академии наук. 2001. Т. 378, № 6. С. 763–768. eLIBRARY ID: 44438446



Pressure waves in a tube filled with a liquid with a bubble region in it in the form of a torus

Galimzyanov M.N.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Problems considering the focusing of wave energy in a liquid are related to the problem of making hydroacoustic analogs of laser systems that could absorb an external action and re-emit it with a significant increase in amplitude and energy concentration in an adjusted direction. In this paper, we study two-dimensional axisymmetric wave perturbations in a channel with water containing a toroidal coaxial cluster filled with a water-air bubble mixture. Based on the results of numerical calculations, the dependence of the maximum pressure amplitude formed in the channel on the geometric parameters of the cluster and channel, as well as on the amplitude of the initial impact, is analyzed. It has been established that in the case of a cylindrical cluster the amplitude of the wave signal behind the bubble zone is several times higher than the amplitude for the case of a cylindrical toroidal cluster.

Keywords: cylindrical channel, bubble cluster, bubble liquid, pressure wave, toroidal bubble cluster

References

- [1] Kedrinskii V. K. *Gidrodinamika vzryva: eksperiment i modeli* [Explosion hydrodynamics: experiment and models]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000. (in Russian)
- [2] Galimzyanov M.N., Gimaltdinov I.K. and Shagapov V.Sh. Two-dimensional pressure waves in a fluid with bubbles // *Fluid Dynamics*. 2002. V. 37, No. 2. Pp. 294–301. doi10.1023/A:1015818602291
- [3] Kedrinskii V. K., Shokin Yu. I., Vshivkov V. A., Dudnikova G. I., Lazareva G. G. *Doklady Akademii nauk*. 2001. Vol. 381. No. 6. Pp. 773–776. (in Russian)
eLIBRARY ID: 44446961
- [4] Kedrinskii V. K., Vshivkov V. A., Lazareva G. G. i dr. Fokusirovka osilliruyushchei udarnoi volny, izluchennoi toroidal'nym oblakom puzyr'kov. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 2004. Vol. 125. No. 6. Pp. 1302–1310. (in Russian)
eLIBRARY ID: 16264217
- [5] Dontsov V.E. Propagation of pressure waves in a gas-liquid medium with a cluster structure // *Prikladnaya mehanika i tehnikeskaya fizika*. 2004. Vol. 45. No. 1. Pp. 3–11.
eLIBRARY ID: 17249170
- [6] Dontsov V.E. Propagation of pressure waves in a gas-liquid medium with a cluster structure // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. Vol. 46. No. 3. Pp. 346–354.
DOI: 10.1007/s10808-005-0084-7
- [7] Kedrinskii V.K., Vshivkov V.A., Lazareva G.G. Formation and amplification of shock waves in a bubble "cord" // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. Vol. 46. No. 5. Pp. 652–657.
DOI: 10.1007/s10808-005-0119-0
- [8] Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media*. New York: Hemisphere, 1991, vols. 1 and 2. P. 360 and P. 464
- [9] Shagapov V.Sh., Vakhitova N.K. Waves in Bubble Systems in the Presence of Chemical Reactions in the Gas Phase // *Fiz. Goreniya Vzryva* 25(6), 14 (1989). (in Russian)
https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE_ID=135857
- [10] Samarsky A.A., Popov Yu.P. *Difference schemes of gas dynamics*. M.: Nauka, 1975. 432 p. (in Russian)
- [11] Gimaltdinov I.K. *Two-Dimensional Waves in Bubbly Fluids*. Doctoral Dissertation in Mathematics and Physics, Ufa (2005). (in Russian)
<https://dlib.rsl.ru/01003305512>
- [12] Gimaltdinov I.K., Kochanova E.Y. Focusing Of A Compression Wave At The Boundary Of A Bubble Liquid // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2021. T. 94. № 2. C. 490–495.
DOI: 10.1007/s10891-021-02319-4
- [13] Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh., Gimaltdinov I.K. et al. Two-dimensional pressure waves in a liquid containing bubble zones // *Doklady Physics*. 2001. V. 46, No. 6. Pp. 445–451.
DOI: 10.1134/1.1384945