ISSN: 2658–5782

Номер 3-4

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 16 (2021), № 3-4, с. 88–104

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2021.3.013
DOI: 10.21662/mfs2021.3.013
УДК 534.26

Получена: 31.03.2021
Принята: 20.04.2021

Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор)[1]

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование явления рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, поскольку на данном явлении основываются многие применения акустических волн, такие как гидролокация, зондирование атмосферы и океана, приборы неразрушающего контроля, создание позиционируемого 3D звука и т.п. Во многих исследуемых системах препятствия являются сферическими (или могут быть рассмотрены таковыми). Настоящий обзор посвящен анализу основных работ по теоретическим методам решения задач рассеяния акустических волн на сферах и определению основных характеристик данного явления, а также по существующим экспериментальным работам. Можно выделить два теоретических подхода к решению представленной задачи. В первом подходе предполагается, что распределение рассеивателей является случайным, и вычисляется среднее значение рассеянного поля. Во втором подходе, которому уделено основное внимание в настоящей статье, решение сводится к большим системам интегральных или линейных алгебраических уравнений с помощью различных методов, таких как метод T-матриц, теоремы сложения для сферических функций, функции Грина, интегральные уравнения. Первый подход позволяет рассматривать системы с большим числом случайно распределенных рассеивателей, однако, из-за осреднения звукового поля невозможно определить давление в конкретной точке пространства. Второй подход дает возможность определять зоны повышения и понижения давления, однако, для большого числа сфер решение требует значительных затрат вычислительных ресурсов и процессорного времени. Анализ научных работ, в которых определяются основные характеристики явления рассеяния, такие как полное сечение рассеяния или сечение обратного рассеяния, показал, что аналитические формулы и численные исследования ограничены случаями одиночной сферы или систем с двумя сферами. Следовательно, задача определения выражения для данных характеристик в общем случае остается нерешенной и сохраняет свою актуальность.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, звуконепроницаемая сфера, звукопроницаемая сфера, звуковое поле, полное сечение рассеяния, теоретические методы, эксперимент

1. Введение

При взаимодействии акустической волны с препятствиями малых размеров, отличающихся плотностью и (или) сжимаемостью от основной среды, появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от препятствий. Данное явление называют рассеянием (или дифракцией) звука. Когда излучение рассеивается только на одном локализованном препятствии, то это называется однократным рассеянием. Результирующее поле может быть представлено как сумма первичной волны, существовавшей в отсутствии препятствия, и рассеянной (вторичной) волны, возникшей в результате взаимодействия первичной волны с препятствием. При наличии множества препятствий волны от каждого из них рассеиваются повторно и многократно другими препятствиями, что называется многократным рассеянием.

[1]Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052.

Изучение явления рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, прежде всего благодаря тому, что на данном явлении основываются многие применения акустических волн, которые позволяют, например,

- в гидролокации [1, 2] определять местоположение косяков рыб, отдельных крупных рыб или других подводных объектов и невидимых подводных препятствий;
- при зондировании атмосферы и океана [1–3] получать информацию о поверхности Земли и объектах на ней, атмосфере, океане и верхнем слое земной коры;
- в приборах неразрушающего контроля [4] измерять как геометрические параметры при одностороннем доступе к изделию, так и физико–механические свойства металлов и металлоизделий без их разрушения;
- в медицинских сканерах [5, 6] для диагностических целей визуализировать внутренние органы и процессы, протекающие в тканях;
- при создании позиционируемого 3D звука [7] придавать звуковой модели реализм и усиливать ощущения при восприятии звука слушателем.

Во многих исследуемых системах препятствия являются сферическими или могут быть рассмотрены таковыми, поэтому одной из актуальных акустических подзадач является исследование рассеяния на множествах сфер (твердых сферах или сферических пузырьках и каплях) при различных внешних воздействиях.

В фундаментальных работах [8–12] представлены решения классических (базовых) задач рассеяния от одиночных сфер с различными граничными условиями. Целью настоящей работы является обзор основных работ, выходящих за пределы классических постановок, по теоретическим методам решения задачи рассеяния акустических волн на сферах и определения основных характеристик данного явления в рамках поставленной задачи, а также по существующим экспериментальным работам.

Можно выделить два теоретических подхода к решению представленной задачи. В первом подходе предполагается, что распределение рассеивателей является случайным, вычисляется среднее значение рассеянного поля (или мощности) [1, 13, 14]. Во втором подходе (далее будет подробно рассмотрен) решение сводится к большим системам интегральных или линейных алгебраических уравнений с помощью различных методов, например, таких как: метод T-матриц (см. работы [15–17]), теоремы сложения для сферических функций (см. работы [18–20]), функции Грина (см. работы [21, 22]), интегральные уравнения (см. работы [23–25]).

2. Методы решения задачи рассеяния акустической волны на сферических препятствиях

2.1. Случай одиночной сферы

Случай одиночной сферы (сферическая твердая частица, пузырек или капля) достаточно хорошо изучен в литературе и интересен с практической точки зрения, поскольку позволяет проводить сравнения с существующими экспериментальными и расчетными данными других исследователей.

Впервые рассеяние акустической волны на твердой и жидкой сферах было исследовано Рэлеем [26, 27], который рассматривал сферу с размерами малыми по сравнению с длиной волны (так называемое рэлеевское рассеяние). При рэлеевском рассеянии на жидкой сфере в решении при разложении в ряд важны как члены нулевого порядка (зависят от сжимаемости сферы), так и члены первого порядка (зависят от плотности сферы). Установлено, что рассеивающая способность малой сферы существенно увеличивается с ростом частоты.

Экспериментальная проверка решения Рэлея путем определения распределения давления на поверхности неподвижной жесткой сферы при воздействии плоской поступательной звуковой волны проведена в работе [28]. Получено достаточно хорошее согласование между теорией и экспериментом в диапазоне волновых радиусов $1/3 < ka < 10$, где k — волновое число падающей волны; a — радиус препятствия. В частности, экспериментально было подтверждено существование «яркого» пятна, диаметрально противоположного точке, ближайшей к источнику звука.

Существует ряд работ, где задача рассеяния от множества сферических газовых рассеивателей сводится к рассеянию на одиночной сфере, содержащей микронеоднородную среду. Так, например, в работе [29] рассмотрено рассеяние в жидкости низкочастотной плоской волны на облаке, имеющем сферическую форму, с равномерно распределенными в нем газовыми пузырьками. Показано, что образование устойчивых гроздей из пузырьков под действием звуковой волны является коллективным эффектом, возникновение которого зависит в основном от величины объемного газосодержания жидкости. А в работе [30] решалась задача рассеяния и поглощения звука на сферической границе раздела между жидкостью и областью, содержащей двухфазную среду с аномальной динамической сжимаемостью, имитирующей рыбные скопления ограниченных размеров (рыбные садки). Данная задача решалась с помощью модели микронеоднородной двухфазной среды [10], где акустические характеристики описывались осредненными величинами плотности и сжимаемости. Проведено сопоставление с аналогичными процессами, представленными в предыдущей работе авторов [31], где была рассмотрена задача об отражении звука при падении плоской волны на плоскую границу раздела между жидкостью (водой) и скоплениями газовых пузырей в жидкости, имитирующими промысловые косяки пузырных рыб.

В значительном числе работ изучалось рассеяние волны на одиночной сфере, содержащей однородную среду, при этом сфера являлась либо звуконепроницаемой (твердая сфера), когда волна не проходит через её границу, либо звукопроницаемой (жидкая капля или газовый пузырек), когда волна проходит через границу и распространяется в среде с физическими характеристиками, отличными от окружающей сферу среды. Представим основные из этих работ.

В работе [32] рассматривалась задача рассеяния звука от сферического жидкого препятствия, размер которого сравним с длиной волны, без учета диссипации энергии. Для сравнения также представлены предельные случаи рэлеевского рассеяния (когда радиус сферы много меньше длины волны) и рассеяния на неподвижной жесткой сфере.

Рассеяние плоской монохроматической звуковой волны на одиночной сфере с учетом поглощения энергии, обусловленного тепловым механизмом, рассмотрено в работе [33]. Показано, что данный вид поглощения энергии является существенным при рассеянии звука на высоких частотах, а также для мягких объектов, таких как пузырьки или сферы с физическими свойствами, близкими к свойствам жидкости.

Теоретические исследования рассеяния звука в окрестности сферы малого радиуса, движущейся в идеальной жидкости с постоянной скоростью, много меньшей скорости звука, представлены в работе [34]. Получено, что амплитуда рассеяния звука пропорциональна числу Маха и содержит как монопольную с дипольной, так и квадрупольную компоненты; поля, рассеянные на неоднородностях течения среды, оказываются синфазными при рассеянии звука вперед и назад, а на поверхности движущейся сферы — в противофазе.

В работе [35] рассматривалось рассеяние поля параметрической антенны на сфере, расположенной в области нелинейного взаимодействия, в случае, когда размеры данной антенны на порядок превышают радиус сферического рассеивателя. Получено достаточно хорошее совпадение теоретических выводов данной работы и экспериментальных результатов измерения вторичного низкочастотного поля волны разностной частоты при рассеянии на стальной и алюминиевой сферах.

Теоретические и экспериментальные результаты по измерению отклика на поверхности жесткой сферы представлены в работе [36]. Теоретическое решение получено с помощью техники, основанной на определении направленной передаточной функции (directional transfer function), которая в настоящее время используется для измерения передаточной функции головы человека (head-related transfer function) при разработке технологии создания позиционируемого 3D звука. Получено хорошее согласование экспериментальных данных с теоретическим решением.

Отметим книгу [8], где представлены точные решения «базовых» задач рассеяния плоской волны на одиночных звуконепроницаемой и звукопроницаемой сферах путем разложения по сферическим функциям. В частности, получено, что произвольная звукопроницаемая сфера малого волнового размера создает одновременно и монопольное и дипольное рассеяния, а в случае пузырька монопольное рассеяние оказывается существенно сильнее, чем дипольное, при этом амплитуда рассеянной волны имеет резонансный характер.

В обзорной работе [37] приведены выражения и определения для акустических поперечных сечений, резонансных частот и коэффициентов затухания сферически пульсирующего газового пузырька в бесконечной жидкой среде, а также вывод выражений для «резонансной частоты».

В работе [38] предложена и экспериментально исследована модель неподвижного газового пузырька в воде в виде пенопластового сферического образца. Численное моделирование проведено на основе модели рассеяния звуковых импульсов на абсолютно мягкой сфере [12]. Показано, что результаты измерений находятся в хорошем согласовании с теоретическими данными, полученными по классической модели.

Исследование акустического рассеяния от одиночной звуконепроницаемой сферы для двух видов внешнего воздействия (сферической волны от монопольного источника излучения и плоской волны) проведено в работе [39]. Сравнение численных результатов данной работы показало хорошее соответствие результатам экспериментальной работы [36]. В последующей работе [40] представлено обобщение на случай одиночной звукопроницаемой сферы; проведено сравнение с данными экспериментов [41] и также получено хорошее соответствие.

Теория акустического рассеяния плоской волны на сфере без асимптотического приближения на большие расстояния представлена в работе [42] с целью учета информации о расстоянии между целью и наблюдателем. В качестве примеров рассмотрено акустическое рассеяние на жесткой и нежесткой сферах. Показано, что при длинноволновом акустическом рассеянии необходимо учитывать эффекты вблизи цели.

2.2. Случай пары сфер

Работы, посвященные изучению рассеяния звуковых волн на двух сферах, интересны, поскольку, с одной стороны, имеет место взаимодействие друг с другом рассеянных от сфер полей, а, с другой стороны, данное взаимодействие является достаточно простым для того чтобы его можно было подробно изучить.

Теоретическое исследование сил, действующих на две твердые сферы произвольного размера, когда их центры расположены параллельно направлению распространения плоского звукового поля, проведено в работе [43]. Выражения для сил на каждой сфере получены в терминах расходящихся волновых функций и функций преобразования координат. Показано, что данные силы могут быть на несколько порядков больше, чем те, которые действовали бы на каждую из сфер, если бы они были изолированы, что обусловлено взаимным влиянием рассеянных от каждой из сфер полей.

В работе [19] решается задача рассеяния плоской волны на двух акустически жестких сферах одного и того же радиуса методом разделения переменных в сферических координатах. Представление коэффициентов перехода при разложении рядов производится с помощью коэффициентов Клебша–Гордана. Результаты сравниваются с предыдущей работой автора [18], где рассмотрен случай акустически мягких сфер.

Многократное рассеяние акустических волн двумя (или тремя) сферами было подробно изучено в работе [44] с использованием трех различных подходов: мультипольного разложения, геометрической оптики и экспериментов. В методе разложения по мультиполям применялась теорема трансляционного сложения для сферических волновых функций. Решения в замкнутой форме были получены для двух частных случаев: в приближении Рэлея и для большого расстояния между сферами.

В работе [21] решалась задача излучения и многократного рассеяния двух вибрирующих сфер с помощью метода функций Грина. Получены численные результаты, демонстрирующие влияние взаимодействия (рассеяния) на давление в ближнем и дальнем полях, а также зависимость импеданса излучения одной сферы от присутствия другой.

Явные формулы для рассеяния монохроматической волны от двух рассеивателей получены в работе [15] методом T-матриц, а также представлены численные расчеты обратного и дифференциального сечений рассеяния двух сфер для различных параметров системы.

В работе [20] задача рассеяния плоской звуковой волны двумя взаимодействующими звуконепроницаемыми сферами решалась с помощью теоремы сложения для сферических волновых функций (см., например, [45, 46]), которые допускают разложение поля, используя символы Вигнера (3-j). Получены аналитические аппроксимации решения данной задачи для частных случаев, таких как рассеяние в дальнем поле и большое расстояние между сферами.

Задача рассеяния плоской гармонической волны на двух близко расположенных импедансных сферах в работе [47] решается методом, основанным на представлении решения в виде рядов по сферическим функциям. Показано, что в области низких частот для акустически мягких сфер имеет место взаимное демпфирование колебаний, а в области высоких частот — полное или частичное затенение одной из сфер (независимо от краевых условий на сферах).

Теоретическое и экспериментальные исследования обратного рассеяния звука от двух пузырьков, расположенных симметрично оси, проходящей через источник звука (одновременно являющийся приемником отраженной волны) перпендикулярно оси, соединяющей центры рассеивателей, представлено в работе [41]. Теоретические расчеты поля рассеяния выполнялись с использованием точного решения в замкнутой форме, полученного из разложения многократного рассеяния.

В работе [48] теоретически, численно и экспериментально исследовано акустическое рассеяние двумя идентичными сферами. Применяется подход теории групповых представлений, при котором падающее и рассеянное поля раскладываются по различным неприводимым представлениям непрерывной группы симметрии рассеивателя. Затем из граничных условий для каждого неприводимого представления получается конечная система линейных комплексных алгебраических уравнений, в которой неизвестные коэффициенты рассеяния не связаны, что позволяет ускорить численные расчеты. Серия экспериментов, основанных на ультразвуковой спектроскопии, проведена в случае двух сфер из нержавеющей стали, погруженных в воду. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов дало довольно хорошее согласование.

Задача о рассеянии двух тел, находящихся в первичном поле плоской волны, решалась в работе [23] путем учета многократного перерассеяния плоских волн между рассеивателями, что привело к интегральным уравнениям, позволяющим вычислять возмущенные амплитуды рассеяния через невозмущенные. Утверждается, что данный метод позволяет при наличии банка данных невозмущенных амплитуд рассеяния легко конструировать решение задач множественного рассеяния с произвольной конфигурацией рассеивателей, а не строить решение каждый раз заново, как при других подходах.

Рассеяние плоской звуковой волны на системе двух акустически проницаемых (жидких или жидкоподобных) или непроницаемых (жестких или мягких) сфер, расположенных на расстоянии друг от друга, когда одна из сфер имеет акустически малый радиус, изучалась в работе [49]. Задача решалась методом разделения переменных с помощью теорем трансляционного сложения для сферических волновых функций.

В работе [50] представлено обобщение математической модели [39] и методики расчета [17] на случай пары звуконепроницаемых сфер с произвольным акустическим импедансом и произвольно расположенным в пространстве монопольным источником излучения. Проведены расчеты распределения давления вокруг двух жестких сфер при различных значениях расстояния между ними и расположениях монопольного источника излучения. Показано, что при определенных параметрах возможно как повышение, так и понижение давления в рассмотренной системе.

Взаимодействие двух близких пузырьков в акустическом поле изучается в работе [51]. Моделирование осуществляется в рамках теории многократного рассеяния с использованием разложений по сферическим гармоникам и теоремы сложения. Получено точное характеристическое уравнение, обеспечивающее симметричный и антисимметричный резонансы двух пузырьков. Численные результаты показывают, что для описания акустического поля вокруг пузырьков требуется большое количество режимов вибрации.

2.3. Случай множества (ансамбля) сфер

В данном разделе представлены работы, посвященные исследованию рассеяния звука на системах, состоящих из множества сфер.

В работах [24, 25] показан вывод системы интегральных уравнений, которая определяет амплитуды многократного рассеяния для множества (двух и более) объектов в терминах соответствующих функций для изолированных объектов, при этом для двух малых объектов получаются «замкнутые формы», включающие дифференциальные операторы.

Метод связанных осцилляторов используется в работе [52] для описания коллективного акустического резонанса и рассеяния от множества пузырьков воздуха в воде. Задача рассеяния от множества объектов была разложена на задачу рассеяния от отдельных нормальных мод данного множества и проанализирована. Каждая мода обладала специфическими резонансными свойствами: «симметричные» моды, в которых пузырьки колеблются в фазе друг с другом, демонстрировали сдвиг в область низких частот и повышение затухания; «антисимметричные» моды, в которых некоторые или все пузырьки колеблются в противофазе, демонстрировали сдвиг в область высоких частот и уменьшение затухания. В последующей работе [53] для определения характеристик распространения пузырьковой воды применяется осреднение коллективного поведения симметричной моды по распределениям радиусов и местоположений пузырьков; данный метод учитывает все порядки многократного рассеяния и эффекты «экранирования» в среде. Получены новые теоретические выражения для фазовой скорости и затухания, которые сравниваются с экспериментальными данными [54, 55] путем интегрирования эффектов многократного рассеяния по так называемой области коллективного взаимодействия вокруг каждого пузырька.

Задача рассеяния акустического поля группой рассеивателей в работе [16] формулируется с помощью метода T-матриц, а полученная система линейных уравнений решается с использованием многоуровневого быстрого мультипольного алгоритма (the multilevel fast multipole algorithm, MLFMA) и метода быстрых мультиполей (the fast multipole method, FMM). Точность методов оценивалась путем моделирования сферического рассеивателя, состоящего из множества маленьких сфер. Сравнение двух методов показало, что в целом MLFMA работает лучше, чем алгоритм FMM, однако, когда рассеиватели равномерно распределены по прямоугольной сетке, алгоритм FMM работает так же хорошо, как и MLFMA.

В работе [17] представлена численная техника разложения и повторного разложения мультиполей, основанная на методе Т-матриц, для решения задачи акустического рассеяния от множества звуконепроницаемых сфер с произвольным акустическим импедансом. Вычислительные эксперименты, проведенные с помощью данной техники и метода граничных элементов (в пакете программ COMET), показали, что предложенная в данной работе методика расчета достигает высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. В частном случае, когда центры сфер расположены на одной оси, и задача может быть сведена к осесимметричной, получен более эффективный (по сравнению с общим случаем) алгоритм, использующий осесимметричные выражения для переразложения мультиполей. В последующей работе [56] представлено ускорение численной техники с помощью алгоритма FMM, представленного в [16], и быстрых рекурсивных алгоритмов и разложений для определения коэффициентов разложения по мультиполям, приведенных, например, в работе [57]. Представлены результаты модифицированной техники при решении тестовых задач для числа сфер $\sim 10^2 \div 10^4$ и различных значений волнового числа.

Теоретические исследования рассеяния плоской волны на множестве идеальных газовых сферических пузырьков в безграничной однородной жидкости проведены в работе [58] с помощью разложения решения по сферическим гармоникам. Показано, что в области низких частот данная теория сводится к монопольному приближению. Численные сравнения между двумя представленными теориями показали, что приближение монополя хорошо подходит для исследований резонирующих пузырьков, даже когда пузырьки находятся близко друг к другу.

Теоретическая трактовка акустического рассеяния от облака пузырьков или других монопольных рассеивателей как от скопления рассеивателей сферической формы представлена в работе [22]. Задача решается в рамках теории эффективной среды для случая скоплений сферической формы, где рассеянное поле раскладывается в ряд по функция Грина и осредняется в соответствии с теорией [13]. Получены явные выражения для амплитуды и поперечных сечений рассеяния, а также выражения в замкнутой форме для резонансной частоты и спектральной формы основной коллективной моды с использованием аналитических методов S-матрицы.

В работе [59] предлагается альтернативный подход к теории многократного рассеяния, в которой рассеянное отдельной частицей поле имеет монопольный, дипольный и ротационный типы рассеяния звука, а в работе [60] того же автора представлено решение для среднего звукового поля в средах, содержащих сферические частицы только с монопольным типом рассеяния. Однако, данный подход из-за осреднения звукового поля, в отличие от традиционного, не позволяет определить давление в конкретной точке пространства, следовательно, такие эффекты, как повышение или понижение давления в некоторых зонах, не могут быть обнаружены.

Теоретическое выражение для силы акустического взаимодействия между мелкими сферическими частицами, взвешенными в идеальной жидкости, при воздействии внешней акустической волны, представлено в работе [61]. Под данной силой подразумевается часть силы акустического излучения на одну частицу, включающая рассеянные волны от других частиц. В приближении Рэлея силы акустического взаимодействия между частицами аппроксимируются градиентами потенциалов парного взаимодействия без каких-либо ограничений на расстояние между частицами. Данная теория применяется для изучения силы акустического взаимодействия на суспензии частиц как в стоячих, так и в бегущих плоских волнах.

Теоретическое и экспериментальное исследование генерации акустической гармоники второго порядка одним слоем пузырьков представлено в работе [62] с целью изучения взаимодействие между нелинейными эффектами и многократным рассеянием в данной системе. Показано, что модель, полученная с помощью метода возмущений для расчета генерации гармоник подобных структур, дает достаточно хорошее согласование с экспериментальными измерениями устойчивых, имеющих хорошие характеристики, образцов пузырьковых экранов. Четко определена взаимосвязь между многократным рассеянием и нелинейностью, и показано существование оптимальной концентрации пузырьков, для которой уменьшение общего давления возбуждения из-за многократного рассеяния уравновешивается количеством нелинейных источников.

В работе [63] обобщена численная техника разложения потенциала поля по мультиполям [17] на случай акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер с центрами, расположенными на одной оси, при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения, а в работе [64] — при падении плоской волны под произвольным углом к оси, соединяющей центры сфер. В последующей работе [65] был рассмотрен общий случай акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер разных радиусов, произвольно расположенных в трехмерном пространстве, при воздействии акустическим полем. Проведена оптимизация алгоритма построения матрицы коэффициентов повторного разложения по мультиполям с целью минимизации используемого объема оперативной памяти. Диаграммы, построенные с помощью рассмотренного подхода к изучению рассеяния от множества сфер, в отличие от подходов, основанных на осредненных уравнениях, позволяют наглядно продемонстрировать картину распределения давления вне и внутри системы сфер, в том числе для определения зон повышения и понижения давления. Так, например, диаграммы распределения нормированного давления на расстоянии от рассеивающего слоя, представленные в работе [66] показали, что слой играет роль двумерной дифракционной решетки, имеющей различную степень прохождения акустических волн, которая зависит от соотношений физических параметров внешней и внутренней сред.

2.4. Определение числа членов ряда при усечении в методе разложения по сферическим функциям

В методе повторного разложения по мультиполям потенциалы раскладываются в ряды по специальным функциям, в результате решение сводится к бесконечномерной системе матричных уравнений. При численной реализации данного решения возникает вопрос правильного выбора числа членов n_{tr} при усечении полученных рядов, поскольку при малом числе n_{tr} точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастут не только точность, но и объем памяти, необходимой для расчета, а также машинное время. В данном подразделе представим подходы к определению числа членов при усечении рядов.

Анализ научной литературы по данной проблематике показал, что можно выделить два подхода к определению числа n_{tr}.

Подход I: усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда (для n и $n+1$ числа членов) — как только их абсолютная погрешность становится меньше некоторого фиксированного значения, дальнейшие вычислени прекращаются и принимается значение суммы ряда при $n_{\text{tr}} = n$ [36].

Подход II: происходит усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе n_{tr}, определяемом с помощью одной из эмпирических формул, выражения для которых далее будут приведены.

В работах [44, 67] при решении задачи рассеяния от одиночной сферы применялась следующая эмпирическая формула:

$$n_{\text{tr}} \approx [1 + ka + \alpha(ka)^{1/3}], \tag{1}$$

где $[z]$ — оператор, обозначающий целую часть числа z; k — волновое число; a — радиус сферы; α — параметр, позволяющий контролировать точность расчета (в представленных работах $\alpha = 3$). Формула (1) была впервые получена в работе [68] для двумерного случая. В работе [44] это же значение числа n_{tr} применяется также для случая двух сфер одного радиуса, когда они расположены не слишком близко друг к другу или соприкасаются.

Оценки погрешности рядов при усечении для задач с одиночной сферой, представленные в работах [69, 70], позволили получить следующую эмпирическую формулу:

$$n_{\text{tr}} = [kd + \beta \log_{10}(kd + \pi)], \tag{2}$$

где d — расстояние от центра сферы до начала координат; β — параметр, позволяющий контролировать точность расчета. Последняя формула была модифицирована в работе [16] для задачи рассеяния группой сферических рассеивателей, где вместо параметра d брался параметр D — диаметр сферы, описывающей самую большую группу рассеивателей.

В работе [71] проведено сравнение формул (1) и (2) для различных значений параметров α и β. Показано, что лучшую аппроксимацию дает формула (1) с параметром $\alpha = 1.8\left(\log_{10}(\varepsilon^{-1})\right)^{2/3}$, где ε — требуемая погрешность искомой суммы ряда вследствие усечения. Данное выражение также предлагается использовать для больших значений ka в работе [56], а с подробным выводом можно ознакомиться, например, в книге [72].

В работе [48] для задачи двух сфер была применена эмпирическая формула

$$n_{\text{tr}} = \sup(8, [ka + 4(ka)^{1/3} + 1]),$$

полученная благодаря анализу проведенных в работах [73, 74] численных исследований. Численная проверка данной формулы показала, что такой порядок усечения обеспечивает семизначную точность вычислений для рассмотренной задачи рассеяния на двух сферах.

В работе [75] в случае рассеяния от множества объектов использовалась следующая эмпирическая формула:

$$n_{\text{tr}} = \left[ka_p + \left(\frac{\ln(2\sqrt{2}\pi ka_p\varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}(ka_p)^{\frac{1}{3}} + 1\right], \tag{3}$$

где a_p — радиус p-го объекта. Вывод данной формулы представлен, например, в работах [76] (для одиночного рассеяния) и [77] (для множественного рассеяния).

При исследовании рассеяния от множества сфер в литературе (см., например, работы [17, 78]) использовалась также формула

$$n_{\text{tr}} = \begin{cases} [ekr_{pq}], & \text{для малых } kr_{pq}, \\ [ekr_{pq}/2], & \text{для больших } kr_{pq}, \end{cases} \qquad (4)$$

где e — число Эйлера; r_{pq} — расстояние между центрами p-ой и q-ой сфер. В разложении по мультиполям используются сферические функции Ханкеля большого порядка вида $h_n(kr_{pq})$ (входят в матрицу переразложения системы). Асимптотическое разложение данных функций при больших n и фиксированных kr_{pq} (см. справочник [79]) показывает, что их рост начинается при $n \approx ekr_{pq}/2$, это может привести к экспоненциальному росту части членов в разложении и, следовательно, к переполнению относительных ошибок. Поэтому данное значение и легло в основу формулы (4). Численный анализ, представленный в работах [64, 78], показал, что данная формула может быть использована как оценка верхней границы для определения числа усечения рядов n_{tr}.

Как правило, численный анализ эмпирических формул (3) и (4) сводится к определению искомой функции в зависимости от числа членов ряда при усечении только для нескольких расчетных точек. В работе [17] подобный анализ был проведен для обоснования формулы (4). А в работе [80] проведено сравнение результатов, полученных при выборе числа членов при усечении рядов по данным формулам, на примере одной расчетной точки, на основании чего делается вывод, что расчетная величина достигает устойчивого значения раньше при использовании формулы (3), и эта формула применяется в их дальнейших расчетах.

В работах [64, 78] для случая звукопроницаемых сфер проведено сравнение двух подходов к усечению рядов в разложении. Численный анализ показал, что для определения числа членов при усечении рядов, позволяющего вычислить искомую функцию с заданной точностью, оптимальным является применение комбинированного подхода. А именно, с помощью *Подхода II* по формулам (3) и (4) определяется минимальное значение n_{tr}. Затем, начиная с этой минимальной величины, применяется *Подход I* до достижения необходимой точности. Для предотвращения накопления ошибок, связанных с экспоненциальным ростом сферических функций Ханкеля большого порядка, необходимо контролировать результат при превышении значений n_{tr}, полученных по формуле (4). В этом случае решение определяется в момент его стабилизации до начала экспоненциального роста, даже если заданная точность не достигнута.

3. Определение основных характеристик явления рассеяния

Для описания явления рассеяния традиционно вводится характеристика σ_s, называемая полным сечением рассеяния, величина которой определяется как отношение мощности рассеянной волны P_s к интенсивности падающей волны I_0 (см., например, [8, 9]), т.е. $\sigma_s = P_s/I_0$. Физический смысл величины σ_s — это площадь перпендикулярной потоку площадки (круга), попадая в которую налетающая частица испытывает рассеяние. В некоторых задачах рассматриваются также такие характеристики, как позиционное сечение рассеяния $\sigma(\theta, \varphi)$ (при рассмотрении интенсивности падающей волны в заданном направлении (θ, φ)) и сечение обратного рассеяния σ_L (при рассмотрении интенсивности рассеянной волны в направлении, противоположном падающей волне).

Впервые выражение полного сечения рассеяния для одиночного рассеивателя использовалось в классической работе [13]. В работе [32] получена формула для определения значения энергии рассеянной волны на идеальной жесткой сфере, что позволяет найти также и полное сечение рассеяния данной сферы. Расчеты показали, что в области, где диаметр сферы сравним с длиной волны, данная величина рассеяния является сложной функцией частоты, демонстрируя в некоторых случаях большие максимумы и минимумы.

Расчеты сечения рассеяния звука для воздушного пузырька в воде представлены в работе [81]. Показано, что помимо известного монопольного резонанса, существует большое число резонансов на более высоких частотах, которые меньше по величине, чем «гигантский» резонанс.

В работе [30] проведен численный анализ рассеянного поля вне сферы, заполненной пузырьками воздуха различных радиусов, имитирующей промысловые косяки пузырных рыб ограниченных размеров. Расчет сечения обратного рассеяния данной сферической (одиночной) области радиуса R в зависимости от волнового радиуса kR показал наличие глобального максимума, который обусловлен явлением резонанса системы вода–двухфазная область, аналогичного явлению резонанса воздушных пузырьков в жидкости; при дальнейшем увеличении kR имело место осцилляционное убывание, которое связано с характером интерференции волн, отраженных непосредственно от границы сферы и обогнувших ее, а также волн, прошедших внутрь сферы и вновь вышедших во внешнюю область; при $kR \to \infty$ величина обратного рассеяния выходит на асимптоту, которая определяется также, как и в случае плоской границы раздела вода–двухфазная среда [31]. В [30] также рассмотрена величина эффективного поперечного сечения поглощения сферической волны, анализ которой показал, что в случае реализации максимально возможного поглощения данная величина, как и величина обратного рассеяния, обратно пропорциональна $(kR)^2$ при $0 < kR \lesssim 1$.

Выражение сечения рассеяния на движущейся сфере малого радиуса a с постоянной скоростью, много меньшей скорости звука, получено в работе [34] для малых волновых радиусов ($ka \ll 1$) в приближении жесткой сферы. Показано, что в случае, когда звук распространяется по течению, интенсивность рассеянных полей уменьшается по сравнению с интенсивностью рассеянного поля на покоящейся сфере, а при распространении звука против течения — интенсивность увеличивается.

В работе [82] рассчитаны сечения рассеяния и поглощения резонансным газовым пузырьком в однородном жидком слое с учетом необратимых потерь энергии, которые вызывают силы пропорциональные скорости. Численно исследована зависимость сечений рассеяния и поглощения от потерь энергии. Получено, что сечение поглощения имеет максимум, который достигается при равенстве поглощенной и рассеянной мощности, а сечение рассеяния монотонно убывает.

Вывод формул для полного сечения рассеяния идеальной (звуконепроницаемой) и звукопроницаемой одиночных сфер при падении плоской волны представлен в работе [8]. Для идеальной сферы показано, что в случае малого волнового радиуса ($ka \ll 1$) полное сечение рассеяния малой мягкой сферы (когда рассеянное поле создается вследствие некоторого распределения нормальной скорости на ее поверхности) в четыре раза больше площади сечения сферы:

$$\sigma_s = 4\pi a^2,$$

тогда как сечение рассеяния малой жесткой сферы (когда рассеянное поле создается вследствие некоторого распределения давления на ее поверхности) во много раз меньше ее геометрического сечения пропорционально частоте в четвертой степени:

$$\sigma_s = \frac{7}{9}\pi a^2 (ka)^4,$$

что обусловливает усиление рассеяния в области высоких частот. А при рассеянии коротких волн ($ka \gg 1$) как для мягкой, так и для жесткой сфер, полное сечение рассеяния равно удвоенной площади круга радиуса a:

$$\sigma_s = 2\pi a^2,$$

при этом для мягкой сферы оно в два раза меньше, чем на низких частотах. Для звукопроницаемой малой сферы при $ka \ll 1$ для окружающей среды и $k_1 a \ll 1$ для среды внутри сферы выражение полного сечения рассеяния принимает следующий вид:

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \left[\left(\frac{1-\chi_1/\chi}{3\chi_1/\chi} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1-\rho_1/\rho}{1+2\rho_1/\rho} \right)^2 \right] (ka)^4,$$

где $\chi_1 = \rho_1 c_1^2$ — упругость вещества сферы; $\chi = \rho c^2$ — упругость окружающей среды; ρ и ρ_1 — плотность среды вне и внутри сферы; c и c_1 — скорость звука вне и внутри сферы. Последняя формула показывает, что рассеяние звука обладает следующими основными свойствами: если препятствие отличается от среды только сжимаемостью, т.е. $\rho_1 = \rho$, то рассеяние имеет монопольный тип; если только плотностью, т.е. $c_1 = c$, то — дипольный тип; сечение рассеяния пропорционально частоте в четвертой степени, что обуславливает увеличение рассеивающей способности препятствия с ростом частоты, т.е. обладает свойством рэлеевского рассеяния.

Формула для σ_s в случае звуконепроницаемой сферы с произвольным акустическим импедансом при падении сферической волны от монопольного источника излучения получена в работе [39]. Представлены численные расчеты зависимости данной характеристики от основных параметров системы (радиус и акустический импеданс сферы) для двух видов падающего поля (плоской волны и монопольного источника излучения). В работе [40] данная формула обобщена на случай звукопроницаемой одиночной сферы. Проведенный численный анализ влияния на данную характеристику таких физических параметров внешней и внутренней сред, как скорость звука c и плотность ρ при изменении значения волнового радиуса ka показал, что на рассеяние звуковой волны существенным образом влияет различие в скорости звука сред вне и внутри сферы, в то время как различие в плотности этих сред имеет несущественное значение.

Одной из первых работ, где исследовались характеристики рассеяния от пары сфер, является работа [19], в которой получено выражение сечения рассеяния для двух акустически жестких (или мягких) сфер одного и того же радиуса a при падении плоской волны с помощью теорем сложения для сферических волновых функций [83]. Показано, что в случае далеко расположенных друг от друга сфер в рэлеевском приближении (при малом значении волнового числа ka) коэффициент рассеяния $\sigma_s/(2\pi a^2) \approx 8$ для акустически мягких сфер и $\sigma_s/(2\pi a^2) \approx 2(ka)^4/3$ для акустически жестких сфер.

Численные расчеты сечения обратного рассеяния и его аппроксимации на бесконечности приведены в работе [15] при исследовании системы двух сфер для различных краевых условий на поверхности сфер в зависимости от расстояния между сферами и геометрических углов.

В работе [20] представлены результаты расчетов поперечного сечения обратного рассеяния двух жестких сфер при $ka = 2$, которые согласуются с результатами работы [15]. Представлен также численный анализ функции формы (form function), определяемой как квадратный корень сечения обратного рассеяния, для пары взаимодействующих звуконепроницаемых сфер в широких частотных диапазонах (от среднечастотной до резонансной областей), а также в широком диапазоне расстояний между сферами (от очень близких, когда сферы соприкасались друг с другом, до достаточно удаленных). В частности получено, что при увеличении расстояния между сферами одного радиуса данная функция является удвоенной по сравнению с аналогичной функцией, вычисленной в случае одиночной сферы того же радиуса.

Результаты расчета интегрального сечения рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах представлены в работе [47]. Частотный анализ асимптотических случаев позволил выделить, при каких параметрах задачи необходим учет эффектов многократного рассеяния.

Эксперименты по определению обратного рассеяния звука от системы двух воздушных пузырьков в воде представлены в работе [41]. Получено хорошее согласование с результатами теоретических расчетов данной работы. Подтверждено, что многократное рассеяние вызывает колебательное поведение около уровня точного когерентного рассеяния с уменьшающейся амплитудой при увеличении расстояния между пузырьками. Для расстояния d между пузырьками примерно равном половине длины волны λ ($d \approx \lambda/2$) обратно рассеянное излучение достигает максимума, в то время как для $d < \lambda/2$ данное излучение существенно уменьшается благодаря интерференции волн.

Численные расчеты функции формы в дальнем поле для системы двух жестких сфер в зависимости от волнового радиуса ka представлены в работе [48] для различных расстояний между сферами. Также проведено сравнение функций формы для двух сфер из нержавеющей стали в воде, полученных экспериментально и теоретически. Показано, что отклонения, обусловленные явлением интерференции, а также острые минимумы, соответствующие упругим резонансам, которые наблюдались в экспериментах, хорошо согласованы с теорией в случае бокового падения волны.

Численные расчеты сечения обратного рассеяния для простых кластеров из двух и трех пузырьков в различных конфигурациях и для разных углов падения плоской волны проведены в работе [58]. Получено, что для симметричных конфигураций взаимодействие между пузырьками приводит к понижению резонансной частоты кластера; для асимметричных конфигураций рассеяние порождает резкие резонансы на частотах, превышающих резонанс симметричной моды.

Аналитические выражения для сечений рассеяния (формфункции) системы, состоящей из двух сфер, одна из которых имеет акустически малый радиус, получены в работе [49]. С целью исследования влияния малой сферы на сечение рассеяния большой сферы приводятся и анализируются результаты расчетов по полученным формулам как для проницаемых, так и для непроницаемых сфер.

Выражение сечения рассеяния для системы из двух пузырьков было получено в работе [51] в приближении, что расстояние между центрами пузырьков меньше длины волны. Показано, что независимо от расстояния между двумя одинаковыми пузырьками поперечное сечение рассеяния имеет максимальное значение на частоте симметричной моды, в то время как резонанс на частоте антисимметричной моды не наблюдается. Однако утверждается, что усиление рассеяния, наблюдаемое вблизи симметричной резонансной частоты, связано с наличием антисимметричной моды.

Существующие работы по определению сечений рассеяния от множества (более двух) сфер ограничиваются рассмотрением предельных случаев. Так, в работе [22] представлена формула для полного сечения рассеяния для множества пузырьков в приближении

$$\left|\frac{4\pi n f_s^2}{k}\right| \ll 1,$$

где f_s — сила рассеяния отдельного рассеивателя (газового пузырька); n — объемная плотность рассеивателей в занимаемой ими области, которая является сферической радиуса R. Данное ограничение позволяет пренебречь обратным рассеянием между отдельными рассеивателями. В результате формула полного сечения рассеяния от системы пузырьков сводится к формуле σ_s для одиночной звукопроницаемой сферы радиуса R. Обоснованность данного подхода продемонстрирована на примере идеализированного сферического косяка рыб, имеющих плавательный пузырь.

4. Заключение

Представленный обзор научной литературы призван ознакомить с основными теоретическими методами решения задач акустического рассеяния волн от систем со сферическими рассеивателями и существующими экспериментальными работами по данной тематике, а также с анализом работ по теоретическому и численному определению основных характеристик явления рассеяния в решаемых задачах.

Подход, при котором вычисляется среднее значение рассеянного поля, позволяет рассматривать системы с большим числом случайно распределенных рассеивателей. Однако, из-за осреднения звукового поля при данном подходе нельзя определить давление в конкретной точке пространства, следовательно, такие эффекты, как повышение или понижение давления в некоторых зонах, не могут быть обнаружены. Второй подход позволяет найти решение в конкретной точке пространства, а значит и наглядно продемонстрировать полную картину распределения давления вне и внутри системы сфер, в том числе и для определения зон повышения и понижения давления. Однако, для большого числа сфер решение сводится к большим системам интегральных или алгебраических уравнений, что приводит к значительным затратам вычислительных ресурсов и процессорного времени. В рамках второго подхода предложен алгоритм построения вычислительного эксперимента, основанный на быстром методе мультиполей, адаптированный к задачам акустического рассеяния от множества сфер (см., например, [17] для звуконепроницаемых и [65] для звукопроницаемых сфер). Данная численная методика обеспечивает высокую точность результатов вычислительных экспериментов при минимальных затратах процессорного времени.

Анализ работ, в которых определяются основные характеристики явления рассеяния, такие как полное или сечение обратного рассеяния, применительно к задачам рассеяния акустических волн на сферах показал, что аналитические формулы и численные исследования ограничены случаями одиночной сферы или систем с двумя сферами. Следовательно, задача определения выражения для данных характеристик в общем случае для систем, состоящих из множества сфер в различных конфигурациях, сохраняет свою актуальность.

Список литературы

[1] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с.

[2] Сташкевич А.П. Акустика моря. Ленинград: Судостроение, 1966. 356 с.

[3] Каллистратова М.А. Радиоакустическое зондирование атмосферы. Москва: Наука, 1985. 197 с.

[4] Алешин Н.П., Щербинский В.Г. Радиационная, ультразвуковая и магнитная дефектоскопии металлоизделий. М.: Высшая школа, 1991. 271 с.

[5] Хилл К. Применение ультразвука в медицине: Физические основы. М: Мир, 1989. 589 с.

[6] Демин И.Ю., Прончатов–Рубцов Н.В. Современные акустические методы исследований в биологии и медицине / Учеб. метод. пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 121 с.

[7] Технология создания позиционируемого 3D звука. https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html (accessed: 22.12.2021).

[8] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.

[9] Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение. 1989. 304 с.

[10] Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

[11] Medwin H., Clay C.S. Fundamentals of Acoustical Oceanography. Academic Press, 1998. 739 p.

[12] Морз Ф. Колебания и звук. М.: ГИТТЛ, 1949. 496 с.

[13] Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers // Phys. Rev. 1945. V. 67. Pp. 107–109. DOI: 10.1103/PhysRev.67.107

[14] Waterman P.C., Truell R. Multiple Scattering of Waves // Journal of Mathematical Physics. 1961. V. 2, No. 4. Pp. 512–537. DOI: 10.1063/1.1703737

[15] Peterson B., Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56, No. 3. Pp. 771–780. DOI: 10.1121/1.1903325

[16] Koc S., Chew W.C. Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103, No. 2. Pp. 721–734. DOI: 10.1121/1.421231

[17] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112, No. 6. Pp. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253

[18] Марневская Л.А. К дифракции плоской скалярной волны на двух сферах // Акуст. журн. 1968. Т. 14, № 3. С. 427–434. http://www.akzh.ru/pdf/1968_3_427-434.pdf

[19] Марневская Л.А. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 4. С. 579–583. http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf

[20] Gaunaurd G.C., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair spheres //J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98, No. 1. Pp. 495–507. DOI: 10.1121/1.414447

[21] New R., Eisler T.J. Acoustic radiation from multiple spheres // Journal of Sound and Vibration. 1972. V. 22, No. 1. Pp. 1–17. DOI: 10.1016/0022-460x(72)90839-5

[22] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267. DOI: 10.1121/1.2793610

[23] Шарфарец Б.П. Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 5. С. 672–681.
eLIBRARY ID: 9136307

[24] Twersky V. Multiple Scattering of Waves and Optical Phenomena // Journal of the Optical Society of America. 1962. V. 52, No. 2. Pp. 145–171.
DOI: 10.1364/JOSA.52.000145

[25] Twersky V. Multiple Scattering by Arbitrary Configurations in Three Dimensions // Journal of Mathematical Physics. 1962. V. 3, No. 1. Pp. 83–91.
DOI: 10.1063/1.1703791

[26] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On the acoustic shadow of a sphere // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1904. V. 203. Pp. 87–99.
DOI: 10.1098/rsta.1904.0016

[27] Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. В 2 т. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1. 503 с.; Т. 2. 475 с.

[28] Wiener F.M. Sound Diffraction by Rigid Spheres and Circular Cylinders // J. Acoust. Soc. Am. 1947. V. 19, No. 3. Pp. 444–451.
DOI: 10.1121/1.1916501

[29] Завтрак С.Т. Рассеяние звуковой волны на облаке газовых пузырьков // Акуст. журнал, 1988. Т. 34, №. 1. С. 80–83.
http://www.akzh.ru/pdf/1988_1_80-83.pdf

[30] Бабайлов Э.П., Дубов А.А., Каневский В.А. Рассеяние звука поглощающей сферой // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 5. С. 851–857.
http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf

[31] Бабайлов Э.П., Дубов А.А. Отражение звука от скоплений газовых пузырей в жидкости // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 5. С. 779–783.
http://www.akzh.ru/pdf/1989_5_779-783.pdf

[32] Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1950. V. 22, No. 4. Pp. 426–431.
DOI: 10.1121/1.1906621

[33] Буланов В.А., Бьорно Л. Рассеяние звука сферой с учетом поглощения энергии // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 2. С. 252–259.
http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_252-259.pdf

[34] Алексеев В.Н., Семенов А.Г. Рассеяние звука движущейся сферой // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 5. С. 789–797.
http://www.akzh.ru/pdf/1992_5_789-797.pdf

[35] Аббасов И.Б., Заграй Н.П. Рассеяние взаимодействующих плоских акустических волн на сфере // Акуст. журн. 1994, Т. 40, № 4. С. 535–541.
eLIBRARY ID: 25627549

[36] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, No. 5. Pp. 3048–3058.
DOI: 10.1121/1.423886

[37] Ainslie M.A., Leighton T.G. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, No. 5. Pp. 3184–3208.
DOI: 10.1121/1.3628321

[38] Анненкова Е.А., Цысарь С.А., Сапожников О.А. Построение ультразвуковых изображений мягких сферических рассеивателей // Акуст. журн. 2016. Т. 62, № 2. С. 167–177.
DOI: 10.7868/S0320791916020027

[39] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звуконепроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82.
DOI: 10.21662/uim2017.1.011

[40] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79–91.
DOI: 10.21662/mfs2018.4.012

[41] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, No. 6. Pp. 3006–3017.
DOI: 10.1121/1.429330

[42] Zhou C.-C., Li W.-D., Dai W.-Sh. Acoustic scattering theory without large-distance asymptotics // J. Phys. Commun. 2018. V. 2, No. 4. Pp. 041002-1–041002-11.
DOI: 10.1088/2399-6528/aabb38

[43] Embleton T.F.W. Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34, No. 11. Pp. 1714–1720.
DOI: 10.1121/1.1909104

[44] Bruning J.H., Lo Y.T. Multiple scattering by spheres. UIUC EM Lab Technical Report, 1969. 169 p.

[45] Friedman B., Russek J. Addition theorems for spherical waves // Quarterly of Applied Mathematics. 1954. V. 12, No. 1. Pp. 13–23.
DOI: 10.1090/qam/60649

[46] Sack R.A. Three–Dimensional Addition Theorem for Arbitrary Functions Involving Expansions in Spherical Harmonics // Journal of Mathematical Physics. 1964. V. 5, No. 2. Pp. 252–259.
DOI: 10.1063/1.1704115

[47] Лебедев А.В., Хилько А.И. Интегральный поперечник рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 5. С. 661–667.
http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf

[48] Gabrielli P., Mercier-Finidori M. Acoustic Scattering by Two Spheres: Multiple Scattering and Symmetry Considerations // J. of Sound and Vibration. 2001. V. 241, No. 3. Pp. 423–439.
DOI: 10.1006/Jsvi.2000.3309

[49] Румелиотис Д.А., Котсис А.Д. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 1. С. 38–49.
eLIBRARY ID: 9441413

[50] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от пары звуконепроницаемых сфер при внешнем воздействии // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 44–51.
DOI: 10.21662/mfs2019.1.006

[51] Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 145, No. 1. Pp. 301–311.
DOI: 10.1121/1.5087556

[52] Feuillade C. Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98, No. 2. Pp. 1178–1190.
DOI: 10.1121/1.413616

[53] Feuillade C. The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99, No. 6. Pp. 3412–3430.
DOI: 10.1121/1.415216

[54] Silberman E. Sound Velocity and Attenuation in Bubbly Mixtures Measured in Standing Wave Tubes // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29, No. 8. Pp. 925-933.
DOI: 10.1121/1.1909101

[55] Fox F.E. Phase Velocity and Absorption Measurements in Water Containing Air Bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1955. V. 27, No. 3. Pp. 534–539.
DOI: 10.1121/1.1907955

[56] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from clusters of spheres using the fast multipole method // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117, No. 4. Pp. 1744–1761.
DOI: 10.1121/1.1853017

[57] Gumerov N.A., Duraiswami R. Recursions for the computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-D Helmholtz equation // SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. V. 25, No. 4. Pp. 1344–1381.
DOI: 10.1137/s1064827501399705

[58] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: 10.1121/1.1572141

[59] Кобелев Ю.А. К теории многократного рассеяния звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах // Акуст. журн. 2011. Т. 57, № 4. С. 443–449.
eLIBRARY ID: 16525802

[60] Кобелев Ю.А. Многократное рассеяние монопольного типа звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах // Акуст. журн. 2011. Т. 57, № 6. С. 731–740.
eLIBRARY ID: 16525802

[61] Silva G.T., Bruus H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid // Phys. Rev. E. 2014. V. 90, No. 6. Pp. 063007-1–063007-11.
DOI: 10.1103/PhysRevE.90.063007

[62] Lombard O., Barrière C., Leroy V. Nonlinear multiple scattering of acoustic waves by a layer of bubbles // Europhysics Letters, 2015. V. 112, No. 2. Pp. 24002-p1–24002-p6.
DOI: 10.1209/0295-5075/112/24002

[63] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101.
DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293

[64] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124.
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016

[65] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36.
DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003

[66] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 50–57.
DOI: 10.21662/mfs2021.2.008

[67] Senior T.B.A., Goodrich R.F. Scattering by a sphere // PROC. IEE. 1964. V. 111, No. 5. Pp. 907–916.
DOI: 10.1049/piee.1964.0145

[68] Rokhlin V. Sparse diagonal forms for translation operations for the Helmholtz Equation in two dimensions. Dept. Comput. Sci. Yale Univ., New Haven, CT, Res. Rep. YALEU/DCS/RR-1095, 1995.

[69] Koc S., Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem // SIAM J. Numer. Anal. 1999. V. 36, No. 3. Pp. 906–921.
DOI: 10.1137/s0036142997328111

[70] Darve E. The Fast Multipole Method I: Error Analysis and Asymptotic Complexity // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 38, No. 1. Pp. 98–128.
DOI: 10.1137/S0036142999330379

[71] Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Truncation of Multipole Expansion of Vector Green's Functions // IEEE Microwave and Wireless Components Letters. 2001. V. 11, No. 7. Pp. 311–313.
DOI: 10.1109/7260.933781

[72] Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Elsevier, 2004. 520 p.
DOI: 10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5

[73] Young J.W., Bertrand J.C. Multiple scattering by two cylinders // J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 58, No. 6. Pp. 1190–1195.
DOI: 10.1121/1.380792

[74] Nussenzveig H.M. Diffraction Effects in Semiclassical Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 238 p.
DOI: 10.1017/CBO9780511599903

[75] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.
DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030

[76] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech HouseAntennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.

[77] Carayol Q., Collino F. Error estimates in the fast multipole method for scattering problems. Part 1: Truncation of the Jacobi–Anger series // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2004. V. 38, No. 2. Pp. 371–394.
DOI: 10.1051/m2an:2004017

[78] Насибуллаева Э.Ш. Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 176–182.
DOI: 10.21662/mfs2020.3.128

[79] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1974. 832 с.

[80] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // Acoustical Physics. 2016. V. 62, No. 3. Pp. 280–291.
DOI: 10.1134/S1063771016030015

[81] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422.
DOI: 10.1121/1.2016503

[82] Лапин А.Д. Резонансное рассеяние звука пузырьком газа в жидком слое // Акуст. журн. 1998. Т. 44, № 3. С. 426–427.
http://www.akzh.ru/pdf/1998_3_426-427.pdf

[83] Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.

ISSN 2658–5782

16 (2021), **3-4**, 88–104

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2021.3.013
DOI: 10.21662/mfs2021.3.013

Received: 31.03.2021
Accepted: 20.04.2021

Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review)

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The investigation of the sound wave scattering phenomenon on small-sized inhomogeneities is important both for studying the fundamental nature of this phenomenon and from a practical point of view, since many applications of acoustic waves are based on scattering phenomenon, such as sonar, sounding of the atmosphere and ocean, non-destructive testing devices, creation of a positioned 3D sound, etc. In many systems under consideration, obstacles are spherical (or can be considered as such). Present review is devoted to the analysis of the main works on theoretical methods for solving problems of acoustic wave scattering on spheres and determining the main characteristics of this phenomenon, as well as on existing experimental works. Two theoretical approaches to solving the presented problem can be distinguished. In the first approach, it is assumed that the distribution of scatterers is random, and the average value of the scattered field is calculated. In the second approach, which is given the main attention in this paper, the solution is reduced to large system of integral or linear algebraic equations using various methods, such as the T-matrix method, addition theorems for spherical functions, Green's functions, integral equations. The first approach allows one to consider systems with a large number of randomly distributed particles, however, due to the averaging of the sound field, it is impossible to determine the pressure at a specific point in space. The second approach makes it possible to determine the zones of increasing and decreasing pressure, however, for a large number of spheres, the solution requires significant computing resources and processor time. The analysis of scientific papers that define the main characteristics of the scattering phenomenon, such as the total or back scattering cross-section, has shown that analytical formulas and numerical studies are limited to the cases of a single sphere or systems with two spheres. Thus the problem of determining the formulae for these characteristics in the general case remains unsolved and is relevant.

Keywords: acoustic scattering, soundproof sphere, sound-permeable sphere, sound field, total scattering cross-section, theoretical methods, experiment

References

[1] Ishimaru A. Wave Propagation Scattering in Random Media, 1st Edition. New York: Academic Press, 1978. 272 p.

[2] Stashkevich A.P. [Acoustics of the sea] *Akustika morya*. Leningrad: Sudostroenie, 1966. 356 p. (in Russian).

[3] Kallistratova M.A. [Radio-acoustic sounding of the atmosphere] *Radioakusticheskoe zondirovanie atmosfery*. Moscow: Nauka, 1985. 197 p. (in Russian).

[4] Alyoshin N.P., Shcherbinsky V.G. [Radiation, ultrasonic and magnetic flaw detection of metal products] *Radiacionnaya, ul'trazvukovaya i magnitnaya defektoskopiya metalloizdelij*. Moscow: Vysshaya Shkola, 1991. 271 p. (in Russian).

[5] Physical principles of medical ultrasonics / Eds.: C.R. Hill. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1986. 494 p.

[6] Demin I.Yu., Pronchatov–Rubtsov N.V. [Modern acoustic research methods in biology and medicine] *Sovremennye akusticheskie metody issledovanij v biologii i medicine* / Educational methodological manual. Nizhnij Novgorod: Izdatel'stvo NNGU, 2007. 121 p. (in Russian).

[7] Technology for creating positioned 3D sound. https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html (accessed: 22.12.2021).

[8] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. [Basics of acoustics] *Osnovy akustiki*. Kiev: Naukova Dumka, 2009. 867 p. (in Russian).

[9] Shenderov E.L. [Radiation and scattering sound] *Izluchenie i rasseyanie zvuka*. Leningrad: Sudostroenie. 1989. 304 p. (in Russian).

[10] Isakovich M.A. [General acoustics] *Obshhaya akustika*. Moscow: Nauka, 1973. 496 p. (in Russian).

[11] Medwin H., Clay C.S. Fundamentals of Acoustical Oceanography. Academic Press, 1998. 739 p.

[12] Morse P.M. Vibration and Sound, second edition. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1948. 468 p.

[13] Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. Phys. Rev. 1945. V. 67. Pp. 107–109.
DOI: 10.1103/PhysRev.67.107

[14] Waterman P.C., Truell R. Multiple Scattering of Waves. Journal of Mathematical Physics. 1961. V. 2, No. 4. Pp. 512–537.
DOI: 10.1063/1.1703737

[15] Peterson B., Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56, No. 3. Pp. 771–780.
DOI: 10.1121/1.1903325

[16] Koc S., Chew W.C. Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers. J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103, No. 2. Pp. 721–734.
DOI: 10.1121/1.421231

[17] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112, No. 6. Pp. 2688–2701.
DOI: 10.1121/1.1517253

[18] Marnevskaya L.A. [On diffraction of a plane scalar wave on two spheres]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1968. V. 14, No. 3. Pp. 427–434 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1968_3_427-434.pdf

[19] Marnevskaya L.A. [To scattering of a plane wave on two acoustic rigid spheres]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1969. V. 15, No. 4. Pp. 579–583 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf

[20] Gaunaurd G.C., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair spheres. J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98, No. 1. Pp. 495–507.
DOI: 10.1121/1.414447

[21] New R., Eisler T.J. Acoustic radiation from multiple spheres. Journal of Sound and Vibration. 1972. V. 22, No. 1. Pp. 1–17.
DOI: 10.1016/0022-460x(72)90839-5

[22] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory. J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267.
DOI: 10.1121/1.2793610

[23] Sharfarets B.P. Method for solving the problems of multiple scattering by several bodies in a homogeneous unbounded medium. Acoustical Physics. 2005. V. 51, No. 5. Pp. 578–586.
DOI: 10.1134/1.2042578

[24] Twersky V. Multiple Scattering of Waves and Optical Phenomena. Journal of the Optical Society of America. 1962. V. 52, No. 2. Pp. 145–171.
DOI: 10.1364/JOSA.52.000145

[25] Twersky V. Multiple Scattering by Arbitrary Configurations in Three Dimensions. Journal of Mathematical Physics. 1962. V. 3, No. 1. Pp. 83–91.
DOI: 10.1063/1.1703791

[26] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On the acoustic shadow of a sphere. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1904. V. 203. Pp. 87–99.
DOI: 10.1098/rsta.1904.0016

[27] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) The Theory of Sound, 2nd ed. Vols. 1 and 2. New York: Dover, 1945.

[28] Wiener F.M. Sound Diffraction by Rigid Spheres and Circular Cylinders. J. Acoust. Soc. Am. 1947. V. 19, No. 3. Pp. 444–451.
DOI: 10.1121/1.1916501

[29] Zavtrak S.T. [Sound wave scattering on a cloud of gas bubbles]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1988. V. 34, No. 1. Pp. 80–83 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1988_1_80-83.pdf

[30] Babaylov E.P., Dubov A.A., Kanevskii V.A. [Sound scattering by an absorbing sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1991. V. 37, No. 5. Pp. 851–857 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf

[31] Babailov E.P., Dubov A.A. [Sound reflection from gase bubble groupings in a liquid]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1989. V. 35, No. 5. Pp. 779–783 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1989_5_779-783.pdf

[32] Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere. J. Acoust. Soc. Am. 1950. V. 22, No. 4. Pp. 426–431.
DOI: 10.1121/1.1906621

[33] Bulanov V.A., Bjorno L. [Sound scattering on a sphere taking account of the energy absorption]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1992. V. 38, No. 2. Pp. 252–259 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_252-259.pdf

[34] Alexeev V.N., Semyonov A.G. [Sound scattering by moving sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1992. V. 38, No. 5. Pp. 789–797 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1992_5_789-797.pdf

[35] Abbasov I.B., Zagrai N.P. [Scattering of Interacting Plane Waves by a Sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1994. V. 40, No. 4. Pp. 535–541 (in Russian).
eLIBRARY ID: 25627549

[36] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model. J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, No. 5. Pp. 3048–3058.
DOI: 10.1121/1.423886

[37] Ainslie M.A., Leighton T.G. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble. J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, No. 5. Pp. 3184–3208.
DOI: 10.1121/1.3628321

[38] Annenkova E.A., Tsysar' S.A., Sapozhnikov O.A. Constructing ultrasonic images of soft spherical scatterers. Acoustical Physics. 2016. V. 62, No. 2. Pp. 169–178.
DOI: 10.1134/S1063771016020020

[39] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of scattering from soundproof single sphere under external influence]. *Trudy Instituta mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo centra RAN* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 73–82 (in Russian).
DOI: 10.21662/uim2017.1.011

[40] Nasibullaeva E.Sh. [The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 4. Pp. 79–91 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2018.4.012

[41] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers. J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, No. 6. Pp. 3006–3017.
DOI: 10.1121/1.429330

[42] Zhou C.-C., Li W.-D., Dai W.-Sh. Acoustic scattering theory without large-distance asymptotics. J. Phys. Commun. 2018. V. 2, No. 4. Pp. 041002-1–041002-11.
DOI: 10.1088/2399-6528/aabb38

[43] Embleton T.F.W. Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field. J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34, No. 11. Pp. 1714–1720.
DOI: 10.1121/1.1909104

[44] Bruning J.H., Lo Y.T. Multiple scattering by spheres. UIUC EM Lab Technical Report, 1969. 169 p.

[45] Friedman B., Russek J. Addition theorems for spherical waves. Quarterly of Applied Mathematics. 1954. V. 12, No. 1. Pp. 13–23.
DOI: 10.1090/qam/60649

[46] Sack R.A. Three–Dimensional Addition Theorem for Arbitrary Functions Involving Expansions in Spherical Harmonics. Journal of Mathematical Physics. 1964. V. 5, No. 2. Pp. 252–259.
DOI: 10.1063/1.1704115

[47] Lebedev A.V., Hil'ko A.I. [The Integral Scattering Cross-Section of a Plane Acoustic Wave from Two Dose Impedance Spheres]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1997. V. 43, No. 5. Pp. 661–667 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf

[48] Gabrielli P., Mercier-Finidori M. Acoustic Scattering by Two Spheres: Multiple Scattering and Symmetry Considerations // J. of Sound and Vibration. 2001. V. 241, No. 3. Pp. 423–439.
DOI: 10.1006/Jsvi.2000.3309

[49] Roumeliotis J.A., Kotsis A.D. Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius. Acoustical Physics. 2007. V. 53, No. 1. Pp. 33–43.
DOI: 10.1134/S1063771007010046

[50] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 1. Pp. 44–51 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.006

[51] Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles. J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 145, No. 1. Pp. 301–311.
DOI: 10.1121/1.5087556

[52] Feuillade C. Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances. J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98, No. 2. Pp. 1178–1190.
DOI: 10.1121/1.413616

[53] Feuillade C. The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles. J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99, No. 6. Pp. 3412–3430.
DOI: 10.1121/1.415216

[54] Silberman E. Sound Velocity and Attenuation in Bubbly Mixtures Measured in Standing Wave Tubes. J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29, No. 8. Pp. 925-933.
DOI: 10.1121/1.1909101

[55] Fox F.E. Phase Velocity and Absorption Measurements in Water Containing Air Bubbles. J. Acoust. Soc. Am. 1955. V. 27, No. 3. Pp. 534–539.
DOI: 10.1121/1.1907955

[56] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from clusters of spheres using the fast multipole method. J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117, No. 4. Pp. 1744–1761.
DOI: 10.1121/1.1853017

[57] Gumerov N.A., Duraiswami R. Recursions for the computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-D Helmholtz equation. SIAM Journal on Scientific Computing. 2003. V. 25, No. 4. Pp. 1344–1381.
DOI: 10.1137/s1064827501399705

[58] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water. J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: 10.1121/1.1572141

[59] Kobelev Yu.A. On the theory of multiple scattering of sound waves by spherical particles in liquid and elastic media. Acoustical Physics. 2011. V. 57, No. 4. Pp. 447–453.
DOI: 10.1134/S1063771011040129

[60] Kobelev Yu.A. Multiple monopole scattering of sound waves from spherical particles in liquid and elastic media. Acoustical Physics. 2011. V. 57, No. 6. Pp. 749–758.
DOI: 10.1134/S1063771011050095

[61] Silva G.T., Bruus H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid. Phys. Rev. E. 2014. V. 90, No. 6. Pp. 063007-1–063007-11.
DOI: 10.1103/PhysRevE.90.063007

[62] Lombard O., Barrière C., Leroy V. Nonlinear multiple scattering of acoustic waves by a layer of bubbles. Europhysics Letters, 2015. V. 112, No. 2. Pp. 24002-p1–24002-p6.
DOI: 10.1209/0295-5075/112/24002

[63] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian).
DOI: 10.54708/19926502_2021_2529293

[64] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016

[65] Nasibullaeva E.S. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye texnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian).
DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003

[66] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 2. Pp. 50–57 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2021.2.008

[67] Senior T.B.A., Goodrich R.F. Scattering by a sphere. PROC. IEE. 1964. V. 111, No. 5. Pp. 907–916.
DOI: 10.1049/piee.1964.0145

[68] Rokhlin V. Sparse diagonal forms for translation operations for the Helmholtz Equation in two dimensions. Dept. Comput. Sci. Yale Univ., New Haven, CT, Res. Rep. YALEU/DCS/RR-1095, 1995.

[69] Koc S., Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem. SIAM J. Numer. Anal. 1999. V. 36, No. 3. Pp. 906–921.
DOI: 10.1137/s0036142997328111

[70] Darve E. The Fast Multipole Method I: Error Analysis and Asymptotic Complexity. SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 38, No. 1. Pp. 98–128.
DOI: 10.1137/S0036142999330379

[71] Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Truncation of Multipole Expansion of Vector Green's Functions. IEEE Microwave and Wireless Components Letters. 2001. V. 11, No. 7. Pp. 311–313.
DOI: 10.1109/7260.933781

[72] Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Elsevier, 2004. 520 p.
DOI: 10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5

[73] Young J.W., Bertrand J.C. Multiple scattering by two cylinders. J. Acoust. Soc. Am. 1975. V. 58, No. 6. Pp. 1190–1195.
DOI: 10.1121/1.380792

[74] Nussenzveig H.M. Difraction Effects in Semiclassical Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 238 p.
DOI: 10.1017/CBO9780511599903

[75] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders. J. Comput. Phys. 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.
DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030

[76] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech House-Antennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.

[77] Carayol Q., Collino F. Error estimates in the fast multipole method for scattering problems. Part 1: Truncation of the Jacobi–Anger series. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2004. V. 38, No. 2. Pp. 371–394.
DOI: 10.1051/m2an:2004017

[78] Nasibullaeva E.Sh. [Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 176–182 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2020.3.128

[79] Korn G.A., Korn Th.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.

[80] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case. Acoustical Physics. 2016. V. 62, No. 3. Pp. 280–291.
DOI: 10.1134/S1063771016030015

[81] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid. J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422.
DOI: 10.1121/1.2016503

[82] Lapin A.D. [Resonance Sound Scattering of a Gas Bubble in a Layer of Liquid]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1998. V. 44, No. 3. Pp. 426–427 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1998_3_426-427.pdf

[83] Ivanov Ye.A. Diffraction of electromagnetic waves on two bodies. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1970. 597 p.