

ISSN: 2658–5782

Номер 1

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Снижение систематической погрешности среднего расхода жидкости в осесимметричной компьютерной модели пьезоэлектрического микронасоса¹

Насибуллаев И.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются математическая и компьютерная модели осесимметричной связанной задачи взаимодействия жидкости и упругого тела для программы решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов FreeFem++. В данных моделях периодические колебания кольцевых пьезоэлектрических элементов, размещенных на эластичной трубке круглого сечения, приводят к радиальным деформациям трубки. При синхронном колебании системы пьезоэлементов средний расход жидкости равен нулю. Несимметричная схема колебаний (режим микронасоса) приводит к ненулевому среднему расходу жидкости. Рассматриваются два вида граничных условий в области контакта пьезопривода и трубки – Дирихле и Неймана. Компьютерная модель тестировалась для нестационарного течения жидкости, индуцированного приложенным вдоль слоя градиентом давления в трубке с круглым сечением. При синхронном колебании пьезоэлементов отличное от нуля среднее течение жидкости является систематической погрешностью. Данное значение сравнивалось с несимметричной схемой колебаний пьезоэлементов для определения вклада систематической погрешности в генерируемый насосом расход жидкости. По профилю скорости течения жидкости и результатам профилирования кода программы определены оптимальные параметры расчетных сеток для канала (плотная равномерная) и стенки трубки (неравномерная, согласованная с профилем скорости и перестраивающаяся на каждом временном шаге), которые снижают величину систематической погрешности. Основной способ снижения погрешности – увеличение плотности расчетной сетки – ведет к росту требуемых вычислительных ресурсов. Предлагается альтернативный способ снижения систематической погрешности за счет приложенного к каналу дополнительного перепада давления. В зависимости от вида граничных условий и количества пьезоэлементов данный способ позволяет снизить систематическую погрешность на 1–2 порядка без увеличения времени моделирования.

Ключевые слова: гидродинамика, гидросопротивление, пьезоэлемент, линейная упругость, микроканал, метод конечных элементов, микронасос

1. Введение

Развитие микрофлюидики активно продолжается последние три десятилетия [1]. Интерес к данной области связан с особенностями течения жидкости в микро- и наномасштабах, позволяющими разрабатывать устройства с новыми или даже не имеющими аналогов в традиционных макросистемах свойствами. Базовые характеристики микро-

устройств в большей мере зависят от принципа работы и конструкции микронасосов, а также жиклеров (гидросопротивлений). Так, малые площади проходных сечений требуют более тщательной изоляции жидкости от рабочих элементов и полного отсутствия фактора загрязнения. Поэтому наибольшее распространение получили перистальтические насосы, так как в них контакт с рабочей жидкостью имеет только гибкая трубка [2], а подвижные элементы конструкции, являющиеся источником загрязнения, от жидкости изолированы. При расчетах производительности насоса исполь-

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № 0246-2018-007.

зуются только эмпирические формулы, не учитывающие специфику применения и масштабный фактор, не анализируется величина пульсаций расхода жидкости, а значит требуется разработка более точных математических и компьютерных моделей.

С уменьшением масштаба системы числа Рейнольдса и Пекле, характеризующие динамические свойства системы, становятся малыми. Малое число Рейнольдса подразумевает ламинарный характер течения, соответствующий как большинству технических микроустройств, так и биологическим системам [3]. А малое число Пекле означает, что при теплопереносе вклад молекулярной теплопроводности преобладает над конвективным переносом тепла, следовательно, в микроустройствах (микротеплообменник, система охлаждения, микрозахват) необходимо учитывать оба механизма теплопереноса [4].

Интенсивный рост производства микроэлектромеханических систем и широкое внедрение микророботов и микротехнологических комплексов является весомым стимулом для разработки новых перспективных устройств, обеспечивающих бережное манипулирование микрокомпонентами. Автором настоящей работы разработан и исследуется капиллярный микрозахват [5–7] для манипуляций с плоскими микрообъектами и мембранами, обладающими достаточной площадью плоской стороны, но недостаточной для удержания пальцевыми захватами толщиной. Создание макета данного микрозахвата, построенного на базе миниатюрного варианта термоэлектрического модуля (элемента Пельтье), предполагает использование жидкостного охлаждения для отвода тепла от горячей поверхности элемента Пельтье. Отвод тепловой мощности от элемента Пельтье требует разработки конструкции комплектного миниатюрного насоса, а обеспечение режимов работы микрозахвата — соответствующей математической модели, учитывающей специфику микрофлюидики.

Существующие микронасосы применяются во многих областях [8]: биологические системы и медицина (система доставки лекарств), системы охлаждения (прокачка хладагента через теплообменник), исследование космоса (высоковакуумные насосы), перекачивание жидкости с высокой скоростью (центробежные насосы с высоким числом Рейнольдса), перекачивание специальных жидкостей (электродинамические и магнетогидродинамические насосы). Производимые модели микронасосов трудно адаптировать для системы охлаждения микрозахвата, поскольку требуется микронасос малого размера с гибкой системой управления расходом жидкости. Кроме того, разработанные для этих

микронасосов теоретические модели также основаны на эмпирических данных, что не позволяет провести полную геометрическую оптимизацию конструкции и определить оптимальные режимы работы. С другой стороны, генерация течения жидкости в упругом микроканале относится к области междисциплинарной физики, а, именно, к взаимодействию жидкости и упругого тела (fluid-structure interaction, FSI) [9]. Все это требует при разработке новых технических устройств построения новых математических моделей, связывающих гидродинамику, теорию упругости, процесс теплопереноса, параметрическую оптимизацию и теорию управления устройством.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированного внешним воздействием (перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, автором настоящей работы были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для одного элемента технического устройства. Модель поршня для осциллирующего перепада давления, учитывающая пять параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения), была построена в работе [10] методами факторного вычислительного эксперимента 2-го порядка.

С развитием математических и компьютерных моделей появились пакеты численного моделирования, использующие метод конечных элементов (КЭ), которые позволяют проводить моделирование устройств с практически произвольной геометрией [11]. В работе [12] была построена осесимметричная компьютерная модель FSI для взаимодействия ньютоновской жидкости с гиперэластичным несжимаемым телом и с использованием моделирования методом КЭ проведен анализ устойчивости дифференциальных уравнений, записанных в вариационной форме в пакете численного моделирования FreeFem++ [13]. Была разработана модель микронасоса, создающего течение жидкости (с расходом до 50 мкл/с) в плоском канале с погруженным в него пьезоэлементом с поперечным изгибом [14].

В работе [15] представлена методика построения элемента вычислительного стенда в виде аналитической формулы на основе трехмерного моделирования течения жидкости через эластичный микроканал, деформируемый пьезоэлементом по гармоническому закону, с вариантами использования полученных результатов в практических при-

ложениях. Построена компьютерная модель управления режимом течения жидкости, индуцированного приложенным вдоль канала перепадом давления с учетом величины перепада давления и частоты сжатия трубки пьезоэлементом. Модель является частью жидкостной системы охлаждения микрозахвата.

В работе [16] предложена осесимметричная компьютерная модель пьезоэлектрического микронасоса, состоящего из эластичной трубки и системы круговых пьезоэлектрических элементов, а также проведен анализ режимов его работы. На границе пьезоэлементов с трубкой задаются граничные условия Дирихле. При несимметричной схеме колебаний пьезоэлементов создается гидросопротивление [17–19], что позволяет генерировать ненулевой средний поток жидкости. Получены зависимости среднего расхода жидкости от времени, частоты колебаний пьезоэлементов и внутреннего диаметра трубки. В [20] на границе пьезоэлементов с трубкой задаются граничные условия Дирихле или Неймана, проводится параметрический анализ работы микронасоса и определяются режимы, при которых отсутствует обратное распространение тепла от микрозахвата к микронасосу. При малых частотах колебаний пьезоэлементов (меньше 1 кГц) модели имели высокую погрешность, что ограничивало область применения более высокими частотами.

В настоящей работе рассматривается расширенная осесимметричная модель пьезоэлектрического микронасоса [16, 20], учитывающая как граничные условия Дирихле, так и Неймана, для анализа источников и величин погрешностей с целью снижения систематической погрешности среднего расхода жидкости.

2. Постановка задачи и основные уравнения

В работе рассматривается осесимметричное течение жидкости через упругую микротрубку с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами и длиной L , центральная часть которой расположена внутри системы кольцевых пьезоэлементов длиной ℓ . На рис. 1 представлена геометрия задачи и введены следующие обозначения: Γ_1 и Γ_2 — входное и выходное отверстия микроканала соответственно; Γ_3 — ось симметрии; Γ_4 , Γ_5 и Γ_6 — внутренняя, боковая и внешняя стенки микротрубки соответственно; Γ_i^p — контакт i -го пьезоэлемента с внешней стенкой микротрубки. Используется осесимметричная цилиндрическая система координат с началом отсчета O , расположенным в геомет-

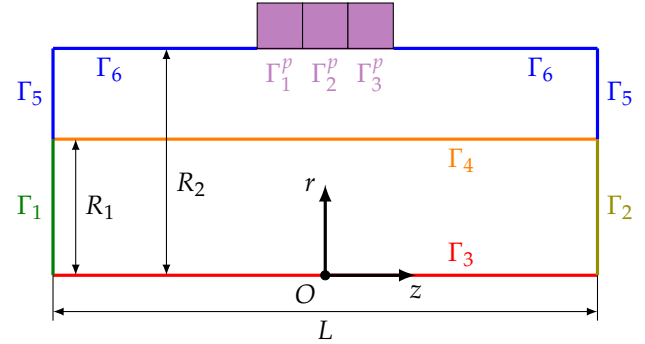


Рис. 1. Геометрия пьезонасоса

рическом центре трубки. Радиальная и осевая координаты обозначены через r и z соответственно.

Течение жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением несжимаемости в осесимметричной геометрии [21]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right], \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$ — вектор скорости жидкости состоящий из радиальной и осевой компонент; t — время; p — давление; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Деформации упругого микроканала описываются уравнениями Навье–Коши [22]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\eta) \left(\frac{\partial^2 s_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial r} - \frac{s_r}{r^2} \right) + \\ + (\lambda + \eta) \frac{\partial^2 s_z}{\partial r \partial z} + \eta \frac{\partial^2 s_r}{\partial z^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\eta) \frac{\partial^2 s_z}{\partial z^2} + (\lambda + \eta) \left(\frac{\partial^2 s_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial z} \right) + \\ + \eta \left(\frac{\partial^2 s_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_z}{\partial r} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = (s_r, s_z)$ — вектор деформации, состоящий из радиальной и осевой компонент; λ и η — коэффициенты Ламе, связанные с модулем упругости Юн-

га E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \eta = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Отметим, что стационарные уравнения Навье–Коши (2) применимы для частоты колебаний пьезоэлементов до $f_e = 100$ кГц, поскольку время упругой релаксации составляет $\tau_e = R_1 \sqrt{\rho_e / E} \approx 10^{-7}$ с, где ρ_e — плотность материала трубки. В реальных кольцевых пьезоэлементах максимальная частота колебаний ограничена резонансной частотой f_r , которая обычно меньше, чем f_e (для пьезоэлементов, выполненных на основе цирконат-титанат свинца f_r имеет порядок 20...30 кГц [23], 25 кГц [24], 50 кГц [25], 40...90 кГц [26]). Таким образом, предельная допустимая частота, для которой применима модель, определяется как $\min(f_e, f_r)$. Для большей частоты необходимо рассматривать динамические уравнения. Относительные деформации составляют до 0.5 %, поэтому погрешность решения линейных уравнений упругости мала.

Уравнения (1) и (2) решались численно методом КЭ в пакете численного моделирования FreeFem++ [13, 27], где интегрирование проводится в декартовых координатах по элементу площади $dS = dx dy$. Следовательно, необходимо провести преобразование данного элемента площади в цилиндрические координаты (с элементом площади $d\Omega = dz dr$) по правилу $dS = J d\Omega$, где $J = r$ — якобиан преобразования декартовых координат в цилиндрические.

Проведенный численный анализ показал, что при использовании схемы Эйлера осесимметричная вариационная форма уравнений Навье–Стокса быстро теряет устойчивость. Устойчивость схемы обеспечивается с помощью метода характеристик Галеркина для аппроксимации полной производной по времени [12]. Для этого левые части первых двух уравнений (1) преобразовывались по следующей формуле:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n}{\tau},$$

где индексы n и $n + 1$ относятся к предыдущему и текущему моментам времени, τ — шаг по времени и введено обозначение $\mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n(x) = \mathbf{u}^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}^n(\mathbf{x})\tau)$.

Умножая уравнения гидродинамики (1) на якобиан r получим осесимметричную

вариационную форму:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho \frac{u_r^{n+1} - u_r^n \circ \mathbf{X}^n}{\tau} w_r + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial r} w_r + \right. \\ & \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial u_r^{n+1}}{\partial r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{n+1}}{\partial z} \frac{\partial w_r}{\partial z} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{u_r^{n+1}}{r^2} w_r \right) \right] r d\Omega = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[\rho \frac{u_z^{n+1} - u_z^n \circ \mathbf{X}^n}{\tau} w_z + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} w_z + \right. \\ & \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial u_z^{n+1}}{\partial r} \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{n+1}}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] r d\Omega = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[u_r^{n+1} \frac{\partial w_p}{\partial r} r + u_z^{n+1} \frac{\partial w_p}{\partial z} r - u_r^{n+1} w_p - \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon_p p^{n+1} w_p r \right] d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где w_r, w_z и w_p — пробные функции; малая величина $\varepsilon_p = 10^{-10}$ представляет собой искусственную сжимаемость и введена для повышения устойчивости расчетной схемы в пакете FreeFem++.

Аналогично, для уравнений упругости (2) с помощью замены

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{\partial u_i}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \left(\frac{\partial s_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} r + \frac{s_r}{r} v_r \right) + \right. \\ & \quad \left. + (\lambda + \eta) \frac{\partial s_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} r + \eta \frac{\partial s_r}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] d\Omega = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \frac{\partial s_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} r + \right. \\ & \quad \left. + (\lambda + \eta) \left(\frac{\partial s_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial s_r}{\partial z} v_z \right) + \right. \\ & \quad \left. + \eta \frac{\partial s_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} r \right] d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где v_r и v_z — пробные функции

Начальные условия соответствуют отсутствию деформаций на внешней стенке $\mathbf{s} = 0$ и покоящейся жидкости $\mathbf{u} = 0$.

Граничные условия на скорость жидкости имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \Gamma_1 : u_r = 0, p = -\Delta p/2; \\ \Gamma_2 : u_r = 0, p = \Delta p/2; \\ \Gamma_3 : u_r = 0; \\ \Gamma_4 : u_r = 0, u_z = 0, \end{cases}$$

где Δp — разность давлений на входном и выходном отверстиях трубки.

Микротрубка закреплена на концах, то есть

$$\Gamma_5 : s_r = 0, s_z = 0. \quad (5)$$

Граничные условия Неймана для деформаций определяются из условия равновесия $\sigma_{rr} = -p_i^p(t)$, где компонента тензора напряжений σ_{rr} уравновешивается давлением $-p_i^p(t)$, оказываемым на трубку i -м пьезоэлементом на границе Γ_i^p :

$$\int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \frac{\partial s_r}{\partial r} v_r + \lambda \frac{s_r}{r} + \lambda \frac{\partial s_z}{\partial z} - p_i(t)^p \right] r d\Omega = 0. \quad (6)$$

Поскольку концы микротрубки закреплены (5), то в условии (6) необходимо запретить осевые перемещения $s_z = 0$, следовательно, граничные условия Неймана примут следующий вид:

$$\int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \frac{\partial s_r}{\partial r} v_r + \lambda \frac{s_r}{r} - p_i(t)^p \right] r d\Omega = 0. \quad (7)$$

При использовании граничных условий Дирихле перемещения пьезоэлементов задаются на величину $s_{r,i}^p(t)$, то есть данные условия имеют вид:

$$\Gamma_i^p : s_r = s_{r,i}^p(t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (8)$$

Для устойчивости численной схемы вводится дополнительное условие на Γ_3 : $\mathbf{s} = 0$.

Отметим физический смысл граничных условий Неймана и Дирихле. Граничные условия Неймана означают «мягкий» пьезоэлемент, форма которого при сжатии меняется (но не меняется область контакта), а граничные условия Дирихле — «жесткий» пьезоэлемент, форма которого при сжатии не меняется.

Зависимость давления пьезоэлемента на внешнюю стенку микроканала определяется в виде $p^p(t) = \max(p^p) f_p(t)$, а перемещения — в виде $s_{r,i}^p(t) = s_r^p f_p(t)$, где форма сигнала $f_p(t)$ является нормированной в области $[0, 1]$ гармонической функцией с частотой колебаний f :

$$f_p(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2\pi f t) \right).$$

3. Результаты

Численное моделирование проводилось для упругой трубки длиной $L = 10$ мм с круглым сечением, внутренним радиусом $R_1 = 1$ мм и внешним радиусом $R_2 = 1.75$ мм. Кольцевые пьезоэлементы длиной $\ell = 1$ мм располагались симметрично относительно центра трубки. Рассматривались конфигурации с одним и тремя пьезоэлементами ($N_p = 1, 3$). В качестве материала трубки выбрана силиконовая резина с модулем Юнга $E = 5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.49$. В качестве рабочей жидкости используется вода при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$ с объемной плотностью $\rho = 998$ кг/м³ и динамической вязкостью $\mu = 1.002$ мПа·с.

Течение жидкости в канале можно создать двумя способами: с помощью приложенного к каналу перепада давления Δp и путем периодических синхронных сжатий N_p пьезоэлементов.

Моделирование проводится на двух двумерных согласованных между собой расчетных сетках в плоскости Ozr . Сначала решаются уравнения упругости на сетке, определяющей стенку трубки. По полученному полю деформации на каждом шаге по времени расчетная сетка для канала перестраивается, поскольку внутренняя поверхность трубки, деформированная пьезоэлементами, определяет внешнюю границу канала. Затем на расчетной сетке канала решаются уравнения гидродинамики.

Для предотвращения появления ошибки, связанной с перемещением узлов одного КЭ внутри другого КЭ (появления отрицательных объемов $V_e \leq 0$), при перестроении расчетной сетки для канала был разработан алгоритм «безопасной» перестройки сетки, в котором в случае возникновения отрицательных объемов меняется коэффициент трансформации, а в противном случае происходит трансформация; проверка проводится до полной трансформации расчетной сетки [20]. Для реализации алгоритма использовались следующие средства FreeFem++: проверка возможности появления отрицательных объемов *checkmovemesh*, трансформация сетки *movemesh* и адаптация сетки *adaptmesh*.

В качестве параметра расчета задавалась одинаковая для всех пьезоэлементов амплитуда радиального сжатия $s_{r,i}^p = s_p = 0.5$ мкм, которая непосредственно использовалась в граничных условиях Дирихле (8). Для того, чтобы в граничных условиях Неймана (7) обеспечить такую же амплитуду [28], проводился предварительный расчет с одновременным сжатием всех пьезоэлементов с амплитудой давления p_0 и определялась величина сжатия s_0 . Поскольку уравнения упругости линейные, то величина давления p_p , при которой пье-

зоэлемент будет сжиматься на s_p , определяется как $p_p = p_0 \cdot s_p / s_0$. В результате получена расчетная величина $p_p = 395$ кПа. Отношение коэффициента передачи деформации от пьезоэлемента к внутренней стенке трубки k_s составило 0.81 для граничных условий Неймана и 1 для граничных условий Дирихле. Максимальное значение блокирующей силы (сила реакции, возникающая в области контакта пьезоэлемента и трубки) не превышало значения 4.5 Н, что укладывается в технические характеристики кольцевых пьезоэлектрических приводов (10–15 Н [26]).

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что деформации микроканала малы (0.5 % от радиуса) и при высоких частотах колебаний скорости течения жидкости высоки (несколько мм/с). Следовательно, возможны большие погрешности численного расчета, зависящие от шага по времени τ и размера элементов расчетной сетки ℓ_m . Обозначим через m количество граничных элементов расчетной сетки трубки, приходящихся на один пьезоэлемент; n — число шагов по времени за каждый полупериод колебания пьезоэлемента; N_p — количество пьезоэлементов. Расчетные сетки для микроканала и трубки согласованы: граничные элементы на линии контакта сеток совпадают.

3.1. Тестирование компьютерной модели

Исследуем симметричный случай для $N_p = \{1, 3\}$ синхронно работающих пьезоэлементов на частоте $f = 1$ кГц с плотностью расчетной сетки $n = \{12, 18, 24\}$ и $m = \{20, 40\}$ временными интервалами, приходящимися на один период сжатия–растяжения пьезоэлементов $T_f = 1/f$. На рис. 2 показаны профили скорости для $N_p = 1$, $n = 12$, $m = 40$ в моменты времени $t = T_f/4$ и $t = 3T_f/4$, когда модуль скорости $|u_z|$ максимален, а также $t = 0$ и $t = T_f/2$, когда меняется направление сжатия пьезоэлемента.

Видно, что вблизи границы трубки на интервале $r = [0.8R_1, R_1]$ происходит основное изменение осевой скорости u_z , следовательно, для повышения точности расчетов нужно использовать неравномерную расчетную сетку с большей плотностью элементов вблизи внутренней границы трубки. Для уменьшения времени расчета сетку вблизи оси трубки, где профиль скорости практически плоский, можно сделать более разреженной. Все расчеты проводились на модифицированной сетке, в которой размер элементов на внутренней поверхности равен $\ell_m = L / (10 \cdot n)$, а на оси — $\ell_m = L / (5 \cdot n)$. На рис. 3 показаны расчетные сетки для $n = \{12, 18, 24\}$, а в таблице 1 приведены соответствующие им числа КЭ. Расчеты проводились

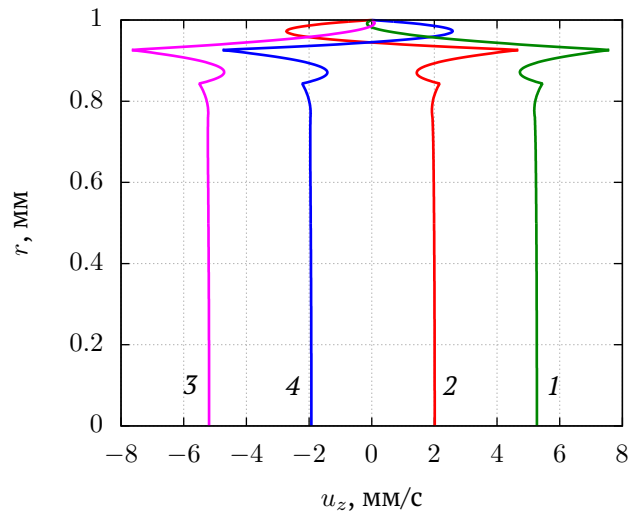


Рис. 2. Профили скорости u_z на выходном отверстии Γ_2 в пределах периода колебания пьезоэлемента в моменты времени: $t = 0$ (1), $t = T_f/4$ (2), $t = T_f/2$ (3), $t = 3T_f/4$ (4); $m = 40$; $N_p = 1$; $f = 1$ кГц

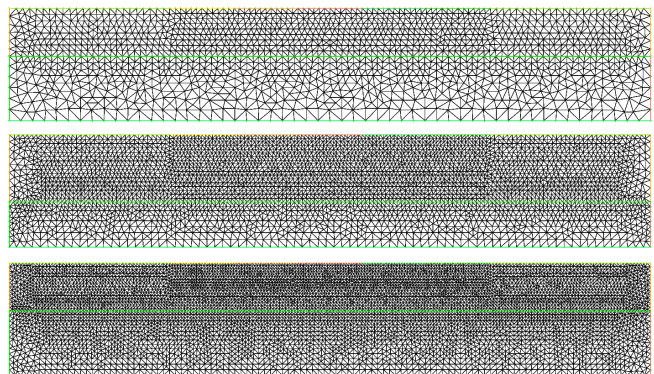


Рис. 3. Расчетные сетки для $m = 12$ (вверху), $m = 18$ (в середине) $m = 24$ (внизу) для трубки и канала. Нижняя грань сетки — ось симметрии

Таблица 1. Количество используемых КЭ в расчетной сетке для трубки N_e и канала N_f и время расчета уравнений Навье–Коши T_e и Навье–Стокса T_f , время перестроения расчетной сетки T_r и общее время расчета T_t для $N_p = 1$ в зависимости от n и m . Время указано в минутах

n	m	N_e	N_f	T_e	T_r	T_f	T_t
12	20	1836	1312	7.5	16	72	112
12	40	1836	1312	15	31	141	221
18	20	3980	2631	17	31	151	230
24	20	7262	5218	33	59	363	514

на 4-х ядерном процессоре Intel Core i7-3770 в ОС Windows 7 в программе FreeFem++ версии 3.61.

Дополнительно было проведено профилирование кода программы для определения количества процессорного времени необходимого для решения уравнений Навье–Коши (задача линейной упругости) T_e , Навье–Стокса (гидродинамическая задача) T_f и динамического перестроения расчетной сетки T_r (таблица 1). С увеличением количества конечных элементов или шагов по времени m требуемое для моделирования расчетное время возрастает пропорционально. Гидродинамическая задача использует 71 % от общего времени, перестроение расчетной сетки — 11 %, а задача линейной упругости — 6 %. Таким образом, без существенного увеличения времени моделирования для более точной передачи профиля деформаций, создаваемых пьезоэлементами на внутреннюю стенку трубки, распределение конечных элементов для стенки трубки выбиралось равномерным с большей плотностью в области контакта трубки и пьезоэлементов. Поскольку основное время занимает расчет гидродинамической задачи, то используемая в моделировании неравномерная расчетная сетка для канала не только повышает точность расчета, но и существенно увеличивает его скорость.

Проведем проверку компьютерной модели по имеющей аналитическое решение тестовой задаче для пуазейлевского течения в трубке круглого сечения.

В симметричной задаче (синхронные колебания пьезоэлементов) при отсутствии приложенного вдоль слоя градиента давления $\nabla p = \Delta p/L$ средний расход жидкости за период равен нулю. Для определения систематической погрешности (отличный от нуля средний расход жидкости) были проведены расчеты для различных параметров расчетной сетки на промежутке времени, который соответствует характерному времени релаксации скорости [28]:

$$\tau_u = \rho R_1^2 / \mu, \quad (9)$$

в рассматриваемой геометрии $\tau_u = 1$ с. Отметим, что τ_u может меняться в широком диапазоне, поскольку τ_u зависит от вязкости, а вязкость зависит от температуры [29].

Для численного моделирования введем средний расход жидкости по следующей формуле

$$Q_a = (V^{n+1} - V^n) / \tau, \quad (10)$$

где V^n и V^{n+1} — суммарный объем жидкости, прошедший через выходное отверстие в предыдущий и текущий периоды колебаний соответственно.

Для проверки численной схемы уравнений гидродинамики был проведен численный расчет пуазейлевского течения в трубке круглого сечения и приведено сравнение с аналитической формулой [21]

$$Q_p = \frac{\pi \Delta p R_1^4}{8 \mu L}. \quad (11)$$

Дополнительно проведено сравнение аналитической зависимости расхода жидкости Q_a от времени с численным расчетом. Амплитуда скорости от времени в первом приближении равна [30]

$$u(0, t) = \frac{\Delta p}{4 \mu L} R_1^2 g(t),$$

где функция от времени $g(t)$ определяется по следующей формуле:

$$g(t) = 1 - \frac{(1 - a) \exp(-\lambda_1^2 t / \tau_u)}{8 \lambda_1^3 J_1(\lambda_1)};$$

$\lambda_1 \approx 2.4$ — первый корень функции Бесселя нулевого рода $J_0(\lambda_1) = 0$; $J_1(\lambda_1) \approx 0.52$ — функция Бесселя первого рода; $a = 0.113$ — подгоночный параметр для компенсации отброшенных членов второго и более высоких порядков, подбираемый из физического смысла: отсутствие течения в начальный момент времени $u(0, 0) = 0$ ($g(0) = 0$, тогда $Q_a(0) = 0$) и выход на постоянное течение $u(0, t) = \text{const}$ через промежуток времени $t \gg \tau_u$ ($g(t) \rightarrow 1$, тогда $Q_a(t) \rightarrow Q_p$). Расход жидкости связан с амплитудой скорости $u(0, t)$ соотношением $Q_p(t) = (\pi/2) R_1^2 u(0, t)$:

$$Q_a(t) \approx Q_p g(t). \quad (12)$$

На рис. 4 показана зависимость среднего расхода жидкости Q_p , вычисленная по формуле (11), расход жидкости, вычисленный по формуле (12), и полученные численно зависимости $Q_a(t)$ для перепада давления $\Delta p = 0.5$ Па в отсутствие колебаний пьезоэлемента и при колебании с частотой $f = 1$ кГц. Видно, что за характерное время релаксации скорости τ_u (9) значения Q_a приближаются к аналитическому значению Q_p , причем аналитическая зависимость $Q_a(t)$ и численные зависимости $Q_a(t)$ с колебанием и без колебаний одного пьезоэлемента практически совпадают.

Таким образом осесимметричная математическая модель и ее компьютерная реализация являются корректными.

3.2. Анализ погрешностей и пределы применимости модели

Определим источники погрешностей и их величину. Для этого проведем моделирование при нулевом вдоль слоя перепаде давления.

Таблица 2. Зависимость систематической погрешности от размерности расчетной сетки n и шагов по времени m , количества пьезоэлементов N_p и граничных условий Неймана (индекс $i = N$) и Дирихле (индекс $i = D$): ε_i – систематические погрешности Q_a ; $\varepsilon_{i,Q}$ – относительные погрешности расхода жидкости на входе и выходе, вычисленные по формуле (13); Δp_i – компенсирующий перепад давления; * – результаты расчетов с компенсацией систематической погрешности по формуле (14). Параметры: $f = 1$ кГц; $t = 1$ с

n	m	N_p	ε_N , нл	$\varepsilon_{N,Q}$, %	ε_D , нл	$\varepsilon_{D,Q}$, %	Δp_N , мПа	ε_N^* , пл	$\varepsilon_N/\varepsilon_N^*$	Δp_D , мПа	ε_D^* , пл	$\varepsilon_D/\varepsilon_D^*$
12	20	1	9.55	0.201	-59.7	2.04	-0.244	85.5	112	1.5227	-275	217
12	40	1	9.31	0.344	-60.0	2.27	-0.238	79.7	117	1.5297	-255	235
18	20	1	7.84	0.098	-45.0	1.34	-0.200	40.9	192	1.1468	-156	288
24	20	1	-2.50	0.039	-36.3	1.02	0.064	-15.4	162	0.9275	-99	367
12	20	3	49.3	0.175	71.3	0.165	-1.259	1.477	33	-1.819	797	89
12	40	3	49.6	0.237	71.0	0.261	-1.266	1.298	38	-1.812	743	96
18	20	3	25.3	0.119	57.2	0.130	-0.646	0.429	59	-1.460	5.26	10872
24	20	3	4.39	0.007	6.29	0.007	-1.121	0.041	108	-0.1606	-28.99	217

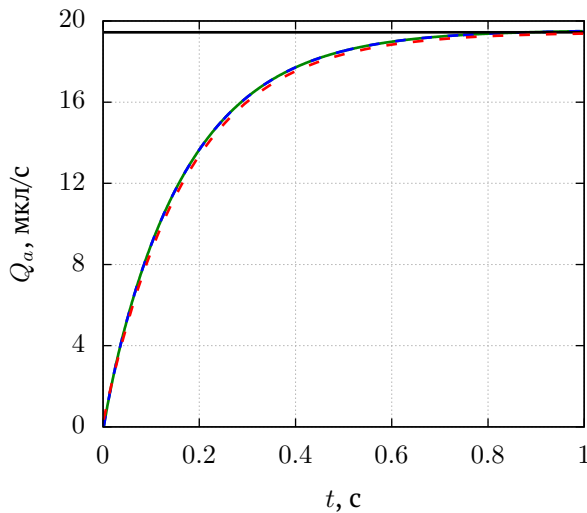


Рис. 4. Зависимость среднего расхода жидкости для пуазейлевского течения от времени для аналитической формулы (11) (черная линия), формулы (12) (красная линия), численного моделирования (3) и (4) в отсутствие колебания пьезоэлемента (зеленая линия) и при колебании одного пьезоэлемента (синяя линия) с частотой $f = 1$ кГц; $\Delta p = 0.5$ Па

Систематическая погрешность равна установившемуся среднему расходу жидкости $\varepsilon_i = Q_a$, где $i = N, D$. Здесь индекс D соответствует граничным условиям Дирихле, индекс N – граничным условиям Неймана, а относительная погрешность для расхода жидкости вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{i,Q} = |1 + Q_i/Q_o| \cdot 100\%, \quad i = \{N, D\}, \quad (13)$$

где Q_i и Q_o – расходы жидкости на входном и выходном отверстиях соответственно. Отметим, что расход жидкости положителен при течении

жидкости в положительном направлении Oz и отрицателен для потока в обратном направлении, например, во время сжатия трубки $Q_i < 0$ и $Q_o > 0$. Результаты моделирования представлены в таблице 2.

Поскольку трубка и жидкость в ней являются несжимаемыми, то при деформации трубки ее объем должен соответствовать объему жидкости, протекающей в канале. Вычислим относительную погрешность объемов по формуле

$$\varepsilon_V = \frac{|(Q_i^{i+1} + Q_o^{i+1})\tau - (V_e^i - V_e^{i+1})|}{V_e^0} \cdot 100\%,$$

где верхние индексы i и $i + 1$ соответствуют предыдущему и текущему моментам времени; V_e^i и V_e^0 – объемы в деформированной и недеформированной трубках, вычисляемые по формулам

$$V_e^i = \int_{\Omega} 2\pi r dr dz, \quad V_e^0 = \pi(R_2^2 - R_1^2)L.$$

Здесь область интегрирования Ω ограничена по оси Oz интервалом $[0, L]$, а по оси Or лежит между кривыми $R_1 + s_r(z, R_1)$ и $R_2 + s_r(z, R_2)$ с радиальной компонентой деформации $s_r < 0$ (деформация направлена в отрицательном направлении по оси Or). В проведенных расчетах относительная погрешность ε_V не превышала $4.3 \cdot 10^{-12}\%$ для граничных условий Дирихле и $6.3 \cdot 10^{-12}\%$ для граничных условий Неймана.

Отметим, что время установления ненулевого среднего расхода жидкости и пуазейлевского течения близки к характерному времени τ_u , что предполагает возможность снижения систематической погрешности заданием перепада давления

в виде

$$\Delta p_i = -\frac{8\mu\varepsilon_i L}{\pi R_1^4}. \quad (14)$$

В зависимости от параметров моделирования (n , m , N_p) систематическая ошибка составляет от 2.5 до 72 нл/с (см. таблицу 2). С увеличением количества интервалов времени в одном периоде продолжительность моделирования растет пропорционально, а систематическая погрешность снижается незначительно (увеличение m в 2 раза с 20 до 40 снижает погрешность не более, чем на 7.3 %). Увеличение количества КЭ приводит к существенному снижению погрешности (например, при четырехкратном увеличении количества КЭ для $N_p = 1$ величина ε_N уменьшается в 3.8 раз и ε_D — 1.6 раз, а для $N_p = 3$: ε_N — 11.2 раз и ε_D — 11.3 раз). Время расчета при этом увеличивается пропорционально количеству КЭ расчетной сетки канала (например, для $n = 12$ время расчета $T_t = 112$ минут, а для $n = 24$ — 8.5 часов).

В работе [16] показано, что несимметричная схема колебаний системы из $N_p > 2$ пьезоэлементов при отсутствии перепада давления вдоль канала за время $t > \tau_u$ создает постоянное среднее за период колебаний течение жидкости, т.е. устройство прокачивает жидкость как микронасос. Проведем сравнение результатов вычислительных экспериментов для симметричной и несимметричной схемы колебаний системы из $N_p = 3$ пьезоэлементов на расчетной сетке с $n = 12$. Для граничных условий Неймана средний расход жидкости достигает значения $Q_{a,N} = 233$ нл/с. Из таблицы 2 видно, что вклад систематической погрешности в $Q_{a,N}$ составляет 21 %. Для граничных условий Дирихле средний расход жидкости $Q_{a,D} = 404$ нл/с, из которого 17.6 % приходится на систематическую погрешность. Для повышения точности моделирования можно использовать более плотную расчетную сетку за счет увеличения вычислительных и временных ресурсов.

Можно предложить способ компенсации систематической погрешности без увеличения процессорного времени. Для этого зададим перепад давления Δp согласно формуле (14). Повторный вычислительный эксперимент с заданным перепадом давления показал значительное снижение систематической погрешности. В зависимости от n для $N_p = 1$ величина ε_N снижается в $112 \div 190$ раз и ε_D — в $217 \div 367$ раз, а для $N_p = 3$: ε_N — $33 \div 108$ раз и ε_D — $89 \div 217$ раз.

Дальнейшее снижение погрешности практически недостижимо, поскольку согласно (10) изменение объема за шаг по времени имеет порядок

$\Delta V_m = V^{n+1} - V^n = 4 \cdot 10^{-17} \text{ м}^3$, что находится в области ошибок округления. Эта величина изменения объема ΔV_m определяет пределы применимости модели. Например, если при снижении частоты изменение объема будет порядка ΔV_m , то результаты моделирования будут некорректны, а если $\Delta V = k\Delta V_m$, то ошибки округления в Q_a будут составлять $\approx 100/k$ %. Расчеты показывают, что при частоте колебаний пьезоэлементов $f \leq 500$ Гц систематические погрешности будут $\varepsilon_i \geq 10$ % для $N_p = 1$ и $\varepsilon_i \geq 30$ % для $N_p = 3$.

Отметим, что при моделировании системы пьезоэлементов систематическая погрешность ε_i определяется как разность экспериментального Q_e и численного Q_n значений установившегося среднего расхода жидкости, то есть $\varepsilon_i = Q_e - Q_n$. Компенсировать систематическую погрешность можно дополнительным Пуазейлевским течением с перепадом давления Δp , определяемым приближенной формулой (14).

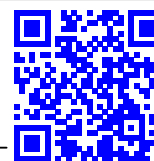
4. Заключение

В работе представлена математическая и компьютерная модели осесимметричного пьезонасоса с граничными условиями Дирихле или Неймана в области контакта пьезоэлементов с поверхностью трубки. Тестирование компьютерной модели проведено сравнением результатов моделирования с аналитическим решением для течения Пуазейля в трубке круглого сечения. Проведенный анализ профиля скорости и профилирование кода программы позволили определить параметры расчетных сеток: для стенки трубки была выбрана равномерная сетка с более высокой плотностью конечных элементов в области контакта пьезоэлементов с трубкой; для канала выбрана адаптивная динамически перестраиваемая сетка. Проведена серия вычислительных экспериментов для различного количества пьезоэлементов и набора значений для плотности расчетной сетки и определена величина систематической погрешности моделирования. Предложен способ компенсации систематической погрешности с помощью дополнительного приложенного к каналу перепада давления. Данный способ позволил снизить погрешность на два порядка. Представленный в работе подход к снижению систематической погрешности позволит повысить точность моделирования режимов работы пьезоэлектрического микронасоса.

Список литературы

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // Micro and Nano Engineering. 2019. V. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003

- [2] Berg J.M., Dallas T. Peristaltic Pumps. Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics (eds. by Li D.). New York: Springer, 2015. Pp. 2693–2701.
DOI: [10.1007/978-0-387-48998-8_1198](https://doi.org/10.1007/978-0-387-48998-8_1198)
- [3] Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p.
DOI: [10.1007/978-90-481-9029-4](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9029-4)
- [4] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems. Cham: Springer. 2016. 164 p.
DOI: [10.1007/978-3-319-23312-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23312-3)
- [5] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Капиллярный микрозахват с обратной связью. Патент на изобретение № 2261795. Опубл. 10.10.2005. Бюл. № 28.
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [6] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) // Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_2)
- [7] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вычислительные технологии. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20.
DOI: [10.25743/ICT.2021.26.2.002](https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.2.002)
- [8] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2004. V. 14. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [9] Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Eds. by Bungartz H.J., Schäfer M. Heidelberg: Springer. 2006. 401 p.
DOI: [10.1007/3-540-34596-5](https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5)
- [10] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. Pp. 26–41.
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [11] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.)
- [12] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // Fluids. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53.
DOI: [10.3390/fluids2020034](https://doi.org/10.3390/fluids2020034)
- [13] Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [14] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232.
DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [15] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750.
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [16] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // In: Ronzhin A. and Shishlakov V. (eds) Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [17] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // Известия Уфимского научного центра РАН. 2015. № 4. С. 20–25.
eLIBRARY ID: 25732231
- [18] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149.
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [19] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66.
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [20] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164.
DOI: [10.25103/jestr.14.2.19](https://doi.org/10.25103/jestr.14.2.19)
- [21] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 736 с.
- [22] Sandberg G., Wernberg P.-A., Davidsson P. Fundamentals of Fluid-Structure Interaction // in Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration, CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vol. 505, G. Sandberg and R. Ohayon, Eds. Vienna: Springer, 2009.
DOI: [10.1007/978-3-211-89651-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-211-89651-8_2)
- [23] Xu J., Lin S., Ma Y., Tang Y. Analysis on Coupled Vibration of a Radially Polarized Piezoelectric Cylindrical Transducer // Sensors. 2017. V. 17, No. 12. P. 2850.
DOI: [10.3390/s17122850](https://doi.org/10.3390/s17122850)
- [24] Wang W., Shi W., Thomas P., Yang M. Design and Analysis of Two Piezoelectric Cymbal Transducers with Metal Ring and Add Mass // Sensors. 2019. V. 19, No. 1. P. 137.
DOI: [10.3390/s19010137](https://doi.org/10.3390/s19010137)
- [25] Murimi E., Kihui J., Nyakoe G., Mutuli S., Kimotho J. Determination of resonant frequency of a piezoelectric ring for generation of ultrasonic waves // Innovative Systems Design and Engineering. 2011. V. 2, No. 4. P. 103 (2011).
- [26] Kim J.O., Lee J.G. Dynamic characteristics of piezoelectric cylindrical transducers with radial polarization // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 300, No. 1–2. P. 241.
DOI: [10.1016/j.jsv.2006.08.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.08.021)
- [27] Насибуллаев И.Ш. Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX для моделирования статических задач упругости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 183–200.
DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [28] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10.
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [29] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9.
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [30] Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. 2000. 615 p.
DOI: [10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955)



Reducing the systematic error of the average fluid flow rate in axisymmetric computer model of piezoelectric micropump

Nasibullayev I.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Mathematical and computer models of an axisymmetric coupled problem of interaction of a fluid and an elastic body for the solving partial differential equations by the finite element method FreeFem ++ software are proposed. In these models, periodic vibrations of annular piezoelectric actuators placed on an elastic tube of circular cross-section lead to radial deformations of the tube. With a synchronous oscillation of the system of piezoelectric actuators, the average fluid flow rate is zero. An asymmetric oscillation pattern (micropump mode) results in a nonzero average flow rate. Two types of boundary conditions are considered in the region of contact between the piezoelectric drive and the tube – Dirichlet and Neumann. The computer model was tested for unsteady fluid flow induced by a pressure gradient applied along the pipe with a circular cross section. With synchronous oscillation of piezoelectric actuators, a nonzero average fluid flow is a systematic error. This value was compared with the asymmetric oscillation pattern of piezoelectric actuators to determine the contribution of the systematic error to the pump-generated fluid flow rate. Based on the fluid flow velocity profile and the results of profiling the program code, the optimal parameters of the computational meshes for the channel (dense uniform) and tube walls (nonuniform, consistent with the velocity profile and reconstructing at each time step) were determined, which reduce the magnitude of the systematic error. The main way to reduce the error is to increase the density of the computational mesh, which leads to an increase in the required computing resources. An alternative method is proposed for reducing the systematic error due to an additional pressure drop applied to the channel. Depending on the type of boundary conditions and the number of piezoelectric actuators, this method can reduce the systematic error by 1 – 2 orders of magnitude without increasing the simulation time.

Keywords: hydrodynamics, hydraulic resistance, piezoelectric actuator, linear elasticity, microchannel, finite element method, micropump

References

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // *Micro and Nano Engineering*. 2019. V. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [2] Berg J.M., Dallas T. Peristaltic Pumps. *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics* (eds. by Li D.). New York: Springer, 2015. Pp. 2693–2701.
DOI: 10.1007/978-0-387-48998-8_1198
- [3] *Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications*. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p.
DOI: 10.1007/978-90-481-9029-4
- [4] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. Cham: Springer. 2016. 164 p.
DOI: 10.1007/978-3-319-23312-3
- [5] Darintsev O.V., Migranov A.B. [Capillary micro-grip with feedback] Capilarnyi microzahvat s obratnoi svazju. Patent RF No. 2261795 RU, [Published] Opublikovano 10.10.2005. Byul. N. 28 (in Russian).
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servLet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [6] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) // *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 25–37.
DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_2
- [7] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system]. *Vychislitel'nyye tekhnologii* [Computational technologies]. 2021. V. 26. No. 2. Pp. 4–20.
DOI: 10.25743/ICT.2021.26.2.002

- [8] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. V. 14. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [9] Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Eds. by Bungartz H.J., Schäfer M. Heidelberg: Springer. 2006. 401 p.
DOI: [10.1007/3-540-34596-5](https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5)
- [10] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit]. *Vychislitel'nyye tehnologii* [Computational Technologies]. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41 (In Russian).
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [11] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.)
- [12] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // *Fluids*. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53.
DOI: [10.3390/fluids2020034](https://doi.org/10.3390/fluids2020034)
- [13] Hecht F. New development in FreeFem++ // *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [14] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., [Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel]. *Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 220–232 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [15] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian).
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [16] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // In: Ronzhin A. and Shishtakov V. (eds) *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [17] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Dynamics of fluid flow in technical systems with jets]. *Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No. 4. Pp. 20–25 (In Russian).
eLIBRARY ID: [25732231](https://elibrary.ru/25732231)
- [18] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The fluid flow through a system of connected elements of a technical device such as pipe-hydraulic resistance-pipe]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ces, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 2. Pp. 141–149 (In Russian).
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [19] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through hydraulic resistance with dynamically changing geometry]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 59–66 (In Russian).
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [20] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164.
DOI: [10.25103/jestr.142.19](https://doi.org/10.25103/jestr.142.19)
- [21] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theoretical physics*. V. 6. Fluid Mechanics. M.: Nauka, 1988. 736 p. (In Russian).
- [22] Sandberg G., Wernberg P.-A., Davidsson P. *Fundamentals of Fluid-Structure Interaction* // in *Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration*, CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vol. 505, G. Sandberg and R. Ohayon, Eds. Vienna: Springer, 2009.
DOI: [10.1007/978-3-211-89651-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-211-89651-8_2)
- [23] Xu J., Lin S., Ma Y., Tang Y. Analysis on Coupled Vibration of a Radially Polarized Piezoelectric Cylindrical Transducer // *Sensors*. 2017. V. 17, No. 12. P. 2850.
DOI: [10.3390/s17122850](https://doi.org/10.3390/s17122850)
- [24] Wang W., Shi W., Thomas P., Yang M. Design and Analysis of Two Piezoelectric Cymbal Transducers with Metal Ring and Add Mass // *Sensors*. 2019. V. 19, No. 1. P. 137.
DOI: [10.3390/s19010137](https://doi.org/10.3390/s19010137)
- [25] Murimi E., Kihui J., Nyakoe G., Mutuli S., Kimotho J. Determination of resonant frequency of a piezoelectric ring for generation of ultrasonic waves // *Innovative Systems Design and Engineering*. 2011. V. 2, No. 4. P. 103 (2011).
- [26] Kim J.O., Lee J.G. Dynamic characteristics of piezoelectric cylindrical transducers with radial polarization // *Journal of Sound and Vibration*. 2007. V. 300, No. 1–2. P. 241.
DOI: [10.1016/j.jsv.2006.08.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.08.021)
- [27] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems]. *Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2020. V. 15. No. 3–4. Pp. 183–200 (In Russian).
DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [28] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. [Study of fluidflow through a channel deformed by piezoelement]. *Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (In Russian).
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [29] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The effect of temperature on the dynamics of fluid flow in technical systems with jets]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ces, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 1. P. 1–9 (In Russian).
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [30] Batchelor G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press. 2000. 615 p.
DOI: [10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955)