

ISSN: 2658–5782

Номер 1

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Исследование динамики газа и газочапельной смеси при точечном взрыве на основе аналитического решения Седова¹

Болотнова Р.Х.^{*}, Коробчинская В.А.^{*,**}, Файзуллина Э.А.^{*}

^{*}Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

^{**}Башкирский государственный университет, Уфа

Исследована динамика поведения газа и газочапельной смеси при точечном взрыве с использованием аналитического решения Л.И. Седова, построенного на основе автомодельного решения для задачи о точечном взрыве в газе сферической конфигурации. Приведен анализ актуальности задач теории точечного взрыва в связи с их использованием при изучении процессов взрывного разрушения космических тел в атмосфере, где полученные аналитические решения Л.И. Седова применялись в качестве начальных условий для дальнейшей численной реализации поставленных задач. Отмечены работы, в которых в автомодельной постановке рассматривались задачи о точечном взрыве в запыленной среде. Приведено автомодельное решение задачи Л.И. Седова о точечном взрыве в газе и газочапельной смеси. Выполнен сравнительный анализ полученных решений в газе и газочапельной смеси в виде динамических характеристик формирующихся волновых течений. Показано, что использование аналитического решения позволяет оценить параметры ударных волн в изучаемой среде и получить оценки эффективности энергопоглощающих свойств газочапельной смеси по сравнению с газом для условий равного начального энергетического воздействия, что качественно не противоречит имеющимся решениям других авторов и соответствующим экспериментальным данным. Отмечена возможность использования полученных аналитических решений в дальнейших исследованиях для апробации применяемых численных методов при решении задач динамики газожидкостных потоков.

Ключевые слова: задача Л.И. Седова, автомодельное решение, точечный взрыв, совершенный газ, газочапельная смесь

1. Введение

Одно из наиболее известных автомодельных решений, описывающих взрывную волну, вызванную сильным взрывом, было найдено Л.И. Седовым в связи с исследованиями взрыва атомной бомбы. В настоящее время задачи теории точечного взрыва вновь выдвинулись в ряд вопросов первостепенной значимости ввиду изучения вторжения в атмосферу Земли малых космических

тел с их последующим взрывным разрушением [1]. В отмеченной работе решение автомодельной задачи о точечном взрыве Л.И. Седова [2] используется в качестве начальных условий. В [3] проведен сравнительный анализ решений задачи Л.И. Седова о точечном взрыве в газе для плоского случая, полученных аналитическим методом и с использованием открытого программного комплекса вычислительной гидродинамики OpenFOAM.

При решении актуальных задач динамики газочапельной смеси с целью апробации используемых программных комплексов представляют интерес исследования, в которых в автомодельной постановке рассматриваются задачи о сильном взрыве в газе с примесями очень мелких твердых или

¹Работа выполнена при финансовой поддержке средствами государственного бюджета по госзаданию 0246–2019–0052.

жидких частиц [2, 4]. В частности, в работе [4] рассматривается точечный взрыв в запыленной среде, состоящей из газа и твердых частиц. В случае отсутствия противодействия и при соответствующем выборе параметров задача сводится к автомодельной [2]. В [4] отмечен немонотонный характер распределения давления и скоростей частиц в отличие от случая чистого газа. Однако, в работах [2, 4] не приводится сравнительный анализ динамики распространения формирующихся волновых течений в запыленном и чистом газе.

Самостоятельный интерес для целей настоящей работы представляет проведение сопоставительного анализа нестационарного процесса формирования ударной волны в газе и газокапельной смеси, инициированной точечным взрывом, на основе аналитического автомодельного решения задачи Л.И. Седова для случая сферической конфигурации [2].

2. Автомодельное решение задачи Л.И. Седова о точечном сферическом взрыве в газе

Точечный сферический взрыв в газе рассматривается как мгновенное выделение в малом объеме пространства большого количества энергии E . При этом возникает сферическая ударная волна (УВ), которая радиально распространяется от центра взрыва и отделяет области возмущенного и невозмущенного состояния газа. При переходе через фронт УВ, который имеет скорость D и является поверхностью сильного разрыва, происходит скачкообразное изменение значений основных параметров УВ: давления p , скорости v , плотности ρ и температуры T .

При этом законы сохранения массы, импульса и энергии должны выполняться по обе стороны фронта УВ [2]:

$$\rho_1(v_1 - D) = \rho_2(v_2 - D), \quad (1)$$

$$\rho_1(v_1 - D)^2 + p_1 = \rho_2(v_2 - D)^2 + p_2, \quad (2)$$

$$\frac{(v_1 - D)^2}{2} + h_1 = \frac{(v_2 - D)^2}{2} + h_2, \quad (3)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad p = \rho RT,$$

где h_i — удельная энтальпия газа: $h = c_p T$; c_p — изобарная теплоемкость; γ — показатель адиабаты газа; R — газовая постоянная; $i = 1, 2$.

Из (3) следует

$$\frac{(v_1 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{(v_2 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что давление и скорость перед фронтом УВ пренебрежимо малы, из законов сохранения (1), (2), (4) получаем выражения для скорости v_2 , плотности ρ_2 и давления p_2 за фронтом УВ:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2. \quad (5)$$

Система одномерных уравнений газовой динамики совершенного газа в дифференциальной форме включает законы сохранения массы, импульса и энергии [2, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где t — время; x — эйлерова координата; $\nu = 3$ соответствует сферическому случаю.

Для обезразмеривания уравнений системы (6) в [2] вводится параметр m , имеющий размерность массы. Тогда искомые функции можно представить в виде:

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{t} \bar{v}, \\ \rho &= \frac{m}{x^{k+3} t^s} \bar{\rho}, \\ p &= \frac{m}{x^{k+1} t^{s+2}} \bar{p}, \end{aligned} \quad (7)$$

где x , t , m — размерные параметры; \bar{v} , $\bar{\rho}$, \bar{p} — безразмерные величины; k , s — целые неотрицательные числа. Решение системы (6) будет определяться двумя независимыми размерными величинами: начальной плотностью ρ_1 [кг/м³] и начальной энергией E_1 [кг · м²/с²]. Определяющими параметрами будут величины ρ_1 , E_1 , x , t , γ . В этом случае, согласно теории размерностей [2], единственной безразмерной переменной будет

$$\lambda = \frac{x}{\left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5}}, \quad (8)$$

и безразмерные величины могут зависеть только от γ и λ . Здесь $E = \alpha E_1$, где α — константа.

Для $\lambda = 1$ на основании уравнений движения (6) и (8) можно определить координату фронта сферической УВ [2]:

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (9)$$

Откуда находится скорость фронта УВ:

$$D = \frac{dr_2}{dt} = \frac{2}{5} \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5} \frac{r_2}{t}. \quad (10)$$

Используя законы сохранения на фронте УВ (5) с учетом (10) параметры УВ будут найдены в виде [2]:

$$v_2 = \frac{x}{t} \bar{v}_2, \quad \rho_2 = \rho_1 \bar{\rho}_2, \quad p_2 = \rho_1 \left(\frac{x}{t} \right)^2 \bar{p}_2. \quad (11)$$

Тогда, используя соотношения (5) и (11), получим

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{2}{5} \frac{x}{t} = \frac{x}{t} \bar{v}_2, \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1 = \rho_1 \bar{\rho}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 \left(\frac{2}{5} \frac{x}{t} \right)^2 = \rho_1 \left(\frac{x}{t} \right)^2 \bar{p}_2.$$

Из (12) следует:

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{4}{5(\gamma+1)}, \\ \bar{\rho}_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ \bar{p}_2 &= \frac{8(\gamma-1)}{25(\gamma+1)^2} \bar{\rho}_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя переменную $\bar{z}_2 = \gamma \bar{p}_2 / \bar{\rho}_2$ на УВ, получим

$$\bar{z}_2 = \frac{8\gamma(\gamma-1)}{25(\gamma+1)^2}. \quad (14)$$

Решая систему уравнений (6), где v , ρ и p представлены в виде (7), и вводя новую переменную $z = \gamma \bar{p} / \rho$, Л.И. Седов получил, что единственная интегральная кривая, соответствующая аналитическому решению задачи о точечном взрыве, может быть выведена из интеграла энергии и для сферического случая имеет вид:

$$z = \frac{(\gamma-1)\bar{v}^2(\bar{v} - \frac{2}{5})}{\frac{4}{5\gamma} - 2\bar{v}}. \quad (15)$$

Подставляя значение z (15) в поле интегральных кривых полученной системы уравнений, были найдены величины $\lambda(\bar{v})$, $\rho(\bar{v})$ с использованием простых квадратур, откуда получены следующие аналитические решения для скорости v , давления p , эйлеровой x и лагранжевой r координат и температуры T для случая сферической симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{\frac{3}{5}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{2\gamma+1}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{5(2\gamma+1)(3\gamma-1)}}, \\ \frac{p}{p_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{\frac{6}{5}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{v} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{5(\gamma-2)(3\gamma-1)}}, \\ \frac{\rho}{\rho_2} &= \left[\frac{(\gamma+1)(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1)}{(\gamma-1)} \right]^{\frac{3}{2\gamma+1}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{v} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-2}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{(2\gamma+1)(3\gamma-1)(\gamma-2)}}, \quad (16) \\ \frac{x}{r_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{-\frac{2}{5}} + \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{2\gamma+1}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{5(2\gamma+1)(3\gamma-1)}}, \\ \frac{r}{r_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{-\frac{2}{5}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{15(2\gamma+1)(\gamma-2)}} \times \\ &\times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{v} \right) \right]^{\frac{3\gamma^2-16\gamma}{3(2\gamma+1)(2-\gamma)}}, \\ \frac{T}{T_2} &= \frac{p}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho}. \end{aligned}$$

где $\bar{v} = \frac{vt}{x}$ — безразмерный параметр;

$$\frac{2}{5\gamma} \leq \bar{v} \leq \frac{4}{5(\gamma+1)}.$$

3. Автомодельное решение задачи Л.И. Седова о точечном сферическом взрыве в газокпельной смеси

Рассмотрим движение газа с примесями очень мелких жидких частиц, движущихся вместе с газом (газокпельная смесь). Плотность взвешенных частиц в газе бывает достаточно большой: в 1 см³ облаков или тумана находится от 100 до 1500 капель. В задаче, рассмотренной Л.И. Седовым [2], полагается, что наличие частиц в газе увеличивает

инерцию среды, которая остается однородной по плотности:

$$\rho' = \rho(1 + k), \quad (17)$$

где k — положительная постоянная.

Обозначив c как теплоемкость капель, а c_V и c_p как удельные теплоемкости газа при постоянных объеме и давлении соответственно, в [2] получено выражение для показателя адиабаты для газок капельной смеси γ' , представляющее собой отношение удельных теплоемкостей среды:

$$\gamma' = \frac{c'_p}{c'_V}, \quad c'_p = \frac{\rho c_p + k \rho c}{\rho(1+k)}, \quad c'_V = \frac{\rho c_V + k \rho c}{\rho(1+k)}. \quad (18)$$

Выпишем для газок капельной смеси систему уравнений газовой динамики в сферическом случае, включающую законы сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме (6) для $\nu = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho' v}{\partial x} + 2 \frac{\rho' v}{x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{\rho' \gamma'} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho' \gamma'} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Получаем, что система уравнений для газок капельной смеси (19) аналогична системе (6) и решения (19) сводятся к (16) с переобозначениями (17), γ на γ' и

$$p' = p(1 + k).$$

Таким образом были найдены аналитические решения для динамических характеристик газок капельной смеси в задаче о точечном взрыве в случае сферической симметрии [2].

Для аналитического решения задачи Л.И. Седова о точечном сферическом взрыве в газе выбирались следующие начальные условия: энергия взрыва $E_1 = 100$ Дж, плотность воздуха $\rho_1 = 0.0125$ кг/м³ и показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Начальные условия для аналогичной задачи в случае газок капельной смеси: $E_1 = 100$ Дж, $\rho'_1 = 0.0125(1 + k)$ кг/м³ — плотность смеси, где $k = 10$, $\gamma' = 1.1$.

На рис. 1–4 представлены полученные решения в виде распределения скорости v , давления p , температуры T и плотности ρ в моменты времени 1, 25, 50, 75, 100 мкс. Сравнительный анализ показал, что в газок капельной смеси по сравнению с газовой средой амплитуда давления на фронте УВ и его скорость ослабевают в 2 раза (рис. 1), массовая

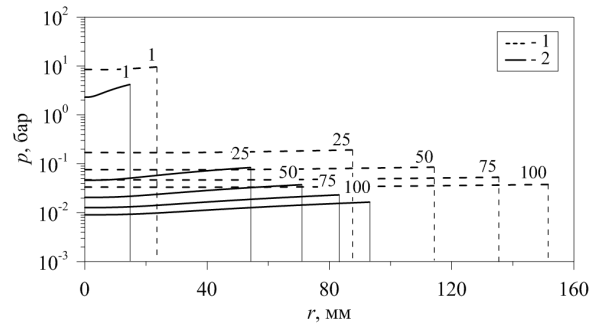


Рис. 1. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по динамике давления p в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газок капельной смеси

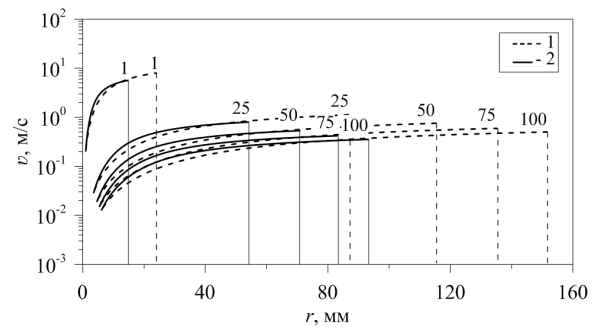


Рис. 2. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по динамике массовой скорости v в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газок капельной смеси

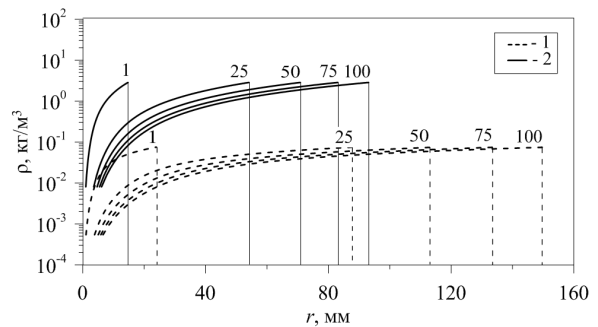


Рис. 3. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по плотности ρ в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газок капельной смеси

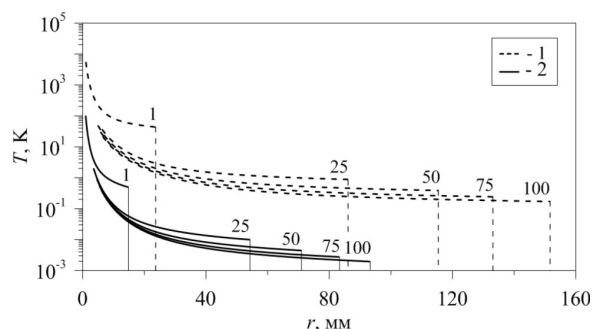


Рис. 4. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по температуре T в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газокапельной смеси

скорость уменьшается в 1.3 раза (рис. 2), плотность в 3 раза выше (рис. 3) и температура уменьшается в 8 раз (рис. 4).

4. Заключение

В результате проведенных исследований показано, что использование аналитического решения позволяет оценить параметры ударных волн в газокапельной смеси и получить оценки эффективности ее демпфирующих свойств по сравнению с газом для условий равного начального энергетического воздействия, что качественно не про-

тиворечит имеющимся экспериментальным данным [6]. Полученные аналитические решения могут быть применены в дальнейших исследованиях для апробации численных методов, разрабатываемых для решения широкого круга задач динамики газожидкостных потоков.

Список литературы

- [1] Андрущенко В.А., Головешкин В.А. Мурашкин И.В. Численное решение задачи о взрыве малого космического тела в неоднородной атмосфере в переменных лагранжа // *Механика жидкости и газа. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4(3). С. 628–630. [eLIBRARY ID: 21121153](#)
- [2] Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике* // М.: Наука. 1977. 440 с.
- [3] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Сопоставление численного и автомодельного решений задачи Седова о точечном взрыве в газе // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 212–216. [DOI: 10.21662/mfs2020.3.132](#)
- [4] Коробейников В.П., Марков В.В., Меньшов И.С. Задача о сильном взрыве в запыленном газе // *Тр. МИАН СССР*. 1984. Т. 163. С. 104–107. [MathNet: tm2318](#)
- [5] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477. [DOI: 10.1134/S0032823519030020](#)
- [6] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23, No. 1. Pp. 39–53. [DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0](#)



Study the dynamics of gas and gas-drop mixture in a point explosion based on Sedov's analytical solution

Bolotnova R.Kh. *, Korobchinskaya V.A. **, Faizullina E.A. *

*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

**Bashkir State University, Ufa

The dynamics of the behavior of a gas and a gas-drop mixture in a point explosion studied using the analytical solution of L.I. Sedov, constructed on the basis of a self-similar solution for the problem of a point explosion in a gas of spherical configuration. The analysis of the actual problems of theory of point explosion in connection with their use in studying the processes of explosive destruction of cosmic bodies in the atmosphere, where the obtained analytical solutions of Sedov were used as the initial conditions for further numerical implementation of the set problems. The works in which the problems of a point explosion in a dusty medium were considered in a self-similar formulation are noted. A self-similar solution of the Sedov problem of a point explosion in a gas and a gas-drop mixture is presented. A comparative analysis of the obtained solutions in gas and gas-drop mixture in the form of dynamic characteristics of the forming wave flows is made. It is shown that the use of an analytical solution makes it possible to estimate the parameters of shock waves in the studied medium and to obtain estimates of the efficiency of the energy-absorbing properties of a gas-drop mixture in comparison with a gas for conditions of equal initial energy action, which qualitatively does not contradict the existing solutions of other authors and the corresponding experimental data. The possibility of using the obtained analytical solutions in further research for approbation the applied numerical methods in solving problems of the dynamics of gas-liquid flows is noted.

Keywords: L.I. Sedov's problem, self-similar solution, point explosion, perfect gas, gas-drop mixture

References

- [1] Andryushchenko V. A., Goloveshkin V. A. Murashkin I. V. Numerical analysis of the problem of explosion of a small-size cosmic body in non-uniform atmosphere in lagrangian coordinates // Fluid and gas mechanics. *Mechanika gidkosti i gaza. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod]. 2011. № 4 (3). Pp. 628–630 (in Russian). eLIBRARY ID: 21121153
- [2] Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* // Boca Raton: CRC Press. 1993. P. 479. DOI: 10.1201/9780203739730
- [3] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. Comparison of the numerical and self-similar solutions of Sedov's problem on a point explosion in gas // *Multiphase Systems*. 2020. V. 15. No. 3–4. Pp. 212–216 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.3.132
- [4] Korobeinikov V.P., Markov V.V., Menshov I.S. The problem of a strong explosion in a dusty gas // *Proc. Steklov Inst. Math*. 1985. V. 163. Pp. 125–128. <https://zbmath.org/?q=an:0588.76136>
- [5] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54. Suppl. 7. Pp. 970–977. DOI: 10.1134/S0015462819070024
- [6] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23, No. 1. Pp. 39–53. DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0