

ISSN: 2658–5782

Номер 2

2021

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## О преобразованиях эквивалентности газодинамических сред<sup>1</sup>

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе рассмотрена квазилинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение идеальной газодинамической сплошной среды. Из термодинамического тождества следует, что среда двухпараметрическая. Уравнение состояния задается внутренней энергией в функции от энтропии и удельного объема. Преобразования эквивалентности не изменяют вид системы, но меняют лишь уравнения состояния. Найдены преобразования эквивалентности, преобразующие лишь термодинамические параметры и растягивающие все переменные. Известная групповая классификация, расширяющая допускаемую группу, состоит из найденных преобразований эквивалентности. Есть два случая не удовлетворяющие этому правилу. Первый случай — уравнение состояния линейно по удельному объему. Второй случай — для одноатомного газа, когда модель инвариантна относительно проективного преобразования. Если уравнение состояния изменяется со временем, то найдены семейства уравнений состояния, для которых проективные преобразования являются преобразованиями эквивалентности.

**Ключевые слова:** газовая динамика, уравнение состояния, преобразование эквивалентности, групповая классификация

### 1. Введение

Групповой анализ уравнений газовой динамики наиболее продвинут [1, 2]. Найдены алгебры Ли допускаемой группы преобразований. Проведена групповая классификация по функции  $A(p, \rho) = \rho c^2$ ,  $c^2 = f_\rho$ , где  $c$  — скорость звука;  $p = f(\rho, S)$  — уравнение состояния в виде давления как функции плотности и энтропии [1, 3]. Построены оптимальные системы неподобных подалгебр основных допускаемых групп [4]. Составлен граф вложенных подалгебр, позволяющий строить цепочки вложенных подмоделей [5]. Рассмотрены множества инвариантных, частично инвариантных подмоделей и точных решений, которые тоже могут быть подвержены групповому анализу. Физическая интерпретация полученных решений, подобно тому, как это сделано для одномерных нестационарных движений и плоских установившихся

безвихревых течений [6, 7], далека от завершения.

В работе рассмотрены преобразования эквивалентности, которые изменяют лишь уравнения состояния  $\varepsilon = e(V, S)$ ,  $V = \rho^{-1}$ , стационарного типа и  $\varepsilon = e(t, V, S)$  нестационарного типа. Показано, что все расширения допускаемых групп при групповой классификации [1] являются преобразованиями эквивалентности некоторых классов уравнений состояния.

### 2. Идеальные двухпараметрические среды газодинамического типа

Законы сохранения массы, импульса и энергии без внешних сил и теплопроводности в дифференциальной форме имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} V_t + (\vec{u} \cdot \nabla)V &= V \nabla \cdot \vec{u}, \\ \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + V \nabla p &= 0, \\ \varepsilon_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\varepsilon + V p \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V = \rho^{-1}$  — удельный объем;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\vec{u}$  — скорость частицы газа в момент времени  $t$

<sup>1</sup>Работа поддержана РФФИ (грант № 18-29-10071) и средствами государственного задания № 0246-2019-0052.

точке пространства  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ;  $\nabla = \partial_{\vec{x}}$  — градиент. Пять скалярных уравнений связывают шесть газодинамических величин. Для замыкания системы пользуются энергетическим термодинамическим тождеством

$$TdS = d\varepsilon + pdV, \quad (2)$$

справедливым в частице газа. Здесь  $T$  — температура;  $S$  — энтропия;  $d$  — дифференциал;  $\varepsilon = e(S, V)$  — уравнение состояния термодинамической среды. Все термодинамические функции в системе (1) зависят от  $t$  и  $\vec{x}$ . Покажем, как связаны функции  $e(S, V)$  и  $\varepsilon(t, \vec{x})$ . Если дифференциал взять вдоль мировой линии  $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ , то из (2) следует уравнение для энтропии

$$S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0. \quad (3)$$

Дифференцирование вдоль  $\vec{x}$ ,  $t$  дает еще  $n + 1$  равенство

$$T\nabla S = \nabla\varepsilon + p\nabla V, \quad TS_t = \varepsilon_t + pV_t. \quad (4)$$

Мы получаем  $n + 3$  эволюционных уравнений,  $n$  неэволюционных равенств и  $2^{-1}n(n - 1)$  условий совместности, сравнивая смешанные производные функции  $\varepsilon(t, \vec{x})$ .

В одномерном случае  $n = 1$  все функции зависят от  $t$  и  $x$ :  $\varepsilon = \varepsilon(t, x)$ ,  $V = V(t, x)$ ,  $S = S(t, x)$ . Исключение  $t, x$  дает уравнение состояния двухпараметрической среды

$$\varepsilon = e(V, S), \quad T = e_S, \quad p = -e_V. \quad (5)$$

При  $n = 2$  из условий совместности равенств (4) следует

$$\begin{vmatrix} S_t & S_x & S_y \\ p_t & p_x & p_y \\ V_t & V_x & V_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} S_t & S_x & S_y \\ T_t & T_x & T_y \\ V_t & V_x & V_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$p = p(V, S)$ ,  $T = T(V, S)$ , а из (2) следует (5). В пространстве  $\mathbb{R}^n(\vec{x})$ ,  $n \geq 3$  из условий совместности (4) следует

$$\begin{vmatrix} S_t & S_{x^i} & S_{x^j} \\ p_t & p_{x^i} & p_{x^j} \\ V_t & V_{x^i} & V_{x^j} \end{vmatrix} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} S_t & S_{x^i} & S_{x^j} \\ T_t & T_{x^i} & T_{x^j} \\ V_t & V_{x^i} & V_{x^j} \end{vmatrix} = 0.$$

В новой системе координат  $S, V, x^3, \dots, x^n$ , отсюда следует  $p = p(V, S)$ ,  $T = T(V, S)$ , а из (2) следует (5).

Итак, среды с термодинамическим тождеством (2) являются двухпараметрическими. С уравнением состояния  $\varepsilon = e(V, S)$  движение определяется уравнениями

$$\begin{aligned} DV &= V\nabla \cdot \vec{u}, \\ D\vec{u} &= V(e_{VV}\nabla V + e_{VS}\nabla S), \quad DS = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для других термодинамических функций справедливо уравнение

$$\begin{aligned} D\varepsilon &= Ve_V\nabla \cdot \vec{u}, \quad Dp = -Ve_{VV}\nabla \cdot \vec{u}, \\ DT &= Ve_{SV}\nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если  $e_{VV} > 0$ , то система уравнений гиперболична и описывает движения газа [6, 7]. Для измеряемых термодинамических величин  $p, V, T$  уравнение состояния и дифференциальные уравнения принимают вид [7]:

$$\begin{aligned} p &= g_V, \quad \varepsilon = Tg_T - g(T, V), \quad S = g_T, \\ g_{TT}Dp &= V(g_{VV}g_{TT} - g_{TV}^2)\nabla \cdot \vec{u}, \\ g_{TT}DT &+ Vg_{TV}\nabla \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения для  $V, \vec{u}$  из (1) и для  $T$  из (8) задают замкнутую систему с измеряемым уравнением состояния.

### 3. О преобразованиях эквивалентности

Система (6) удобна для группового анализа, когда разыскиваются преобразования всех переменных (зависимых и независимых), оставляющих неизменными уравнения системы. Преобразования, не меняющие уравнение состояния, образуют ядро допускаемых групп преобразований. Ядро было найдено Л.В. Овсянниковым [3]. Оно состоит из переносов по времени и по пространству, галилеевых переносов (движения начала с постоянной скоростью), вращений вокруг любой оси, проходящей через начало и равномерного растяжения по времени и пространству. Ядро образует 11-параметрическую группу преобразований. Ядро может расширяться для специальных уравнений состояния. Классификацию всех расширений следует делать с точностью до преобразований эквивалентности, когда система (6) не меняется, но изменяется лишь уравнение состояния. Некоторые преобразования были замечены в работах [1, 2], и с их помощью была проделана групповая классификация. Оказывается, что почти все расширения являются преобразованиями эквивалентности.

Вычислим частный случай преобразований эквивалентности системы (6) вида

$$\tilde{\varepsilon} = h(S, V, \varepsilon), \quad \tilde{V} = g(S, V, \varepsilon), \quad \tilde{S} = f(S, V, \varepsilon), \quad (9)$$

когда уравнение состояния  $\varepsilon = e(S, V)$  перейдет в  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{e}(\tilde{S}, \tilde{V})$ , т.е. выполнено соотношение

$$\begin{aligned} h(S, V, e(S, V)) &= \\ &= \tilde{e}(f(S, V, e(S, V)), g(S, V, e(S, V))), \end{aligned} \quad (10)$$

а переменные  $t, \vec{x}, \vec{u}$  инвариантны.

Из уравнений (6) и (7) следует

$$\begin{aligned} D\tilde{S} &= f_S DS + f_V DV + f_\varepsilon D\varepsilon = 0 \Rightarrow f_V + f_\varepsilon e_V = 0; \\ D\tilde{V} &= g_S DS + g_V DV + g_\varepsilon D\varepsilon = \tilde{V} \nabla \cdot \tilde{u} \\ &\Rightarrow g = V(g_V + g_\varepsilon e_V). \end{aligned}$$

Если уравнение состояния общего вида, т.е.  $g_V$  принимает любые значения, то  $f_V = 0$ ,  $f_\varepsilon = g_\varepsilon = 0$ ,  $g = Vg_V$  (расщепление по  $e_V$ ). Далее считаем  $\tilde{S} = f(S)$ ,  $\tilde{V} = Vg(S)$ . Из уравнений для импульса

$$\nabla \cdot \tilde{u} = \tilde{V}(\tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} \nabla \tilde{V} + \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{S}} \nabla \tilde{S}) = V(e_{VV} \nabla V + e_{VS} \nabla S)$$

следует

$$e_{VS} = g(Vg' \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} + f' \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{S}}), \quad e_{VV} = g^2 \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}}. \quad (11)$$

Дифференцирование (10) по  $S$  и по  $V$  дает зависимость между первыми производными функций  $e$ ,  $\tilde{e}$ :

$$h_S + h_\varepsilon e_S = \tilde{e}_{\tilde{S}} f' + \tilde{e}_{\tilde{V}} Vg', \quad h_V + h_\varepsilon e_V = \tilde{e}_{\tilde{V}} g. \quad (12)$$

Дальнейшее дифференцирование по  $V$  в силу (11) и расщепления по  $e_V$ ,  $e_{VV}$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} g^2 &= h_{VV} + 2h_{V\varepsilon} e_V + h_{\varepsilon\varepsilon} e_{VV} = e_{VV} \\ &\Rightarrow h_\varepsilon = 1, \quad h_{VV} = 0 \end{aligned}$$

определяет функцию  $h = \varepsilon + V\alpha(S) + \beta(S)$ , а (12) принимает вид:

$$\alpha' V + \beta' + e_S = \tilde{e}_{\tilde{S}} f' + \tilde{e}_{\tilde{V}} Vg', \quad \alpha + e_V = \tilde{e}_{\tilde{V}} g.$$

Дифференцирование по  $V$  в силу (11) дает

$$\begin{aligned} \alpha' &= g' \tilde{e}_{\tilde{V}} \Rightarrow \alpha' = g' = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = A, \quad g = C - \text{постоянные.} \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование эквивалентности вида (9) таковы:

$$\tilde{S} = f(S), \quad \tilde{V} = CV, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + AV + \beta(S), \quad (13)$$

где  $A, C$  — произвольные постоянные;  $f, \beta$  — произвольные функции.

Вычислим преобразования эквивалентности — растяжения общего вида. Учитывая преобразования (13) достаточно искать преобразования эквивалентности — растяжения вида

$$\tilde{t} = Tt, \quad \tilde{x} = X\tilde{x}, \quad \tilde{u} = U\tilde{u}, \quad \tilde{\varepsilon} = E\varepsilon.$$

Система (6) с произвольной функцией  $e(S, V)$  сохраняет свой вид, только если

$$X = TU, \quad E = U^2. \quad (14)$$

Базисные операторы бесконечной алгебры Ли  $L$  группы преобразований эквивалентности в декартовой системе координат записываются в виде ( $k = 1, 2, 3$ ) [8]:

$$\begin{aligned} X_k &= \partial_{x^k}, \quad X_{3+k} = t\partial_{x^k} + \partial_{u^k}, \\ X_{6+k} &= x^i \partial_{x^j} - x^j \partial_{x^i} + u^i \partial_{u^j} - u^j \partial_{u^i}, \end{aligned}$$

( $i, j, k$ ) — круговая перестановка индексов (1, 2, 3);

$$\begin{aligned} X_{10} &= \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^k \partial_{x^k}; \quad X_{12} = V\partial_V - p\partial_p, \\ X_{13} &= t\partial_t - u^k \partial_{u^k} - 2\varepsilon\partial_\varepsilon - 2p\partial_p, \quad X_{14} = V\partial_\varepsilon - \partial_p, \\ \langle f(S) \rangle_1 &= f(S)\partial_S, \quad \langle \beta(S) \rangle_2 = \beta(S)\partial_\varepsilon, \end{aligned}$$

где  $f(S), \beta(S)$  — произвольные функции.

Здесь операторы продолжены на производную  $p = -e_V$  для сравнения с групповой классификацией из работы [3]. Есть только два расширения из групповой классификации, которые не входят в алгебру  $L$ . Выясним для каких уравнений состояния они являются преобразованиями эквивалентности. Первое расширение задается оператором контактных преобразований [9]

$$\begin{aligned} -\varphi'(-e_V)V\partial_V - V(\varphi(-e_V) + e_V\varphi'(-e_V))\partial_\varepsilon - \\ -\varphi(-e_V)\partial_{e_V}, \quad \varphi'' \neq 0, \end{aligned}$$

где  $\varphi(e)$  — произвольная функция.

Бесконечная псевдогруппа задается равенствами

$$\begin{aligned} p &= -e_V, \quad \tilde{e}_{\tilde{V}} = -\mu(p), \quad \tilde{V} = \frac{V}{\mu'(p)}, \\ \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon - Vp + \frac{V\mu(p)}{\mu'(p)}, \quad \varphi(p)\mu' = \varphi(\mu). \end{aligned}$$

Уравнения (6) не изменятся при таких преобразованиях с произвольной функцией  $\mu(p)$  лишь при линейном уравнении состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -P(S)V + \varepsilon_0(S), \\ \tilde{P}(\tilde{S}) &= P(S)\mu(P(S)), \quad \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{S}) = \varepsilon_0(S) \end{aligned}$$

с произвольной функцией  $P(S)$ .

Второе расширение связано с проективным оператором

$$\begin{aligned} t(t\partial_t - u^k \partial_{u^k}) + x^j(t\partial_{x^j} + \partial_{u^j}) - \\ -t(2\varepsilon\partial_\varepsilon - 3V\partial_V + MS\partial_S + 5p\partial_p), \quad p = -e_V, \end{aligned}$$

где  $M$  — постоянная.

Решая уравнения Ли [8], получим проективные преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t(1 - at)^{-1}, \quad \tilde{x}^j = x^j(1 - at)^{-1}, \\ \tilde{u}^k &= ax^k + u^k(1 - at), \quad \tilde{V} = V(1 - at)^{-3}, \\ \tilde{S} &= S(1 - at)^M, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1 - at)^2, \end{aligned}$$

где  $a$  — групповой параметр.

На производные преобразования продолжают по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= p(1-at)^5, \quad \tilde{V}_j = V_j(1-at)^{-2}, \\ \tilde{V}_t &= V_t(1-at)^{-1} - a(x^j V_j - 3V)(1-at)^{-2}, \\ \tilde{u}_j^k &= u_j^k(1-at)^2 + a\delta_j^k(1-at), \\ \tilde{u}_t^k &= u_t^k(1-at)^3 - a(1-at)[ax^k + (x^j u_j^k + u^k)(1-at)], \\ \tilde{S}_j &= S_j(1-at)^{M+1}, \\ \tilde{S}_t &= S_t(1-at)^{M+2} - a(x^j S_j + MS)(1-at)^{M+1}.\end{aligned}$$

Система (6) инвариантна относительно проективных преобразований только, если  $M = 0$ . Уравнение состояния удовлетворяет функциональному равенству

$$\tilde{e}(S, V(1-at)^{-3}) = e(S, V)(1-at)^2.$$

Дифференцирование по  $V$  и по  $t$  приводит к уравнению

$$3Ve_V = -2e \Rightarrow e = V^{-2/3}h(S) \Rightarrow p = \frac{2}{3}V^{-5/3}h(S).$$

Получено уравнение состояния одноатомного газа, модель которого инвариантна относительно проективных преобразований. Можно ли обобщить уравнения состояния, для которых проективное преобразование будет преобразованием эквивалентности?

#### 4. Газодинамическая среда, меняющаяся со временем

Многофазная сплошная среда описывается множеством термодинамических параметров — концентрациями компонент и их потенциалами. Физико-химические превращения сопровождаются притоками тепловой энергии. Протекающие процессы описываются большим количеством уравнений и постоянных, которые не всегда можно измерить. Для расчета движения отдельных компонент пользуются различными упрощениями и усреднениями. Если важно знать движение среды в целом, то простейшее усреднение можно задать изменяющимся со временем уравнением состояния для хорошо изученного процесса. Для этого надо измерить лишь мощность притока энергии в элементарном объеме. Для сред с реологией такие уравнения состояния измерены [10].

Рассмотрим газодинамическую сплошную среду с непрерывно меняющимся уравнением состояния

$$\varepsilon = e(t, S, V).$$

В термодинамическом тождестве учитывается приток энергии

$$TdS = d\varepsilon + pdV + \mu dt \Rightarrow T = e_s, p = -e_V, \mu = -e_t,$$

где  $\mu$  — мощность притока энергии. В системе (6) изменится уравнение для энтропии

$$e_S DS + e_t = 0. \quad (15)$$

Преобразования эквивалентности (13) и (14) остаются прежними.

Чтобы проективное преобразование было преобразованием эквивалентности, уравнение состояния должно удовлетворять функциональному равенству

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= (t(1-at)^{-1}, S(1-at)^M, V(1-at)^{-3}) = \\ &= e(t, S, V)(1-at)^2.\end{aligned}$$

Вычисляя преобразования производных функции  $e$  и подставляя их в преобразованное уравнение (15), получим

$$MSe_S + 3Ve_V = -2e.$$

Решение этого уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon &= S^{-2/M}e(t, VS^{-3/M}), \quad M \neq 0; \\ \varepsilon &= V^{-2/3}e(t, S), \quad M = 0,\end{aligned}$$

задают уравнения состояния, для которых проективный оператор является преобразованием эквивалентности. Преобразования эквивалентности используют для групповой классификации, когда находят классы уравнений состояния, с которыми система уравнений допускает больше симметрий, чем в случае общего уравнения состояния. Если известна вся группа преобразований эквивалентности, то оптимальная система подгрупп задает групповую классификацию.

#### 5. Заключение

Для стационарных уравнений состояния система квазилинейных уравнений газодинамического типа будет двухпараметрической. Для уравнения состояния  $\varepsilon = e(S, V)$  определены преобразования эквивалентности термодинамических параметров и общих растяжений. Проективные преобразования допускаются системой уравнений в случае стационарного уравнения состояния для одноатомного газа. Проективные преобразования эквивалентности возможны для специальных нестационарных уравнений состояния.

## Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
- [2] Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.  
[eLIBRARY ID: 28850604](#)
- [3] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: издательство СО АН СССР, 1962. 239 с.
- [4] Хабиров С.В. Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 99–103.  
[eLIBRARY ID: 21596977](#)
- [5] Хабиров С.В. Мукминов Т.Ф. Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные матем. известия. 2019. Т. 16. С. 121–143.  
[DOI: 10.33048/semi.2019.16.006](#)
- [6] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- [7] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
- [8] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
- [9] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [10] Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. Санкт-Петербург: Издательство ПРОФЕССИЯ, 2010. 557 с.



## On equivalence transformations of gasdynamic medium

Khapiro S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

In the work we consider a quasilinear system of differential equations describing the motion of ideal gasdynamic medium. From the thermodynamic identity it follows that the medium is two-parameter. The equation of state is given by the internal energy as a function of an entropy and a specific volume. The equivalent transformations do not change the form of the system but change only the equation of state. We found all equivalent transformations converting only thermodynamic parameters and expanding all variables. The known group classification extended admitted group consists of the equivalent transformations. There is exclusion when the equation of state is linear on the specific volume and in the case of oneatomic gas. In the last case the model is invariant under projective transformations. We found a family of the equations of state for which the projective transformations are the equivalent transformations if the equations of state change with the time.

**Keywords:** gas dynamics, equation of state, equivalent transformation, group classification

### References

- [1] Ovsyannikov L.V. The "podmodeli" program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V. 58, No. 4. Pp. 601–627.  
DOI: [10.1016/0021-8928\(94\)90137-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90137-6)
- [2] Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the "podmodeli" program for the gas dynamics equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63, No. 3. Pp. 349–358.  
DOI: [10.1016/S0021-8928\(99\)00046-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00046-5)
- [3] Ovsyannikov L.V. [Group properties of differential equations]. *Grupповые свойства дифференциальных уравнений*. Novosibirsk: publishing house of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1962. P. 239. (In Russian)
- [4] Khapiro S.V. Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations // Ufa Mathematical Journal. 2014. V. 6, No. 2. Pp. 97–101.  
DOI: [10.13108/2014-6-2-97](https://doi.org/10.13108/2014-6-2-97)
- [5] Khapiro S.V., Mukminov T.F. Graf of embedded subalgebras of 11–dimensional symmetry algebra for continuous medium. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019. V. 16. Pp. 121–143. (In Russian)  
DOI: [10.33048/semi.2019.16.006](https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.006)
- [6] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the basics of gas dynamics] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki*. Moskva-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2003. P. 336. (In Russian)
- [7] Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike*. Moscow: Nauka, 1968. P. 592.
- [8] Ovsyannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. United States: Elsevier Science, 2014.
- [9] Ibragimov N.Kh. Transformation groups applied to mathematical physics. Riedel, Dordrecht, 1985.
- [10] Malkin A.Ya., Isayev A.I. Rheology: conceptions, methods, applications. ChemTecPublishing. Toronto, Canada. 2005. 485 p.



## Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер<sup>1</sup>

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Изучение явления рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров, отличающихся плотностью и (или) сжимаемостью от основной среды, является одной из важнейших задач акустики, поскольку на данном явлении основываются многие практические применения акустических волн, таких как гидролокация, зондирование атмосферы и океана, создание позиционируемого 3D звука и т.д. В настоящей работе исследуется акустическое рассеяние от слоя, состоящего из множества звукопроницаемых сфер, в трехмерном пространстве при воздействии монополюсного источника излучения. Данный частный случай имеет место, когда область, содержащая множество малых неоднородностей, условно является двумерной (одной из трех размерностей можно пренебречь). Задача решена численно с помощью обобщенной методики расчета, основанной на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Тестирование результатов настоящей работы, полученных для капель воды в воздухе, в пределах небольшой погрешности показало хорошее согласование с аналогичными результатами других исследователей в случае жестких звуконепроницаемых сфер. Показано, что изменение наименьшего расстояния между сферами существенно меняет картину как качественно, так и количественно, поскольку взаимодействие между сферами сильно зависит от плотности расположения сфер в конфигурации. При построении диаграмм распределения нормированного давления на расстоянии от рассеивающего слоя было обнаружено, что слой играет роль двумерной дифракционной решетки, имеющей различную степень прохождения акустических волн, которая зависит от соотношений физических параметров внешней и внутренней сред.

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, рассеивающий слой, звукопроницаемая сфер, метод разложения по мультиполям, монополюсный источник излучения, диаграмма распределения давления

### 1. Введение

При изучении явления рассеяния звуковых волн в трехмерном пространстве на неоднородностях малых размеров, отличающихся плотностью и (или) сжимаемостью от основной среды, возникает ряд подзадач, углубленное исследование которых позволяет получить более полную картину для общей задачи. Одной из таких подзадач является определение давления на некотором расстоянии от рассеивающего слоя, состоящего из малых звукопроницаемых сфер (волна проходит через поверхность), при внешнем воздействии. Подоб-

ные подзадачи могут возникать, например, в гидролокации [1], при зондировании атмосферы или океана [1–3] или при создании позиционируемого 3D звука [4], когда область, содержащая множество исследуемых неоднородностей, условно является двумерной (одной из трех размерностей данной области можно пренебречь).

В настоящей работе исследуется акустическое рассеяние от слоя простой конфигурации, содержащего множество звукопроницаемых сфер, в трехмерном пространстве при воздействии сферической волны от монополюсного источника излучения. Основной целью является построение и анализ диаграмм распределения давления на расстоянии от рассеивающего слоя при различных соотношениях физических параметров внешней и внутренней сред, а также плотности расположения сфер в кон-

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052.



фигурации.

Задача решается в рамках вычислительного эксперимента с помощью обобщенной численной техники разложения по мультиполям, изначально разработанной для случая звуконепроницаемых сфер (волна не проходит через поверхность) с произвольным комплексным сопротивлением в работе [5]. Обобщение данной техники для случая звукопроницаемых сфер в частном случае, когда центры сфер лежат на одной оси, представлено в работах [6, 7]. Выбор данной методики разложения по мультиполям обусловлен тем, что она позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах процессорного времени.

Отметим, что для исследований в настоящей работе была выбрана конфигурация, предложенная в работе [5], поскольку она, в отличие от численных исследований других авторов, содержит более трех сфер. Это позволяет провести верификацию представленной численной модели на примере системы, состоящей из большого числа сферических частиц. В дальнейшем на основе данной модели будут исследованы более сложные структуры для звукопроницаемых сфер, так как задача в общем случае не ограничена конфигурациями простой формы.

## 2. Постановка задачи и основные уравнения

В общем случае задача рассеяния звука от  $N$  звукопроницаемых сфер различных радиусов  $a_v$  ( $v = 1, \dots, N$ ) с центрами в координатах  $\mathbf{r}'_v$  сводится к решению уравнения Гельмгольца [8] для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$  в точке вне сфер, имеющей в декартовой системе координат радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , с волновым числом  $k_0$

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности  $v$ -ой сферы  $S_v = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_v| = a_v\}$ :

$$\left(\psi(\mathbf{r}) - \psi_{\text{int}}^{(v)}\right)\Big|_{S_v} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r}\right)\Big|_{S_v} = 0, \quad v = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\psi_{\text{int}}^{(v)}$  — комплексный потенциал внутри  $v$ -й сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом  $k_v$  для внутренней среды:

$$\nabla^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} = 0.$$

В формуле (3)  $\rho_0$  — плотность внешней среды;  $\rho_v$  — плотность среды внутри  $v$ -й сферы.

Потенциал внешнего поля представляется в следующей форме:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  — потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, который удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, соответствующему затухающим на бесконечности волнам [9]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik_0 \psi_{\text{scat}} \right) = 0.$$

Потенциал поля рассеяния в соответствии с методом разложения по мультиполям [5] в системах отсчета, связанных с центрами сфер ( $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_v = \mathbf{r}_v = (r_v, \theta_v, \varphi_v)$ ,  $v = 1, \dots, N$ ), представляется в виде

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(v)m} S_n^m(\mathbf{r}_v), \quad (5)$$

где  $A_n^{(v)m}$  — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_n^m(\mathbf{r}_v) = h_n(k_0 r_v) Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$  — мультиполь порядка  $n$  и степени  $m$ ;  $h_n(z)$  — сферические функции Ханкеля 1-го типа [10];  $Y_n^m(\theta, \varphi)$  — ортогональные сферические гармоники; а потенциал падающего поля —

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_v) R_n^m(\mathbf{r}_v), \quad (6)$$

где  $C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_v)$  — коэффициенты разложения падающего поля около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_v$ ;  $R_n^m(\mathbf{r}_v) = j_n(k_0 r_v) \times Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$  — регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные с  $v$ -й сферой;  $j_n(z)$  — сферические функции Бесселя 1-го типа [10].

Окончательно задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_l^{(v)s}$ , которую обычно представляют в матричном виде. Для случая звукопроницаемых сфер имеем

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{A} = \{A_u\}, \quad \mathbf{D} = \{D_t\}, \quad \mathbf{L} = \{L_{ut}\},$$

$$A_u = A_l^{(v)s};$$

$$D_t = -B_n^{(w)m} C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w);$$

$$L_{ut} = L_{\tilde{u}\tilde{t}}^{(wv)} = \begin{cases} B_n^{(w)m} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) & \text{для } v \neq w, \\ \delta_{\tilde{u}\tilde{t}} & \text{для } v = w; \end{cases}$$

$$B_n^{(w)m} = \frac{j_n(k_0 a_w) j_n'(k_w a_w) - \kappa_w j_n'(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)}{h_n(k_0 a_w) j_n'(k_w a_w) - \kappa_w h_n'(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)},$$

$$u = (v-1)(n_{tr}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s),$$

$$l = 0, 1, \dots, n_{tr}, \quad s = -l, \dots, l;$$

$$t = (w-1)(n_{tr}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m),$$

$$n = 0, 1, \dots, n_{tr}, \quad m = -n, \dots, n;$$

$$\tilde{u} = (l+1)^2 - (l-s); \quad \tilde{t} = (n+1)^2 - (n-m);$$

$$v, w = 1, \dots, N.$$

Здесь  $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$  — коэффициенты перехода при повторном разложении, которые зависят от относительного положения  $v$ -й и  $w$ -й сфер  $\mathbf{r}'_{vw}$  [5];  $B_n^{(w)m}$  и  $\kappa_w = \frac{k_0 \rho_w}{k_w \rho_0}$  — введенные параметры;  $\delta_{\tilde{u}\tilde{t}}$  — символ Кронекера;  $n_{tr}$  — число членов по  $n$  при усечении рядов в разложениях (5) и (6). Отметим, что в настоящей работе при определении числа  $n_{tr}$  использовался подход [11], при котором усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда  $\Sigma$  (при  $n_i = n_{tr}$  и  $n_{i+1} = n_{tr} + 1$ ): как только их относительная погрешность  $\delta = |(\Sigma_{n_i} - \Sigma_{n_{i+1}}) / \Sigma_{n_i}| \cdot 100\%$  становится меньше некоторого фиксированного значения  $\delta_{fix}$ , дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение  $n_{tr} = n_i$ .

Рассмотрим рассеивающий слой, состоящий из  $N = 1 \times N_y \times N_z$  звукопроницаемых сфер одного радиуса  $a$ , равномерно распределенных в плоскости  $Oyz$  с наименьшим расстоянием между центрами соседних сфер  $\delta_y l = \delta_z l = \delta l$  (конфигурация в случае  $N_y = N_z = 11$  представлена на рис. 1). Монопольный источник излучения  $M_S$  расположен на оси  $Ox$  на расстоянии  $d$  от плоскости  $x = 0$ , содержащей центры сфер, то есть в точке  $M_S = (-d, 0, 0)$ , а точка расчета для тестовой задачи  $M_C$  — на этой же оси, симметрично относительно данной плоскости, то есть в точке  $M_C = (d, 0, 0)$ .

### 3. Численные результаты

При численной реализации техники разложения по мультиполям был разработан программный код на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [12]. Для вычисления специальных сферических функций были адаптированы программные коды [13] для специальных цилиндрических функций, написанные на языке Fortran 77.

Верификация расчетов настоящей работы проводилась путем сравнения с конфигурацией, представленной на рис. 1, для случая звукопроницаемых жестких сфер, которые были рассмотре-

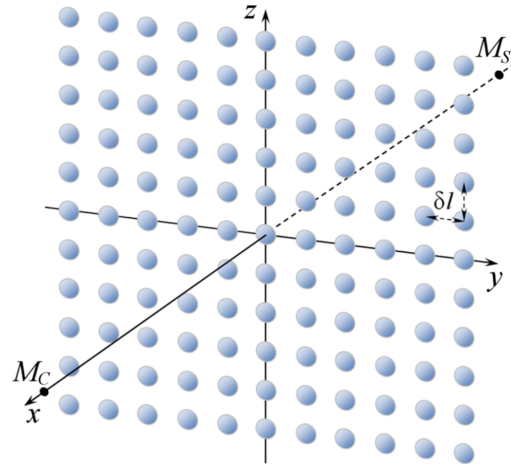


Рис. 1. Рассеивающий слой из 121 равномерно распределенных в плоскости  $Oyz$  сфер одного радиуса  $a$ ;  $\delta l$  — наименьшее расстояние между центрами сфер;  $M_S$  — монопольный источник излучения;  $M_C$  — точка расчета для тестовой задачи

ны в работе [5]. Для того чтобы данное сравнение было возможным в рамках поставленной в настоящей работе задачи, необходимо внутреннюю и внешнюю среды выбрать таким образом, чтобы отношения упругостей вещества сферы ( $\chi_v = \rho_v c_v^2$ ) и внешней среды ( $\chi_0 = \rho_0 c_0^2$ ) и плотностей внутренней и внешней сред были большими [8], то есть  $\chi_v / \chi_0 \gg 1$  и  $\rho_v / \rho_0 \gg 1$ . Тогда в качестве внешней среды может быть выбрана среда с физическими свойствами воздуха ( $\rho_0 = 1.205 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_0 = 343.1 \text{ м/с}$ ), а внутренней — воды ( $\rho_v = 998 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_v = 1484 \text{ м/с}$ ). В соответствии с работой [5] зададим следующие параметры: число сфер в конфигурации  $N = 1 \times 11 \times 11 = 121$ , наименьшее расстояние между центрами соседних сфер  $\delta l = 5a$ , радиус сферы  $a = 1$ , расстояние  $d = 10a$ , то есть монопольный источник излучения  $M_S$  расположен в точке  $(-10a, 0, 0)$ , а точка расчета  $M_C$  — в точке  $(10a, 0, 0)$ . При  $n_{tr} = 5$  для волновых радиусов  $k_0 a = 1, 3$  и  $5$  рассчитывалась функция

$$\text{STF} = 20 \lg \left| \frac{\Psi|_{M_C}}{\Psi_{\text{in}}|_{M_C}} \right|.$$

Относительные погрешности между расчетными значениями настоящей работы для капель воды в воздухе и численными значениями, полученными в работе [5] для жестких звукопроницаемых сфер, для  $k_0 a = 1$  равны 0.19%; для  $k_0 a = 3$  — 0.92% и для  $k_0 a = 5$  — 4.64%. Увеличение погрешности с ростом волнового радиуса  $k_0 a$  обусловлено тем, что, чем выше  $k_0 a$ , тем необходимо большее число членов  $n_{tr}$  при усечении рядов в разложении, при

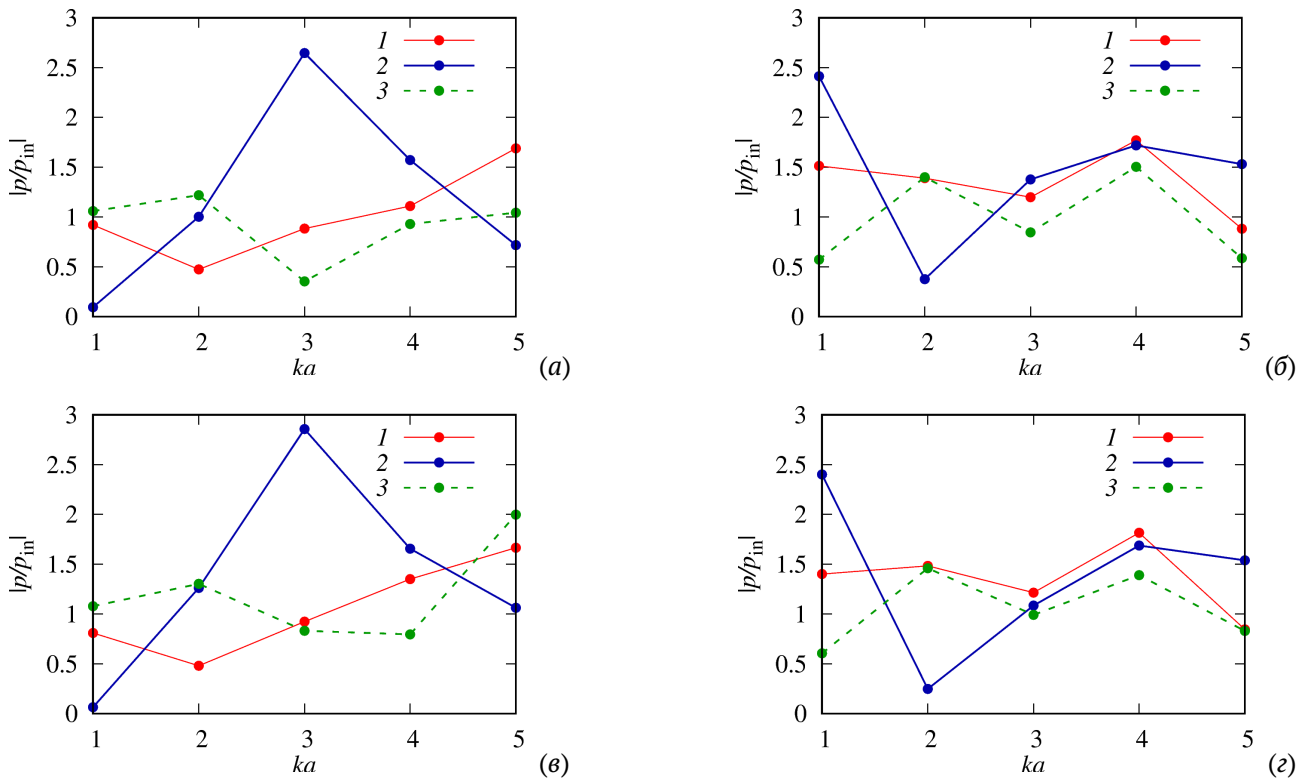


Рис. 2. Значение нормированного давления  $|p/p_{in}|$  в точке  $M_C = (10a, 0, 0)$  в зависимости от волнового числа  $k_0a = 1, 2, 3, 4, 5$  при  $n_{tr} = 8$  для различных конфигураций системы:  $N = 1 \times 11 \times 11$ ,  $\delta l = 3a$  (а);  $N = 1 \times 11 \times 11$ ,  $\delta l = 5a$  (б);  $N = 1 \times 9 \times 9$ ,  $\delta l = 3a$  (в);  $N = 1 \times 9 \times 9$ ,  $\delta l = 5a$  (г) и различных физических параметров внешней и внутренней сред: 1 – капля воды в воздухе; 2 – воздушный пузырек в воде; 3 – капля дихлорэтана в воде

котором достигается устойчивое решение, а, следовательно, тем больше отклонение конечного результата от случая малых жестких сфер. Таким образом, результаты настоящей работы, полученные для капель воды в воздухе, в пределах небольшой погрешности хорошо согласуются с аналогичными результатами для малых жестких сфер.

На рис. 2 представлены результаты расчетов нормированного давления  $|p/p_{in}|$  в точке  $M_C = (10a, 0, 0)$  для конфигурации, представленной на рис. 1, и значений волновых радиусов  $k_0a = 1, 2, 3, 4$  и 5, а также для различных физических параметров внешней и внутренней сред, а именно: для капель воды в воздухе, воздушных пузырьков в воде и капель дихлорэтана ( $\rho_v = 1252.6 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_v = 1034 \text{ м/с}$ ) в воде. Рассмотрены случаи, когда конфигурации отличаются числом сфер  $N = 121$  и  $N = 81$  (см. рис. 2 (а), (б) и рис. 2 (в), (г) соответственно) и наименьшим расстоянием между центрами сфер  $\delta l = 3a$  и  $\delta l = 5a$  (см. рис. 2 (а), (в) и рис. 2 (б), (г) соответственно).

Отметим, что связь между акустическим давлением  $p$  и потенциалом  $\psi$  определяется

следующим соотношением

$$p = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho \psi,$$

поэтому значения  $p$  и  $p_{in}$  выражаются через соответствующие потенциалы с точностью до постоянной величины  $i\omega\rho$ .

Сравнение данных, представленных на рис. 2 (а) и (в), так же, как и на рис. 2 (б) и (г), показало, что уменьшение числа сфер по периметру в конфигурации несущественно влияет на значение расчетной функции в точке  $M_C$  как качественно, так и количественно: модуль разности между соответствующими величинами не превышает значения 0.24. А сравнение рис. 2 (а) и (б) (аналогично, рис. 2 (в) и (г)) дает, что при изменении наименьшего расстояния между сферами картина в расчетной точке существенно меняется как качественно, так и количественно, поскольку взаимодействие между сферами зависит от плотности расположения сфер в конфигурации.

На рис. 3–5 представлены диаграммы распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  на рас-

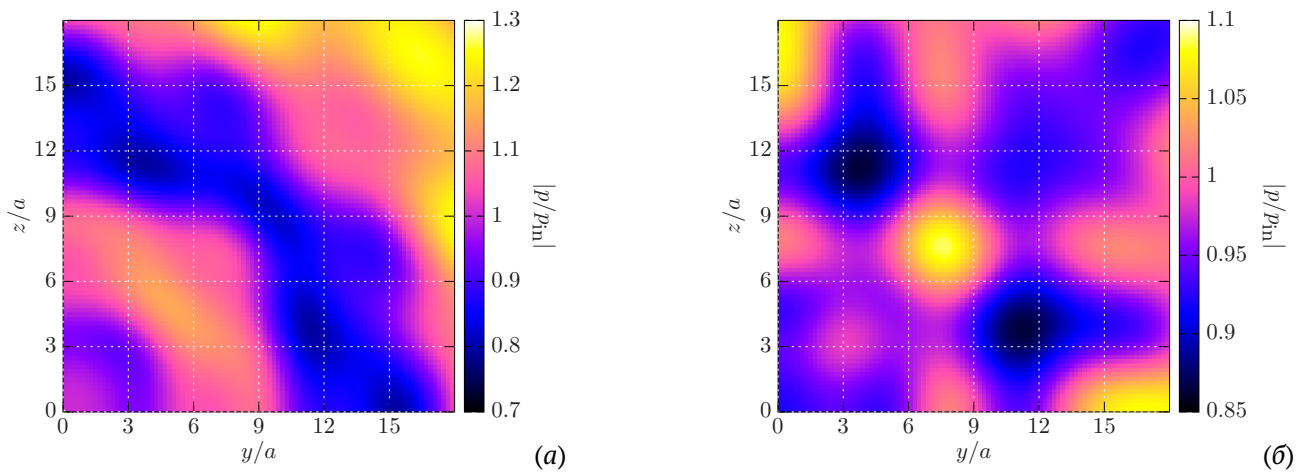


Рис. 3. Диаграммы распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  для случая капля воды в воздухе при  $\delta l = 3a$  и  $k_0 a = 1$  в I четверти в плоскостях  $x = -10a$  (а) и  $x = 10a$  (б)

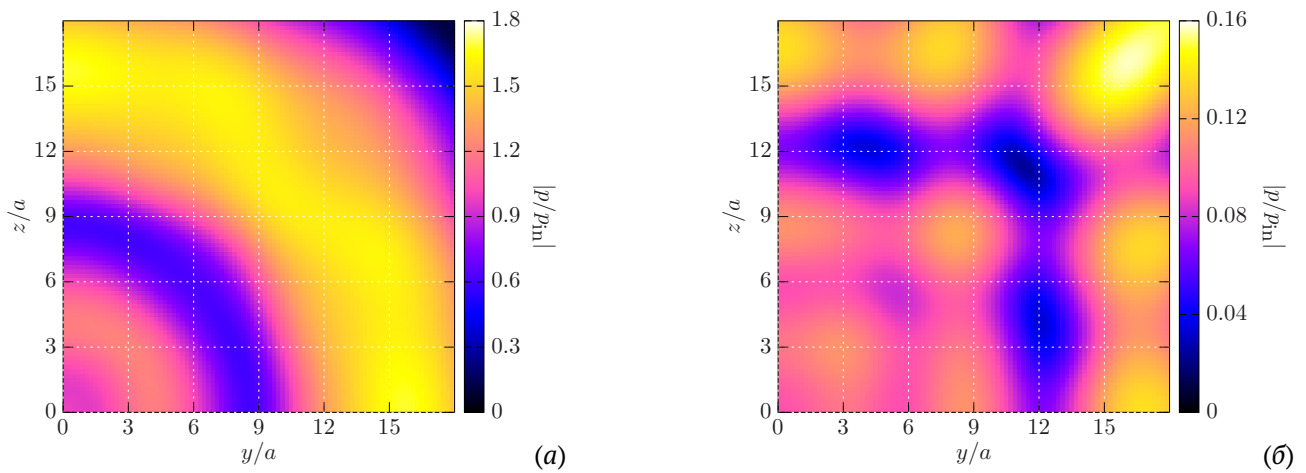


Рис. 4. Диаграммы распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  для случая воздушных пузырьков в воде при  $\delta l = 3a$  и  $k_0 a = 1$  в I четверти в плоскостях  $x = -10a$  (а) и  $x = 10a$  (б)

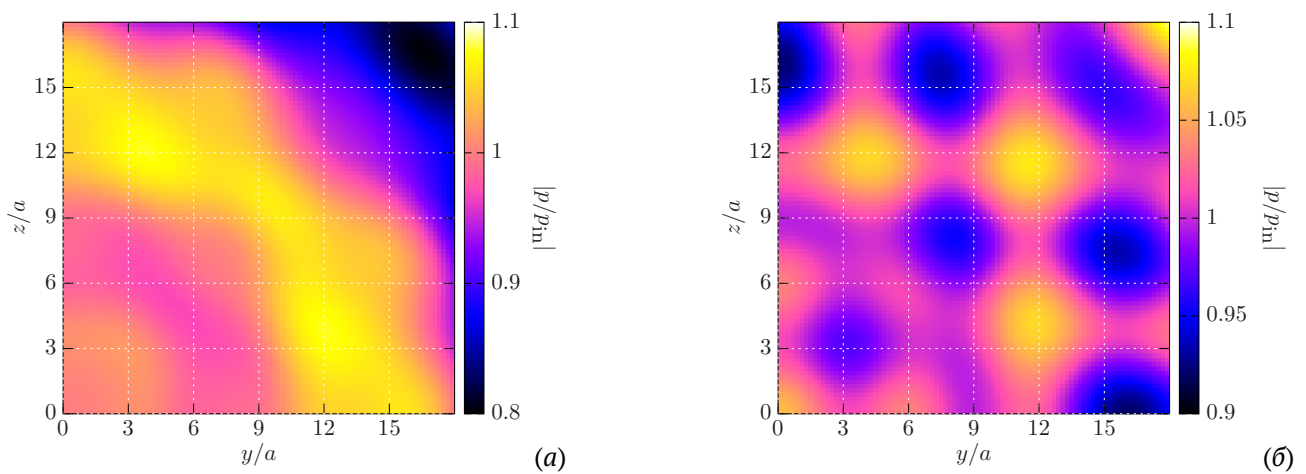


Рис. 5. Диаграммы распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  для случая капля дихлорэтана в воде при  $\delta l = 3a$  и  $k_0 a = 1$  в I четверти в плоскостях  $x = -10a$  (а) и  $x = 10a$  (б)

стоянии от рассеивающего слоя: в плоскости, содержащей монополюсный источник излучения  $M_S$ , где на распределение давления в основном влияют волны, рассеянные системой сфер в обратном к падающей сферической волне направлении, и в симметричной ей (относительно рассеивающего слоя) плоскости, где на распределение давления влияют волны, прошедшие сквозь данный слой. Рассмотрена конфигурация, представленная на рис. 1, при следующих параметрах:  $N = 1 \times 11 \times 11$ ,  $\delta l = 3a$ ,  $k_0 a = 1$ . Приведены диаграммы для внешних и внутренних сред, соответствующие каплям воды в воздухе (рис. 3), воздушным пузырькам в воде (рис. 4) и каплям дихлорэтана в воде (рис. 5). Поскольку система симметрична относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , то расчеты проведены только в I четверти. Число расчетных точек плоскости:  $91 \times 91$ .

Представленные диаграммы показывают следующее:

- если физические параметры внешней и внутренней сред удовлетворяют соотношениям  $\chi_v/\chi_0 \gg 1$  и  $\rho_v/\rho_0 \gg 1$  (случай капель воды в воздухе), то большая часть волн отражается от рассеивающего слоя (давление в плоскости  $x = -10a$  отклоняется от начального на  $\pm 30\%$ ), в то время, как меньшая часть волн проходит через него (отклонение давления от начального в плоскости за слоем не превышает  $15\%$ );
- если выполняются соотношения  $\chi_v/\chi_0 \ll 1$  и  $\rho_v/\rho_0 \ll 1$  (случай воздушных пузырьков в воде), то основная часть волн отражается (отклонение давления от начального доходит до  $80\%$ , а за слоем нормированное давление  $|p/p_{in}|$  падает до значений  $0.16$  и ниже);
- если физические параметры внешней и внутренней сред сопоставимы друг с другом —  $\chi_v/\chi_0 \approx 1$  и  $\rho_v/\rho_0 \approx 1$  (для капель дихлорэтана в воде имеем  $\chi_v/\chi_0 \approx 0.6$  и  $\rho_v/\rho_0 \approx 1.3$ ), то часть волн отражается от слоя, а часть проходит через него (отклонение давления от начального составляет  $\approx 10\%$  с обеих сторон от рассеивающего слоя).

В табл. 1 для диаграмм, представленных на рис. 3–5, приведено число членов  $n_{tr}$  при усечении рядов, полученное с помощью подхода [11] при  $\delta_{fix} = 1\%$  для всех расчетных точек плоскости. Для рассмотренных случаев при построении диаграмм достаточно брать  $n_{tr} = 3$  кроме диаграммы на рис. 4 (б), для которой необходимая точность для всех точек плоскости достигается при  $n_{tr} = 5$ . В данной таблице приведены также значения наибольшей  $\delta_{max}$  и наименьшей  $\delta_{min}$  относительных

Таблица 1. Число членов при усечении рядов  $n_{tr}$ , наибольшая  $\delta_{max}$  и наименьшая  $\delta_{min}$  относительные погрешности для диаграмм, представленных на рис. 3–5

рис.	$n_{tr}$	$\delta_{max}, \%$	$\delta_{min}, \%$
3 (а)	3	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-6}$
3 (б)	3	0.27	$1.09 \cdot 10^{-5}$
4 (а)	3	0.66	$1.05 \cdot 10^{-5}$
4 (б)	5	$9.73 \cdot 10^{-2}$	$3.98 \cdot 10^{-5}$
5 (а)	3	$4.76 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-8}$
5 (б)	3	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$6.16 \cdot 10^{-8}$

погрешностей. Видно, что погрешность меньше в случае капель дихлорэтана в воде, то есть, когда физические параметры внутренней и внешней сред сопоставимы друг с другом. Большая погрешность возникает при расчете в плоскости за слоем капель воды в воздухе, а также в плоскости перед слоем воздушных пузырьков в воде.

#### 4. Заключение

В настоящей работе проведено исследование акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер при воздействии монополюсного источника излучения. Проведена верификация компьютерной модели с численными данными, полученными другими исследователями для случая слоя жестких звуконепроницаемых сфер, которая показала хорошее качественное и количественное согласование (относительная погрешность не превышает  $4.64\%$  для волновых чисел  $k_0 a \leq 5$ ).

Построенные диаграммы распределения нормированного давления на расстоянии от рассеивающего слоя для различных значений физических параметров (плотность и скорость звука) внешней и внутренней сред показали, что слой играет роль двумерной дифракционной решетки, имеющей различную степень прохождения через слой волн, которая зависит от соотношений физических параметров внешней и внутренней сред. При построении данных диаграмм определено значение числа усечения рядов  $n_{tr}$ , обеспечивающее необходимую точность расчета.

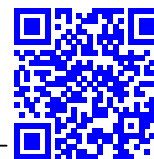
Отметим, что диаграммы, построенные с помощью рассмотренного подхода к изучению акустического излучения от множества сфер, в отличие от подходов, основанных на осредненных уравнениях, позволяют наглядно продемонстрировать полную картину распределения давления вне системы сфер, в том числе для определения зон повышения и понижения давления.

В дальнейшем планируется проведение

исследований акустического рассеяния для различных конфигураций системы в более широком диапазоне изменения физических и геометрических параметров.

### Список литературы

- [1] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с.
- [2] Сташкевич А.П. Акустика моря. Ленинград: Судостроение, 1966. 356 с.
- [3] Каллистратова М.А. Радиоакустическое зондирование атмосферы. Москва: Наука, 1985. 197 с.
- [4] Технология создания позиционируемого 3D звука. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed: 22.12.2021).
- [5] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [7] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101. eLIBRARY ID: 46340658
- [8] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.
- [10] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1974. 832 с.
- [11] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. P. 3048–3058. DOI: 10.1121/1.423886
- [12] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://www.netlib.org/lapack/> (accessed: 22.12.2021).
- [13] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. New York: Wiley–Interscience, 1996. 717 p.



## Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The study of the phenomenon of sound waves scattering by small inhomogeneities, that differ in density and (or) compressibility from the main medium, is one of the important acoustics problems. This is due to the fact that many practical acoustic waves applications are based on this phenomenon, such as hydrolocation, the atmosphere and ocean sounding, creating positionable 3D sound, etc. In the present work, acoustic scattering from a layer consisting of many sound-permeable spheres in 3D space under the monopole radiation source action is investigated. This particular case takes place when a region containing many small inhomogeneities is conventionally two-dimensional (one of three dimensions can be neglected). The problem is solved numerically using a generalized numerical technique based on the fast multipole method, which allows achieving high accuracy of the results with minimal computer time. Verifying the results of the present work, obtained for water droplets in air, within a small error, showed good agreement with similar results of other researchers for soundproof spheres. It is found that a change in the smallest distance between the spheres significantly changes the calculated function values both qualitatively and quantitatively, since the interaction between the spheres highly depends on the density of the sphere arrangement in the configuration. Normalized pressure distribution diagrams, plotted at a distance from the scattering layer, showed that the layer is a two-dimensional diffraction grating analog, which has a different degree of acoustic wave penetration that depends on the ratio of the physical parameters of the external and internal media.

**Keywords:** acoustic scattering, scattering layer, sound-permeable spheres, multipole expansion method, monopole radiation source, pressure distribution diagram

### References

- [1] Ishimaru A. Wave Propagation Scattering in Random Media, 1st Edition. New York: Academic Press, 1978. 272 p.
- [2] Stashkevich A.P. [Acoustics of the sea] *Akustika morya*. Leningrad: Sudostroenie, 1966. 356 p. (in Russian).
- [3] Kallistratova M.A. [Radio-acoustic sounding of the atmosphere] *Radioakusticheskoe zondirovanie atmosfery*. Moscow: Nauka, 1985. 197 p. (in Russian).
- [4] Technology for creating positioned 3D sound. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed: 22.12.2021).
- [5] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [6] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [7] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian). eLIBRARY ID: 46340658
- [8] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. [Osnovy akustiki] *Basics of acoustics*. Kiev: Naukova Dumka, 2009. 867 p. (in Russian).
- [9] Vladimirov V.S. Equations of Mathematical Physics. New York: Marcel Dekker, Inc. 1971. 426 p.
- [10] Korn G.A., Korn Th.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
- [11] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104. P. 3048–3058. DOI: 10.1121/1.423886
- [12] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://www.netlib.org/lapack/> (accessed: 22.12.2021).
- [13] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. New York: Wiley–Interscience, 1996. 717 p.



# Использование свободных программ для обработки и визуализации результатов научных исследований<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе представлены обзор и примеры применения свободного программного обеспечения для обработки, анализа и визуализации результатов вычислительных и натуральных экспериментов. Рассмотрена реализация двух стандартных методов аппроксимации и анализа данных: метод наименьших квадратов и ортогональное центральное композиционное планирование. Первый метод позволяет провести аппроксимацию табличных данных в виде полинома произвольной степени. При повышении степени полинома точность аппроксимации возрастает, но, из-за роста числа обусловленности матрицы метода, корректность аппроксимации снижается. Показано, что нормировка исходных данных позволяет повысить максимальный порядок полинома, при котором не будет потери точности из-за плохо обусловленной матрицы. Предложена реализация метода на языке программирования Scilab. Второй метод позволяет получить аппроксимацию второго порядка для произвольного количества переменных, оценить линейные и квадратичные вклады отдельных переменных и их парных взаимодействий. Представлено описание метода и предложена схема построения расширенной матрицы планирования эксперимента. Метод реализован на языке программирования C++, а для определения погрешности полученной аппроксимации предлагается скрипт, написанный на языке Scilab. Для получения более точной аппроксимации можно подобрать функцию, учитывающую асимптотические особенности результатов вычислительного эксперимента. Пример такой аппроксимации реализован в программе символьных вычислений wxMaxima. Представленные программные реализации методов аппроксимации дополнительно создают код в формате Gnuplot и Scilab, что повышает эффективность для последующей визуализации или анализа аппроксимаций. Приведены примеры визуализации исследования в  $\LaTeX$ -пакете PGFPLOTS и в программе Gnuplot с использованием терминала epslatex. Оба подхода удобны при оформлении результатов исследования в настольной издательской системе  $\LaTeX$ .

**Ключевые слова:** свободное программное обеспечение, метод наименьших квадратов, ортогональный центральный композиционный план, Scilab, wxMaxima, Latex, Gnuplot

## 1. Введение

В последние годы свободное программное обеспечение (ПО) активно развивается и по широкому спектру задач способно заменить коммерческое. Например, многие численные научные и инженерные задачи, решаемые в проприетарном пакете прикладных программ *MATLAB* [1], можно реализовать в свободном ПО *Scilab* [2, 3], *GNU Octave* [4, 5] или *Maxima* [6, 7]. Альтернативой для выполнения символьных и численных вычислений

в проприетарных системах компьютерной алгебры *Mathematica* [8] и *Maple* [9] является свободное ПО *Maxima* с графическим интерфейсом *wxMaxima* [10]. В работе [11] приведен обзор свободного ПО для численного моделирования инженерных задач методом конечных элементов.

При моделировании физических процессов (течение жидкости или газа, упругие или пластические деформации твердого тела) необходимо учитывать зависимость материальных параметров (плотность, вязкость, теплоемкость и т.д.) от факторов внешней среды (температура, давление и т.д.). Обычно эти зависимости представлены в виде табличных данных (результатов натурального эксперимента). Для решения физических уравнений зави-

<sup>1</sup>Работа выполнена за счет средств государственного задания № 0246-2018-007.



симости аппроксимируют в виде аналитических непрерывных функций (кусочно-линейная, полиномиальная). Одним из методов аппроксимации является метод наименьших квадратов [12] (МНК, least square method, LSM, polynomial regression), который позволяет построить аналитическую функцию заданного вида с наименьшей невязкой относительно табличных данных.

На первом этапе исследования проводится планирование эксперимента (design of experiments, DoE) [13], натурального или вычислительного, с определением входных параметров (переменные, факторы, variables), количеством уровней для каждого из них и выбирается диапазон значений факторов.

На следующем этапе составляется матрица эксперимента (экспериментальный план), содержащая упорядоченные наборы факторов [14]. По данной матрице проводится серия экспериментов и составляется приближенная аналитическая формула для целевой функции (response function). Из анализа аппроксимации и исходных данных определяются: значимость факторов и их взаимосвязь; адекватность выбранного плана эксперимента и набора факторов; наличие скрытых переменных, влияющих на результат эксперимента; влияние на целевую функцию отсроченных эффектов значимых факторов; достаточность экспериментов для обобщения результатов; оценка систематических и случайных погрешностей; влияние внешних условий на повторяемость эксперимента.

На завершающем этапе проводится подготовка презентации или рукописи. При подготовке публикации результатов широко используется свободная настольная издательская система  $\LaTeX$  [15–17], которая поддерживает как подготовку текста с использованием принятого в издательстве шаблона оформления, так и включения в него математических формул и графических объектов. Многие издательства во всем мире рассматривают издательскую систему  $\LaTeX$  как альтернативу текстовому процессору *MS Word* [18] (в ряде журналов публикации принимаются либо только в формате  $\LaTeX$ , либо формат  $\LaTeX$  является предпочтительным). Для визуализации результатов исследования (построение графиков, схем и диаграмм) удобно использовать стандартные  $\LaTeX$ -пакеты: для построения графиков — *PGFPlots* [19]; для схем и диаграмм — *TikZ* [20], *PSTricks* [21] или внешние свободные программы, например, *Gnuplot* [22] (альтернатива коммерческому ПО *Origin* [23]). Пакет *listings* [24] позволяет отображать исходный код программ и тестов, записанных с помощью языков разметки, используя форматирование и подсветку синтаксиса. Пакет *beamer* [25] предоставляет свободную аль-

тернативу для коммерческой программы создания презентаций *MS PowerPoint* [18].

В настоящей работе рассматриваются два способа обработки результатов научного исследования: метод наименьших квадратов с предварительной нормировкой исходных данных для повышения точности аппроксимации и ортогональное центральное композиционное планирование (ОЦКП, orthogonal central composite design, OCCD), позволяющее определить вклад факторов в целевую функцию и их взаимосвязь. Первый метод реализован в ПО *Scilab*, а второй написан на языке программирования C++ с улучшением точности аппроксимации по асимптотическому поведению искомой функции с реализацией в ПО *wxMaxima*. Исходные коды программ приведены с использованием пакета *listings*. Для построения схем использовался пакет *TikZ*. Пример построения графиков с помощью пакета *PGFPlots* приведен в Приложении А, а с помощью пакета *Gnuplot* — в тексте статьи и в Приложении В.

## 2. Реализация метода наименьших квадратов в Scilab

Рассмотрим способ построения аппроксимации экспериментальных данных  $y_i$  ( $i = (1, m)$ ,  $m$  — количество опытов) в виде полинома  $n$  степени с помощью МНК. Аппроксимирующая функция будет нелинейной, но сам метод остается линейным — коэффициенты аппроксимации  $b_j$  ( $j = (0, n)$ ) умножаются на степени  $x^j$ , которые рассматриваются как независимые переменные. Сам полином имеет вид:

$$f(x, b) = \sum_{j=0}^n b_j x^j. \quad (1)$$

Сумма квадратов отклонений

$$S = \sum_{i=1}^m (y_i - f(x, b))^2 = \sum_{i=1}^m \left( y_i - \sum_{j=0}^n b_j x_i^j \right)^2$$

будет минимальной, если  $\partial S / \partial b_k = 0$  для каждого  $k = (0, n)$ , что приводит к системе  $n + 1$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ, system of linear equations, SLE) с неизвестными переменными  $b_j$ :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n b_j x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^m y_i x_i^k, \quad k = (0, n),$$

или в матричной форме

$$Ab = B, \quad A_{k,j} = \sum_{i=1}^m x_i^{j+k}, \quad B_k = \sum_{i=1}^m y_i x_i^k. \quad (2)$$

Численная реализация алгоритма имеет следующие особенности: при больших значениях  $x_i$  максимальный элемент в матрице  $A$  (2) равен  $x_i^{2n}$ , а минимальный —  $m$  и отношение этих элементов  $x_i^{2n}/m$  будет значительным. Например, для  $m = 10$ ,  $n = 5$  и  $x = 100$ , получим значение  $10^{19}$  — матрица  $A$  будет плохо обусловлена и результат аппроксимации в виде полинома высокого порядка ( $n > 3$ ) будет некорректен. Для ограничения максимального элемента матрицы  $A$  используем подход, предложенный в [26]: проведем нормировку диапазона экспериментальных данных и их значений:

$$\begin{aligned} x_i &\leftarrow x_i/s_x, y_i \leftarrow y_i/s_y, \\ s_x &= \max(x), s_y = \max(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Для оценки качества матрицы  $A$  определяется число обусловленности  $cn$ , а точность аппроксимации рассчитывается по среднему квадратичному отклонению полинома от экспериментальных данных  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^m (y_i - f(x_i, b))^2}. \quad (4)$$

Запишем на языке программирования *Scilab* функцию определения коэффициентов аппроксимации  $b_j$  (1), среднего квадратичного отклонения  $\sigma$  и числа обусловленности  $sn$  с нормировкой экспериментальных данных (3) ( $d \neq 0$  — данные нормируются,  $d = 0$  — не нормируются):

```
function [b, sigma, cn] = lsrp(x,y,m,d)
if d then
sx = max(x); sy = max(y);
else
sx=1.0; sy=1.0;
end
xn = x / sx;
for i=1:m+1
B(i) = y * (xn.^(i-1))' / sy;
for j=1:m+1
A(i,j) = sum(xn.^(i+j-2));
end;
end;
cn = cond(A);
b = inv(A)*B * sy;
for j=1:m+1
b(j) = b(j) / sx.^(j-1);
end;
ya=0;
for j=0:m
ya = ya + b(j+1) * x.^j;
end
sigma = sqrt((ya - y) * (ya - y)'/length(x));
endfunction
```

Для визуализации результатов напишем функцию, рассчитывающую  $(x, f(x, b))$  (1) на диапазоне экспериментальных данных  $(x_1, x_m)$ , но для заданного числа точек  $p$  (при увеличении  $p$  график будет более гладким):

```
function [xf,yf] = lsrpFine(x,b,n,p)
xf = linspace(min(x),max(x), p);
Xf = zeros(p,n+1);
for i = 1:n+1
Xf(:,i) = xf(:).^i;
end
yf = (Xf*b)';
endfunction
```

Проведем аппроксимацию температурной зависимости изобарной теплоемкости воды  $c_p(T)$  [27]. В *Scilab* графики строятся командой *plot* с парами векторов, содержащих координаты точек  $x$  и  $y$ , где опционально можно задать формат стиля линий. Форматный вывод в консоль значений переменных оформляется командой *printf*. Запись значений переменных в файл осуществляется командой *write*. В коде программы добавим вывод в консоль формул полиномов с рассчитанными коэффициентам в формате *Gnuplot* — это позволит сэкономить время при подготовке графика в *Gnuplot*, — а также выведем в файлы с именами  $fn$  ( $n$  — порядок полинома,  $path$  — строка, содержащая путь к рабочему каталогу) результаты аппроксимации в виде столбцов  $(x, f(x, b))$ .

```
x=[0,10,20,30,40,50,60,70,80,90,100];
y=[4.2176,4.1921,4.1818,4.1784,4.1785,4.1806,
4.1843,4.1895,4.1963,4.2050,4.2159]*1e3;
k=5; p=101; path = "";

for n=1:k
ya = zeros(p); b = zeros(n);
[b,sigman,cn] = lsrp(x,y,n,1);
[xa,ya] = lsrpFine(x,b,n,p);
plot(x,y,"o",xa,ya);
printf("i = %2d: sigma = %10.4e,
cn = %10.4e, b = ", n, sigman, cn);
printf("%10.4e ", b);
printf("\n f%d(x)=%9.4e", n,b(1));
for i=1:n
printf("%+9.4e*x**%d", b(i+1),i);
end
printf("\n");
write("f"+string(n), [xa' ya']);
end
write("f0", [x' y']);
```

Запускаем *Scilab*, помещаем все три фрагмента кода в *SciNote* (в меню выбираем *Applications*→*SciNotes*), сохраняем (комбинация клавиш *Ctrl+s*), запускаем (клавиша *F5*). Результаты выполнения кода будут выведены в консоль программы. Изменяя параметр  $p$  проведем расчет с нормировкой экспериментальных данных и без нее. В первом случае максимальное число обусловленности  $cn$  будет на 12 порядков меньше, чем во втором, т.е. в приведенном примере нормировка позволяет сохранить в результатах расчетов на 12 значащих цифр больше. Отметим, что на  $cn$  влияет только нормировка диапазона данных  $(x_1, x_m)$ .

Используем созданный программой файл с экспериментальными данными  $f_0$  и выражения полиномов, выведенных в консоль программы, для создания более качественного графика в *Gnuplot*. При построении графика из файла данных в команде *plot* указываются имя файла и через двоеточие номера столбцов для оси абсцисс и ординат в виде 1 : 2 (в 3D добавляется аппликата, например, 1 : 2 : 3). Если данные нужно преобразовать, например, провести масштабирование с коэффициентом  $s$  и смещение на величину  $d$ , то формула записывается в круглых скобках с префиксом номера столбца в виде символа  $\$$ , например 1 : 2 заменяется на  $(\$1 * s + d) : 2$ . В примере единицы из Дж переведены в кДж с соответствующим масштабированием табличных данных и аппроксимаций на величину  $sy = 10^{-3}$ . Формулу для полинома добавляем командой *set label*.

```
set terminal epslatex size 10cm,6cm\
color colortext
set decimalsign ', '
set border lw 2
set style line 1 lc rgb 'black' ps 1.5 pt 6
set style line 2 lc rgb 'red' lt 1 dt 3 lw 5
set style line 3 lc rgb 'orange' lt 1 dt 2 lw 5
set style line 4 lc rgb 'cyan' lt 1 dt 1 lw 5
set style line 5 lc rgb 'blue' lt 1 dt 1 lw 5
set style line 6 lc rgb 'green' lt 1 dt 1 lw 5
set key at 50,4.218 spacing 0.9 box dt 3
set output 'epslatex.tex'
f1(x)=4.1875e+3+0.10418*x
f2(x)=4.2090e+3-1.3275*x+1.4317e-2*x**2
f3(x)=4.2145e+3-2.1985*x+3.7158e-2*x**2-\
1.5227e-4*x**3
f4(x)=4.2169e+3-3.0486*x+7.9662e-2*x**2-\
8.3234e-4*x**3+3.4003e-6*x**4
f5(x)=4.2175e+3-3.4918*x+1.1618e-1*x**2-\
1.8610e-3*x**3+1.5179e-5*x**4-4.7115e-8*x**5
set xlabel '$T$, $^\circ$C'
set ylabel '$c_p(T)$, \dfrac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$'
set label 1 at 53,4.212 \
'$c_p(T) = \sum\limits_{i=0}^n b_i T^i$'
sy=1.e-3
plot "f0" u 1:($2*sy) title 'data' w p ls 1,\
f1(x)*sy title '$n=1$' w l ls 2,\
f2(x)*sy title '$n=2$' w l ls 3,\
f3(x)*sy title '$n=3$' w l ls 4,\
f4(x)*sy title '$n=4$' w l ls 5,\
f5(x)*sy title '$n=5$' w l ls 6
```

График показан на рис. 1. Видно, что качественная аппроксимация достигается при  $n = 4$  и  $n = 5$  с нормированием исходных данных.

### 3. Ортогональное центральное позиционное планирование в C++

При проведении натуральных или вычислительных экспериментов при варьировании нескольких параметров необходим инструмент, позволяющий

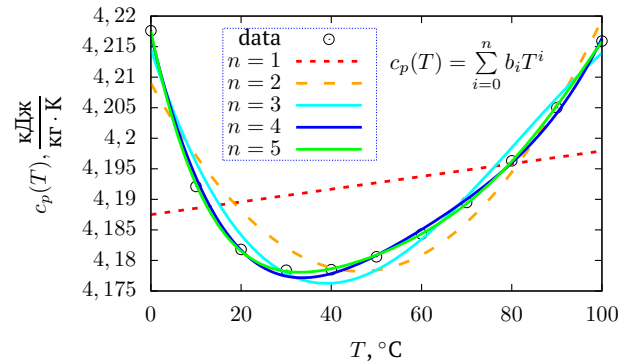


Рис. 1. Результаты аппроксимации МНК в *Scilab* с визуализацией в *Gnuplot*. Символы – экспериментальные данные [27], линии – аппроксимация (1)

определить вклад каждого из параметров в измеряемую величину. Одним из таких инструментов является полный факторный эксперимент (ПФЭ, factorial design) [14, 28], аппроксимирующий измеряемую величину (целевую функцию) с помощью полинома первой степени, учитывающего линейный вклад параметров (факторов) и их взаимодействий друг с другом. Величина факторов берется на двух уровнях (нижний и верхний), а целевая функция  $Y$  определяется для всех возможных комбинаций значений факторов. Для  $n$  факторов  $X_i$ , где  $i = (1, n)$ , необходимо провести  $n_f = 2^n$  опытов. Для учета квадратичных вкладов факторов ПФЭ проводится на трех уровнях, что требует проведения  $3^n$  опытов. Метод ОЦКП [29, 30] позволяет учесть квадратичные факторы меньшим, чем в ПФЭ, количеством опытов. Приведем схему параметрического анализа данных методом ОЦКП с учетом только парных взаимодействий. Для естественного значения  $i$ -го фактора  $X_i$  обозначим значение на нижнем и верхнем уровнях через  $X_{i,-1}$  и  $X_{i,+1}$ , определим центральное значение  $X_{i,c}$  и интервал  $X_{i,\ell}$ :

$$X_{i,c} = \frac{X_{i,-1} + X_{i,+1}}{2}, \quad X_{i,\ell} = \frac{X_{i,+1} - X_{i,-1}}{2}. \quad (5)$$

Кодированным значением  $i$ -го фактора  $x_n$  является линейное аффинное преобразование интервала  $[X_{i,-1}, X_{i,+1}]$  в интервал  $[-1, +1]$  по формуле

$$x_i = \frac{X_i - X_{i,c}}{X_{i,\ell}}. \quad (6)$$

Естественные значения фактора можно восстановить по кодированному используя формулу

$$X_i = X_{i,\ell} x_i + X_{i,c}. \quad (7)$$

Общее количество опытов  $n_t$  состоит из  $n_f$  опытов ПФЭ,  $n_*$  опытов в «звездных» точках и одного опыта в центральной точке:

$$n_t = n_f + n_* + 1, n_f = 2^n, n_* = 2n. \quad (8)$$

Вводится фиктивный фактор  $x_0 = 1$  и целевая функция аппроксимируется полиномом вида:

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} (x_i^2 - \beta), \quad (9)$$

где  $k = (1, m)$ ,  $m$  – количество целевых функций; параметр  $\beta = \sqrt{n_f/n_t}$ ; двойная сумма содержит  $n_c$  слагаемых:

$$n_c = \frac{n(n-1)}{2!}. \quad (10)$$

Для кодированных значений факторов строится расширенная матрица вычислительного эксперимента содержащая следующие строки (см. рис. 2):

- Матрица ПФЭ  $A_1$  (размер матрицы  $n_f \times n$ ), содержащая все возможные комбинации нижнего и верхнего уровней  $x_i = \pm 1$ .
- «Звездные» точки  $A_2$  ( $n_* \times n$ ), в которых  $x_i = 0$  для всех  $i$  кроме  $i = k$ , для которой  $x_k = \pm \alpha$ , где  $\alpha$  – расстояние до центральной точки плана

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{n_f n_t} - n_f)}.$$

Для  $n > 2$  величина  $\alpha > 1$ , что накладывает ограничения при выборе диапазона естественных значений факторов. Диапазон не должен

противоречить физическому смыслу фактора. Например, нижний уровень для пройденного пути не может быть отрицательным, а верхний уровень для температуры воды не должен превышать  $100^\circ\text{C}$ .

- Центральная точка  $A_3$  ( $1 \times n$ ), в которой все значения  $x_i = 0$ .

После этого добавляются столбцы (см. рис. 2):

- слева добавляется столбец  $A_0$  (размер матрицы  $n_t \times 1$ ) с фиктивным параметром  $x_0 = 1$ ;
- справа  $A_4$  – кодированные значения для парных взаимодействий  $x_i x_j$  ( $n_t \times n_c$ );
- справа  $A_5$  – квадратичные слагаемые ( $n_t \times n$ );
- для удобства добавляется  $n$  столбцов  $A_6$  с естественными значениями факторов  $X_i$  и  $n_y$  столбцов  $A_7$  для значений целевых функций;
- столбцы  $A_8$  с величиной погрешности аппроксимации:

$$\varepsilon = \left| 1 - \frac{f_k(x_1, \dots, x_n)}{Y_k(x_1, \dots, x_n)} \right| \cdot 100\%. \quad (11)$$

Коэффициенты полинома (9) определяют для каждой целевой функции  $Y_k$  отдельно по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{i=0}^{2n+n_c} Y_{k,i} x_{j,i}}{\sum_{i=0}^{n_t} x_{j,i}}, \quad (12)$$

где  $j$  и  $i$  – индексы столбца и строки расширенной матрицы эксперимента.

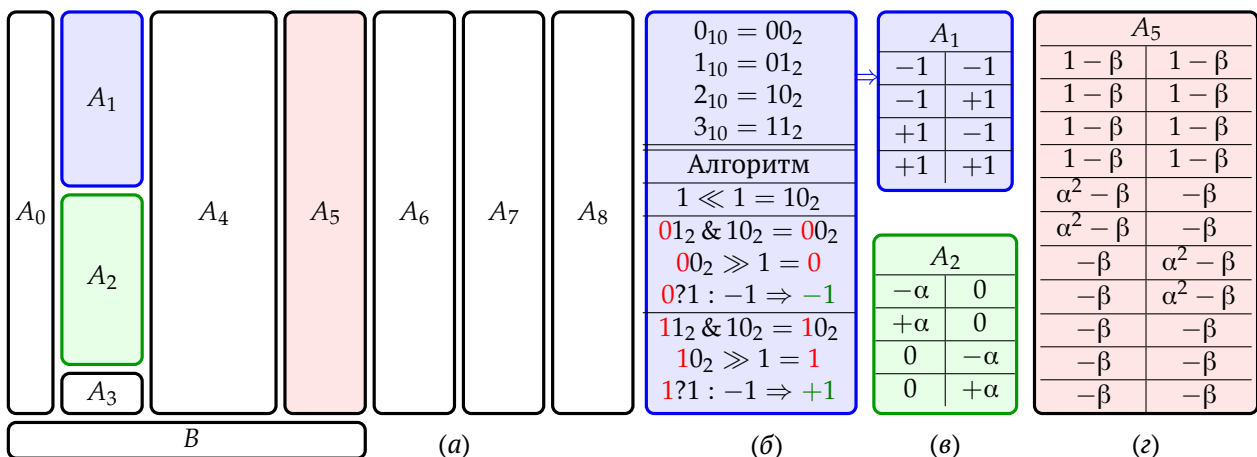


Рис. 2. Структура расширенной матрицы ОЦКП (а) и структура матриц  $A_1$  (б);  $A_2$  (в);  $A_5$  (z). Красные цифры – определяемый бит для опытов под номерами 1 и 3; зеленые числа – кодированное значение фактора  $x_1$

Таблица 1. Расширенная матрица вычислительного эксперимента, коэффициенты и относительные погрешности полинома (9)

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2 - \beta$	$x_2^2 - \beta$	$X_1$	$X_2$	$Y$	$\varepsilon, \%$
1	-1	-1	1	0.3333	0.3333	1	0.5	12.45	1.24
1	1	-1	-1	0.3333	0.3333	5	0.5	7.438	0.631
1	-1	1	-1	0.3333	0.3333	1	2.5	9.217	0.178
1	1	1	1	0.3333	0.3333	5	2.5	2.755	4.54
1	-1	0	0	0.3333	-0.6667	1	1.5	9.545	1.45
1	1	0	0	0.3333	-0.6667	5	1.5	3.481	2.24
1	0	-1	0	-0.6667	0.3333	3	0.5	8.219	2.46
1	0	1	0	-0.6667	0.3333	3	2.5	3.744	3.77
1	0	0	0	-0.6667	-0.6667	3	1.5	4.394	1.39
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_{1,2}$	$b_{1,1}$	$b_{2,2}$				
6.804	-2.924	-2.066	-0.364	2.028	1.496				

Приведем пример обработки результатов вычислительного эксперимента по данным, полученным при моделировании системы жидкостного охлаждения микрозахвата [31] для  $n = 2$  (скорость охлаждающей жидкости  $X_1 = [1, 5]$ , коэффициент теплопередачи  $X_2 = [0.5, 1.5]$ ) с одной целевой функцией  $Y$  (температура нагрева радиатора). Порядок построения расширенной матрицы вычислительного эксперимента следующий:

- задаем диапазоны естественных значений факторов  $X_i$ ;
- вычисляем кодированные значения факторов  $x_i$  (матрицы  $A_0, \dots, A_5$ );
- по кодированным значениям факторов  $x_i$  вычисляем матрицу  $A_6$  естественных значений факторов  $X_i$  по формуле (7);
- для значений из матрицы  $A_6$  проводим серию вычислительных экспериментов и заполняем матрицу  $A_7$ ;
- вычисляем коэффициенты полинома (9) по формуле (12) и определяем относительные погрешности (11).

Для рассматриваемого набора данных расширенная матрица, коэффициенты аппроксимации и относительные погрешности целевой функции приведены в табл. 1.

В программе сначала опишем переменные (8) и (10), определим количество целевых функций  $n_y$ , их значения  $a$  для  $n_t$  опытов и диапазон данных естественных переменных  $X$ :

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>
using namespace std;
int main() {
    int n = 2, nstar = 2*n, nf = pow(2,n), ny = 1;
    int nc = (n-1)*n/2, nt = nf+nstar+1;
    double alpha = sqrt(0.5*(sqrt((double)nf*nt)-
        nf)), beta = sqrt((double)nf/nt);
    double a[nt+1+ny][nf+nc+n+ny+1]={0};
    double x[2][n] = {{1,0.5},{5,2.5}};
    double y[ny][nt] = {{12.448999, 7.438013,
        9.217004, 2.749994, 9.545007, 3.481012,
        8.218988, 3.744012, 4.394006}};
    int i1, i2, i3, i4, i5;
```

Здесь элементы расширенной матрицы  $a$  задаются равными нулю, поэтому нулевые элементы «звездных» точек  $A_2$  и центральная точка  $A_3$  определены по умолчанию (рис. 2). Определим матрицу  $A_0$  фиктивного фактора  $x_0$  (рис. 2(a)):

```
for (i1 = 0; i1 < nt; i1++) a[i1][0] = 1.0;
```

При построении матрицы ПФЭ представим номер опыта (нумерацию будет вести с нулевого номера) в двоичном представлении с количеством разрядов равным  $n$  (рис. 2(б)). Для  $n_f$  опытов получим таблицу, в которой номер столбца соответствует номеру опыта, а столбец (разряд числа) дает значение кодированного фактора в виде «0» для нижнего уровня и «1» — для верхнего. Текущая позиция разряда  $i$  (номер позиции определяется справа налево с крайним правым номером равным 0) находится левым логическим битовым сдвигом единицы ( $1 \ll i$ ); побитовая операция «логическое И» (&) для  $i$  и номера опыта позволяет определить значение бита в  $i$ -м разряде; правый логический битовый сдвиг ( $\gg$ ) операции «И» на  $i$  разрядов перемещает бит с  $i$ -й позиции на 1-ю (результатом будет «0» или «1»); с помощью тернарной опера-

ции («?») заменяем «0» на «-1». После применения данного алгоритма для  $n_f$  опытов получим матрицу ПФЭ  $A_1$ :

```
for (i1 = 0; i1 < nf; i1++)
  for (i2 = 0; i2 < n; i2++)
    a[i1][i2+1] = (i1 & (1 << i2)) >> i2 ? 1:-1;
```

Отметим, что для ПФЭ с тремя уровнями  $\{-1, 0, +1\}$  предложенный алгоритм также применим, только использовать нужно не двоичную запись числа, а троичную и вместо тернарной операции нужно из результата вычесть 1.

Задаем кодированные значения «звездных» точек  $A_2$  (рис. 2(в)):

```
for (i1 = 0; i1 < n; i1++)
  for (i2 = 0; i2 < n; i2++) {
    a[2*i1+nf][i2+1] = i1 == i2 ? -alpha : 0.0;
    a[2*i1+nf+1][i2+1] = i1 == i2 ? alpha : 0.0;
  }
```

Определяем матрицу парных взаимодействий  $A_4$ :

```
for (i1 = 0; i1 < nf; i1++) {
  i4=n;
  for (i2 = 1; i2 < n; i2++)
    for (i3 = i2+1; i3 <= n; i3++)
      a[i1][++i4] = a[i1][i2]*a[i1][i3];
}
```

и матрицу квадратичных факторов  $A_5$  (рис. 2(г)):

```
for (i1 = 0; i1 < nt; i1++)
  for (i2 = 1; i2 <= n; i2++)
    a[i1][n+nc+i2] = pow(a[i1][i2], 2) - beta;
```

Матрица  $A_6$  строится по формуле (7):

```
for (i1 = 0; i1 < nt; i1++)
  for (i2 = 0; i2 < n; i2++)
    a[i1][2*n+nc+i2+1] = 0.5 * (a[i1][i2+1] *
      ( x[1][i2]-x[0][i2] ) + x[0][i2]+x[1][i2] );
```

Матрица  $A_7$  содержит результаты экспериментов:

```
for (i1 = 0; i1 < nt; i1++)
  for (i2 = 0; i2 < ny; i2++)
    a[i1][3*n+nc+1+i2] = y[i2][i1];
```

Определяем сумму в знаменателе формулы (12):

```
for (i1 = 0; i1 <= 2*n+nc; i1++)
  for (i2 = 0; i2 < nt; i2++)
    a[nt][i1] += pow(a[i2][i1], 2);
```

и находим коэффициенты полинома (12) (значения  $b_j$  приведены в табл. 1):

```
for (i1 = 0; i1 < ny; i1++)
  for (i2 = 0; i2 <= 2*n+nc; i2++)
    for (i3 = 0; i3 < nt; i3++)
      a[nt+1+i1][i2] +=
        y[i1][i3]*a[i3][i2]/a[nt][i2];
```

Относительная погрешность аппроксимации  $A_8$  согласно (11):

```
for (i1 = 0; i1 < nt; i1++)
  for (i3 = 1; i3 <= ny; i3++) {
    for (i2 = 0; i2 <= 2*n+nc; i2++)
      a[i1][3*n+nc+ny+i3]+=a[nt+i3][i2]*a[i1][i2];
    a[i1][3*n+nc+ny+i3]=100.0*abs(1.0-
      a[i1][3*n+nc+ny+i3]/a[i1][3*n+nc+i3]);
  }
```

Выводим в консоль расширенную матрицу планирования эксперимента (табл. 1):

```
cout.precision(4);
for (i1 = 0; i1 < nt+1+ny; i1++) {
  for (i2 = 0; i2 <= 3*n + nc+ny; i2++)
    cout << setw(7) << a[i1][i2] << " ";
  cout << endl;
}
```

Выводим в консоль запись полинома (9) в формате функции *Gnuplot* для  $p = 0$  или *Scilab* для  $p = 1$ :

```
int p=0; // 0-Gnuplot, 1-Scilab
cout.precision(8);
cout << "b=" << beta <<endl << "s=1.0" <<endl;
for (i1 = 0; i1 < ny; i1++) {
  i2=nt+1+i1;
  cout << (p?"function f=":"")<<"f"<<i1<<"(x1";
  for (i3 = 2; i3 <= n; i3++) cout << ",x"<<i3;
  cout << ")"<<(p?"\n f=":"="("<<a[i2][0];
  for (i3 = 1; i3 <= n; i3++)
    cout<<showpos<<a[i2][i3]<<"x"<<noshowpos<<i3;
  i5 = n;
  for (i3 = 1; i3 < n; i3++)
    for (i4 = i3+1; i4 <= n; i4++)
      cout << showpos << a[i2][++i5]<<"*x"<<
        noshowpos<<i3<<(p?".":"")<<"*x"<<i4;
    for (i3 = 1; i3 <= n; i3++)
      cout << showpos << a[i2][++i5] <<"*(x"
        << noshowpos<<i3<<"**2-b)";
    cout << (p?"\nendfunction":"*s") << endl;
  }
  return 0;
}
```

*Gnuplot* скрипт для построения полученной аппроксимации (рис. 3):

```
set terminal epslatex size 10cm,12cm\
  color colortext
set decimalsign '.'
set border lw 2
set grid lw 0.1 dt 1 lc rgb "#AAAAAA"
set key off
T0=293.15
b=0.66666667
s=1.0
f0(x1,x2)=(6.804115-2.9236652*x1-2.0658317*x2-\
  0.364006*x1*x2+2.0276695*(x1**2-b)+\
  1.49616*(x2**2-b))*s
set output "occd.tex"
set multiplot layout 2,1 rowsfirst
set xlabel '$X_1$' offset 0,0.5
set ylabel '$Y_1$' offset 1,0
plot "um" using 1:($7-T0) w p pt 7 ps 2,\
  f0((x-3)/2,0) w l lw 4 dt 1
```

```
set xlabel '$X_2$' offset 0,0.5
set ylabel '$Y_1$' offset 1,0
plot "alpha" using 1:($7-T0) w p pt 7 ps 2,\
f0(0,(x-1.5)/1) w l lw 4 dt 1
unset multiplot
```

Здесь стоит обратить внимание на то, что при вызове функции  $f0$  естественные значения факторов кодируются согласно (6).

Точность аппроксимации определяется по формуле (11). Приведем пример вычисления погрешностей с помощью Scilab скрипта:

```
function f=f0(x1,x2)
f=6.804115-2.9236652*x1-2.0658317*x2-...
0.364006*x1.*x2+2.0276695*(x1^2-b)+...
1.49616*(x2^2-b)
endfunction
x1 = [1,5,1,5,1,5,3,3,3];
x2 = [0.5,0.5,2.5,2.5,1.5,1.5,0.5,2.5,1.5];
y1 = [12.45,7.438,9.217,2.75,9.545,3.481,...
8.219,3.744,4.394];
x1c=0.5*(x1(1)+x1(2));x1l=0.5*(x1(2)-x1(1));
x2c=0.5*(x2(1)+x2(3));x2l=0.5*(x2(3)-x2(1));
b = 2.0/3.0;
eps = [];
epsmax = [];
epsav = [];
eps = abs(1.0-f0((x1-x1c)/x1l,(x2-x2c)/x2l)...
./ y1)*100.0;
epsmax = max(eps);
epsav = sum(eps)/9.0;
printf('%f %f %f %f %f %f %f %f %f\n', eps);
printf('%f %f\n', epsmax, epsav);
```

В скрипте отметим следующее: «...» означает продолжение выражения на следующей строке; операция «.\*» — поэлементное умножение векторов; «^» — возведение в степень; центр интервала естественного значения фактора и его плечо определяется по формуле (5), а в аппроксимации используются закодированные значения (6); переменные  $eps$ ,  $epsmax$  и  $epsav$  содержат вектор относительных погрешностей, максимальную и среднюю погрешности, соответственно. Матрица относительных погрешностей  $A_8$  приведена в табл. 1.

Проведем анализ полученных данных. Значение целевой функции  $Y_m$  в центральной точке вычисляется по формуле

$$Y_m = b_0 - \beta(b_{1,1} + b_{2,2}) \approx 4.455.$$

Ведущими линейными и квадратичными факторами являются  $x_1$  и  $x_2$ , т.к.  $|b_1| > \chi$ ,  $|b_2| > \chi$ ,  $|b_{1,1}| > \chi$ ,  $|b_{2,2}| > \chi$ , где  $\chi$  — критерий значимости фактора. Для определенности выберем

$$\chi = 0.05 * (|b_1| + |b_2| + |b_{1,2}| + |b_{1,1}| + |b_{2,2}|) \approx 0.44,$$

т. е. отдельное слагаемое значимо, если его вклад превышает 5%. Парное взаимодействие не оказывает значительного влияния  $|b_{1,2}| < \chi$ .

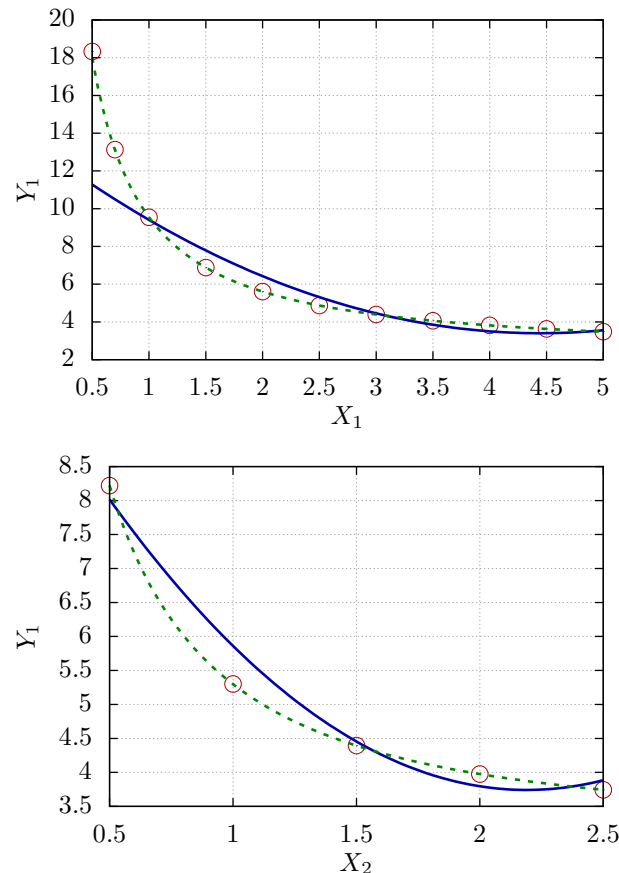


Рис. 3. Зависимость целевой функции от факторов  $X_1$  ( $x_2 = 0$ , сверху) и  $X_2$  ( $x_1 = 0$ , снизу). Символы — данные вычислительного эксперимента [26, 31], сплошные линии — аппроксимация ОЦКП (9); пунктирные линии — асимптотическая интерполяция (13)

При обработке данных натуральных экспериментов значимость фактора определяется с помощью распределения Стьюдента, а адекватность аппроксимации ОЦКП определяется по критерию Фишера (подробное изложение критериев приведено в работе [32]).

При увеличении значений  $x_1$  и  $x_2$  значение целевой функции линейно уменьшается ( $b_1 < 0$ ,  $b_2 < 0$ ), а для  $x_1 > -0.5$  и  $x_2 > -0.5$  это уменьшение компенсируется квадратичными слагаемыми (коэффициенты при линейных и квадратичных слагаемых имеют противоположные знаки).

Аппроксимация в точках ОЦКП (табл. 1) имеет небольшую относительную погрешность относительно экспериментальных данных внутри заданного диапазона данных. Из рис. 3 видно, что вдоль центральных линий, проходящих через три точки (центральная  $X_1 = 3$  и  $X_2 = 1.5$  и две «звездные»  $X_1 = \{1, 5\}$  и  $X_2 = \{0.5, 2.5\}$ ), погрешность в этих точках минимальна (на рис. 4 центральные линии

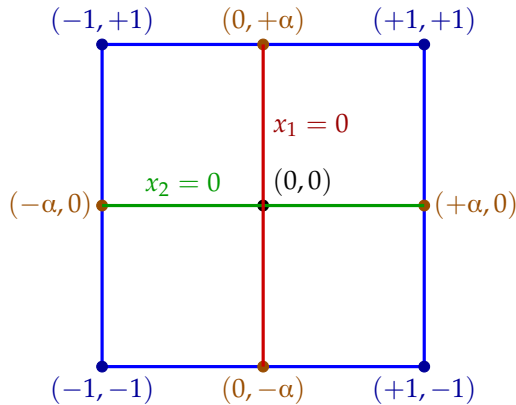


Рис. 4. Положение факторов по расширенной матрице ОЦКП для  $n = 2$  и центральные линии  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$

в кодированных значениях обозначены  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ ). В промежуточной области погрешность возрастает. За редким случаем (когда математическая модель исследуемого объекта полностью совпадает с используемым полиномом) аппроксимация не допускает экстраполяцию за пределы заданного диапазона — чем дальше находится точка вне диапазона данных, тем выше погрешность и аппроксимация становится неадекватной экспериментальным или расчетным данным. Например, для  $X_1 = [0.5, 1]$  погрешность составляет 41%. Ширина диапазона данных также имеет значение: для  $X_1 = [4.5, 5]$  и  $X_2 = [2, 2.5]$  характер функции качественно меняется — вместо насыщения функция переходит к росту. Для того чтобы получить достаточно точную и адекватную аппроксимацию рекомендуется широкий диапазон значений факторов разбивать на несколько частей и строить ОЦКП для каждой из них.

#### 4. Пакет символьных вычислений wxMaxima

Рассмотрим альтернативную, предложенную в предыдущем разделе, аппроксимацию с помощью интерполяционной функции. Используемые данные имеют следующий физический смысл: факторы  $X_1$  и  $X_2$  — скорость течения охлаждающей радиатор жидкости и коэффициент теплопередачи между жидкостью и радиатором, а целевая функция  $Y_1$  является температурой нагрева радиатора относительно температуры окружающей среды. С учетом слабого парного взаимодействия  $b_{1,3}$ , а также асимптотических особенностей ( $Y_1 \rightarrow \infty$  при  $X_2 \rightarrow 0$  и/или  $X_1 \rightarrow 0$ ;  $Y_1 \rightarrow \text{const}$  с ростом  $X_1$  и  $X_2$ ) можно построить более точную формулу для аппроксимации результатов вычислительного эксперимента:

Таблица 2. Коэффициенты  $c_i$  (13)

$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
293.3	3.083	9.0	-3.314	-2.347

$$g(X_1, X_2) = c_0 + \frac{c_1}{X_2} + \frac{c_2}{X_1} + \frac{c_3}{X_1 + X_2} + \frac{c_4}{(X_1 + X_2)^2} \quad (13)$$

где  $\alpha$  задается в  $[\text{кВт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})]$ ,  $u_m$  — в  $[\text{см}/\text{с}]$ , а коэффициенты  $c_i$  (табл. 2) определяются решением системы линейных уравнений

$$g(X_1, X_2) = y_i$$

для пяти пар параметров  $(X_1; X_2)$ : (0.5; 1), (0.5; 3), (0.5; 5), (1.5; 3), (2.5; 3) с соответствующими им значениям результатов вычислительных экспериментов  $y_i$ . На рис. 3 аппроксимация (13) показана пунктирными линиями (в виде  $g - T_0$ , где  $T_0 = 293.3^\circ\text{C}$  — реперная температура). Погрешность этой формулы во всем параметрическом интервале не превышает 1 %, что значительно меньше погрешностей полученной ранее аппроксимации методом ОЦКП.

Отметим, что при построении интерполяции выбор набора точек, через которые будет проходить искомая функция, имеет большое значение. Если интерполяция имеет большую погрешность или СЛАУ не имеет решения, то нужно выбрать другие промежуточные параметры. Например, если зависимость нелинейная, то точка выбирается так, чтобы соответствовать не середине интервала  $X_i$ , а середине интервала  $Y$ . Для выбора набора функций, составляющего интерполяцию  $g$ , проверяются следующие условия: является ли зависимость линейной или нет; имеется ли насыщение (например, как показательная или степенная функции с отрицательным аргументом); наличие асимптот (вертикальных, горизонтальных или наклонных).

Для реализации данного метода воспользуемся программой символьных вычислений *Maxima* [6] с графическим интерфейсом *wxMaxima* [10].

Определяем функцию (13) в символьном виде

```
f1(x, y) := c0 + c1/x + c2/y + c3/(x+y) + c4/(x+y)^2;
```

и задаем наборы параметров

```
x0 : 0.5; q0 : 301.369;
x1 : 1.5; q1 : 297.544;
x2 : 2.5; q2 : 296.894;
y0 : 1.0; r0 : 302.695;
y1 : 3.0;
y2 : 5.0; r2 : 296.631;
```

Для решения СЛАУ используем команду *solve*, а для вывода результата в формате с плавающей точкой — *float*:



```

solve([f1(x0,y1)=q0,f1(x1,y0)=r0,f1(x1,y2)=r2,
f1(x1,y1)=q1,f1(x2,y1)=q2],[c0,c1,c2,c3,c4]);
float(%);

```

Более подробная информация по использованию пакета *Maxima* для решения СЛАУ, по упрощению математических выражений и построению графиков представлена в работе [7].

## 5. Заключение

В работе представлены примеры использования свободного ПО для обработки и анализа данных на примере двух классических методов: аппроксимация МНК и обработка результатов многопараметрических экспериментов с помощью ОЦКП. Первый метод был реализован на языке программирования *Scilab*. Было показано, что для обеспечения корректности аппроксимации исходные данные должны быть нормированы. Второй метод реализован на языке программирования C++. Приведены примеры визуализации результатов исследований с помощью программ  $\text{\LaTeX}$  и *Gnuplot*.

## A Построение векторных графиков в PGFPlots

*PGFPlots* основан на пакетах *PGF/TikZ* и предназначен для построения двумерных и трехмерных графиков в линейном или логарифмическом масштабах с использованием различных стилей символов, линий и поверхностей. Поддерживает линейные и точечные графики, поверхности, изолинии, гистограммы, полярные координаты и многое другое.

Преимущества пакета следующие: единообразие используемого в документе и графиках типа и размера шрифта, а также стиля документа; прямое использование математического режима для описания осей; создание независимых графиков в формате *pdf* или *eps* с помощью сторонних инструментов *TikZ*.

Рассмотрим пример

```

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=6cm,width=8cm,grid=major,
font=\small,xmin=-5,xmax=5,ymin=-3,ymax=8,
legend pos=north west,
xlabel={\textcolor{red}{x}},
ylabel={\textcolor{blue}{f(x)=\left(x^2+x+
5\right)\sin(x)}}]
\addplot[orange!80!black,smooth,samples=30,
mark=square*]{4*exp(-x^2/20)*cos(deg(x))};
\addplot[blue,mark=ball]{sin(deg(x)+90)};
\legend{f(x)=4*exp(-x^2/20)*cos(x),\cos(x)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}

```

результат которого показан на рис. 5.

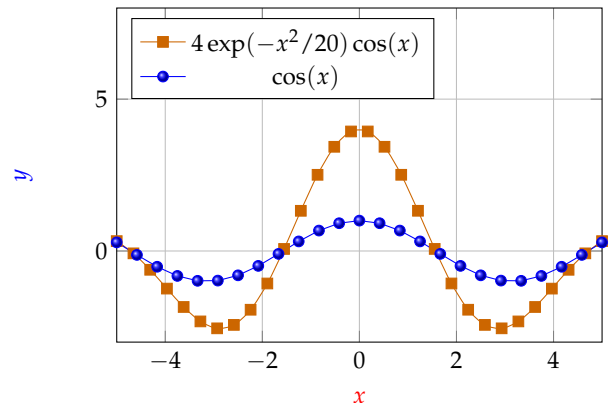


Рис. 5. Пример графика построенного в *PGFPlots*

График определяется в окружении *axis* окружения *tikzpicture*. Можно задать следующие параметры: высота *height* и ширина *width* графика; вспомогательная сетка *grid*; размер шрифта *font*; диапазон изменения значений по осям *xmin*, *xmax*, *ymin*, *ymax*; положение легенды *legend pos*; метки осей в формате  $\text{\LaTeX}$  *xlabel*, *ylabel*. Графики строятся командой *addplot*, а соответствующая графику подпись *legend*.

## B Построение векторных графиков в Gnuplot

При подготовке графиков в издательской системе  $\text{\LaTeX}$  оптимальным выбором является использование *Gnuplot*-терминала *epslatex*. Данный терминал представляет собой комбинацию двух терминалов: за графическую часть отвечает *postscript eps*, а за текст и математические формулы — *latex*. Приведем пример использования данного терминала в двух режимах работы: подготовка графиков для подключения их в документ  $\text{\LaTeX}$  и подготовка независимого графического файла.

Настройка параметров графика осуществляется следующими опциями: размеры изображения — *size*, использование цветных линий и текста — *color* и *colortext*; символ десятичного разделителя — *set decimalsign*; интервал между строками в легенде — *set key spacing* (указывается, если подписи к линиям имеют большую высоту); количество точек на графике — *set samples* (для гладкого отображения быстро меняющейся функции этот параметр нужно увеличить); подписи к осям *set xlabel* и *set ylabel* могут содержать текст в формате  $\text{\LaTeX}$  (для правильной обработки такого текста он должен быть заключен в одинарные кавычки); имя выходного файла в формате  $\text{\LaTeX}$  — *set output*; формат отображения чисел на осях — *set format*; интервалы по осям *x* и *y* — *set xrange* и *set yrange*; подписи к осям — *set xtics* и

`set ytics`. Команда построения графиков `plot` может содержать несколько функций со своими параметрами отображения (тип линии — `linetype` или `lt`, тип штриховки в версии `Gnuplot` 5 и выше — `dashtype` или `dt`, толщина линии — `linewidth` или `lw`, цвет линии — `linecolor` или `lc` в формате RGB в виде названия цвета `'colorname'` или его шестнадцатеричного кода `'#RRGGBB'`; можно указать стиль линии `linestyle` или `ls`, определенный командой `set style line`), разделенными запятой. Подписи линий `title` отображаются в легенде и могут содержать текст в формате  $\LaTeX$ . Цвет фрагмента текста задается командой `\textcolor`. Для переноса длинной строки используется символ обратной косой черты `\`.

```
set terminal epslatex size 10cm,6cm\
  color colortext
set decimalsign ','
set border lw 2
set style line 1 lc rgb 'red' lt 1 dt 1 lw 5
set style line 2 lc rgb 'blue' lt 1 dt 3 lw 5
set key spacing 1.5
set samples 250
set xzeroaxis
set output 'epslatex.tex'
set xlabel 'Аргумент $x$'
set ylabel 'Функции $\textcolor{red}{f_1(x)}$ и $\textcolor{blue}{f_2(x)}$'
set format '$%g$'
set xtics ('$-3\pi$' -3*pi, '$-2\pi$' -2*pi, \
'$-\pi$' -pi, 0, '$\pi$' pi, '$2\pi$' 2*pi, \
'$3\pi$' 3*pi)
set yrange[-1:2]
plot sin(x) title '$\textcolor{red}{f_1(x)}=\sin(x)$' w l ls 1, \
sin(x**2/(pi+abs(x))+pi/2) title \
'$\textcolor{blue}{f_2(x)}=\sin\left(\frac{x^2}{\pi+|x|}+\frac{\pi}{2}\right)$' w l ls 2
```

Записываем `gnuplot`-скрипт в файл с именем `epslatex.gp` и запускаем в консоли

```
gnuplot epslatex.gp
```

При компиляции создается файл в формате  $\LaTeX$  с расширением `tex` и файл в формате `Postscript` с расширением `eps`. В документе  $\LaTeX$  изображение подключается внутри окружения `figure` командой `input` с указанием `tex`-файла. Для корректного отображения кириллицы кодировка `gnuplot`-скрипта и документа  $\LaTeX$  должны совпадать. Если предполагается создание отдельного изображения в формате `eps`, то нумерация страниц должна быть отключена, а пакеты, отвечающие за работу с текстом и формулами (например, `paratype`, `amssymb`, `amsfonts`), цветом `color` и внешними изображениями `graphicx`, подключены. Если планируется построение изолиний с метками командой `splot`, то необходимо подключить пакет `calc`. Зададим имя файла `doepslatex.tex`.

```
\documentclass{article}
\usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8x]{inputenc}
\usepackage[russian,english]{babel}
\usepackage{paratype}
\usepackage{amssymb}
\usepackage{amsfonts}
\usepackage{color}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{calc}
\begin{document}
\thispagestyle{empty}
\begin{figure}
\input{epslatex}
\end{figure}
\end{document}
```

Для подготовки независимого графического файла создадим файл `compile` (в ОС Windows `compile.bat`) с командами для компиляции `gnuplot`-скрипта, компиляции файла `doepslatex.tex`, конвертации файла из формата `dvi` в формат `ps` и конвертации файла из формата `ps` в формат `eps`. В ОС GNU/Linux файл `compile` нужно сделать исполняемым (команда `chmod +x compile`).

```
gnuplot epslatex.gp
latex doepslatex.tex
dvips doepslatex.dvi
ps2eps -f doepslatex.ps
```

Результатом выполнения данного командного файла является график в файле `doepslatex.eps`, показанный на рис. 6.

Если график нужно вставить в документ, не поддерживающий формат `eps` (например, `MS Word`), то его можно преобразовать в растровый формат с помощью `GhostScript` [33] командой

```
gs -dSAFER -dBATCH -dNOPAUSE -dEPCrop -r600
-sDEVICE=png256 -sOutputFile=f.png figname.eps
```

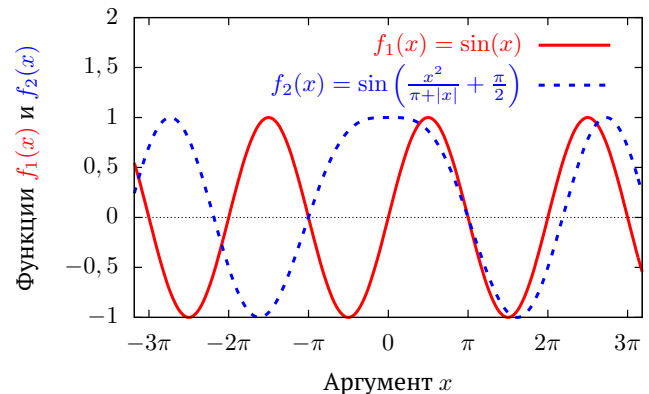


Рис. 6. Графики функций, построенные в `Gnuplot` с помощью терминала `epslatex`

Здесь используются следующие опции: *dEPSCrop* — обрезка полей в *eps*-файле; *r600* — разрешение 600 точек на дюйм; *sDEVICE* — графический формат создаваемого файла (допустимые форматы приведены на веб-сайте [33]) и его название *sOutputFile*.

## Список литературы

- [1] MATLAB, MathWorks, MATLAB & Simulink. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (accessed: 07.12.2021)
- [2] Scilab. <https://www.scilab.org/> (accessed: 07.12.2021)
- [3] Campbell S.L., Chancelier J.-Ph., Nikoukhah R. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4. 2010. Springer, New York, NY. 330 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-5527-2
- [4] GNU Octave. <http://www.gnu.org/software/octave/> (accessed: 07.12.2021)
- [5] Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Введение в Octave для инженеров и математиков. М.: ALT Linux, 2012. 368 с. <http://www.altlinux.org/images/0/07/OctaveBook.pdf> (accessed: 07.12.2021)
- [6] Maxima, a computer algebra system. <https://maxima.sourceforge.io/> (accessed: 07.12.2021)
- [7] Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. Учебное пособие. М.: 2008. 86 с. [http://www.uneex.ru/static/MethodBooks\\_Maxima/Maxima.pdf](http://www.uneex.ru/static/MethodBooks_Maxima/Maxima.pdf) (accessed: 07.12.2021)
- [8] Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing. <http://www.wolfram.com/mathematica> (accessed: 07.12.2021)
- [9] Maplesoft: software for mathematics, online learning, engineering. <http://www.maplesoft.com/> (accessed: 07.12.2021)
- [10] wxMaxima. <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/> (accessed: 07.12.2021)
- [11] Насибуллаев И.Ш. Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculX для моделирования статических структурных задач // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 183–200. DOI: 10.21662/mfs2020.3.129
- [12] Bretscher O. Linear Algebra With Applications (3rd ed.). 1995. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [13] Durakovic B. Design of Experiments Application, Concepts, Examples: State of the Art. // Periodicals of Engineering and Natural Sciences. 2017. Vol. 5, No. 3. Pp. 421–439. DOI: 10.21533/pen.v5i3.145
- [14] Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. 280 с.
- [15] LaTeX — a document preparation system. <http://www.latex-project.org/> (accessed: 07.12.2021)
- [16] Котельников И.А., Чеботаев П.З. LaTeX по-русски. СПб.: «Корона-Век». 2011. 496 с.
- [17] van Dongen M.R.C. LaTeX and Friends. 2012. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 300 p. DOI: 10.1007/978-3-642-23816-1
- [18] Microsoft. <https://www.microsoft.com/> (accessed: 07.12.2021)
- [19] Feuersänger C. Manual for Package PGFPlots, 2D/3D Plots in LATEX, Version 1.18. <http://pgfplots.sourceforge.net/pgfplots.pdf> (accessed: 07.12.2021)
- [20] The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.9a. Ed. by Till Tantau. Universität zu Lübeck, 2021. <https://mirror.truenetwork.ru/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf> (accessed: 07.12.2021)
- [21] PSTricks. <https://tug.org/PSTricks/main.cgi> (accessed: 07.12.2021)
- [22] Gnuplot. <http://www.gnuplot.info/> (accessed: 07.12.2021)
- [23] Origin — data analysis and graphing software. <http://www.originlab.com/> (accessed: 07.12.2021)
- [24] CTAN: package listings. <https://ctan.org/pkg/listings> (accessed: 07.12.2021)
- [25] CTAN: package beamer. <https://ctan.org/pkg/beamer> (accessed: 07.12.2021)
- [26] Насибуллаев И.Ш. Аналитический анализ переключения рабочего режима в двумерной модели системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 3 (93). С. 120–131. DOI: 10.54708/19926502\_2021\_25393120
- [27] Волков А.И., Жарский И.М. Большой химический справочник. М.: Современная школа. 2005. 608 с.
- [28] Khuri A.I., Cornell J.A. Response surface, design and analysis, 2nd edition, Marcel Dekker Inc., New York. 1996.
- [29] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. С. 26–41. <http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [30] Oyejola B.A., Nwanya J.C. Selecting the Right Central Composite Design. International Journal of Statistics and Applications. 2015. Vol. 5, No. 1. Pp. 21–30. DOI: 10.5923/j.statistics.20150501.04
- [31] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вычислительные технологии. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20. DOI: 10.25743/ICT.2021.26.2.002
- [32] Шкляр В.Н. Планирование эксперимента и обработка результатов. Издательство Томского политехнического университета. 2010.
- [33] Ghostscript. <https://www.ghostscript.com/> (accessed: 07.12.2021)



## Application of free software for processing and visualization of scientific research results

Nasibullayev I.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The paper presents an overview and examples of the use of free software for processing, analyzing and visualizing the results of computational and natural experiments. The implementation of two standard methods of approximation and data analysis is considered: the method of least squares and orthogonal central composite design. The first method allows the approximation of tabular data in the form of a polynomial of arbitrary degree. With an increase in the degree of the polynomial, the accuracy of the approximation increases, but, due to the growth of the condition number of the matrix, the correctness of the approximation decreases. It is shown that the normalization of the initial data makes it possible to increase the maximum order of the polynomial, in which there will be no loss of accuracy due to an ill-conditioned matrix. The implementation of the method in the Scilab programming language is proposed. The second method makes it possible to obtain a second-order approximation for an arbitrary number of variables, to estimate the linear and quadratic contributions of individual variables and their coupled interactions. A description of the method is presented and a scheme for constructing an extended experiment design matrix is proposed. The method is implemented in the C++ programming language, and a script written in the Scilab language is proposed to determine the error of the obtained approximation. To obtain a more accurate approximation, one can choose a function that takes into account the asymptotic features of the results of the computational experiment. An example of such an approximation is implemented in the computer algebra software wxMaxima. The presented software implementations of approximation methods additionally generate code in the Gnuplot and Scilab format, which increases efficiency for subsequent visualization or analysis of approximations. Examples of research visualization in the PGFPlots  $\LaTeX$  package and in the Gnuplot program using the epslatex terminal are given. Both approaches are convenient when presenting research results in the  $\LaTeX$  desktop publishing system.

**Keywords:** free software, the method of least squares, orthogonal central composite design, Scilab, wxMaxima, Latex, Gnuplot

### References

- [1] MATLAB, MathWorks, MATLAB & Simulink.  
<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>  
(accessed: 07.12.2021)
- [2] Scilab.  
<https://www.scilab.org/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [3] Campbell S.L., Chancelier J-Ph., Nikoukhah R. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4. 2010. Springer, New York, NY. 330 p.  
DOI: 10.1007/978-1-4419-5527-2
- [4] GNU Octave.  
<http://www.gnu.org/software/octave/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [5] Alekseyev Ye.R., Chesnokova O.V. [Introduction to Octave for engineers and mathematicians] Vvedeniye v Octave dlya inzhenerov i matematikov. M.: ALT Linux, 2012. 368 p. (in Russian).  
<http://www.altlinux.org/images/0/07/OctaveBook.pdf>  
(accessed: 07.12.2021)
- [6] Maxima, a computer algebra system.  
<https://maxima.sourceforge.io/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [7] Stakhin N.A. [Fundamentals of working with the system of analytical (symbolic) calculations Maxima. Tutorial] Osnovy raboty s sistemoy analiticheskikh (simvolnykh) vychisleniy Maxima. Uchebnoye posobiye. M.: 2008. 86 p. (in Russian).  
[http://www.uneex.ru/static/MethodBooks\\_Maxima/Maxima.pdf](http://www.uneex.ru/static/MethodBooks_Maxima/Maxima.pdf)  
(accessed: 07.12.2021)
- [8] Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing.  
<http://www.wolfram.com/mathematica>  
(accessed: 07.12.2021)
- [9] Maplesoft: software for mathematics, online learning, engineering.  
<http://www.maplesoft.com/> (accessed: 07.12.2021)

- [10] wxMaxima.  
<https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [11] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems] *Primeneniye svobodnykh programm FreeFem++/Gmsh i FreeCAD/CalculiX dlya modelirovaniya sticheskiikh strukturnykh zadach // Mnogofaznyye sistemy [Multiphase Systems]*. 2020. Vol. 15, N 3–4. Pp. 183–200. (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2020.3.129
- [12] Bretscher O. *Linear Algebra With Applications* (3rd ed.). 1995. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [13] Durakovic B. *Design of Experiments Application, Concepts, Examples: State of the Art. // Periodicals of Engineering and Natural Sciences*. 2017. Vol. 5, No. 3. Pp. 421–439.  
DOI: 10.21533/pen.v5i3.145
- [14] Adler Yu.P., Markova Ye.V., Granovskiy Yu.V. [Design of experiment in the search for optimal conditions] *Planirovaniye eksperimenta pri poiske optimalnykh usloviy*. M.: Nauka, 1976. 280 p. (in Russian).
- [15] LaTeX – a document preparation system.  
<http://www.latex-project.org/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [16] Kotelnikov I.A., Chebotayev P.Z. [LaTeX in Russian] *LaTeX po-russki*. SPb.: “Korona-Vek”. 2011. 496 p. (in Russian).
- [17] van Dongen M.R.C. *LaTeX and Friends*. 2012. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 300 p. (in Russian).  
DOI: 10.1007/978-3-642-23816-1
- [18] Microsoft.  
<https://www.microsoft.com/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [19] Feuersänger C. *Manual for Package PGFPlots, 2D/3D Plots in LATEX, Version 1.18*.  
<http://pgfplots.sourceforge.net/pgfplots.pdf>  
(accessed: 07.12.2021)
- [20] *The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.9a*. Ed. by Till Tantau. Universität zu Lübeck, 2021.  
<https://mirror.truenetwork.ru/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf>  
(accessed: 07.12.2021)
- [21] PSTricks.  
<https://tug.org/PSTricks/main.cgi>  
(accessed: 07.12.2021)
- [22] Gnuplot.  
<http://www.gnuplot.info/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [23] Origin – data analysis and graphing software.  
<http://www.originlab.com/>  
(accessed: 07.12.2021)
- [24] CTAN: package listings.  
<https://ctan.org/pkg/listings>  
(accessed: 07.12.2021)
- [25] CTAN: package beamer.  
<https://ctan.org/pkg/beamer>  
(accessed: 07.12.2021)
- [26] Nasibullayev I.Sh. [Analytical analysis of operating mode switching in a 2D model of a fluid cooling system of the micro-gripper] *Analiticheskiy analiz pereklyucheniya rabocheho rezhima v dvumernoy modeli sistemy zhidkostnogo okhlazhdeniya mikrozhkhvata // Vestnik UGATU*. 2021. Vol. 25, N. 3 (93). Pp. 120–131. (in Russian).  
DOI: 10.54708/19926502\_2021\_25393120
- [27] Volkov A.I., Zharskiy I.M. [Big chemical reference book] *Bolshoy khimicheskiy spravochnik*. M.: Sovremennaya shkola [Modern school]. 2005. 608 p. (in Russian).
- [28] Khuri A.I., Cornell J.A. *Response surface, design and analysis*, 2nd edition, Marcel Dekker Inc., New York. 1996.
- [29] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit] *Razrabotka kompyuternoy modeli osnovnogo elementa agregata dozirovaniya topliva. Vychislitelnye tehnologii [Computational Technologies]*. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41. (In Russian).  
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [30] Oyejola B.A., Nwanya J.C. *Selecting the Right Central Composite Design. International Journal of Statistics and Applications*. 2015. Vol. 5, No. 1. Pp. 21–30.  
DOI: 10.5923/j.statistics.20150501.04
- [31] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system] *Komp'yuternoye dvumernoye modelirovaniye sistemy zhidkostnogo okhlazhdeniya mikrozhkhvata // Vychislitelnye tehnologii [Computational Technologies]*. 2021. Vol. 26, N. 2. Pp. 4–20. (In Russian).  
DOI: 10.25743/ICT.2021.26.2.002
- [32] Shklyar V.N. [Design of experiment and results processing] *Planirovaniye eksperimenta i obrabotka rezultatov*. Izdatelstvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta [Tomsk Polytechnic University Publishing House]. 2010. (In Russian).
- [33] Ghostscript.  
<https://www.ghostscript.com/>  
(accessed: 07.12.2021)



## A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation

Mikhaylenko C.I.

Mavlyutov Institute of Mechanisc UFRC RAS, Ufa, Russia

The article describes some aspects of computational modeling of air dynamics in a vortex tube channel. In particular, possible approaches to the numerical study of various geometric parameters are considered, both for the efficiency of temperature stratification and for maximizing or minimizing various parameters of physical diaphragms. An approach to the choice of a method for constructing a finite-volume mesh is presented. It is shown that the best performance can be achieved when using an orthogonalized hexagonal grid with a distribution of finite dimensions close to uniform. The findings are applied in modeling in the OpenFOAM environment for  $k - \varepsilon$  and  $k - \omega$  turbulence models. It is shown that in the above formulation of the problem, the results obtained demonstrate the general nature of the dependence of the physical parameters on the dimensions of the cold diaphragm. However, a quantitative difference in the results for the  $k - \varepsilon$  and  $k - \omega$  models should be noted. It requires further research and comparison with experimental data.

**Ключевые слова:** numerical simulation, finite volume mesh, vortex tube, OpenFOAM

### 1. Introduction

A vortex tube is a device without moving parts, which divides the gas flow inletting tangentially in the area of one of the tube ends (swirler) into two low pressure swirling flows with temperatures above and below the initial one. Gas under high pressure inlets the vortex tube tangentially through the swirler nozzles, which increases the angular velocity and, therefore, organizes the vortex effect. Then the gas leaves the device through two outlets: a hot diaphragm located along the outer radius at the end farthest from the swirler, and a cold diaphragm forming a nozzle along the channel axis near the swirler. The described design of the vortex tube is called counterflow. Thus, the gas is conventionally divided into two layers. Gas closer to the axis is at a low temperature and exits through the cold diaphragm, while gas at the periphery of the pipe is at a high temperature and exits the device through the hot diaphragm.

The temperature difference caused by the vortex

flow was first discovered by the French engineer Georges J. Ranque in 1931 [1] in the process of improving cyclone pipes for cleaning gases from dust. Later, the German physicist Rudolf Hilsch [2] published research on improving the design of a vortex tube. Subsequently, such vortex tubes were called Rank–Hilsch vortex tubes.

The vortex tube has the following advantages over conventional cooling devices: simplicity of design, no moving parts, operation without electricity and chemicals, small size and light weight, low cost, maintenance-free, instant operation, durability, adjustable temperature [3]. But low thermal efficiency is one of the main limiting factors in the widespread use of vortex tubes. In addition to the indicated disadvantage, it should be noted the increased noise level and the issue of the availability of compressed gas, which can also limit the application. Therefore, when compactness, reliability and lower cost of equipment are the main factors, and high operating efficiency is less important, the vortex tube becomes a good device for heating or cooling gas, purifying and dehydrating gas, separating gas mixtures, applying

DNA, liquefying natural gas and for other purposes [4–6].

Due to the simplicity of the device and its reliability, vortex tubes are widely used in many industries. Vortex tubes are used as refrigeration units in the food industry, for drying and separating gas in the oil industry, for monitoring the environment in the study of underwater environments [7], for heating and cooling chemicals [8], etc.

The main physical mechanism of the processes that determine gas cooling in a vortex tube has not yet been fully studied. There is continue investigations of the emerging effect and attempts to explain this phenomenon. So, in works [9, 10] reviews of existing models of vortex tubes and their designs are given. The existing theories are described and new approaches to explaining the Rank–Hilsch effect are presented.

It is also necessary to highlight a large number of experimental studies in the area of the design and dimensions of the vortex tube. The work [11] presents the results of a study of the efficiency of cooling a vortex tube taking into account the number of nozzle holes. The authors of the article [12] propose a more detailed consideration of the geometric parameters of the pipe, such as pipe length, diameter and internal taper angle, as well as their influence on the efficiency of the pipe. Thus, there are experimental studies suggesting characteristic pipe parameters and feed gas properties.

This work describes the development of a finite-volume mesh focused on doing massive computational experiments to study the dynamics of gas in the channel of a vortex tube. Possible limitations imposed by spatial decomposition in parallel calculations using MPI technology are taken into account. Several ways to prepare a mesh for calculations in the OpenFOAM software are described below. In this case, the experience [13–15] obtained earlier is used. Also, when developing the mesh, the features of the possible influence of the boundary conditions on the results obtained are taken into account [16].

## 2. The mathematical model

### 2.1. The common hydrodynamics model

The hydrodynamics processes into a vortex tube channel can be described by the standard system of continuous media equations contents of the continuity equation, the equation of impulses, the energy conservation equation and closure the system by an equation of state.

- The continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0.$$

- The equation of impulses (Navier–Stokes equation)

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_i}.$$

- The energy conservation equation

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i E}{\partial x_i} = -\frac{\partial p u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji} u_i}{\partial x_j}.$$

- The equation of state of an ideal gas

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.$$

The following notation is here:  $\rho$  is the gas density;  $u_i$  are the velocity vectors components;  $p$  is the pressure;  $E$  is the specific total energy of gas;  $\gamma$  is the adiabatic exponent;  $e$  is the specific internal energy linked with the specific total energy by equation

$$E = e + \frac{\sum_i u_i^2}{2};$$

$\tau_{ji}$  is the viscous stress tensor calculated as

$$\tau_{ji} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right],$$

$\mu$  is the dynamic viscosity and  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol.

When using the turbulence model,  $\mu$  is calculated as  $\mu = \mu_0 + \nu_t \rho$ , where  $\mu_0$  is the dynamic viscosity of gas and  $\nu_t$  is a kinematic eddy viscosity calculated by any turbulence model.

### 2.2. The $k - \omega$ turbulence model

The turbulence model  $k - \omega$  is considered one of the best for the case when there is a solid wall in the computational domain. The vortex tube corresponds to this case. The model is described by the turbulence energy equation and the specific dissipation rate equation.

- The turbulence energy equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u_i k}{\partial x_i} &= \\ &= \tau_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta^* \omega k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

- The specific dissipation rate equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u_i \omega}{\partial x_i} &= \\ &= \frac{\alpha \omega}{k} \tau_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta^* \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right]. \end{aligned}$$

Here  $k$  is the turbulence energy;  $\omega$  is the specific dissipation rate;  $\nu$  is the kinematic viscosity of gas;  $\nu_t$  is the kinematic eddy viscosity calculated as

$$\nu_t = \frac{k}{\omega};$$

and closure coefficients are empirical values

$$\alpha = \frac{13}{25}, \quad \beta = \frac{9}{125}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \sigma^* = \frac{1}{2}.$$

### 2.3. The $k - \varepsilon$ turbulence model

The  $k - \varepsilon$  turbulence model is known as more simple in its numerical realization. The model equations are the turbulence energy equation and the turbulence dissipation rate equation.

- The turbulence energy equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u_i k}{\partial x_i} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} k \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \rho \varepsilon. \end{aligned}$$

- The turbulence dissipation rate equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_i \varepsilon}{\partial x_i} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} C_1 \varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}. \end{aligned}$$

Here  $k$  is the turbulence energy;  $\varepsilon$  is the turbulence dissipation rate;  $\nu$  is the kinematic viscosity of gas;  $\nu_t$  is the kinematic eddy viscosity calculated as

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon};$$

and the model empirical closure coefficients are values

$$C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3.$$

### 2.4. The initial and boundary conditions

A counter flow vortex tube is considered in the work is a cylindrical device which has four tangentially placed inlet channels and two outlet diaphragms. The main channel length of a simulated tube is 120 mm and the diameter equal to 16 mm. The diameter of the cold diaphragm changes from wthe size equal to 5 mm to 11 mm. The hot diaphragm placed near external wall of cylinder is circular and its wide equal to 0.5 mm. The outlets of the computational domain are located at the ends of the cylinder, which has the diameter equal to diameter of main cylinder, and places at a certain distance from the outlet diaphragms.

The initial conditions is close to normal ones. The velocity of gas equal to zero, the temperature equal to

293 K, the pressure equal to atmospheric (100 kPa) and the density equal to air density for ordinal conditions.

Inlet parameters are constant pressure equal to 600 kPa (6 atm) and constant temperature (293 K). An inlet velocity is determined by the pressure gradient.

Outlet parameters are the normal pressure (100 kPa), and flow boundary conditions for a velocity and a temperature.

The boundary conditions for the physical parameters on the wall are determined by the turbulence model. Where are set the slip boundary condition for the  $k - \varepsilon$  turbulence model case and the no-slip ones for the  $k - \omega$  model. The boundary conditions for turbulence parameters on the wall describes by corresponding wall functions.

## 3. A mesh construction

A vortex tube is a complex geometrical area, since in addition to the main cylindrical channel, there are also swirler inlets, outlet diaphragms and boundaries with outlet conditions, placed with the necessary requirements. The simplest option for meshing for complex areas is automatic generation. OpenFOAM allows to use the unstructured mesh automatically generated in the Salome software. The second option is to generate a pseudo-structured orthogonalized mesh using the SnappyHexMesh utility included in the OpenFOAM software.

### 3.1. Automatically generated meshes

Previously the author investigated the possibility of using an automatically generated unstructured mesh with finite octahedral volumes [14]. Fig. 1 shows an example of such a mesh created with Salome. It should be noted that despite the uniformity of such a mesh on the surface, as shown in Fig. 1 (a) and (c), the mesh does not have sufficient uniformity inside, as can be clearly seen in Fig. 1 (b). Such a structure of a finite-volume mesh leads to a slight increase in the computational error.

The most significant disadvantages of such a finite-volume mesh are as follows. With the number of nodal points comparable to that of a hexagonal mesh, the number of faces between neighbour finite volumes for an unstructured mesh increases significantly. Since the finite volume method calculates the flow of physical values through each face, the simulation time increases significantly. The next important disadvantage is the non-orthogonal of the unstructured mesh, which in the general case also leads to an increase in the simulation time and, in addition, to an increase in the error. The last significant disadvantage is the fact that the unstructuredness of the mesh complicates the spatial decomposition procedure, which increases the



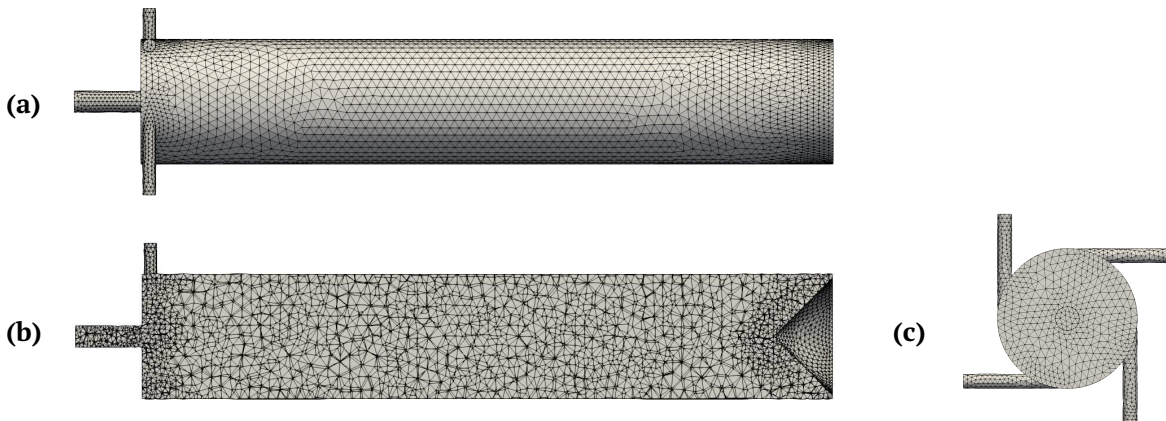


Figure 1. The mesh generated by Salome: general view along the tube (a); cross-section of the mesh (b); view from the side of the cold diaphragm (c)

simulation time on the computational cluster.

Thus, the relative ease of constructing an unstructured mesh is largely lost by its general disadvantages.

The issue of automatic mesh generation with a small number of finite volumes using OpenFOAM [15] was also considered earlier. The SnappyHexMesh utility is intended for this goal. The mesh is created using 3D reference geometry described in STL format. The utility allows to get a partially structured orthogonalized and mostly hexagonal mesh.

The main disadvantage of this method of generating a mesh is that if the number of nodal points is limited, the resulting mesh is highly homogeneous with artifacts and concentrations.

Fig. 2 shows an example of a mesh generated by

the SnappyHexMesh utility. It should be noted that the number of node points on this mesh is comparable to the number of nodes on the unstructured mesh shown in Fig. 1. The figure shows that such a mesh is fairly uniform on the surface and in depth. However, in the near-wall areas and in the places of surface bends, a considerable concentration of the nodal points is observed, which is clearly visible in Fig. 2 (b) and (c).

It should be noted that in the case presented in Fig. 2, the computational process is completely impossible, since to supply stability, it is necessary to set the time step much less than any reasonable value.

It is possible to achieve computational stability on such a finite-volume mesh if we make it more uniform, but this significantly increases the number of nodal

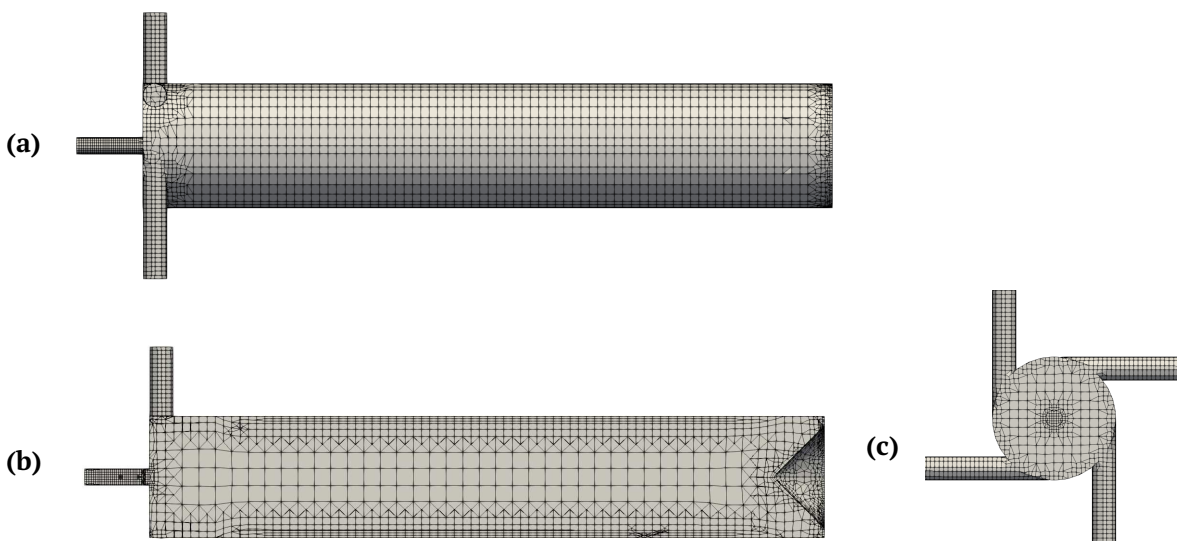


Figure 2. The mesh generated by SnappyHexMesh utility: general view along the tube (a); cross-section of the mesh (b); view from the side of the cold diaphragm (c)

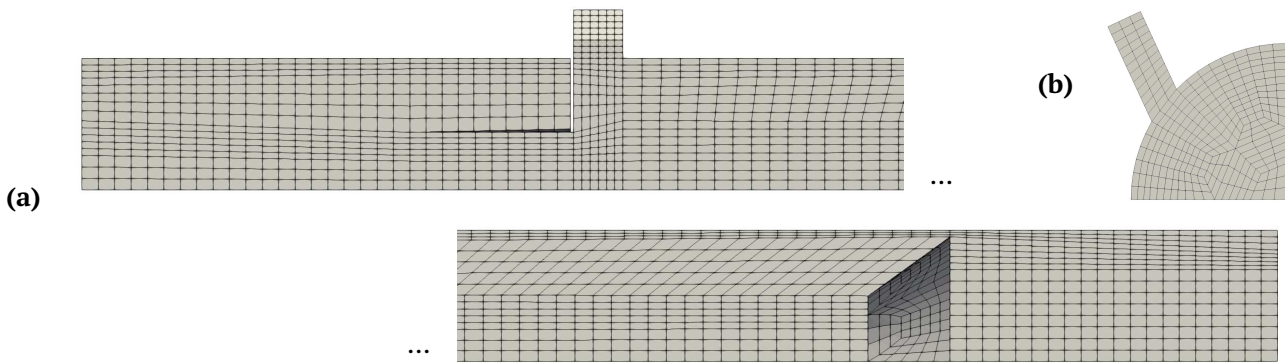


Figure 3. The manually made mesh for using with  $k - \epsilon$  turbulence model: the cold diaphragm and the hot diaphragm areas (a) and view from the side of the cold diaphragm (b)

points, which ultimately dramatically increases the simulation time.

### 3.2. Manually created meshes

We can try to avoid the problems described in the previous section by building a finite-volume mesh using the blockMesh utility included in the OpenFOAM software. The utility uses a formal description to divide the computational domain into a set of non-intersecting blocks (boxes) but contacting with their faces, each of which will contain its own orthogonal hexagonal grid of finite volumes. The specified description is written in a special dictionary file blockMeshDict. The dictionary contains the coordinates of the points that will be the corner points of the hexagonal blocks; descriptions of possible curves between two points, if this edge is not a straight line. The dictionary also contains definitions of blocks and the way they will be split into finite volumes. In addition, surfaces are selected in the dictionary, on which boundary conditions will be set.

The computational domain describing the vortex tube channel is very difficult for manual development

of a uniform hexagonal finite-volume mesh. The complexity is determined by several factors. First, one can distinguish at least three nested cylindrical regions oriented along the channel. The mesh for the inner cylinder is easily obtained using the five-area method. However, for the outer cylinder, some action must be taken to maintain the relative uniformity of the mesh. For this it is necessary to introduce additional blocks, as can be seen in Fig. 3 (b) and 4 (b). Then it is necessary to describe the hot diaphragm (third cylinder), which has a very small thickness and, in addition, a cone-shaped plug is located at this end of the vortex tube.

The above problems can be partially solved. The result shown in Fig. 3 shows a finite volume mesh designed for the computational domain with the constraints described above. This mesh is intended for calculations using the  $k - \epsilon$  turbulence model. In the case of using the  $k - \epsilon$  model, on the wall it is possible to set the condition of no-slip and not select the near-wall layer, as can be seen in the figure.

The main significant difference in the use of a computational mesh constructed in this way from

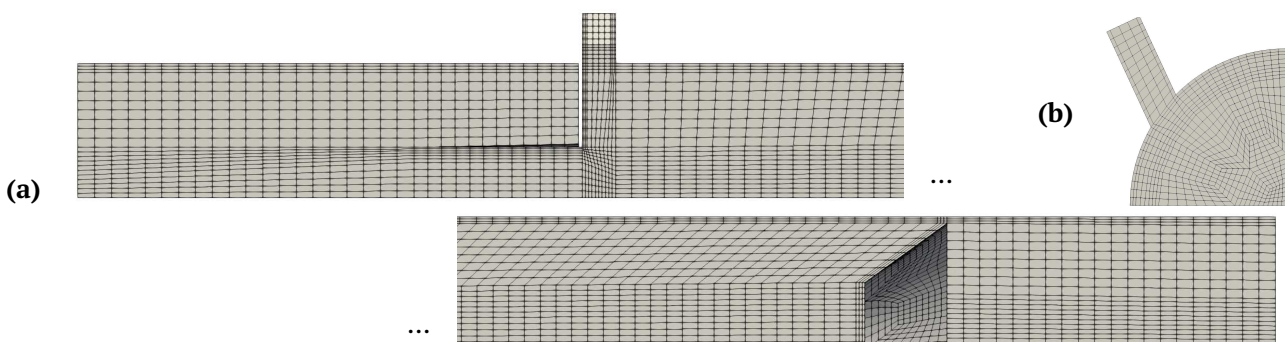


Figure 4. The manually made mesh for using with  $k - \omega$  turbulence model: the cold diaphragm and the hot diaphragm areas (a) and view from the side of the cold diaphragm (b)

an unstructured mesh is significantly less simulation time. In addition, a difference in the level of computational error is assumed, but this issue has not been checked for the case of modeling a vortex tube using these meshes.

When constructing a mesh for modeling using a  $k - \omega$  turbulence model, an additional requirement arises to select several layers of finite volumes of the near-wall region. It should be noted that the method of constructing the computational mesh, which was used for calculations with the  $k - \varepsilon$  turbulence model, is fully applicable for this case as well. The definition of boxes in the blockMeshDict dictionary allows to set the non-uniformity of the finite-volume mesh, which makes it possible to select the near-wall layer. In Fig. 4 shows a mesh created with such modifications. It is worth noting that such a mesh contains almost twice as many finite volumes as compared to the mesh shown in Fig. 3.

#### 4. Some results

Finite-volume meshes described in section 3.2. have proven themselves well in calculations using the sonicFoam solver from the OpenFOAM software [18–20]. These meshes are now actively used in massive computational experiments.

Fig. 5 shows the dependence of the time-average temperature at the outlet of the cold diaphragm nozzle on the diameter of the cold diaphragm. Below are the results obtained by the time of this writing on the study of the dependence of various physical parameters on the diameter of the cold diaphragm. When simulating the vortex tube has the following main dimensions: channel diameter  $D = 16$  mm; channel length  $L = 120$  mm; cold nozzle length  $l = 20$  mm; the

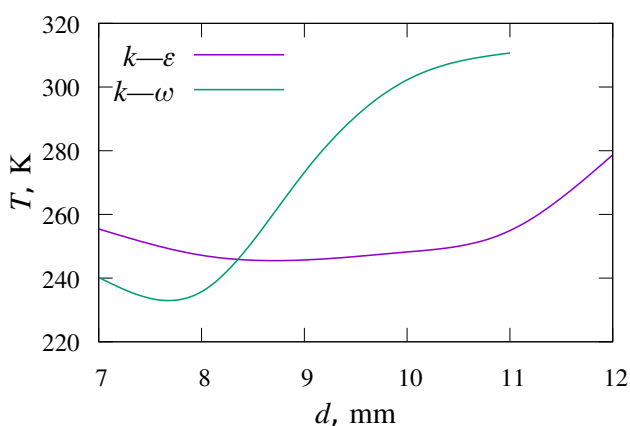


Figure 5. Dependence of the time-average temperature at the outlet of the nozzle of the cold diaphragm on the diameter of the cold diaphragm

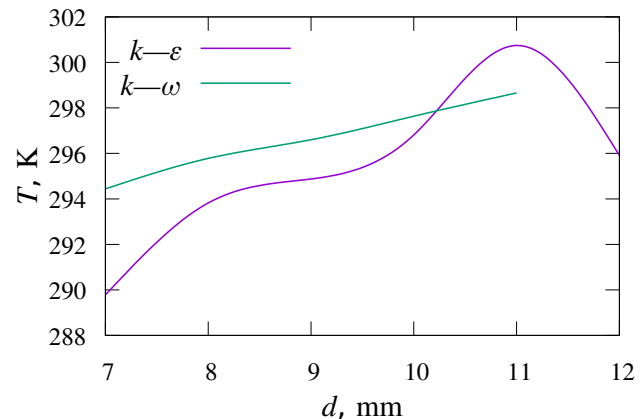


Figure 6. Dependence of the time-average temperature at the outlet of the hot diaphragm on the diameter of the cold diaphragm

diameter of the cold diaphragm varied from  $d = 7$  mm to  $d = 12$  mm. Data are given for calculations using  $k - \varepsilon$  and  $k - \omega$  turbulence models. In the figure, you can see that for both options, the allocation of a certain conditionally optimal diameter is characteristic, at which the temperature of the outgoing air is minimal. However, the specified minimum is reached at different values of the diameter and has different values of temperature.

It follows from the literature that for these geometrical parameters, the values obtained in the  $k - \omega$  turbulence model are closer to the experimental data [21], but this statement requires additional verification in the case under consideration.

In Fig. 6 shows the dependence of the average temperature on the hot diaphragm on the diameter of the cold diaphragm. These plots show a fairly similar relationship for both turbulence models. However, in the future, it is necessary to expand the range of variation of the cold diaphragm diameter in order to explain the maximum observed when using the  $k - \varepsilon$  turbulence model.

#### 5. Conclusion

Thus, it is shown that the construction of a computational mesh using the blockMesh utility allows to create a better mesh due to human participation. Despite the fact that in some parts of the computational domain such a mesh deviates slightly from the real geometry of the vortex tube, as it happened for the swirlers in Fig. 3 and 4, this has no noticeable effect on the result.

A particularly important property of the mesh created by the blockMesh utility is the ability to extensively control the size of individual finite volumes, their placement, uniformity and condensation.

It should also be noted that the language for describing the dictionary `blockMeshDict` allows to widely enter and use variables, as well as use arithmetic expressions in the C language. To calculate these expressions, the C compiler is called. Thanks to this possibility, the creation and modification of the computational mesh can be largely automated. This fact makes it easier to carry out massive computational experiments.

Thus, the `blockMesh` utility can be recognized as one of the most convenient and accurate tools for creating a finite-volume mesh for modeling a vortex tube in the OpenFOAM software.

## References

- [1] Ranque G.J. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // *J. Phys. Radium*. 1994. V. 4. Pp. 112S–114S. (in French)
- [2] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // *Review of Scientific Instruments*. 1947. V. 18. Pp. 108–113.  
DOI: [10.1063/1.1740893](https://doi.org/10.1063/1.1740893)
- [3] Khodorkov L., Poshernev N.V., Zhidkov M.A. The vortex tube: a universal device for heating, cooling, cleaning, and drying gases and separating gas mixtures // *Chemical and Petroleum Engineering*. 2003. V. 39. Pp. 409–415.  
DOI: [10.1023/A:1026336813155](https://doi.org/10.1023/A:1026336813155)
- [4] Ebmeier R., Whitney S., Alugupally S., Nelson M., Padhye N., Gogos G., Viljoen H.J. Ranque–Hilsch Vortex Tube Thermocycler for DNA Amplification // *Instrumentation Science & Technology*. 2004. V. 32. Pp. 567–570.  
DOI: [10.1081/CI-200029810](https://doi.org/10.1081/CI-200029810)
- [5] Boucher R.F., Tippetts J.R. Vortex-tube-driven thermo-electricity // In *Sixth triennial international symposium on Fluid Control, Measurement and Visualization*, 6th, Sherbrooke, Canada. 2000. Paper 50.
- [6] Westley R. A Bibliography and Survey of The Vortex Tube // *The College of Aeronautics*. 1957.
- [7] Baz A., Gilheany J., Kalvitas A. Feasibility of vortex tube assisted environmental control of an underwater research habitat // *Ocean Eng.* 1987. V. 15. Pp. 34–54.  
DOI: [10.1016/0029-8018\(88\)90018-2](https://doi.org/10.1016/0029-8018(88)90018-2)
- [8] Bruno T.J. Laboratory applications of the vortex tube // *Journal of Chemical Education*. 1987. V. 64. Pp. 987–988.  
DOI: [10.1021/ed064p987](https://doi.org/10.1021/ed064p987)
- [9] Gutsol A.F. The Ranque effect // *Physics-Uspexhi*. 1997. V. 40. Pp. 639–658.  
DOI: [10.1070/PU1997v040n06ABEH000248](https://doi.org/10.1070/PU1997v040n06ABEH000248)
- [10] Eiamsa-Ard S., Promvong P. Review of Ranque–Hilsch effects on vortex tubes // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842.  
DOI: [10.1016/j.rser.2007.03.006](https://doi.org/10.1016/j.rser.2007.03.006)
- [11] Attalla M., Ahmed H., Ahmed M.S., El-Wafa A.A. An experimental study of nozzle number on Ranque–Hilsch counter-flow vortex tube // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2017. V. 82. Pp. 381–389.  
DOI: [10.1016/j.expthermflusci.2016.11.034](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2016.11.034)
- [12] Hamdan M.O., Al-Omari S.-A., Oweimer A.S. Experimental study of vortex tube energy separation under different tube design // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2018. V. 91. Pp. 306–311.  
DOI: [10.1016/j.expthermflusci.2017.10.034](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2017.10.034)
- [13] Mikhaylenko C.I. Simulation of the vortex tube: design of a hexagonal mesh for computational experiments in OpenFOAM // *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*. 2016. V. 11. Pp. 112–118. (in Russian)  
DOI: [10.21662/uim2016.1.017](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.017)
- [14] Minishev Sh.R., Mikhailenko C.I. Formation of an unstructured mesh for a vortex tube model in OpenFOAM with Salome // In the book: *Physicochemical hydrodynamics: models and applications. Abstracts of the Second All-Russian Summer School-Conference*. 2018. (in russian)
- [15] Koroleva E.N., Mikhailenko C.I. Constructing the geometry of the calculation domain for the vortex tube model by SnappyHexMesh utility of the OpenFOAM software // In the book: *Physicochemical hydrodynamics: models and applications. Abstracts of the Second All-Russian Summer School-Conference*. 2018. (in russian).
- [16] Minibaev M.R., Mikhaylenko C.I. Investigation of the influence of boundary conditions in the numerical solution of a vortex tube model // *Multiphase Systems*. 2019. V. 14. Pp. 89–100. (in Russian)  
DOI: [10.21662/mfs2019.2.013](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.013)
- [17] Mikhaylenko C.I. Making of a finite-difference mesh and a turbulence model selection for a numerical simulations of a vortex tube in OpenFOAM software // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. V. 1677. 012021.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1677/1/012021](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1677/1/012021)
- [18] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: outlet parameter dependencies of cold air production // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1158. 032032.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1158/3/032032](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/3/032032)
- [19] Adullin B.R., Mikhaylenko C.I. Influence of the channel length of a vortex tube on the air temperature separation // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1268. 012001.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012001](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012001)
- [20] Privalov L.Y., Mikhaylenko C.I. The effect of an additional air inlet in the hot outlet area on the overall effectiveness of a vortex tube // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V. 1392. 012019.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1392/1/012019](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1392/1/012019)
- [21] Burazer J.M.; Čočić A.S., Lečić M.R. Numerical research of the compressible flow in a vortex tube using OpenFOAM software // *Thermal Science*. 2017. V. 21. Pp. S745–S758.  
DOI: [10.2298/TSC1160223195B](https://doi.org/10.2298/TSC1160223195B)



## Вывод дисперсионного уравнения для определения скорости волны Стоунли на границе пористых сред, насыщенных гидратом и водой<sup>1</sup>

Каримова Г.Р., Рафикова Г.Р.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящей работе рассматривается процесс распространения волны Стоунли вдоль границы раздела двух сред, где верхняя среда представлена песком, насыщенным водой, а нижняя – песком, насыщенным газогидратом. В прямоугольной системе координат выбраны направления осей для случая, когда плоскостью раздела является  $z = 0$ . Рассмотрена волна Стоунли вертикальной поляризации, т.е. отсутствует горизонтальное поперечное перемещение. Гармоническая волна распространяется на достаточно удаленное расстояние от источника взрыва и представляется суммой продольных и поперечных волн в каждом полупространстве. Для описания математической модели использованы волновые уравнения, уравнения для смещения частиц и компонентов тензоров напряжения, которые дополнены граничными условиями. В результате нахождения аналитических решений в виде гармонической бегущей волны для смещений, потенциалов, векторов продольной и поперечной волн получено дисперсионное уравнение для определения скорости волны Стоунли. При использовании данного уравнения и экспериментальных значений скоростей продольных и поперечных волн в насыщенных пористых средах можно найти скорость волны Стоунли в зависимости от различных параметров пористой среды.

**Ключевые слова:** поверхностные акустические волны, волна Стоунли, дисперсионное уравнение

### 1. Введение

Большое внимание исследователями уделяется поверхностным акустическим волнам, так как области их применения и изучения для механики сплошных сред многогранны [1]. Эти упругие волны распространяются вдоль свободной поверхности твёрдого тела или границы с другими средами и затухают при удалении от границы. В настоящее время достаточно значимый вклад в изучении большого количества явлений вносит теория акустических волн. Значительное количество работ посвящено физическим свойствам, применениям и характеристикам этих волн при различных условиях сред с различными усложняющими фак-

торами [2–4]. Известно, что поверхностные волны бывают с вертикальной и горизонтальной поляризацией, к наиболее часто встречающимся частным случаям можно отнести волны Рэлея, Лява и Стоунли [5]. Наибольший интерес вызывает задача о распространении поверхностной гармонической волны вдоль границы раздела двух жестко склеенных сред, которая впервые была решена в работе британского сейсмолога Роберта Стоунли в 1924 году [6]. Волны такого типа исследуются до сих пор с различными усложняющими факторами в геофизике, сейсмологии для оценки проницаемости породы, распределения, мощности пласта и др. Например, в работе [7] рассмотрено влияние контакта различных граничащих сред на свойства акустических волн Стоунли, получено дисперсионное уравнение. Высокочастотные волны Стоунли дают информацию о физических свойствах прилегающих слоев, о возможных межфазных трещинах [8]. Практическое применение распространения волны Сто-

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207.

унли продемонстрировано в ходе сейсмологической разведки на газогидратных месторождениях Малик (Канада) [9]. Анализ данных, полученных с сейсмографов, позволил оценить проницаемость породы, мощность гидратного пласта и получить значения скоростей волны Стоунли.

Целью настоящей работы является исследование процесса распространения волны Стоунли вдоль границы раздела «песок, насыщенный водой – песок, насыщенный газогидратом метана», а также вывод уравнения для определения скорости волны Стоунли. В соответствии с целью были поставлены следующие задачи:

1) описание математической модели распространения волны Стоунли на границе «песок, насыщенный водой – песок, насыщенный газогидратом метана»;

2) получение аналитических решений в виде гармонической бегущей волны для давления, смещений, потенциалов для векторов продольной и поперечной волн;

3) вывод уравнения для определения скорости волны Стоунли.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения волны Стоунли вдоль границы раздела двух сред «песок, насыщенный водой – песок, насыщенный газогидратом метана» (рис. 1). В декартовой системе координат выбираем направления осей и считаем, что плоскостью раздела является  $z = 0$ . Допустим, что волна Стоунли вертикальной поляризации, то есть отсутствует горизонтальное поперечное перемещение. Гармоническая волна распространяется на достаточно удаленное расстояние от источника взрыва.

Для области песка, насыщенного гидратом, выписаны следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(s_1)}}{\partial t^2} &= C_l^{(s_1)^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(s_1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(s_1)}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi^{(s_1)}}{\partial t^2} &= C_t^{(s_1)^2} \left( \frac{\partial^2 \psi^{(s_1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(s_1)}}{\partial z^2} \right), \\ C_l^{(s_1)^2} &= (\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho^{(s_1)}, \quad C_t^{(s_1)^2} = \mu_1 / \rho^{(s_1)}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} W_x^{(s_1)} &= \frac{\partial \varphi^{(s_1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(s_1)}}{\partial z}, \\ W_z^{(s_1)} &= \frac{\partial \varphi^{(s_1)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(s_1)}}{\partial x}; \end{aligned} \quad (2)$$

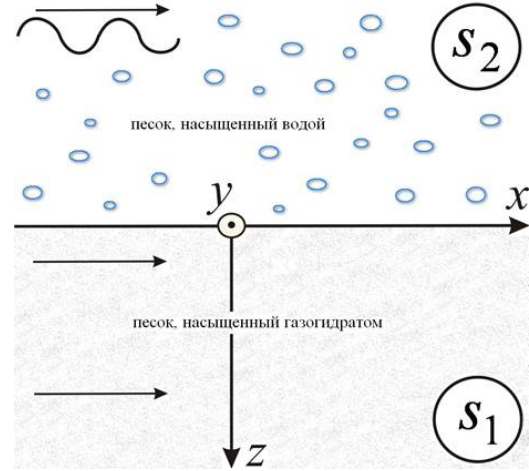


Рис. 1. Распространение волны на границе двух сред

$$\begin{aligned} P_{xz}^{(s_1)} &= \mu_1 \left( \frac{\partial W_x^{(s_1)}}{\partial z} + \frac{\partial W_z^{(s_1)}}{\partial x} \right), \\ P_{zz}^{(s_1)} &= \lambda_1 \left( \frac{\partial W_x^{(s_1)}}{\partial x} + \frac{\partial W_z^{(s_1)}}{\partial z} \right) + 2\mu_1 \frac{\partial W_z^{(s_1)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для области песка, насыщенного водой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(s_2)}}{\partial t^2} &= C_l^{(s_2)^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(s_2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(s_2)}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi^{(s_2)}}{\partial t^2} &= C_t^{(s_2)^2} \left( \frac{\partial^2 \psi^{(s_2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(s_2)}}{\partial z^2} \right), \\ C_l^{(s_2)^2} &= (\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho^{(s_2)}, \quad C_t^{(s_2)^2} = \mu_2 / \rho^{(s_2)}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} W_x^{(s_2)} &= \frac{\partial \varphi^{(s_2)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(s_2)}}{\partial z}, \\ W_z^{(s_2)} &= \frac{\partial \varphi^{(s_2)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(s_2)}}{\partial x}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P_{xz}^{(s_2)} &= \mu_2 \left( \frac{\partial W_x^{(s_2)}}{\partial z} + \frac{\partial W_z^{(s_2)}}{\partial x} \right), \\ P_{zz}^{(s_2)} &= \lambda_2 \left( \frac{\partial W_x^{(s_2)}}{\partial x} + \frac{\partial W_z^{(s_2)}}{\partial z} \right) + 2\mu_2 \frac{\partial W_z^{(s_2)}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\varphi, \psi$  – скалярный и векторные потенциалы для векторов продольной и поперечной волн в двух средах;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;  $C_l^{(s_1)}, C_l^{(s_2)}, C_t^{(s_1)}, C_t^{(s_2)}$  – скорости продольных и поперечных волн соответственно;  $W_x^{(s_1)}, W_z^{(s_1)}, W_x^{(s_2)}, W_z^{(s_2)}$  – смещения частиц по координатам  $x$  и  $z$  в средах;  $P_{xz}^{(s_1)}, P_{zz}^{(s_1)}, P_{xz}^{(s_2)}, P_{zz}^{(s_2)}$  – компоненты тензора напряжений;  $s_1$  – область песка, насыщенного газогидратом;  $s_2$  – область песка, насыщенного водой;  $l$  – продольная волна;  $t$  – поперечная волна.

Систему уравнений (1)–(6), состоящую из волновых уравнений (1) и (4), уравнений смещения частиц (2) и (5), уравнений компонент тензоров напряжения (3) и (6), дополним граничными условиями:

$$z = 0: \quad W_x^{(s_1)} = W_x^{(s_2)}, \quad W_z^{(s_1)} = W_z^{(s_2)},$$

$$P_{xz}^{(s_1)} = P_{xz}^{(s_2)}, \quad P_{zz}^{(s_1)} = P_{zz}^{(s_2)}. \quad (7)$$

### 3. Вывод дисперсионного уравнения

Для волновых уравнений (1) и (4) решения для двух областей ищем в виде гармонической бегущей волны:

$$\varphi^{(s_1)} = f(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi^{(s_1)} = g(z)e^{i(kx-\omega t)},$$

$$\varphi^{(s_2)} = q(z)e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi^{(s_2)} = r(z)e^{i(kx-\omega t)}. \quad (8)$$

После подстановки (8) в уравнения (1) и (4) получаем четыре дифференциальных уравнения второго порядка:

$$-\omega^2 f(z)e^{i(kx-\omega t)} =$$

$$= C_1^{(s_1)^2} \left( -k^2 f(z)e^{i(kx-\omega t)} + \frac{d^2 f(z)}{dz^2} e^{i(kx-\omega t)} \right),$$

$$-\omega^2 g(z)e^{i(kx-\omega t)} =$$

$$= C_t^{(s_1)^2} \left( -k^2 g(z)e^{i(kx-\omega t)} + \frac{d^2 g(z)}{dz^2} e^{i(kx-\omega t)} \right),$$

$$-\omega^2 q(z)e^{i(kx-\omega t)} =$$

$$= C_1^{(s_2)^2} \left( -k^2 q(z)e^{i(kx-\omega t)} + \frac{d^2 q(z)}{dz^2} e^{i(kx-\omega t)} \right),$$

$$-\omega^2 r(z)e^{i(kx-\omega t)} =$$

$$= C_t^{(s_2)^2} \left( -k^2 r(z)e^{i(kx-\omega t)} + \frac{d^2 r(z)}{dz^2} e^{i(kx-\omega t)} \right),$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - (k^2 - k_l^{(s_1)^2}) f(z) = 0,$$

$$\frac{d^2 g(z)}{dz^2} - (k^2 - k_t^{(s_1)^2}) g(z) = 0,$$

$$\frac{d^2 q(z)}{dz^2} - (k^2 - k_l^{(s_2)^2}) q(z) = 0,$$

$$\frac{d^2 r(z)}{dz^2} - (k^2 - k_t^{(s_2)^2}) r(z) = 0,$$

где

$$k_l^{(s_1)^2} = \omega^2 / C_1^{(s_1)^2}, \quad k_t^{(s_1)^2} = \omega^2 / C_t^{(s_1)^2},$$

$$k_l^{(s_2)^2} = \omega^2 / C_1^{(s_2)^2}, \quad k_t^{(s_2)^2} = \omega^2 / C_t^{(s_2)^2}.$$

$$f(z) = A_1 e^{-\sqrt{k^2 - k_l^{(s_1)^2}} z}, \quad g(z) = A_2 e^{-\sqrt{k^2 - k_t^{(s_1)^2}} z},$$

$$q(z) = B_1 e^{\sqrt{k^2 - k_l^{(s_2)^2}} z}, \quad r(z) = B_2 e^{\sqrt{k^2 - k_t^{(s_2)^2}} z}. \quad (9)$$

С учетом (9) окончательно для потенциалов получаем:

$$\varphi^{(s_1)} = A_1 e^{i(kx-\omega t) - s_l^{(s_1)} z},$$

$$\psi^{(s_1)} = A_2 e^{i(kx-\omega t) - s_t^{(s_1)} z},$$

$$\varphi^{(s_2)} = B_1 e^{i(kx-\omega t) + s_l^{(s_2)} z},$$

$$\psi^{(s_2)} = B_2 e^{i(kx-\omega t) + s_t^{(s_2)} z}, \quad (10)$$

где  $s_l^{(s_1)} = \sqrt{k^2 - k_l^{(s_1)^2}}$ ,  $s_t^{(s_1)} = \sqrt{k^2 - k_t^{(s_1)^2}}$ ,  
 $s_l^{(s_2)} = \sqrt{k^2 - k_l^{(s_2)^2}}$ ,  $s_t^{(s_2)} = \sqrt{k^2 - k_t^{(s_2)^2}}$ .

Уравнения (2) и (5) для удобства перепишем через потенциалы:

$$W_x^{(s_1)} = ikA_1 e^{i(kx-\omega t) - s_l^{(s_1)} z} +$$

$$+ s_t^{(s_1)} A_2 e^{i(kx-\omega t) - s_t^{(s_1)} z},$$

$$W_z^{(s_1)} = -s_l^{(s_1)} A_1 e^{i(kx-\omega t) - s_l^{(s_1)} z} +$$

$$+ ikA_2 e^{i(kx-\omega t) - s_t^{(s_1)} z},$$

$$W_x^{(s_2)} = ikB_1 e^{i(kx-\omega t) + s_l^{(s_2)} z} -$$

$$- s_t^{(s_2)} B_2 e^{i(kx-\omega t) + s_t^{(s_2)} z},$$

$$W_z^{(s_2)} = s_l^{(s_2)} B_1 e^{i(kx-\omega t) + s_l^{(s_2)} z} +$$

$$+ ikB_2 e^{i(kx-\omega t) + s_t^{(s_2)} z}. \quad (11)$$

С учетом граничных условий (7) и уравнений (10), (11) получаем систему с четырьмя неизвестными амплитудами  $A_1, A_2, B_1, B_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} ikA_1 + s_t^{(s_1)} A_2 - ikB_1 + s_t^{(s_2)} B_2 = 0, \\ s_l^{(s_1)} A_1 - ikA_2 + s_l^{(s_2)} B_1 + ikB_2 = 0, \\ 2iks_l^{(s_1)} \mu_1 A_1 + \mu_1 (s_t^{(s_1)^2} + k^2) A_2 + \\ + 2iks_t^{(s_2)} \mu_2 B_1 - \mu_2 (s_t^{(s_2)^2} + k^2) B_2 = 0, \\ ((\lambda_1 + 2\mu_1) (s_l^{(s_1)^2} - k^2) + 2\mu_1 k^2) A_1 - \\ - 2iks_t^{(s_1)} \mu_1 A_2 - \\ - ((\lambda_2 + 2\mu_2) (s_l^{(s_2)^2} - k^2) + 2\mu_2 k^2) B_1 - \\ - 2iks_t^{(s_2)} \mu_2 B_2 = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Условием существования решения системы уравнений (12) является равенство определителя нулю. Исходя из этого условия, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{vmatrix} ik & s_t^{(s_1)} & -ik & s_t^{(s_2)} \\ s_l^{(s_1)} & -ik & s_l^{(s_2)} & ik \\ 2iks_l^{(s_1)}\mu_1 & \mu_1 (s_t^{(s_1)^2} + k^2) & 2iks_l^{(s_2)}\mu_2 & -\mu_2 (s_t^{(s_2)^2} + k^2) \\ (\lambda_1 + 2\mu_1) (s_l^{(s_1)^2} - k^2) + 2\mu_1 k^2 & -2iks_t^{(s_1)}\mu_1 & -((\lambda_2 + 2\mu_2) (s_l^{(s_2)^2} - k^2) + 2\mu_2 k^2) & -2iks_t^{(s_2)}\mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

После некоторых преобразований, при замене всех волновых чисел  $k$ ,  $k_l^{(s_1)}$ ,  $k_t^{(s_1)}$ ,  $k_l^{(s_2)}$ ,  $k_t^{(s_2)}$  через скорости  $C_{st}$ ,  $C_l^{(s_1)}$ ,  $C_l^{(s_2)}$ ,  $C_t^{(s_1)}$ ,  $C_t^{(s_2)}$ , получаем уравнение для определения скорости волны Стоунли:

$$\begin{aligned} & 4 \left( C_t^{(s_1)^2} - \tilde{\rho} C_t^{(s_2)^2} \right)^2 \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_1)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_2)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_t^{(s_1)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_t^{(s_2)^2}}}} + \\ & + \left( 4 \left( \tilde{\rho} C_t^{(s_2)^2} + C_t^{(s_1)^2} \right)^2 + \tilde{\rho} C_{st}^2 \left( \tilde{\rho} C_{st}^2 - 4\tilde{\rho} C_t^{(s_2)^2} - 4C_t^{(s_2)^2} \right) \right) \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_1)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_t^{(s_1)^2}}}} + \\ & + \left( 4 \left( \tilde{\rho} C_t^{(s_2)^2} + C_t^{(s_1)^2} \right)^2 + C_{st}^2 \left( C_{st}^2 - 4C_t^{(s_2)^2} - 4C_t^{(s_2)^2} \right) \right) \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_2)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_t^{(s_2)^2}}}} + \\ & + \left( \tilde{\rho} \left( C_{st}^4 + 16C_t^{(s_1)^2} C_t^{(s_2)^2} - 4C_{st}^2 C_t^{(s_1)^2} - 4C_{st}^2 C_t^{(s_2)^2} \right) \right) \times \\ & \times \left( \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_1)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_2)^2}}} + \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_t^{(s_2)^2}} \sqrt{1 - \frac{C_{st}^2}{C_l^{(s_1)^2}}} \right) + \\ & + C_{st}^4 (\tilde{\rho} - 1)^2 + 4 \left( C_t^{(s_1)^2} - \tilde{\rho} C_t^{(s_2)^2} \right)^2 - 4C_{st}^2 \left( \tilde{\rho}^2 C_t^{(s_2)^2} - \tilde{\rho} C_t^{(s_1)^2} - \tilde{\rho} C_t^{(s_2)^2} + C_t^{(s_1)^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Заключение

Получены аналитические решения для смещений, потенциалов векторов продольной и поперечной волн. Выведено дисперсионное уравнение, решение которого позволяет определить наличие волны Стоунли на границе двух пористых сред при существовании положительного корня.

#### Список литературы

- [1] Олинер А.А. Поверхностные акустические волны. Москва: Мир, 1981 (переводной). 390 с.
- [2] Лепендин Л.Ф. Акустика. Москва: Высшая школа, 1978. 448 с.
- [3] Исакович М.А. Общая акустика. Москва: Наука, 1973. 496 с.
- [4] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва: Наука, 1973. 343 с.
- [5] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 287 с.
- [6] Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1924. Vol. 106, No. 738. Pp. 416–428. DOI: 10.1098/rspa.1924.0079
- [7] Абакумов К.Е., Коновалов П.С. Распространение акустических волн Стоунли в области границы твердых полупространств при нарушенном акустическом контакте // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2007. № 3. С. 3–7. eLIBRARY ID: 22910878
- [8] Ilyashenko A.V. Stoneley waves in a vicinity of the Wiechert condition // International Journal of Dynamics and Control. 2021. Vol. 9, Is. 1. Pp. 30–32. DOI: 10.1007/s40435-020-00625-y
- [9] Ji J., Milkereit B. Full Waveform Sonic Data From A Fast Formation. CSEQ National Convention. 2004. URL: [https://cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji\\_J\\_Full\\_Waveform\\_Sonic\\_Data.pdf](https://cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji_J_Full_Waveform_Sonic_Data.pdf) (дата обращения: 24.02.2022).





## Derivation of the dispersion equation for determining the Stoneley wave velocity at the boundary of porous media saturated with hydrate and water

Karimova G.R., Rafikova G.R.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

In this paper, we consider the process of the Stoneley wave's propagation along the interface of two media, where the upper medium is represented by sand saturated with water, and the lower one by sand saturated with gas hydrate. In a rectangular coordinate system, the directions of the axes are selected for the case when the plane of the partition is  $z = 0$ . We assume that the Stoneley wave has vertical polarization, i.e. there is no horizontal transverse displacement. The harmonic wave propagates to a sufficiently remote distance from the source of the explosion and is represented by the sum of longitudinal and transverse waves in each half-space. For description the mathematical model, wave equations, equations for displacement of particles and components of stress tensors are used, which are supplemented by boundary conditions. As a result of finding analytical solutions in the form of a harmonic traveling wave for displacements, potentials, vectors of longitudinal and transverse waves, a dispersion equation for determining the velocity of the Stoneley wave is obtained. With using this equation and experimental values of the velocities of longitudinal and transverse waves in saturated porous media, it is possible to find the Stoneley wave velocity depending on various parameters of the porous medium.

**Keywords:** surface acoustic waves, stoneley wave, dispersion equation

### References

- [1] Oliner A.A. Surface acoustic waves. Moscow: Mir, 1981 (translated). 390 pp.
- [2] Lependin L.F. Acoustics. Moscow: Higher School, 1978. 448 pp. (in Russian)
- [3] Isakovich M.A. General acoustics. Moscow: Nauka, 1973. 496 pp. (in Russian)
- [4] Brekhovskikh L.M. Waves in layered media. Moscow: Nauka, 1973. 343 pp. (in Russian)
- [5] Viktorov I.A. Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka, 1981. 287 pp. (in Russian)
- [6] Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1924. Vol. 106, No. 738. Pp. 416–428. DOI: 10.1098/rspa.1924.0079
- [7] Abakumov K.E., Konovalov R.S. Propagation of acoustic Stoneley waves in the boundary of solid half-spaces with disturbed acoustic contact // Izvestiya SPBGETU LETI. 2007. No. 3. Pp. 3–7. eLIBRARY ID: 22910878
- [8] Ilyashenko A.V. Stoneley waves in a vicinity of the Wiechert condition // International Journal of Dynamics and Control. 2021. Vol. 9, Is. 1. Pp. 30–32. DOI: 10.1007/s40435-020-00625-y
- [9] Ji J., Milkereit B. Full Waveform Sonic Data From A Fast Formation. CSEQ National Convention. 2004. URL: [https://cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji\\_J\\_Full\\_Waveform\\_Sonic\\_Data.pdf](https://cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji_J_Full_Waveform_Sonic_Data.pdf) (accessed: 24.02.2022).



## К ЮБИЛЕЮ АКИМА ГАЙФУЛЛИНОВИЧА ХАКИМОВА



25 ноября 2021 года ведущему научному сотруднику ИМех УФИЦ РАН, кандидату физико-математических наук, доценту, нашему доброму другу и коллеге Аким Гайфуллиновичу Хакимову исполнилось 75 лет.

Аким Гайфуллинович Хакимов родился 25 ноября 1946 года в деревне Карамалы–Губеево Туймазинского района Башкирской АССР. С 1965 по 1970 года учился в Уфимском авиационном институте (УАИ). Трудовую деятельность в качестве лаборанта начал в 1970 году в родном УАИ, где проработал до 1973 г. За эти годы досрочно достиг должности ведущего инженера. В том же 1973 году поступил в аспирантуру УАИ. После окончания аспирантуры вернулся в УАИ и проработал до 1994 года. С 1994

года по настоящее время работает в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН.

Хакимов Аким Гайфуллинович на сегодняшний день трудится в должности ведущего научного сотрудника лаборатории «Механика твердого тела» Института механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленного структурного подразделения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (дано современное название организации).

Хакимовым А.Г. исследованы собственные изгибные, крутильные и продольные колебания элементов конструкций (консольной балки, балки на шарнирных опорах с надрезом, круглой мембраны и пластины с утонченной центральной областью, вала, вала с маховиком, вала турбокомпрессора с моделью искусственного дефекта, штанги с надрезом на упругой подвеске). Изучено отражение от распределенной массы, прикрепленной к трубопроводу, и прохождения изгибной бегущей волны. Получена зависимость решения от начальной координаты распределенной массы и ее величины. Решение обратной задачи позволяет определить начальную координату распределенной массы и ее величину по данным отраженной волны в точке наблюдения.

Решена прямая задача определения собственных частот изгибных колебаний трубопровода. Получено, что с увеличением скоростного параметра и с увеличением погонной массы продукта и продуктов коррозии на стенке трубопровода происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трубопровода.

Решена обратная задача, где по трем нижшим частотам изгибных колебаний ищется скоростной параметр, относительная масса продукта на единицу длины трубопровода и относительная масса отложений на стенках трубопровода.

Исследованы собственные частоты изгибных колебаний заземленного по краям трубопровода, содержащего жидкость под давлением. Определены плотность жидкости или осевой момент инерции поперечного сечения и внутреннее давление по собственным частотам изгибных колебаний трубопровода. Получено, что с увеличением внутреннего давления или плотности жидкости внутри трубопровода происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний, а с увеличением осевого момента инерции поперечного сечения — увеличение собственных частот изгибных колебаний трубопровода. По двум собственным частотам изгибных колебаний определяются плотность жидкости и внутреннее давление в трубопроводе или осевой момент инерции поперечного сечения трубопровода.

Полученные результаты могут быть использованы для акустического метода определения скорости жидкости, относительной массы продукта на единицу длины трубопровода и относительной массы отложений на стенках трубопровода и массового расхода жидкости по трубопроводу.

Основные результаты, полученные за отчетный период, опубликованы в 115 статьях в рецензируемых журналах, из которых 57 входят в список Высшей аттестационной комиссии, в 13 статьях в международных журналах из списка WOS. Получен патент на изобретение. Хакимов А.Г. лично участвовал в 18 конференциях, являлся исполнителем в 9 грантах Российского фонда фундаментальных исследований.

За долготлетнюю работу и научные достижения Хакимов А.Г. награжден Премией Академии наук Республики Башкортостан имени Р.Р. Мавлютова в области технических наук (2016 г.), Почетной грамотой Академии наук Республики Башкортостан (2017 г.), Почетной грамотой Администрации Октябрьского района городского округа города Уфа Республики Башкортостан (2021 г.), Почетной грамотой городского округа города Уфа Республики Башкортостан (2021 г.).

Коллектив журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляет своего коллегу, члена редколлегии журнала Акима Гайфуллиновича Хакимова с юбилеем и желает ему прекрасного самочувствия, творческого вдохновения и активности, новых замечательных успехов на благо нашего Отечества!

## Основные публикации

1. Хакимов А.Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 6. С. 147–151.

DOI: 10.1007/BF01023279

2. А.с. 1679439. СССР. М. Кл. G 01 V 1/16. Сейсмоприемник // Васильев В.В., Еремин В.Н., Камалов Ф.Б., Хакимов А.Г. (СССР). 3 с.:ил. Опубликовано: 23.09.1991.  
[http://www1.fips.ru/fips\\_servl/fips\\_servlet?DB=RUPAT&rn=2878&DocNumber=1679439&TypeFile=pdf](http://www1.fips.ru/fips_servl/fips_servlet?DB=RUPAT&rn=2878&DocNumber=1679439&TypeFile=pdf)
3. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика поврежденного консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. 2009. № 6. С. 83–89.  
eLIBRARY ID: 15110505
4. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала турбокомпрессора с искусственным дефектом // ИВУЗ. Авиационная техника. 2011. № 1. С. 71–73.  
DOI: 10.3103/S106879981101017X
5. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Отражение затухающей бегущей волны от надреза в стержне // Известия РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 116–125.  
DOI: 10.3103/S0025654411040091
6. Способ определения координаты, длины и глубины раскрытой трещины упругой консольной балки: пат. 2416091 Российская Федерация // Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. № 2010104584/28; заявл. 09.02.10; опубл. 10.04.11, Бюл. № 10. 6 с.  
[http://www1.fips.ru/fips\\_servl/fips\\_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2416091&TypeFile=html](http://www1.fips.ru/fips_servl/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2416091&TypeFile=html)
7. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях полого вала с продольным сквозным радиальным разрезом // Дефектоскопия. 2013. Т. 49. № 6. С. 32–37.  
DOI: 10.1134/S1061830913060041
8. Хакимов А. Г. Определение параметров трубопровода с жидкостью по собственным частотам изгибных колебаний // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. 2019. Iss. 3. P. 16–24.  
DOI: 10.17804/2410-9908.2019.3.016-024
9. Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 12–18.  
DOI: 10.31857/S0568528120020073
10. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // J. Appl. Comput. Mech. 2021. Vol. 7. № 2. P. 977–983.  
DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848

# Содержание

## Механика жидкости и газа

**Хабиров С.В.**

О преобразованиях эквивалентности газодинамических сред ..... 44–49

**Насибуллаева Э.Ш.**

Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер ..... 50–57

**Насибуллаев И.Ш.**

Использование свободных программ для обработки и визуализации  
результатов научных исследований ..... 58–71

**Mikhaýlenko С.І.**

A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation ..... 72–78

## Краткие сообщения

**Каримова Г.Р., Рафикова Г.Р.**

Вывод дисперсионного уравнения для определения скорости волны Стоунли  
на границе пористых сред, насыщенных гидратом и водой ..... 79–83

## Портрет ученого

К юбилею Акима Гайфуллиновича Хакимова ..... 84–85

# Contents

## Liquid & Gas Mechanics

### **Khabirov S.V.**

On equivalence transformations of gasdynamic medium ..... 44–49

### **Nasibullaeva E.Sh.**

Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres ..... 50–57

### **Nasibullaev I.Sh.**

Application of free software for processing and visualization of scientific research results ..... 58–71

### **Mikhaylenko C.I.**

A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation ..... 72–78

## Brief Communications

### **Karimova G.R., Rafikova G.R.**

Derivation of the dispersion equation for determining the Stoneley wave velocity  
at the boundary of porous media saturated with hydrate and water ..... 79–83

## Profiles

Anniversary of Akim Gaifullinivich Khakimov (in Russian) ..... 84–85