



ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Сопоставление численного и автомодельного решений задачи Седова о точечном взрыве в газе¹

Болотнова Р.Х.* , Коробчинская В.А.*,**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Башкирский государственный университет, Уфа

Проведен сравнительный анализ решений задачи Седова о точечном взрыве в газе для плоского случая, полученных аналитическим методом и с использованием открытого программного комплекса вычислительной гидродинамики OpenFOAM. Приведен краткий анализ методов теории размерности и подобия, применяемых для аналитического автомодельного решения задачи о точечном взрыве в совершенном газе (азоте), которое определяется плотностью несжатого газа, величиной выделившейся энергии, соотношением удельных теплоемкостей и показателем геометрии взрыва. Используемая в аналитическом решении система одномерных уравнений газовой динамики включает законы сохранения массы, импульса и энергии. Предполагается, что в начальный момент времени происходит точечный взрыв с мгновенным выделением энергии. Автомодельные решения поставленной задачи приведены для эйлеровой и лагранжевой координат, массовой скорости, давления, температуры и плотности в случае плоской геометрии. Численное моделирование рассматриваемого процесса выполнено в решателе sonicFoam пакета OpenFOAM, построенном на алгоритме PISO. В процессе численного моделирования используется система дифференциальных уравнений газовой динамики, включающая уравнения неразрывности, движения Навье–Стокса для сжимаемой среды и сохранения внутренней энергии. Начальные и граничные условия выбирались в согласии с полученным аналитическим решением с помощью утилит setFieldsDict, blockMeshDict и uniformFixedValue. Полученные аналитические и численные решения имеют удовлетворительное согласование.

Ключевые слова: точечный взрыв, автомодельное решение, численное моделирование, пакет OpenFOAM, сравнительный анализ

1. Введение

При исследовании динамических процессов в газожидкостных средах необходимо проведение сравнительного анализа аналитических решений и численных исследований, полученных применением решателей, используемых при решении различных газодинамических задач. Проведение такого анализа позволяет оценить достоверность результатов по изучаемой проблеме и получить оценки важных термодинамических характеристик формирующихся ударно-волновых течений таких, как скорости распространения формирую-

щихся волн, массовые скорости частиц, интенсивности давлений и температур.

В работе [1] рассматриваются решения ряда модельных задач газовой динамики, обладающих плоской, цилиндрической и сферической симметрией при нестационарном сжатии невязкого газа. Дискретизация уравнений Эйлера проводится при помощи метода конечных объемов и разностных схем типа WENO. Результаты численного моделирования сравниваются с точными решениями, полученными в том числе для задачи Л.И. Седова о точечном взрыве.

В работе [2] на основе двумерной осесимметричной модели двухфазной газожидкостной смеси в случае однофазного подхода получено численное решение задачи Седова для цилиндрической симметрии, которое имеет удовлетворитель-

¹Работа выполнена в рамках госзадания 0246–2019–0052.

ное согласование с аналитическим автомодельным решением [3].

В [4] численное решение, полученное с использованием метода сквозного счета с учетом псевдовязкости Неймана–Рихтмайера и условия устойчивости Куранта при моделировании взрыва в газе в одномерном сферическом приближении [3] удовлетворительно согласуется с аналитическим решением аналогичной задачи о точечном сферическом взрыве в газе [3].

В настоящей работе проведен сравнительный анализ численных результатов, реализованных с использованием решателя OpenFOAM [5], и аналитического автомодельного решения задачи Седова о точечном взрыве в газе плоской геометрии [3].

2. Автомодельное решение Л.И. Седова о точечном взрыве в газе

В работе [1] приведен обзор моделей газовой динамики, обладающих свойством симметрии, которые являются основой при решении важных практических задач, связанных с моделированием процессов взрыва и сжатия газа. Точные решения уравнений газовой динамики удается получить с использованием методов теории размерностей и подобия для задачи о сильном точечном взрыве [3], где рассматривается распространение ударной волны большой мощности, возникшей в результате сильного взрыва (мгновенное выделение большого количества энергии в некотором небольшом объеме). В этой задаче, сформулированной и решенной Л.И. Седовым, из параметров среды, в которой происходит взрыв, только плотность несжатого газа входит в соотношения для ударной волны. При взрыве в совершенном газе определяющими параметрами задачи являются величина выделившейся энергии E , плотность несжатого газа ρ , отношение удельных теплоемкостей γ и показатель геометрии взрыва v .

Система модельных одномерных уравнений газовой динамики совершенного газа для плоского случая в дифференциальной форме включает законы сохранения массы, импульса и энергии [3, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где t — время; v — скорость; x — эйлерова координата; p — давление.

В начальный момент времени в покоящемся газе происходит взрыв с мгновенным выделением

энергии. Для аналитического решения задачи введен единственный безразмерный параметр:

$$\lambda = \frac{x}{\left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/3} t^{2/3}}. \quad (2)$$

Закон движения r_2 плоской волны ($v = 1$) и скорость ударной волны c определяются через начальную энергию взрыва E и плотность ρ_1 :

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E}{\rho_1 r_2}}. \quad (3)$$

Из определения (1) и условий на ударной волне с учетом (2), (3) получено:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{4}{3(\gamma+1)} \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/3} \frac{1}{t^{1/3}}, \quad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1, \\ p_2 &= \frac{8E}{9r_2(\gamma+1)}, \quad T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2}, \end{aligned}$$

где R — газовая постоянная.

Аналитические решения для эйлеровой x и лагранжевой r координат, скорости v , температуры T , плотности ρ и давления p в плоском случае имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r_2} &= \left[\frac{3}{4} (\gamma+1) V \right]^{-2/3} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{3}{2} \gamma V - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma-1}} \times \\ &\quad \times \left[3 \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma-4}{3(1-2\gamma)}}, \\ \frac{r}{r_2} &= \left[\frac{3}{4} (\gamma+1) V \right]^{-2/3} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{3}{2} \gamma V - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}} \times \\ &\quad \times \left[3 \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma^2+\gamma-4}{3(1-2\gamma)(\gamma-2)}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{3}{2} V \right) \right]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}, \\ \frac{v}{v_2} &= \frac{3}{4} (\gamma+1) V \frac{x}{r_2}, \quad \frac{T}{T_2} = \frac{p}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho}, \\ \frac{\rho}{\rho_2} &= \left[\frac{(\gamma+1) \left(\frac{3}{2} \gamma V - 1 \right)}{\gamma-1} \right]^{\frac{1}{2\gamma-1}} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{3}{2} V \right) \right]^{\frac{2}{2-\gamma}} \times \\ &\quad \times \left[3 \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma-4}{(2-\gamma)(2\gamma-1)}}, \\ \frac{p}{p_2} &= \left[\frac{3}{4} (\gamma+1) V \right]^{\frac{2}{3}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{3}{2} V \right) \right]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \times \\ &\quad \times \left[3 \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma-4}{3(2-\gamma)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где интервал изменения безразмерной переменной $V = \frac{vt}{r}$ определен неравенством:

$$\frac{2}{3\gamma} \leq V \leq \frac{4}{3(\gamma + 1)}.$$

3. Численный метод

В качестве метода численного решения, наиболее соответствующего поставленной задаче, выбран решатель sonicFoam библиотеки открытого пакета OpenFOAM [5], который построен на неявном алгоритме PISO, вычисляющем давление с двухшаговым корректором. Устойчивость решения при интегрировании по времени в выбранном решателе определялась условием Куранта. В соответствии с математической постановкой задачи проведено формирование расчетной сеточной области в пространственной декартовой системе координат и заданы начальные и граничные условия задачи с помощью утилит setFieldsDict и blockMeshDict. Граничные условия для давления, температуры и скорости, зависящие от времени, формируются с помощью функции uniformFixedValue. Для исследования рассматриваемого процесса используется следующая система дифференциальных уравнений газовой динамики:

уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (5)$$

уравнение движения Навье–Стокса для сжимаемой среды

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (6)$$

уравнение сохранения внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 - 2\mu \varepsilon^{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

где

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

— дивергенция скорости в декартовой системе координат; ρ , e — плотность и внутренняя энергия газа; \vec{v} — вектор массовой скорости с проекциями v_1 , v_2 , v_3 на соответствующие оси; ε^{ij} — тензор скоростей деформаций; μ — коэффициент динамической вязкости; ζ — объемная вязкость.

4. Анализ результатов

Аналитическое решение задачи Седова (4) получено при следующих начальных условиях: газ —

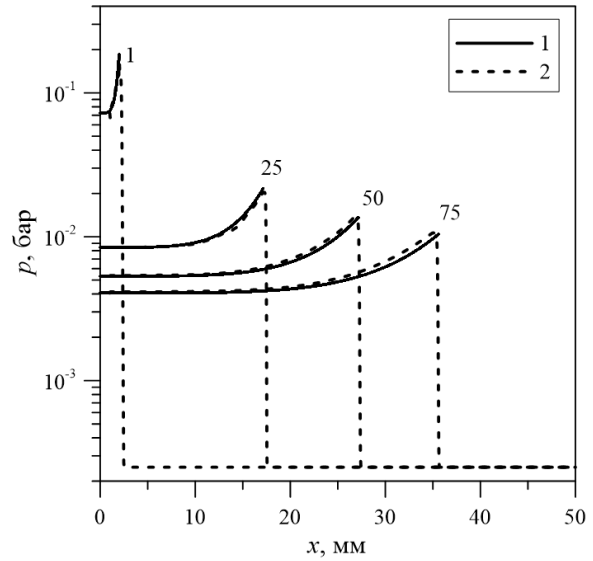


Рис. 1. Сравнение аналитического решения для давления p в указанные моменты времени (мкс): 1 — аналитическое решение Седова, 2 — численное решение с применением решателя sonicFoam пакета OpenFOAM

азот с начальной плотностью $\rho_1 = 0.0125 \text{ кг/м}^3$, энергия взрыва $E = 100 \text{ Дж}$, показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. При численной реализации аналогичной задачи с применением решателя sonicFoam для описания невозмущенного состояния использовались следующие значения: $p = 6 \text{ Па}$, $T = 25 \text{ К}$. При вычислении внутренней энергии газа азота изобарная теплоемкость определялась как $c_p = 1039 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$. Расчетная область была разбита на 2500 кубических ячеек. На левой границе области $x = 1 \text{ мм}$ задавались величины давления $p(t)$, температуры $T(t)$, скорости $v(t)$ в зависимости от времени в соответствии с полученными аналитическими решениями (4) для значений координаты $x = 1 \text{ мм}$. Для этого в решателе sonicFoam граничные условия $p(t)$, $T(t)$, $v(t)$ задавались в виде табличной функции, зависящей от времени t в соответствии с типом граничного условия uniformFixedValue. На правой границе расчетной области использовалось условие свободного течения потока (тип zeroGradient). Боковые границы определялись условием скольжения (тип slip). В результате сравнения полученных аналитических (4) и численных решений (5)–(7) с применением решателя sonicFoam пакета OpenFOAM получено удовлетворительное согласование полученных решений, представленных в виде профилей давления (рис. 1) и массовой скорости (рис. 2) в рассматриваемых временных диапазонах.

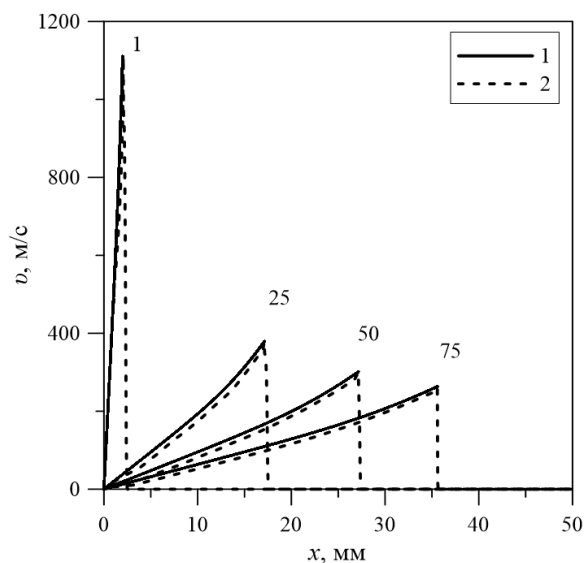


Рис. 2. Сравнение аналитического решения для скорости v в указанные моменты времени (мкс): 1 – аналитическое решение Седова, 2 – численное решение с применением решателя sonicFoam пакета OpenFOAM

5. Заключение

Проведен сравнительный анализ аналитического и численного решений для задачи о точечном взрыве плоской конфигурации (задачи Седова). Показана согласованность решений, полученных ана-

литически и с применением решателя sonicFoam пакета OpenFOAM, в котором использовались начальные и граничные условия, построенные на основе исследуемого автомоделного решения. Необходимость проведения такого сравнительного анализа важна для оценки достоверности получаемых решений для широкого круга газодинамических задач с применением рассматриваемого решателя.

Список литературы

- [1] Булат П.В., Волков К.Н. Модельные задачи газовой динамики, обладающие цилиндрической и сферической симметрией, и их решение при помощи WENO-схем // ИФЖ. 2017. Т. 90, № 2. С. 438–449.
[eLIBRARY ID: 28782911](#)
- [2] Бузина В.А. Нестационарное пространственное истечение газонасыщенной жидкости из осесимметричных сосудов // Вестник Башкирского университета. 2013. Т. 18, № 3. С. 636–639.
[eLIBRARY ID: 20418076](#)
- [3] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1977. 440 с.
- [4] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477.
[DOI: 10.1134/S0032823519030020](#)
- [5] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.
<http://www.openfoam.com>
- [6] Седов Л.И., Коробейников В.П., Марков В.В. Теория распространения взрывных волн // Труды математического института АН СССР. 1986. Т. 175. С. 178–217.
[MathNet: tm2141](#)



Comparison of the numerical and self-similar solutions of Sedov's problem on a point explosion in gas

Bolotnova R.Kh. *, Korobchinskaya V.A. **,**

*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

**Bashkir State University, Ufa

Comparative analysis of solutions of Sedov's problem of a point explosion in gas for the plane case, obtained by the analytical method and using the open software package of computational fluid dynamics OpenFOAM, is carried out. A brief analysis of methods of dimensionality and similarity theory used for the analytical self-similar solution of point explosion problem in a perfect gas (nitrogen) which determined by the density of uncompressed gas, magnitude of released energy, ratio of specific heat capacities and by the index of geometry of the explosion is given. The system of one-dimensional gas dynamics equations for a perfect gas includes the laws of conservation of mass, momentum, and energy is used. It is assumed that at the initial moment of time there is a point explosion with instantaneous release of energy. Analytical self-similar solutions for the Euler and Lagrangian coordinates, mass velocity, pressure, temperature, and density in the case of plane geometry are given. The numerical simulation of considered process in sonicFoam solver of OpenFOAM package built on the PISO algorithm was performed. For numerical modeling the system of differential equations of gas dynamics is used, including the equations of continuity, Navier-Stokes motion for a compressible medium and conservation of internal energy. Initial and boundary conditions were selected in accordance with the obtained analytical solution using the setFieldsDict, blockMeshDict, and uniformFixedValue utilities. The obtained analytical and numerical solutions have a satisfactory agreement.

Keywords: point explosion, self-similar solution, numerical modeling, OpenFOAM package, comparative analysis

References

- [1] Bulat P.V., Volkov K.N. Model gas-dynamical problems possessing cylindrical and spherical symmetry and their solution with the aid of weno schemes // *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2017. Vol. 90, № 2. Pp. 412–422.
eLIBRARY ID: 28782911
- [2] Buzina V.A. Non-stationary two-dimensional outflow of gas-saturated liquid from axisymmetric vessels // *Vestnik Bashkirskogo Universiteta [Bulletin of the Bashkir State University]*. 2013. Vol. 18, № 3. Pp. 636–639 (in Russian).
eLIBRARY ID: 20418076
- [3] Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* // Boca Raton: CRC Press. 1993. P. 479.
DOI: 10.1201/9780203739730
- [4] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54, Suppl. 7. Pp. 970–977.
DOI: 10.1134/S00154628190700241
- [5] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.
<http://www.openfoam.com>
- [6] Sedov L.I., Korobeinikov V.P., Markov V.V. The theory of blast wave propagation // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 1988. V. 175. Pp. 187–228.
MathNet: tm2141