



ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Математическая модель вытеснения нефти водой в плоском канале¹

Низамова А.Д., Валиев А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Неустойчивое вытеснение несмешивающихся жидкостей в плоском канале является актуальным исследованием как в теоретических, так и в практических приложениях. В настоящей работе рассмотрен плоский канал, заполненный несжимаемой жидкостью. С течением времени в канал нагнетается другая жидкость. Жидкости являются не смешивающимися. В работе строится математическая модель процесса вытеснения нефти водой в плоском канале, позволяющая провести дальнейшие численные исследования и выполнить сравнение результатов с полученными экспериментальными данными на примере ячейки Хеле–Шоу. Математическая модель для многофазного, многокомпонентного течения состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Современные методы моделирования динамики «вязких пальцев» основаны главным образом на численных методах решения систем дифференциальных уравнений, использующих в качестве параметров градиент давления, вязкость и капиллярные силы. Влияние этих параметров должно быть определено экспериментально. Для решения задачи применяется квазигидродинамический подход, основанный на добавлении некоторого малого параметра и позволяющий описать устойчивые схемы с центральными разностями. Сложность решения таких задач заключается в размерах рассматриваемых моделей, которые на практике имеют широкий диапазон применения от микро-масштабных до порядков одного сантиметра. Комплексное исследование позволит оценить и проанализировать весь процесс в целом, а также установить параметры течения для повышения эффективности вытеснения и увеличения нефтеотдачи, поскольку в численном моделировании процесса проще создать множество независимых экспериментов с одинаковыми начальными данными в отличие от экспериментального исследования.

Ключевые слова: несмешивающиеся жидкости, неустойчивость, вытеснение, микромодель, ячейка Хеле–Шоу

1. Введение

Неустойчивое вытеснение является актуальной задачей нефтегазовой промышленности и проявляется при вытеснении более вязкого флюида менее вязким. Например, вытеснение нефти в пласте водой и различными агентами, вязкость которых значительно меньше вязкости нефти, приводящее к заводнённости пласта со временем.

Основы современного состояния исследований в теории фильтрации несмешивающихся

жидкостей были заложены еще в работах Лейбензона Л.С. и Маскета М. [1, 2]. В данных работах были впервые решены плоско-параллельная и плоско-радиальная задачи поршневого вытеснения вязкой жидкости из пористой среды. Задачи такого рода получили свое дальнейшее развитие в работах Щелкачева В.Н., Чарного И.А., Полубариновой-Кочиной П.Я., Пирвердяна А.М., Баренблата Г.И., Николаевского В.Н. и других.

Моделью вытеснения несмешивающихся жидкостей является модель Бакли–Лeverетта, которая в настоящее время наиболее часто используется в теории фильтрации двухфазных жидкостей. Математическая модель данного процесса состоит из обобщенного закона Дарси и законов сохранения

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-31-80008-мол_эв_а).

масс обеих несмешивающихся фаз. Первый из этих законов подразумевает зависимость фазовых проницаемостей от объемных долей каждой из несмешивающихся жидкостей в поровом пространстве. Получаемая в результате система уравнений решается с учетом начальных и граничных условий, налагаемых на функции распределения насыщенностей и давлений в фазах. Допущение, принимаемое в модели Бакли–Левретта, об отсутствии капиллярного скачка давления на границе подвижных фаз позволяет упростить исходную систему уравнений. Однако, такое упрощение приводит к необходимости введения фронта разрыва насыщенности, впервые описанного Бакли и Левреттом [3].

Модель Рапопорта–Лиса является более полной моделью несмешивающейся фильтрации [4]. Математическая модель Рапопорта–Лиса содержит дополнительное уравнение, которое определяет скачок давления на границе фаз. Учет влияния капиллярных сил позволяет описать так называемую стабилизированную зону, возникающую вблизи границы раздела фаз. Протяженность этой зоны обратно пропорциональна скорости вытеснения. Такой подход справедлив для малых скоростей вытеснения. В рамках модели Рапопорта–Лиса был получен ряд важнейших результатов, касающихся изменения нефтенасыщенности коллекторов в процессе их обводнения.

При описании двухфазной фильтрации в реальных средах также важным является вопрос устойчивости фронта вытеснения к малым возмущениям. Экспериментальные исследования, проведенные Саффманом, Тейлором [5] и другими, показали, что развитие возмущений плоского фронта вытеснения в пористой среде при нарушении устойчивости происходит в виде неограниченно разрастающихся языков вытесняющей жидкости. Эксперименты на насыпных пористых средах [6] показали, что нарушение устойчивости происходит при отношении вязкости взаимодействующих жидкостей, превышающем критическое значение 10–15. В то же время, при малых скоростях вытеснения, возмущения затухают даже при отношениях вязкостей, больших критического. Математическая модель развития языков вытесняющей жидкости была предложена Баренблаттом [7]. Предполагается, что этот процесс может быть описан при помощи уравнений модели Бакли–Левретта с относительными фазовыми проницаемостями, линейно зависящими от соответствующих насыщенностей.

К современному исследованию неустойчивого вытеснения несмешивающихся жидкостей в плоском канале также посвящены работы [8, 9].

А процесс развития вытеснения, который был изучен экспериментально, подробно описан в работах [10, 11].

В настоящей работе рассмотрен плоский канал, заполненный несжимаемой жидкостью. С течением времени в канал нагнетается другая жидкость. Жидкости являются несмешивающимися. В работе строится математическая модель процесса вытеснения нефти водой в плоском канале, которая позволит провести дальнейшие численные исследования и выполнить сравнение результатов с полученными экспериментальными данными на примере ячейки Хеле–Шоу [12]. Сложность описания математической модели заключается в широком диапазоне рассматриваемых пространств от микро-масштабов до порядка одного сантиметра.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский канал, заполненный несжимаемой жидкостью. С течением времени в канал нагнетается другая жидкость. Жидкости являются несмешивающимися. Канал имеет прямоугольную форму со следующими размерами: ширина $b = 20$ мм, длина $l = 35$ мм, толщина $h = 0,02$ мм, отверстия входа и выхода жидкости с диаметрами $d = 1$ мм, расположенные на центральной линии канала (рис. 1). Ось абсцис размещена также на центральной линии канала, а ось ординат — на левой границе канала. Направление течения — горизонтальное. В процессе вытеснения образуется зона совместного движения двух жидкостей.

Для решения задачи применяется квазигидродинамический подход, основанный на добавлении малого параметра τ и позволяющий описать устойчивые схемы с центральными разностями.

Математическая модель для однофазного, однокомпонентного течения состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнения сохранения массы, им-

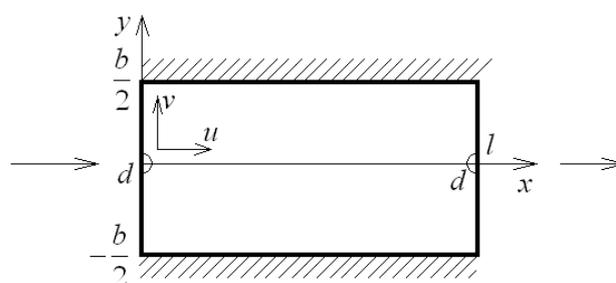


Рис. 1. Схема плоского канала

пульса и энергии:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m \otimes u) = \operatorname{div} \Pi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[j_m \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] \operatorname{div} q = \\ = \operatorname{div}(\Pi \cdot u), \end{cases}$$

где ρ — плотность; t — время; $j_m = \rho(u - w)$ — поток массы; $w = \frac{\tau}{\rho}(\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p)$ — квазигидродинамическая скорость; u — скорость течения; $\Pi = \Pi_{NS} + \rho u \otimes w$ — тензор напряжения; Π_{NS} — тензор напряжения Навье–Стокса; e — энергия; p — давление; q — количество тепла.

Эта модель также используется при рассмотрении изотермического односкоростного, двухфазного течения с несмешивающимися жидкостями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \\ \frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m C) = \operatorname{div}(M \nabla \mu), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m \otimes u - \Pi) \right) = 0, \end{cases}$$

где $C_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho}$ — концентрация фазы α ; $\rho_\alpha = \frac{dm_\alpha}{dV_\alpha}$ —

плотность фазы α ; $dm = \sum_{\alpha=1}^2 dm_\alpha$ — масса

смеси; V_α — объем фазы; $C = \sum_{\alpha=1}^2 C_\alpha = 1$;

$M = M_0 C(1 - C)$ — масса компонент; M_0 — начальная масса компонент; $\mu = \frac{\partial \psi_0}{\partial C} - \frac{\lambda_1}{\rho} \operatorname{div}(\rho)$;

$\psi(\rho, C, \nabla C) = \psi_0(\rho, C) + \frac{\lambda_1}{2} |\nabla C|^2$ — энергия Гельмгольца; $\psi_0 = C\psi_1 + (1 - C)\psi_2 + \psi_{sep}$ — разделяющая энергия; $\psi_1 = \psi_2 = C_\alpha^2 \ln \rho$; ψ_{sep} — несмешиваемость фаз; λ — некоторая постоянная величина, определяемая с помощью дополнительных условий.

Стоит отметить, что в данном случае, в отличие от однокомпонентного, изменятся следующие величины: $w = \frac{\tau}{\rho}(\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p + \operatorname{div} Q)$; $\Pi = \Pi_{NS} - pI + Q + \rho u \otimes w$; pI — шаровая давления; $p = \rho^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho}$; $Q = -\rho \lambda_1 \nabla C \otimes \nabla C$ — тензор Кортвега (силы поверхностного натяжения между фазами).

3. Заключение

Полученная система уравнений будет в дальнейшем решаться разностными методами. Полученные численные результаты будут сравниваться с экспериментальными для дальнейшего анализа и выявления оптимальных условий для повышения эффективности нефтеотдачи.

Комплексное исследование позволит оценить и проанализировать весь процесс в целом, а также установить параметры течения для повышения эффективности вытеснения и увеличения нефтеотдачи, поскольку в численном моделировании процесса проще создать множество независимых экспериментов с одинаковыми начальными данными в отличие от экспериментального исследования.

Список литературы

- [1] Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 44 с.
- [2] Muskat M., Meres M.W. The Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media // *Physics*, 1936. 7(Sept.). P. 346–363. DOI: 10.1063/1.1745403
- [3] Buckley S.E., Leverett M.S. Mechanism of Fluid Displacement in Sands // *Journ. Petr. Technology*. 1941. P. 1337.
- [4] Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of Linear Waterfloods // *Trans AIME*. 1953. 198. Pp. 139–148.
- [5] Saffman P.G., Sir Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. R. Soc. London*. 1958. A245. Pp. 321–329.
- [6] Рыжик В.М., Кисленко Б.Е. Исследование устойчивости движения раздела воды и нефти. ВНК. Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Недра. 1969. С. 82–92.
- [7] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра. 1984. 207 с.
- [8] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1958. Vol. 245, No. 1242. Pp. 312–329. М.: Дрофа, 2003. 840 с. <https://www.jstor.org/stable/100420>
- [9] Homsy G.M. Viscous fingering in porous media // *Annual review of fluid mechanics*. 1987. Vol. 19, No. 1. Pp. 271–311.
- [10] Мавлетов М.В., Валиев А.А. Эффективность неустойчивого вытеснения нефти из ячейки Хеле-Шоу // *Нефтепромышленное дело*. 2018. № 8. С. 42–45. DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45
- [11] Валиев А.А. Развитие неустойчивого вытеснения при снижении поверхностного натяжения // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 24. DOI: 10.21662/mfs2020.1.022
- [12] Валиев А.А., Низамова А.Д. Комплексное исследование вытеснения нефти водой в плоском канале // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 25. DOI: 10.21662/mfs2020.1.023



Mathematical model of oil displacement by water in a plane channel

Nizamova A.D., Valiev A.A.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Unstable displacement of immiscible liquids in a plane channel is a topical research in both theoretical and practical applications. In this paper, we consider a plane channel filled with an incompressible fluid. Over time, another fluid is injected into the channel. The fluids are immiscible. The paper builds a mathematical model of the process of oil displacement by water in a plane channel, which allows further numerical studies and comparison of the results with the obtained experimental data using the example of the Hele-Shaw cell. The mathematical model for a multiphase, multicomponent flow consists of the Navier-Stokes equations, the equations of conservation of mass, momentum and energy. Modern methods for modeling the dynamics of "viscous fingers" are based mainly on numerical methods for solving systems of differential equations using the pressure gradient, viscosity and capillary forces as parameters. The influence of these parameters must be determined experimentally. To solve the problem, a quasi-hydrodynamic approach is used, based on the addition of a certain small parameter and allowing one to describe stable schemes with central differences. The complexity of solving such problems lies in the size of the considered models, which in practice have a wide range of applications from micro-scale to orders of one centimeter. A comprehensive study will allow us to evaluate and analyze the entire process as a whole, as well as to establish flow parameters to improve the efficiency of displacement and increase oil recovery, since in the numerical modeling of the process it is easier to create many independent experiments with the same initial data, in contrast to the experimental study.

Keywords: immiscible liquids, instability, displacement, micromodel, Hele-Shaw cell

References

- [1] Leibenzon L.S. [The movement of natural liquids and gases in a porous medium] M., L.: Gostexizdat, 1947. P. 44 (in Russian).
- [2] Muskat M., Meres M.W. The Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media. *Physics*, 1936. 7(Sept.). P. 346–363.
DOI: 10.1063/1.1745403
- [3] Buckley S.E., Leverett M.S. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. *Journ. Petr. Technology*. 1941. P. 1337.
- [4] Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of Linear Waterfloods. *Trans AIME*. 1953. 198. Pp. 139–148.
- [5] Saffman P.G., Sir Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. London*. 1958. A245. Pp. 321–329.
- [6] Ryigik V.M., Kislenco B.E. [Investigation of the stability of the movement of water and oil separation. VNK. Physical and geological factors in the development of oil and oil and gas condensate fields] M.: Nedra. 1969. Pp. 82–92 (in Russian).
- [7] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryigik V.M. [The movement of liquids and gases in natural formations] M.: Nedra. 1984. P. 207 (in Russian).
- [8] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1958. Vol. 245, No. 1242. Pp. 312–329. M.: Дрофа, 2003. 840 с.
<https://www.jstor.org/stable/100420>
- [9] Homsy G.M. Viscous fingering in porous media. *Annual review of fluid mechanics*. 1987. Vol. 19, No. 1. Pp. 271–311.
- [10] Mavletov M.V., Valiev A.A. [Efficiency of unstable oil displacement from the Hele-Shaw cell] *Neftegazovoe delo*. 2018. № 8. Pp. 42–45 (in Russian).
DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45
- [11] Valiev A.A. [Development of unstable displacement with a decrease in surface tension] *Mnogofaznyie sistemyi*. 2020. V. 15, № 1–2. P. 24 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2020.1.022
- [12] Valiev A.A., Nizamova A.D. [Comprehensive study of oil displacement by water in a plane channel] *Mnogofaznyie sistemyi*. 2020. V. 15, № 1–2. P. 25 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2020.1.023