ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782

Том 15 (2020), № 3–4, с. 144–158

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2020.3.125
DOI: 10.21662/mfs2020.3.125
УДК 536.25, 532.529.6

Получена: 16.11.2020
Принята: 10.12.2020

Термокапиллярный дрейф капель и пузырьков в вязкой жидкости (обзор)

Насибуллаева Э.Ш., Урманчеев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование процесса скопления пузырьков газа в области источника тепла представляет собой, с физической точки зрения, достаточно интересную задачу, приводящую к важным выводам для практических приложений. Особенность рассматриваемого процесса состоит в том, что в переменном температурном поле происходит изменение поверхностного натяжения пузырька, которое, в свою очередь, приводит к возникновению течения в пограничном слое жидкости. В мировой научной литературе обнаружение и описание эффекта миграции газовых пузырьков в направлении температурного градиента обычно связывается с экспериментальной работой Янга, Гольдстейна и Блока (1959). Не умаляя ее значения, отметим, что впервые эффект был предсказан в теоретической работе Федосова (1956) как результат решения задачи о возникновении микропотока жидкости вблизи межфазных границ плоской и сферической форм при наличии градиента температуры. В обеих работах существенным фактором при объяснении описываемого явления являлась зависимость поверхностного натяжения от температуры. Спустя некоторое время, по истечении которого была осознана необходимость учета миграции не только пузырьков, но и капель в неоднородных температурных полях в космических технологиях, медико–биологических и иных приложениях, возник значительный поток публикаций по данной проблематике, а данное явление получило название термокапиллярного дрейфа (thermocapillary migration). Настоящий обзор посвящен анализу основных, по мнению авторов статьи, результатов экспериментальных, теоретических и прикладных исследований по установлению механизма дрейфа пузырьков и капель в градиентных температурных полях. В большинстве работ предполагается отсутствие зависимости физических свойств жидкости, кроме поверхностного натяжения, от температуры. Существует лишь несколько работ, рассматривающих влияние температурной зависимости коэффициента вязкости, что дает новый импульс к продолжению исследований и развитию теории эффекта с учетом термореологических свойств рабочих сред.

Ключевые слова: ньютоновская жидкость, пузырек, капля, термокапиллярный дрейф, скорость дрейфа капли/пузырька, градиент температуры, поверхностное натяжение

1. Введение

Термокапиллярный дрейф (thermocapillary migration) — это способность капель, нерастворимых в окружающей жидкости, или газовых пузырьков, которые находятся в неравномерно нагретой жидкости, самопроизвольно перемещаться в более горячую область. Данное движение обусловлено возникающими на поверхности капли или пузырька касательными термокапиллярными силами, которые заставляют окружающую каплю или пузырек жидкость обтекать его по направлению градиента поверхностного натяжения (от теплого к холодному полюсу). В результате появляется приложенная к капле или пузырьку реактивная сила, толкающая его в противоположном направлении. Термокапиллярный дрейф является следствием конвективного течения Марангони, возникающего в жидких средах вблизи поверхности раздела фаз под действием тангенциальных капиллярных сил в случае неоднородности поверхностного натяжения из-за неравномерного распределения температуры.

Интерес к данному явлению вызван, в первую очередь, важными приложениями в различных областях науки и технологических процессах в космосе, где преобладает конвекция Марангони. Например:

- разработка в области космических технологий и систем жизнеобеспечения орбитальных станций, поскольку в условиях невесомости конвекция Марангони является основной причиной движения пузырьков и капель;
- интенсификация технологических процессов (в том числе протекающих в условиях невесомости), где гравитационные механизмы конвективного движения ослаблены или отсутствуют, таких как, выращивание монокристаллов, изготовление однородных полупроводниковых структур, сплавов многокомпонентных металлов, композитов и пр.;
- применение в технологических процессах для дегазации при целенаправленном подогреве, а также использование в экологии для очистки поверхности воды от загрязнений нефтепродуктами;
- изучение движения бактерий и клеточных микрообъектов в биологии.

2. Постановка задачи

При решении задачи термокапиллярного дрейфа пузырька или капли рассматривается газовый пузырек или капля жидкости первоначально сферической формы с динамически свободной (межфазной) границей в неограниченном объеме несжимаемой ньютоновской жидкости. Как правило, при постановке задачи предполагается следующее:

- присутствует внешний градиент температур $\nabla T \equiv \mathrm{grad} T$ постоянный на бесконечности ($\mathrm{grad} T|_\infty = \mathrm{const}$);
- капля является нерастворимой в жидкости;
- на межфазной поверхности отсутствует обмен веществом с окружающей средой;
- направление градиента температуры параллельно вектору ускорения силы тяжести (при наличии гравитационной силы);
- зависимость всех физических свойств жидкости, кроме поверхностного натяжения, от температуры отсутствует;
- коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = \sigma(T)$ линейно изменяется с температурой T

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma'_T (T - T_0),$$

где σ_0 — коэффициент поверхностного натяжения при температуре T_0; $\sigma'_T = \mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}T = \mathrm{const}$, а его градиент является отрицательным ($\sigma'_T < 0$), что справедливо для большинства однокомпонентных жидкостей.

Начало сферической системы координат (r, θ, φ) выбирается в центре сферы (пузырька или капли) радиуса a. Постоянный градиент температуры направлен вдоль полярной оси $z = r\cos\theta$; скорость жидкости $\mathbf{u}$ считается положительной, если ее направление совпадает с направлением полярной оси. При формулировке граничных условий обычно переходят к системе координат, движущейся вместе с центром тяжести падающей сферы. В этой системе отсчета сфера считается неподвижной, а внешняя жидкость — находящейся в движении (как целое) в сторону, противоположную направлению фактического движения этой сферы со скоростью $-\mathbf{u}$.

Основными безразмерными параметрами, характеризующими состояние и движение капли или пузырька, являются число Рейнольдса Re, тепловые числа Марангони Ma (аналог числа Пекле Pe для данного вида задач) и Прандтля Pr и капиллярное число Ca:

$$\mathrm{Re} = \frac{ua\rho}{\mu}, \quad \mathrm{Ma} = \frac{a^2}{\mu\chi}\sigma'_T \nabla T, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\mu}{\rho\chi}, \quad \mathrm{Ca} = \frac{\mu u}{\sigma}.$$

Здесь ρ — плотность среды; μ — динамическая вязкость среды; χ — коэффициент температуропроводности среды.

Малые числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} \ll 1$) соответствуют медленному дрейфу сферы, что возможно для пузырьков или капель малого радиуса ($a < 1$ мм) и/или большой динамической вязкости окружающей жидкости. В этом случае рассматриваются уравнения движения в стоксовом приближении (пренебрегают членом $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$). При таких размерах сферы обычно капиллярное число $\mathrm{Ca} \ll 1$, следовательно, ее поверхность можно считать недеформируемой. При больших значениях Re, когда вклад инерции в движение становится значительным, капиллярное число Ca также растет, что приводит к необходимости учета деформации поверхности. При малых числах Марангони Ma возможность возникновения в жидкости конвективных движений в результате термокапиллярного механизма мала, поэтому конвективным переносом тепла пренебрегают. При малых числах Re для малости чисел Ma обычно дополнительно требуется, чтобы числа Прандтля Pr также были малы, что соответствует значительной теплопроводности жидкости.

3. Теоретические методы определения скорости термокапиллярного дрейфа пузырьков/капель

Скорость движения твердого шара в однородной по темпераура жидкости при $\mathrm{Re} \ll 1$ определяется формулой Стокса [1]:

$$u = \frac{2ga^2(\tilde{\rho} - \rho)}{9\mu}, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения. Здесь и далее знак «˜» над параметром будет относиться к среде внутри сферы.

Скорость движения жидкой сферической капли в однородной по температуре жидкости определяется формулой Адамара–Рыбчинского [2, 3]:

$$u = \frac{2ga^2(\tilde{\rho} - \rho)}{3\mu}\frac{\mu + \tilde{\mu}}{2\mu + 3\tilde{\mu}}. \tag{2}$$

Первой теоретической работой по термокапиллярному движению капель в вязкой жидкости является исследование медленного движения сферической капли при постоянном градиенте температуры в отсутствии силы гравитации, опубликованное в 1956 году Федосовым [4]. Получено следующее выражение для скорости перемещения капли при условии, что σ'_T не зависит от температуры:

$$u = \frac{2}{3}\frac{\sigma'_T|\mathrm{grad}T|a}{2\mu + 3\tilde{\mu}}. \tag{3}$$

Работа Янга, Гольстейна и Блока [5] посвящена исследованию движения пузырьков при постоянном вертикальном градиенте температуры в жидкости. Представлены результаты экспериментов медленного движения (число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 0$) маленьких пузырков в чистых жидкостях и выведено следующее соотношение для скорости всплытия недеформируемого пузырька при наличии силы тяжести:

$$u = \frac{2}{6\mu + 9\tilde{\mu}}\left[\sigma'_T a\frac{3\lambda\mathrm{grad}T}{2\lambda + \tilde{\lambda}} - (\rho - \tilde{\rho})ga^2\frac{\mu + \tilde{\mu}}{\mu}\right], \tag{4}$$

где λ — теплопроводность среды. Заметим, что в отсутствии силы тяжести и для одинаковых теплопроводностей имеет место выражение (3), а в случае постоянного поля температур в поле силы тяжести — формула Адамара–Рыбчинского (2) (см., например, [6]). Соотношение (4) позволяет определить отношения параметров внутри и вне пузырька, при которых пузырек в жидкости остается в покое (т.е. сила тяжести и сила сопротивления, вызванная градиентом температур, уравновешивают друг друга), что наблюдалось в экспериментах работы [5].

В работе [7] теоретически исследовано влияние неравномерного поверхностного натяжения на поверхности пузырька, вызванного неравномерным распределением температуры в жидкости, на его движение. Установлено, что в чистой жидкости (без растворенных поверхностно–активных веществ) изменение поверхностного натяжения мало влияет на движение маленьких пузырьков. В данной работе учли теплопередачу в поверхностный слой пузырька (или капли) в отличие от работы [5], которая дает незначительный эффект при рассматриваемых ограничениях задачи, поэтому выводы (в т.ч. формула (4)) работы [5] являются корректными. Аналогично предыдущим исследованиям в работах [8–10] получено соотношение для скорости дрейфа при отсутствии массовых сил:

$$u = \frac{2a\lambda}{(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})}\sigma'_T\mathrm{grad}T. \tag{5}$$

В работе Братухина [11], в отличие от предыдущих работ, теоретически изучалось движение капли вязкой жидкости в другой жидкости при постоянном градиенте температуры в отсутствии силы тяжести при малых числах Re. Решение задачи определялось с помощью разложения по степеням числа Re. В нулевом приближении по числу Рейнольдса получено выражение для скорости дрейфа капли в виде (5). Также исследовалась форма капли при движении в приближении малого отклонения формы поверхности от сферической. Показано, что если плотность жидкости (газа) внутри капли (пузырька) меньше плотности окружающей жидкости $\tilde{\rho} < \rho$, то капля (пузырек) стремится сплюснуться, при этом за пузырьком образуется локализованный стационарный вихрь. В случае $\tilde{\rho} > \rho$ капля стремится вытянуться вдоль направления потока. Подобное изменение формы пузырька или капли наблюдалось экспериментально (см. обзор экспериментальных результатов, например, в книге Левича [6]). Томпсон и др. в работе [12] расширили решение [11] до бóльших чисел Re, проведя разложение по степеням чисел Марангони (Пекле) Ma = PrRe до второго порядка, однако их решение для поля температуры уже во втором порядке не удовлетворяет граничным условиям на бесконечности.

Баласубраманиам и Чай [13] исследовали термокапиллярный дрейф капли для малых чисел Марангони в отсутствии силы тяжести и получили, что решения для поля скорости и скорости дрейфа такие же, как и в работах [5, 11] в приближении малых чисел Re. Это расширяет область применимости данных формул для произвольных чисел Re при условии, что число Ma остается малым, т.е. в работе пренебрегают конвективным переносом тепла. Аналогично предыдущим исследованиям [11, 12] малых отклонений формы капли от сферической было установлено, что форма зависит от плотностей жидкости внутри и вне капли, однако показано, что инерция не влияет на поле потока. Хай-Харири и др. [14] с помощью трехмерного численного моделирования исследовали термокапиллярный дрейф деформируемых вязких капель под воздействием постоянного градиента температуры во второй жидкой среде для конечных значений Re и Ma. Предполагалось, что жидкости имеют постоянные свойства, за исключением поверхностного натяжения, которое изменялось линейно в зависимости от температуры. Как и в предыдущих исследованиях обнаружено, что капли остаются осесимметричными, но деформируются в сплюснутые или вытянутые сфероиды в зависимости от соотношения плотностей внутренней и внешней жидкости. Кроме того, установлено, что деформации формы капли из-за инерционных эффектов, хотя и имеют небольшую величину, замедляют движение капли, а также, что влияние инерции на подвижность вязких капель слабее, чем в случае газовых пузырьков.

Для газовых пузырьков в жидкости, когда вязкостью и теплопроводностью газа можно пренебречь, т.к. $\tilde{\mu} \ll \mu$ и $\tilde{\lambda} \ll \lambda$, из формулы (5) получается следующее выражение для скорости дрейфа пузырька:

$$u = \frac{a}{2\mu}\sigma'_T \mathrm{grad}T, \tag{6}$$

что для реальных газов приводит к ошибке не более, чем в несколько процентов [15]. Отметим, что формулу (6) можно представить в виде:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{2}\mathrm{Ma}, \tag{7}$$

где $u_1 = \chi/a$ — масштаб скорости.

Креспо и др. в работе [16] проанализировали термокапиллярное движение пузырьков при больших числах Рейнольдса и произвольных числах Марангони. Для малых чисел Ma решение найдено в виде асимптотического разложения по степеням числа Марангони и выражение для скорости (6) получено с поправкой, которая появляется только при 2-й степени числа Ma:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{2} - \frac{49}{2880}\mathrm{Ma}^2 + \ldots,$$

где $u_0 = a\sigma'_T \mathrm{grad}T/\mu$ — масштаб (единица) скорости. Аналогичные предыдущей работе результаты были получены в [17] с использованием немного другого подхода и с другой корректировкой числового коэффициента. Получено следующее выражение для скорости дрейфа:

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{8}\right) - 0.1369\epsilon\ln\epsilon + 0.6578\epsilon,$$

где $\epsilon = \mathrm{Ma}^{-1/2}$ — параметр разложения.

Антановский и Копбосынов [18] рассмотрели нестационарное движение капли вязкой жидкости при постоянном на бесконечности градиенте температур, аналитически решив задачу разгона капли термокапиллярными и архимедовыми силами путем разложения до первого порядка в ряд по числам Марангони. Поле температуры и вызываемое им распределение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности капли получилось не зависящим от движения жидкости. В стационарном приближении выражение для скорости термокапиллярного дрейфа капли имеет вид, аналогичный работе [11]. В работе Дилла и Баласубраманиама [19] задача изолированной несмешивающейся капли, медленно дрейфующей из-за нестационарных термокапиллярных напряжений, решалась с помощью преобразования Лапласа. Все физические свойства, кроме поверхностного натяжения, предполагаются постоянными для двух ньютоновских жидкостей; сила тяжести, а также конвективный перенос импульса и энергии отсутствовали, т.е. задача решалась в пределе $\mathrm{Re} = 0$ и $\mathrm{Ma} = 0$. Аналогичная задача решалась Галиндо и др. [20], но с учетом влияния силы тяжести на каплю.

В работе Редникова и Рязанцева [21] исследовалось термокапиллярное движение капли одной вязкой жидкости в другой при облучении капли с одной стороны однородным по сечению плоскопараллельным лучом света в отсутствии гравитации. При решении задачи предполагалось, что излучение полностью поглощается на поверхности капли, окружающая каплю среда прозрачна, движение капли является установившимся медленным вдоль направления падающего излучения (малые числа Re) и конвективные эффекты незначительны (малые числа Ma), кроме того, поверхность капли сохраняет сферическую форму. Все физические характеристики жидкостей принимаются постоянными, кроме поверхностного натяжения, которое является линейной функцией температуры. Получена следующая формула скорости дрейфа капли:

$$u = \frac{Ia}{3(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})}\sigma'_T,$$

где I — интенсивность падающего излучения. Из последней формулы следует, что, поскольку для большинства жидкостей $\sigma'_T < 0$, то капля будет дрейфовать навстречу лучу.

Во всех рассмотренных выше работах предполагалось, что все физические характеристики жидкостей постоянны за исключением поверхностного натяжения, которое принималось линейной функцией температуры. Гупало и др. в работе [22] провели обобщение задачи о движении сферической частицы (капли или пузырька) в вязкой жидкости при наличии внешнего постоянного градиента температуры для случая произвольной нелинейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры в предположении малости чисел Re и Pe. Для скорости дрейфа капли получено следующее выражение:

$$u(x) = -\frac{3a\lambda \operatorname{grad} T}{2(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})} \times \int_{-1}^{1} \sigma'_T(x, s)(1 - s^2) ds, \tag{8}$$

где x — координата на оси Ox (ось симметрии, проходящая через центр капли параллельно внешнему градиенту температуры, с началом отсчета в центра капли). В случае линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры получается формула (5). В частном случае квадратичной зависимости поверхностного натяжения от температуры ($\sigma = \sigma_0 + \sigma''_T(T - T_0)^2/2$, где $\sigma''_T = d^2\sigma/dT^2 = \text{const}$), характерной для водных растворов высокомолекулярных спиртов, некоторых металлических сплавов и нематических кристаллов, формула (8) принимает вид:

$$u(x) = \frac{2\sigma''_T a\lambda (\operatorname{grad} T)^2 (x_* - x)}{2(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})},$$

где $x_* = x_0 + (T_0 - T(x_0))/(\operatorname{grad} T)$. Из последней формулы получается, что, вследствие нелинейной зависимости $\sigma(T)$, могут существовать состояния равновесия ($x = x_*$ — плоскость равновесия, т.к. в этой точке скорость дрейфа $u = u(x_*) = 0$), когда центр масс капли покоится, а жидкость внутри и вне движется стационарным образом. При этом в случае $\sigma''_T > 0$ плоскость равновесия будет плоскостью притяжения, а равновесие — устойчивым; в случае $\sigma''_T < 0$ плоскость равновесия будет плоскостью отталкивания, а равновесие — неустойчивым. В работе [22] также проведен анализ изменения формы капли, который показал, что при малых числах Вебера ($\text{We} = \rho a u^2/\sigma_0$) в состоянии равновесия для $\sigma''_T > 0$ капля принимает вид эллипсоида вращения, сплюснутого в направлении градиента температуры, а в противоположном случае — растянутого в этом направлении.

Трипати и др. [23] изучали дрейф пузырька, обусловленный плавучестью и термокапиллярностью в трубе с неравномерно нагретыми стенками, содержащей так называемую «самовосстанавливающуюся жидкость» (self-rewetting fluid), в которой имеет место параболическая зависимость поверхностного натяжения от температуры T с четко определенным минимумом:

$$\sigma = \sigma_0 - \beta_1(T - T_1) + \beta_2(T - T_1)^2,$$

где введы обозначения $\beta_1 \equiv -\sigma'_T|_{T_1}$ и $\beta_2 \equiv \sigma''_T|_{T_1}/2$; T_1 — температура на дне трубы ($z = 0$). Температура меняется линейно в вертикальном направлении z с постоянным градиентом $\gamma = \operatorname{grad} T$:

$$T = T_1 + \gamma z.$$

Выведена следующая формула дрейфа пузырька:

$$u = \frac{\rho a^2 g}{3\mu}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\gamma\beta_1}{\rho a g}\left[1 - \frac{2\beta_2}{\beta_1}(T_\infty(0) - T_1)\right]\right),$$

где $T_\infty(0)$ — температура на дне трубы вдали от центра пузырька.

Баласубраманиам и Субраманиан в работе [24] провели обобщение исследований своей работы [17] для газовых пузырьков, на случай устойчивого термокапиллярного движения сферической капли в однородном градиенте температур для больших чисел Марангони (числа Рейнольдса также должны быть большими). Скорость дрейфа капли определена равной

$$u = \frac{4h(\delta)\text{Ma}}{\lambda(2 + 3\tilde{\mu}/\mu)^2(1 + \delta)^2},$$

где $\delta = \sqrt{\tilde{\kappa}/\kappa}/(\tilde{\lambda}/\lambda)$, κ — коэффициент температуропроводности среды; $h(\delta)$ — численная функция, методика для вычисления которой представлена в работе [24] (в табл. 1 представлены некоторые ее значения). Показано, что для повышения температуры капли с постоянной скоростью при ее дрейфе в более теплое окружение необходимо такое количество энергии внутри капли, которое создает большой градиент температуры между поверхностью капли и ее внутренней частью. Изменение температуры по поверхности капли также большое и приводит с ростом числа Марангони к линейному увеличению скорости дрейфа капли.

Занг и др. [25] исследовали дрейф капли в равномерном вертикальном градиенте температур при совместном действии силы гравитации и термокапиллярной силы при малых значениях числа Ма и показали, что включение инерции имеет

Таблица 1. Численные значения функции $h(\delta)$ [24]

δ	$h(\delta)$
0	0.00568
0.25	0.00611
0.5	0.00642
1	0.00683
5	0.00775
10	0.00798
∞	0.00826

решающее значение в разработке асимптотического решения для температурного поля. Получено выражение для скорости дрейфа в результате асимптотического разложения по числу Re:

$$u = u_0 + u_1\mathrm{Re} + o(\mathrm{Re}),$$

где u_0 определяется по формуле (4), а u_1 — с помощью

$$u_1 = \frac{\mathrm{Pr} - 1 - G(1+\tilde{\mu}/\mu)(2+\tilde{\lambda}/\lambda)}{2(2+3\tilde{\mu}/\mu)(2+\tilde{\lambda}/\lambda)}\,\frac{ga(\tilde{\rho}-\rho)}{3\sigma'_T|\mathrm{grad}T|},$$

где $\mathrm{Pr} = \mu/(\rho\lambda)$ — число Прандтля.

Чудхури и Райа Сехар [26] решали задачу термокапиллярного дрейфа вязкой капли в неоднородном поле температур, рассмотрев в частности случаи равномерного/сдвигового потока при равномерном распределении температуры/наличии источника тепла. Тепловая задача решалась с учетом непрерывности полей температуры и потока; гидродинамическая задача была связана с тепловой через термокапиллярные эффекты в граничных условиях. Отличительной особенностью от предыдущих исследований здесь является выражение формул для сопротивления и крутящего момента на капле в форме законов Факсена (Faxén's laws).

В отличие от авторов предыдущих работ, где вязкость окружающей среды считалась постоянной величиной, в работах [27, 28] данная характеристика рассматривалась переменной. Баласубраманиам [27] аналитически исследовал дрейф сферического пузырька, вызванный как термокапиллярной силой, так и силой плавучести, в случае, когда поверхностное натяжение и вязкость линейно зависят от температуры, при больших числах Re и постоянном градиенте температуры (сонаправленном или противоположно направленном силе тяжести). Получено, что в случае, когда вязкость является постоянной величиной ($\mu = \mathrm{const}$), а число Бонда

$$\mathrm{Bo} = \frac{(\rho-\tilde{\rho})ga}{(-\sigma'_T)\mathrm{grad}T}$$

отлично от нуля, скорость дрейфа пузырька определяется как

$$v_{\infty 0} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8}\ln 3 \pm \frac{1}{9}\mathrm{Bo}.$$

В последней формуле знак «+» используется, когда ρ, $\tilde{\rho}$ и g таковы, что сила плавучести увеличивает движение пузырька, а знак «–» в противном случае. Когда вязкость линейно зависит от температуры:

$$\mu(T) = \mu_0(T_0) + \mu'_T(T - T_0),$$

где μ_0 — вязкость невозмущенной жидкости в плоскости, перпендикулярной направлению движения, в которой находится центр пузырька (зависит от времени, т.к. температура в «контрольном» месте для вязкости постоянно изменяется), и $\mu'_T = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}T \equiv \mathrm{const}$ (обычно отрицательна для жидкостей), то в квазистатическом приближении скорость дрейфа пузырька будет определяться следующей формулой:

$$v_{\infty 0} = \frac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{8}\ln 3 \pm \dfrac{1}{9}\mathrm{Bo}}{1 + \dfrac{3}{2}K\dfrac{a\mathrm{grad}T}{\mu_0}\mu'_T},$$

где K — константа, вычисленная численно при расчете скорости рассеяния энергии вязкими силами, которая получилась равной значению -0.326.

Премлата и др. [28] численно исследовали динамику поднимающего пузырька в неограниченной неподвижной вязко-стратифицированной среде в случае, когда вязкость линейно возрастает в вертикальном направлении, с помощью открытого исходного кода для решения уравнений методом конечного объема Gerris [29]. Для отслеживания границы между двумя жидкостями использовался метод Volume of Fluid (VOF) с динамической адаптацией сетки, основанной на величине завихренности и положении границы раздела. Проведено сравнение численного метода при определении формы пузырька и линий тока с экспериментальными результатами Бхаги и Вебера [30]. Обнаружено, что в среде с линейно возрастающей вязкостью при определенных значениях параметров пузырь подвергается большой деформации, образуя удлиненную юбку, которая стремится физически отделить область следа от остальной окружающей жидкости. Эта своеобразная динамика объясняется переносом менее вязкой жидкости вслед за пузырьком, когда он поднимается. Таким образом создается все больший контраст вязкости между жидкостью, занятой в области следа, и окружающей жидкостью. В среде с постоянной вязкостью такая динамика не наблюдается.

Более подробно динамика всплытия пузырьков в средах со стратифицированной вязкостью представлена в обзорной работе Саху [31].

Отметим часть исследований, изучающих движение сферической частицы в вязкой жидкости, в которой перепад температуры возникает между поверхностью частицы и жидкости вдали от нее за счет происходящей на поверхности химической реакции, сопровождающейся выделением или поглощением тепла. Так, в работе Головина и Фоминых [32] получено обобщение формулы Адамара–Рыбчинского для силы сопротивления частицы (твердой или жидкой капли) в случае ее стационарного движения в несжимаемой жидкости, вязкость которой экспоненциально зависит от температуры. При этом предполагалось, что силы гравитации отсутствуют и теплопроводность поверхности выше окружающей жидкости, что позволяло считать ее изотермической. В работе Головина и др. [33] показано, что учет баланса нормальных компонент напряжений на поверхности раздела фаз приводит к изменению формы капли при ее движении за счет хемотермокапиллярного эффекта в нулевом приближении по числу Рейнольдса.

В работе Малай [34] в стоксовом приближении приводится теоретическое описание движения равномерно нагретой сферической капли под действием силы тяжести. Получены выражения, обобщающие формулы Стокса и Адамара–Рыбчинского на случай стационарного движения равномерно нагретой твердой сферической частицы или капли в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. В отличие от [32] данные выражения получены с учетом произвольной зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда:

$$\mu = \mu_\infty \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma^n}{y^n}\right) \exp(-A\gamma/y),$$

где $\mu_\infty = \mu(T_\infty)$, T_∞ — температура жидкости вдали от частицы; F_n и A — постоянные, зависящие от физических характеристик окружающей среды; $\gamma = (T_s - T_\infty)/t_\infty$ — безразмерный параметр, характеризующий перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее; T_s — средняя температура поверхности; $y = r/a$ — безразмерная радиальная координата. Выведенная скорость падения равномерно нагретой сферической капли (аналог формулы Адамара–Рыбчинского) воль оси z декартовой системы координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\tilde{\rho} - \rho}{\mu_\infty f_\mu} g \mathbf{n}_z,$$

где $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z; f_μ — параметр, зависящий от вязкости, вывод которого подробно представлен в работе [34]. В последующих работах последняя формула была обобщена на случаи неравномерно распределенных источников тепла [35] и обтекания капли в вязкой неизотермической газообразной среде, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности [36].

4. Численные методы расчета скорости термокапиллярного дрейфа пузырьков/капель

Как правило, аналитические решения дрейфа капель/пузырьков в неоднородном поле температур ограничиваются исследованиями задачи при малых числах Re и/или Ma, поскольку при бóльших значениях данных параметров система уравнений становится сильно нелинейной. В связи с этим в последние два десятилетия множество исследований посвящено численным методам решения данной задачи. Так, в работе Уэлча [37] при исследовании влияния деформации пузырьков на их термокапиллярный дрейф в условиях микрогравитации используется метод конечных объемов с возможностью отслеживания границы раздела на движущейся неструктурированной сетке. Показано, что при росте капиллярного числа Ca, когда деформация пузырьков также растет, скорость дрейфа пузырьков непрерывно уменьшается, не достигая некоторого стационарного значения. Данный результат отличается от результата работы [14], где получено, что при деформации пузырька происходит уменьшение стационарного значения скорости дрейфа.

Йин и др. [38] численно изучали термокапиллярный дрейф недеформируемых капель с помощью конечно-разностной схемы отслеживания фронта для различных значений Re и Ma, а также отношений плотностей и удельных теплопроводностей капель к сплошной среде. Получено, что большие значения чисел Ma могут существенно изменить распределение температуры на границе раздела капли, что приводит к волнообразному изменению скорости дрейфа капли; число Re внешней среды оказывает непосредственное влияние на процесс дрейфа, но практически не влияет на конечную скорость; число Re капли существенно влияет как на скорость, так и на процесс дрейфа. Обсуждалось также влияние начальных условий на теплокапиллярный дрейф. В последующей работе [39] проведено исследование термокапиллярного дрейфа с большими числами Марангони (до 400) в отсутствии сил гравитации с помощью новой численной схемы для моделирования в длинных резервуарах в очень короткой вычислительной области. Получено, что большие числа Ма приводят к более сложному процессу дрейфа капли и более продолжительному установлению окончательной стабильной скорости дрейфа. В данной статье также проведено сравнение результатов расчета с экспериментами [40], которое показало хорошее качественное соответствие. Наблюдалось различие между скоростью дрейфа в теоретическом анализе, численном моделировании и космических экспериментах, что объяснялось разной продолжительностью установления устойчивого значения данной скорости.

Брэди и др. [41] провели численное моделирование термокапиллярного дрейфа трехмерной и осесимметричной капель в замкнутом аппарате (с холодной нижней и горячей верхней стенками) с помощью уточненного сеточного метод набора уровней (level-set grid method) для отслеживания границы раздела и учета малых деформаций. Результаты сравниваются с теоретически предсказанными скоростями термокапиллярного дрейфа капель и измеренными скоростями дрейфа в экспериментах с микрогравитацией [40, 42]. Показано, что при больших числах Ма начальные условия сильно влияют на решение задачи; квазистационарное поведение капли также существенно зависит от геометрии области (трехмерная или осесимметричная).

В работе Ма и Боте [43] разработан численный метод прямого моделирования тепловых эффектов Марангони на динамически деформируемой границе раздела двухфазных несжимаемых жидкостей на основе метода объема жидкости с особым упором на численную обработку градиента температуры поверхности. Рассмотрены термокапиллярный дрейф капли в окружающей среде с линейным градиентом температуры, термокапиллярная конвекция в слое жидкости при линейном градиенте температуры вдоль границы раздела и конвекция Марангони из-за нестабильности Бенара–Марангони.

Алхендал и др. в работе [44] численно моделировали термокапиллярный дрейф изначально сферических пузырьков, обусловленный постоянным градиентом температуры в жидкой ограниченной среде, для малых и средних (а в работе [45] и для больших) чисел Рейнольдса и Марангони с использованием трехмерной модели. Для отслеживания границы раздела жидкость–газ применялся метод VOF с использованием схемы геометрической реконструкции, основанной на методе кусочно–линейного расчета границы раздела [46], для захвата границы раздела пузырьков. Результаты показали, что масштабированная скорость пузырьков уменьшается с увеличением числа Марангони, что согласуется с результатами космических экспериментов Канга и др. [47]. Кроме того, на основе данных, полученных в численном исследовании [45], было разработано выражение для прогнозирования масштабированной скорости дрейфа пузырька.

В работе Самареха и др. [48] представлена численная методика расчета термокапиллярного движения сферической деформируемой капли одной жидкости в другой с переменным поверхностным натяжением на основе параллельного трехмерного метода VOF. Численные результаты сравнивались с данными экспериментов, проведенных в отсутствии гравитации [40]. Имеющееся расхождение данных экспериментов и численного моделирования объяснялось следующим образом. Численные результаты являются чувствительными к начальным данным, однако, из-за невозможности измерения реального начального распределения температуры внутри капли при моделировании использовались идеализированные случаи линейного распределения температуры или равномерного профиля температуры внутри капли.

В работе Ву [49] исследовался нестационарный процесс дрейфа термокапиллярных капель при больших числах Рейнольдса и Марангони путем выявления неконсервативного интегрального теплового потока через поверхность. В последующей работе [50] добавлен также источник тепла в каплю, чтобы сохранить интегральный тепловой поток через поверхность как консервативный, поэтому термокапиллярный дрейф капли при больших числах Рейнольдса и Марангони может достигать квазистационарного процесса. В работе [51] исследовался общий стационарный баланс импульса и энергии при термокапиллярном дрейфе капли при малых числах Рейнольдса и больших числах Марангони, чтобы подтвердить квазистационарное предположение о системе. Предполагалось, что капля имеет небольшое осесимметричное отклонение от сферической формы. Сравнение с исследованиями [49] показало, что термокапиллярный дрейф капли при больших числах Ма находится в нестационарном состоянии для системы при любом числе Re. Качественное различие между конечным термокапиллярным дрейфом капли при малых числах Ма и миграцией при больших числах Ма обусловлено эволюцией режима и интенсивностью теплообмена в системе.

В работе Чжана и др. [52] проводились численные исследования термокапиллярных движений капель и пузырьков под воздействием падающего однородного теплового потока. Численная модель основана на нестационарной двумерной осесимметричной модели и методе установки уровня (a level set method). Обнаружено, что капля/пузырек может самопроизвольно перемещаться под действием теплового излучения из-за теплового капиллярного эффекта, движущую силу которого вызывает перепад давления в средней области капли/пузырька. При низких числах Re скорость дрейфа зависит только от соотношений динамической вязкости и теплопроводности, а при высоких числах — от соотношений плотности и теплоемкости. При всех числах Рейнольдса с увеличением разницы между динамической вязкостью или теплопроводностью непрерывной и дискретной фаз скорость дрейфа растет.

В работе Абу-аль-Сауда и др. [53] описана новая численная схема для моделирования поверхностного натяжения границы раздела капли, представленного функцией установки уровня (a level-set function), которая сохраняет импульс жидкости и точно восстанавливает равновесие Лапласа. Утверждается, что переменное поверхностное натяжение естественным образом учитывается в схеме и получаются точные решения для термокапиллярных течений. Применение к распаду Марангони осесимметричной капли показывает, что метод устойчив также в случае искажения формы границы раздела.

5. Экспериментальные работы по исследованию дрейфа пузырьков/капель

Первой работой, в которой были представлены результаты эксперимента по термокапиллярному дрейфу пузырька, является работа Янга и др. [5]. Обнаружено, что сферические пузырьки малого размера в чистой жидкости при наличии гравитационных сил могут оставаться неподвижными или перемещаться вниз за счет достаточно сильного отрицательного температурного градиента в вертикальном направлении.

В работе Братухина и др. [54] проведено экспериментальное исследование гравитационной тепловой конвекции и термокапиллярного дрейфа воздушных пузырьков в воде при температуре около 4°C в вертикальной щели, подогреваемой сбоку. Оценки, сделанные по результатам измерения скорости конвекции, показали, что при grad$T <$ 15 град/см искажения скорости термокапиллярного дрейфа за счет действия поперечных сил лежат в пределах погрешности эксперимента. Кроме того, для предотвращения искажений результатов экспериментов, вызванных загрязнением воды, измерения проводились в динамическом режиме, когда время образования пузырька не превышало десятых долей секунды. Таким образом, в данных областях параметров конвекция не оказывала существенного влияния на дрейф. Экспериментально установлено, что в диапазоне параметров, где побочные эффекты исключены, для оценки скорости дрейфа возможно применение формулы (7) для дрейфа пузырька в отсутствии силы тяжести без учета внутреннего движения и в линейном по числу Марангони приближении.

В работе Братухина и Зуева [55] теоретически и экспериментально изучено движение воздушного пузырька, обусловленное термокапиллярным эффектом, в горизонтальной ячейке Хеле-Шоу, которая значительно ослабляет влияние побочных эффектов, вызванных силой тяжести (сила Архимеда и гравитационная тепловая конвекция). Показано, что в однородном градиенте температуры скорость термокапиллярного дрейфа пузырька остается постоянной и определяется его диаметром, величиной градиента температуры и физико–химическими свойствами окружающей жидкости. Определено наличие трех характерных областей зависимости скорости термокапиллярного дрейфа пузырька от его радиуса и формы пузырька, которые соответствуют различным значения отношения радиуса пузырька a к толщине слоя жидкости h: при $2a < h$ пузырьки сферические и их скорость растет с увеличением a; при $2a \approx h$ пузырьки имеют форму круглого цилиндра, а их скорость резко уменьшается с увеличением радиуса; при $2a \gg h$ скорость дрейфа цилиндрических пузырьков возрастает по линейному закону.

В работе Баласубраманиама и др. [56] экспериментально исследовалось движение одиночных капель и пузырьков в силиконовом масле при наличии температурного градиента для небольших чисел Марангони в условиях малой гравитации. Они обнаружили, что в случае газовых пузырьков нормированная скорость уменьшается с увеличением числа Марангони и в пределе больших Ма приближается к теоретической асимптоте. Предварительные эксперименты с парой капель показали, что капля небольшого размера приводит к значительному падению градиента температуры и, как следствие, значительно замедляет движение большой, в то время, как она сама движется так, как будто на нее практически не влияет присутствие большой капли.

Хадланд и др. [40] проводили эксперименты по термокапиллярному дрейфу воздушных пузырьков и Fluorinert капель в силиконовом масле Dow-Corning на борту космического корабля NASA «Колумбия» во время миссии «Науки о жизни и микрогравитации». Данные эксперименты позволили проводить измерения при больших числах Re и Ma. Наблюдения в случае дрейфа пузырьков воздуха в силиконовом масле согласуются с численными данными [57, 58], а также подтверждают правильность результатов асимптотической теории для больших значений числа Марангони [17]. В случае капель Fluorinert данные для небольших капель согласуются с численными прогнозами [58] примерно до значения $\mathrm{Ma} = 90$. При более высоких значениях числа Марангони отмечаются отклонения от численных прогнозов: резко возрастает масштабированная скорость. Обнаружено, что большие пузырьки воздуха (с радиусом более 12 мм) при дрейфе слегка деформируются по форме, превращаясь в сплюснутые сфероиды, в то время, как деформация даже самых больших капель Fluorinert находится в пределах погрешности измерения их размера.

В экспериментах Братухина и др. [59] по изучению термокапиллярного дрейфа в растворах метанола было обнаружено, что даже незначительная добавка воды ($\sim$10%) к чистому спирту при наличии градиента температуры приводит к прекращению движения пузырьков. Объясняется это тем, что перераспределение поверхностно-активных веществ на поверхности пузырька приводит к компенсации поверхностного натяжения, вызванного тепловой неоднородностью. А поскольку характерные диффузионные времена значительно превышают времена тепловые, то основание для движения жидкости (т.е. неоднородность поверхностного натяжения) исчезает.

В работе Канга и др. [47] представлены результаты бортового космического эксперимента по термокапиллярному дрейфу пузырьков в силиконовом масле. Пузырьки воздуха впрыскивали в жидкость в том же направлении, что и постоянный градиент температуры в жидкости. Число Марангони в данных экспериментах было расширено до значений $\mathrm{Ma} = 9288$. Получено, что масштабированная скорость пузырьков уменьшается с увеличением числа Ma, что согласуется с результатами предыдущих космических экспериментов и численного моделирования [17, 60].

6. Заключение

Анализ работ, представленных в данном обзоре, свидетельствует о значительном интересе исследователей к рассматриваемой проблеме термокапиллярного дрейфа как пузырьков, так и капель в неоднородном температурном поле, а также образованию пузырьковых кластеров в области источников тепла. При этом следует отметить и возрастающий интерес со стороны разработчиков новых технологий в различных отраслях промышленности.

В ряде работ, наряду с неизбежным учетом зависимости поверхностного натяжения от температуры, было рассмотрено влияние температурной зависимости коэффициента вязкости, что дает новый импульс к продолжению исследований и развитию теории эффекта с учетом реологических и особенно термореологических свойств рабочих сред.

Список литературы

[1] Stokes G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluid on the Motion of Pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1850. V. 9. P. 8.

[2] Hadamard J.S. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et viscqueuse dans un liquide viscquexe, Comput. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1911. V. 152, No 25. Pp. 1735–1738.

[3] Rybczynski D.W. Uber die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kugel in einem zahen Medium, Bull. Acad. Sci. Cracow, Ser. A (Sci. Math.) Bull. Acad. Sci. Cracovie. 1911. V. 1. Pp. 40–46.

[4] Федосов А.И. Термокапиллярное движение // Журн. физ. химии. 1956. Т. XXX, вып. 2. С. 366–370.

[5] Young N.O., Goldstein J.S., Block MJ. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient // J. Fluid Mech. 1959. V. 6, Iss. 3. Pp. 350–356.
DOI: 10.1017/S0022112059000684

[6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.

[7] Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // J. Fluid Mech. 1967. V. 27, part 2. Pp. 361–366.
DOI: 10.1017/S0022112067000370

[8] Любин Л.Я., Повицкий А.С. Термокапиллярные движения в жидкости при отсутствии массовых сил // ПМТФ. 1961. №. 2. С. 40–46.
http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158570&ARTICLE_ID=158894

[9] Кузнецов В.М., Луговцов Б.А., Шер Е.И. О движении газовых пузырьков в жидкости под действием градиента температуры // ПМТФ. 1966. № 1. С. 124–126.
eLIBRARY ID: 29210348

[10] Яламов Ю.И., Санасарян А.С. Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // ИФЖ. 1975. Т. XXVIII, № 6. С. 1061–1064.

[11] Братухин Ю.К. Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 5. С. 156–161.

[12] Thompson R.L., DeWitt K.J., Labus T.L. Marangoni bubble motion phenomenon in zero gravity // Chem.Eng.Commun. 1980. V. 5. Pp. 299–314.
DOI: 10.1080/00986448008935971

[13] Balasubramaniam R., Chai A. Thermocapillary Migration of Droplets: An Exact Solution for Small Marangoni Numbers // J. Colloid Interface Sci. 1987. V. 119, No. 2. Pp. 531–538. DOI: 10.1016/0021-9797(87)90300-6

[14] Haj-Hariri H., Shi Q., Borhan A. Thermocapillary motion of deformable drops at finite Reynoldsa Marangoni numbers // Phys. Fluids. 1997. V. 9. Pp. 2265–2276. DOI: 10.1063/1.869182

[15] Зуев А.Л. Тепловая и концентрационная конвекция Марангони в тонких слоях жидкости: Дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05 / Зуев Андрей Леонидович. Пермь, 2009. 303 с.

[16] Crespo A., Migoya E., Manuel F. Thermocapillary migration of bubbles at large Reynolds numbers // Int. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 685–692. DOI: 10.1016/S0301-9322(97)00076-1

[17] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Thermocapillary bubble migration—thermal boundary layers for large Marangoni numbers // Int. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22, No. 3. Pp. 593–612. DOI: 10.1016/0301-9322(95)00075-5

[18] Антановский Л.К., Копбосынов Б.К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ. 1986. № 2. С. 59–64. http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119917&ARTICLE_ID=136327

[19] Dill L.H., Balasubramaniam R. Unsteady thermocapillary migration of isolated drops in creeping flow // Int.J.Heat Fluids Flow. 1992. V. 13, No. 1. Pp. 78–85. DOI: 10.1016/0142-727X(92)90062-E

[20] Galindo V., Gerbeth G., Langbein D., Treuner M. Unsteady thermocapillary migration of isolated spherical drops in a uniform temperature gradient // Int. J. Microgravity Science and Technology. 1994. V. 7, No. 3. Pp. 234–241. https://www.hzdr.de/publications/Publ-73

[21] Редников А.Е., Рязанцев Ю.С. О термокапиллярном движении капли под действием излучения // ПМТФ. 1989. № 2. С. 179–183. http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119923&ARTICLE_ID=134445

[22] Гупало Ю.П., Редников А.Е., Рязанцев Ю.С. Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // ПММ. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 433–442.

[23] Tripathi M.K., Sahu K.C., Karapetsas G., Sefiane K., Matar O.K. Non-isothermal bubble rise: non-monotonic dependence of surface tension on temperature // J. Fluid Mech. 2015. V. 763. Pp. 82–108. DOI: 10.1017/jfm.2014.659

[24] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. The migration of a drop in a uniform temperature gradient at large Marangoni numbers // Phys. Fluids. 2000. V. 12, No. 4. Pp. 733–743. DOI: 10.1063/1.870330

[25] Zhang L., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Motion of a drop in a vertical temperature gradient at small Marangoni number — the critical role of inertia // J. Fluid Mech. 2001. V. 448. Pp. 197–211. DOI: 10.1017/S0022112001005997

[26] Choudhuri D., Raja Sekhar G.P. Thermocapillary drift on a spherical drop in a viscous fluid // Phys. Fluids. 2012. V. 25, No. 4. Pp. 043104-1–043104-14. DOI: 10.1063/1.4799121

[27] Balasubramaniam R. Thermocapillary and buoyant bubble motion with variable viscosity // Int J. Multiphase Flow. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 679–683. DOI: 10.1016/S0301-9322(97)00075-X

[28] Premlata A.R., Tripathi M.K., Sahu K.Ch. Dynamics of rising bubble inside a viscosity-stratified medium // Phys. Fluids. 2015. V. 27, No. 7. Pp. 072105-1–072105-15. DOI: 10.1063/1.4927521

[29] Popinet S. Gerris: A tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries // J. Comput. Phys. 2003. V. 190, No. 2. Pp. 572–600. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00298-5

[30] Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech. 1981. V. 105. Pp. 61–85. DOI: 10.1017/S002211208100311X

[31] Sahu K.Ch. A review on rising bubble dynamics in viscosity-stratified fluids // Sādhanā. 2017. V. 42, No. 4. Pp. 575–583. DOI: 10.1007/s12046-017-0634-8

[32] Головин А.М., Фоминых В.В. Движение сферической частицы в вязкой неизотермической жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 1. С. 38–42.

[33] Головин А.А., Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С. Изменение формы капли при ее движении за счет хемотермокапиллярного эффекта // ПМТФ. 1989. № 4. С. 98–106. http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119925&ARTICLE_ID=134494

[34] Малай Н.В. К вопросу о термофоретическом движении нагретой сферической капли в вязкой жидкости // ЖТФ. 2002. Т. 72, вып. 11. С. 35–43. eLIBRARY ID: 21324678

[35] Малай Н.В., Щукин Е.Р., Яламов Ю.И. Влияние движения среды на термокапиллярную силу нагретой капли в вязкой жидкости в поле внешнего градиента температуры // ТВТ. 2002. Т. 40, вып. 1. С. 114–120. DOI: 10.1023/A:1014246518603

[36] Малай Н.В., Рязанов К.С., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущуюся в газообразной среде // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 4. С. 63–71. eLIBRARY ID: 16973561

[37] Welch S.W. Transient thermocapillary migration of deformable bubbles. // J. Colloid Interface Sci. 1998. V. 208, No. 2. Pp. 500–508. DOI: 10.1006/jcis.1998.5883

[38] Yin Z., Gao P., Hu W., Chang L. Thermocapillary migration of nondeformable drops // Phys. Fluids. 2008. V. 20, No. 8. Pp. 082101-1–082101-20. DOI: 10.1063/1.2965549

[39] Yin Z., Chang L., Hu W., Li. Q., Wang H. Numerical simulations on thermocapillary migrations of nondeformable droplets with large Marangoni numbers // Phys. Fluids. 2012. V. 24, No. 9. Pp. 092101-1–092101-18. DOI: 10.1063/1.4752028

[40] Hadland P.H., Balasubramaniam R., Wozniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate to large Marangoni number and moderate Reynolds number in reduced gravity // Exp. Fluids. 1999. V. 26, No. 3. Pp. 240–248. DOI: 10.1007/s003480050285

[41] Brady P.T., Herrmann M., Lopez J.M. Confined thermocapillary motion of a three-dimensional deformable drop // Phys. Fluids. 2011. V. 23, No. 2. Pp. 022101-1–022101-11. DOI: 10.1063/1.3529442

[42] Wozniak G., Balasubramaniam R., Hadland P.H., Subramanian R.S. Temperature fields in a liquid due to the thermocapillary motion of bubbles and drops // Exp. Fluids. 2001. V. 31, No. 1. Pp. 84–89. DOI: 10.1007/s003480000262

[43] Ma Ch., Bothe D. Direct numerical simulation of thermocapillary flow based on the Volume of Fluid method // Int J. Multiphase Flow. 2011. V. 37, No. 9. Pp. 1045–1058. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.06.005

[44] Alhendal Y., Turan A., Hollingsworth P. Thermocapillary simulation of single bubble dynamics in zero gravity // Acta Astronautica. 2013. V. 88. Pp. 108–115.
DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.03.017

[45] Alhendal Y., Turan A., Kalendar A., Abou-Ziyan H., El-shiaty R. Thermocapillary Bubble Migration at High Reynolds and Marangoni Numbers: 3D Numerical Study // Microgravity-Science and Technology. 2018. V. 30, No. 4. Pp. 561–569.
DOI: 10.1007/s12217-018-9643-4

[46] Ansys-Fluent: ANSYS Fluent User's Guide. ANSYS, Inc., 2011.

[47] Kang Q., Cui H.L., Duan L. On-board experimental study of bubble thermocapillary migration in a recoverable satellite // Microgravity Sci. Technol. 2008. V. 20, No. 2. Pp. 67–71.
DOI: 10.1007/s12217-008-9007-6

[48] Samareh B., Mostaghimi J., Moreau Ch. Thermocapillary migration of a deformable droplet // Int. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 73. Pp. 616–626.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.022

[49] Wu Z.-B., Hu W.R. Effects of Marangoni numbers on the thermocapillary drop migration: constant for quasi-steady state? // J. Math. Phys. 2013. V. 54. Pp. 023102.
DOI: 10.1063/1.4792476

[50] Wu Z.-B. Thermocapillary migration of a droplet with a thermal source at large Reynolds and Marangoni numbers // Int. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 75. Pp. 704–709.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.011

[51] Wu Z.-B. Terminal thermocapillary migration of a droplet at small Reynolds numbers and large Marangoni numbers // Acta Mech. 2017. V. 228. Pp. 2347–2361.
DOI: 10.1007/s00707-017-1833-4

[52] Zhang B., Liu D., Chenga Yo., Xu J., Sui Y. Numerical investigation on spontaneous droplet/bubble migration under thermal radiation // Int. J. Therm. Sci. 2018. V. 129. Pp. 115–123.
DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.02.031

[53] Abu-Al-Sauda M.O., Popinet S., Tchelepia H.A. A conservative and well-balanced surface tension model // J. Comput. Phys. 2018. V. 371. Pp. 896–913.
DOI: 10.1016/j.jcp.2018.02.022

[54] Братухин Ю.К. Брискман В.А., Зуев А.Л., Пшеничников А.Ф., Ривкинд В.Я. Экспериментальное исследование термокапиллярного дрейфа пузырей газа в жидкости // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости / под ред. Авдуевского В.С., Полежаева В.И. М.: Наука, 1982. С. 98–109.

[55] Братухин Ю.К., Зуев А.Л. Термокапиллярный дрейф пузырьков воздуха в горизонтальной ячейке Хеле–Шоу // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 3. С. 62–67.

[56] Balasubramaniam R., Lacy C.E., Woniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate values of the Marangoni number in reduced gravity // Phys. Fluids. 1996. V. 8, No. 4. Pp. 872–880.
DOI: 10.1063/1.868868

[57] Balasubramaniam R., Lavery J.E. Numerical simulation of thermocapillary bubble migration under microgravity for large Reynolds and Marangoni numbers // Numer. Heat Transfer. 1989. V. 16. Pp. 175–187.
DOI: 10.1080/10407788908944712

[58] Ma X. Numerical simulation and experiments on liquid drops in a vertical temperature gradient in a liquid of nearly the same density: Ph.D. Thes. in Chemical Engineering, Clarkson University, 1998.

[59] Bratukhin Yu.K., Kostarev K.G., Zuev A.L., Viviani A. Experimental study of Marangoni bubble migration in normal gravity // Int. J. Experiments in Fluids, 2005. V. 38, No. 5. Pp. 594–605.
DOI: 10.1007/s00348-005-0930-7

[60] Ma X., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Numerical simulation of thermocapillary drop motion with internal circulation // Numerical Heat Transfer, Part A, 1999. V. 35. Pp. 291–309.
DOI: 10.1080/104077899275254

ISSN 2658–5782 15 (2020), **3–4**, 144–158

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2020.3.125
DOI: 10.21662/mfs2020.3.125
Received: 16.11.2020
Accepted: 10.12.2020

Thermocapillary migration of droplets and bubbles in a viscous liquid (review)

Nasibullaeva E.Sh., Urmancheev S.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Investigation of the process of accumulation of gas bubbles in the aria of a heat source is, from a physical point of view, quite interesting problem that leads to important conclusions for practical applications. The peculiarity of the process under consideration is that the surface tension of the bubble changes in an alternating temperature field, which, in turn, leads to the appearance of a flow in the boundary layer of the liquid. In the world scientific literature, the discovery and description of the effect of gas bubble migration in the direction of the temperature gradient is usually associated with the experimental work of Yang, Goldstein and Block (1959). Without diminishing its significance, we note that the effect was first predicted in the theoretical work of Fedosov (1956) as a result of solving the problem of the onset of a microflow of a liquid near plane and spherical interphase boundaries in the presence of a temperature gradient. In both works, a significant factor in explaining the described phenomenon was the dependence of surface tension on temperature. After some time, after which it was realized the need to take into account the migration of not only bubbles, but also droplets, in inhomogeneous temperature fields in space technologies, biomedical and other applications, there was a significant number of publications on this subject, and this phenomenon was called thermocapillary migration. This review is devoted to the analysis of the main, in the opinion of the authors of the article, results of experimental, theoretical and applied research to establish the mechanism of migration bubbles and drops in temperature gradient fields. In most works, it is assumed that there is no dependence of the physical properties of a liquid, except for surface tension, on temperature. There are only a few studies where the influence of the temperature dependence of the viscosity coefficient was considered, which gives a new impetus to the continuation of research and the development of the theory of the effect, taking into account the thermorheological properties of working media.

Keywords: Newtonian fluid, bubble, drop, thermocapillary migration, droplet/bubble migration velocity, temperature gradient, surface tension

References

[1] Stokes G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluid on the Motion of Pendulums. Trans. Cambridge Philos. Soc. 1850. V. 9. P. 8.

[2] Hadamard J.S. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et viscqueuse dans un liquide viscquexe. Comput. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1911. V. 152, No. 25. Pp. 1735–1738.

[3] Rybczynski D.W. Uber die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kugel in einem zahen Medium. Bull. Acad. Sci. Cracow, Ser. A (Sci. Math.) Bull. Acad. Sci. Cracovie. 1911. V. 1. Pp. 40–46.

[4] Fedosov A.I. Thermocaillary motion. Zhurnal Fizicheskoi Khimii. 1956. V. 30, No. 2. Pp. 366–373. https://arxiv.org/abs/1303.0243v1

[5] Young N.O., Goldstein J.S., Block M.J. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient. J. Fluid Mech. 1959. V. 6, Iss. 3. Pp. 350–356. DOI: 10.1017/S0022112059000684

[6] Levich V.G. Physicochemical hydrodynamics. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall. 1962.

[7] Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops. J. Fluid Mech. 1967. V. 27, part 2. Pp. 361–366. DOI: 10.1017/S0022112067000370

[8] Lyubin L.Ya., Povitsky A.S. [Thermocapillary motion in a liquid in the absence of mass forces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 1961. No. 2. Pp. 40–46 (in Russian). http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158570&ARTICLE_ID=158894

[9] Kuznetsov V.M., Lugovtsov B.A., Sher E.I. Motion of gas bubbles in a liquid under the influence of a temperature gradient. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1966. V. 7. Pp. 88–89. DOI: 10.1007/BF00912842

[10] Yalamov Yu.I., Sanasaryan A.S. Droplet motion in an inhomogeneous-in-temperature viscous medium. Journal of Engineering Physics. 1975. V. 28. Pp. 762–765.
DOI: 10.1007/BF00867387

[11] Bratukhin Yu.K. Thermocapillary drift of a droplet of viscous liquid. Fluid Dynamics. 1975. V. 10. Pp. 833–837.
DOI: 10.1007/BF01015460

[12] Thompson R.L., DeWitt K.J., Labus T.L. Marangoni bubble motion phenomenon in zero gravity. Chem.Eng.Commun. 1980. V. 5. Pp. 299–314.
DOI: 10.1080/00986448008935971

[13] Balasubramaniam R., Chai A. Thermocapillary Migration of Droplets: An Exact Solution for Small Marangoni Numbers. J. Colloid Interface Sci. 1987. V. 119, No. 2. Pp. 531–538.
DOI: 10.1016/0021-9797(87)90300-6

[14] Haj-Hariri H., Shi Q., Borhan A. Thermocapillary motion of deformable drops at finite Reynoldsa Marangoni numbers. Phys. Fluids. 1997. V. 9. Pp. 2265–2276.
DOI: 10.1063/1.869182

[15] Zuev A.L. [Thermal and Concentration Marangoni Convection in Thin Liquid Layers]. *Teplovaya i kontsentratsionnaya konvektsiya Marangoni v tonkikh sloyakh zhidkosti*. Ph.D. Thes. Perm, 2009 (in Russian).

[16] Crespo A., Migoya E., Manuel F. Thermocapillary migration of bubbles at large Reynolds numbers. Int. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 685–692.
DOI: 10.1016/S0301-9322(97)00076-1

[17] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Thermocapillary bubble migration—thermal boundary layers for large Marangoni numbers. Int. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22, No. 3. Pp. 593–612.
DOI: 10.1016/0301-9322(95)00075-5

[18] Antanovskii L.K., Kopbosynov B.K. Nonstationary thermocapillary drift of a drop of viscous liquid. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1986. V. 27. Pp. 208–213.
DOI: 10.1007/BF00914730

[19] Dill L.H., Balasubramaniam R. Unsteady thermocapillary migration of isolated drops in creeping flow. Int. J. Heat Fluids Flow. 1992. V. 13, No. 1. Pp. 78–85.
DOI: 10.1016/0142-727X(92)90062-E

[20] Galindo V., Gerbeth G., Langbein D., Treuner M. Unsteady thermocapillary migration of isolated spherical drops in a uniform temperature gradient. Int. J. Microgravity Science and Technology. 1994. V. 7, No. 3. Pp. 234–241.
`https://www.hzdr.de/publications/Publ-73`

[21] Rednikov A.E., Ryazantsev Yu.S. Thermocapillary motion of a drop under the action of radiation. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1989. V. 30. Pp. 337-340.
DOI: 10.1007/BF00852187

[22] Gupalo Yu.P., Rednikov A.E., Ryazantsev Yu.S. Thermocapillary drift of a drop in the case when the surface tension depends non-linearly on the temperature. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1989. V. 53, Iss. 3. Pp. 332–339.
DOI: 10.1016/0021-8928(89)90031-2

[23] Tripathi M.K., Sahu K.C., Karapetsas G., Sefiane K., Matar O.K. Non-isothermal bubble rise: non-monotonic dependence of surface tension on temperature. J. Fluid Mech. 2015. V. 763. Pp. 82–108.
DOI: 10.1017/jfm.2014.659

[24] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. The migration of a drop in a uniform temperature gradient at large Marangoni numbers. Phys. Fluids. 2000. V. 12, No. 4. Pp. 733–743.
DOI: 10.1063/1.870330

[25] Zhang L., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Motion of a drop in a vertical temperature gradient at small Marangoni number — the critical role of inertia. J. Fluid Mech. 2001. V. 448. Pp. 197–211.
DOI: 10.1017/S0022112001005997

[26] Choudhuri D., Raja Sekhar G.P. Thermocapillary drift on a spherical drop in a viscous fluid. Phys. Fluids. 2012. V. 25, No. 4. Pp. 043104-1–043104-14.
DOI: 10.1063/1.4799121

[27] Balasubramaniam R. Thermocapillary and buoyant bubble motion with variable viscosity. Int. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 679–683.
DOI: 10.1016/S0301-9322(97)00075-X

[28] Premlata A.R., Tripathi M.K., Sahu K.Ch. Dynamics of rising bubble inside a viscosity-stratified medium. Phys. Fluids. 2015. V. 27, No. 7. Pp. 072105-1–072105-15.
DOI: 10.1063/1.4927521

[29] Popinet S. Gerris: A tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. J. Comput. Phys. 2003. V. 190, No. 2. Pp. 572–600.
DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00298-5

[30] Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities. J. Fluid Mech. 1981. V. 105. Pp. 61–85.
DOI: 10.1017/S002211208100311X

[31] Sahu K.Ch. A review on rising bubble dynamics in viscosity-stratified fluids. Sādhanā. 2017. V. 42, No. 4. Pp. 575–583.
DOI: 10.1007/s12046-017-0634-8

[32] Golovin A.M., Fominykh V.V. Motion of a spherical particle in a viscous nonisothermal fluid. Fluid Dynamics. 1983. V. 18. Pp. 26–29.
DOI: 10.1007/BF01090504

[33] Golovin A.A., Gupalo Yu.P., Ryazantsev Yu.S. Change in shape of drop moving due to the chemithermocapillary effect. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1989. V. 30. Pp. 602–609.
DOI: 10.1007/BF00851103

[34] Malai N.V. On the thermophoretic motion of a heated spherical drop in a viscous liquid. Technical Physics. 2002. V. 47. Pp. 1380–1388.
DOI: 10.1134/1.1522106

[35] Malai N.V., Shchukin E.R., Yalamov Yu.I. The Effect of the Medium on the Thermocapillary Force of a Heated Droplet Drifting in a Viscous Liquid in the Field of External Temperature Gradient. High Temperature. 2002. V. 40. Pp. 105–111.
DOI: 10.1023/A:1014246518603

[36] Malai N.V., Ryazanov K.S., Shchukin E.R., Stukalov A.A. On the force acting on a heated spherical drop moving in a gaseous medium. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2011. V. 52. Pp. 553–559.
DOI: 10.1134/S0021894411040079

[37] Welch S.W. Transient thermocapillary migration of deformable bubbles. J. Colloid Interface Sci. 1998. V. 208, No. 2. Pp. 500-508.
DOI: 10.1006/jcis.1998.5883

[38] Yin Z., Gao P., Hu W., Chang L. Thermocapillary migration of nondeformable drops. Phys. Fluids. 2008. V. 20, No. 8. Pp. 082101-1–082101-20.
DOI: 10.1063/1.2965549

[39] Yin Z., Chang L., Hu W., Li. Q., Wang H. Numerical simulations on thermocapillary migrations of nondeformable droplets with large Marangoni numbers. Phys. Fluids. 2012. V. 24, No. 9. Pp. 092101-1–092101-18.
DOI: 10.1063/1.4752028

[40] Hadland P.H., Balasubramaniam R., Wozniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate to large Marangoni number and moderate Reynolds number in reduced gravity. Exp. Fluids. 1999. V. 26, No. 3. Pp. 240–248.
DOI: 10.1007/s003480050285

[41] Brady P.T., Herrmann M., Lopez J.M. Confined thermocapillary motion of a three-dimensional deformable drop. Phys. Fluids. 2011. V. 23, No. 2. Pp. 022101-1–022101-11.
DOI: 10.1063/1.3529442

[42] Wozniak G., Balasubramaniam R., Hadland P.H., Subramanian R.S. Temperature fields in a liquid due to the thermocapillary motion of bubbles and drops. Exp. Fluids. 2001. V. 31, No. 1. Pp. 84–89.
DOI: 10.1007/s003480000262

[43] Ma Ch., Bothe D. Direct numerical simulation of thermocapillary flow based on the Volume of Fluid method. Int J. Multiphase Flow. 2011. V. 37, No. 9. Pp. 1045–1058.
DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.06.005

[44] Alhendal Y., Turan A., Hollingsworth P. Thermocapillary simulation of single bubble dynamics in zero gravity. Acta Astronautica. 2013. V. 88. Pp. 108–115.
DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.03.017

[45] Alhendal Y., Turan A., Kalendar A., Abou-Ziyan H., El-shiaty R. Thermocapillary Bubble Migration at High Reynolds and Marangoni Numbers: 3D Numerical Study. Microgravity-Science and Technology. 2018. V. 30, No. 4. Pp. 561–569.
DOI: 10.1007/s12217-018-9643-4

[46] Ansys-Fluent: ANSYS Fluent User's Guide. ANSYS, Inc. 2011.

[47] Kang Q., Cui H.L., Duan L. On-board experimental study of bubble thermocapillary migration in a recoverable satellite. Microgravity Sci. Technol. 2008. V. 20, No. 2. Pp. 67–71.
DOI: 10.1007/s12217-008-9007-6

[48] Samareh B., Mostaghimi J., Moreau Ch. Thermocapillary migration of a deformable droplet. Int. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 73. Pp. 616–626.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.022

[49] Wu Z.-B., Hu W.R. Effects of Marangoni numbers on the thermocapillary drop migration: constant for quasi-steady state? J. Math. Phys. 2013. V. 54. Pp. 023102.
DOI: 10.1063/1.4792476

[50] Wu Z.-B. Thermocapillary migration of a droplet with a thermal source at large Reynolds and Marangoni numbers. Int. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 75. Pp. 704–709.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.011

[51] Wu Z.-B. Terminal thermocapillary migration of a droplet at small Reynolds numbers and large Marangoni numbers. Acta Mech. 2017. V. 228. Pp. 2347–2361.
DOI: 10.1007/s00707-017-1833-4

[52] Zhang B., Liu D., Chenga Yo., Xu J., Sui Y. Numerical investigation on spontaneous droplet/bubble migration under thermal radiation. Int. J. Therm. Sci. 2018. V. 129. Pp. 115–123.
DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.02.031

[53] Abu-Al-Sauda M.O., Popinet S., Tchelepia H.A. A conservative and well-balanced surface tension model. J. Comput. Phys. 2018. V. 371. Pp. 896–913.
DOI: 10.1016/j.jcp.2018.02.022

[54] Bratukhin Yu.K., Briskman V.A., Zuev A.L., Pshenichnikov A.F., Rivkind V.Ya. In book: [Experimental study of thermocapillary drift of gas bubbles in a liquid] *Gidromekhanika i teplomassoobmen v nevesomosti* (eds. by Avduevsky V.S., Polezhaev V.I.). M.: Nauka, 1982. Pp. 98–109 (in Russian).

[55] Bratukhin Yu.K., Zuev A.L. Thermocapillary drift of an air bubble in a horizontal Hele-Shaw cell. Fluid Dynamics. 1984. V. 19. Pp. 393–398.
DOI: 10.1007/BF01093902

[56] Balasubramaniam R., Lacy C.E., Woniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate values of the Marangoni number in reduced gravity. Phys. Fluids. 1996. V. 8, No. 4. Pp. 872–880.
DOI: 10.1063/1.868868

[57] Balasubramaniam R., Lavery J.E. Numerical simulation of thermocapillary bubble migration under microgravity for large Reynolds and Marangoni numbers. Numer. Heat Transfer. 1989. V. 16. Pp. 175—187.
DOI: 10.1080/10407788908944712

[58] Ma X. Numerical simulation and experiments on liquid drops in a vertical temperature gradient in a liquid of nearly the same density. Ph.D. Thes. in Chemical Engineering, Clarkson University, 1998.

[59] Bratukhin Yu.K., Kostarev K.G., Zuev A.L., Viviani A. Experimental study of Marangoni bubble migration in normal gravity. Int. J. Experiments in Fluids. 2005. V. 38, No. 5. Pp. 594–605.
DOI: 10.1007/s00348-005-0930-7

[60] Ma X., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Numerical simulation of thermocapillary drop motion with internal circulation. Numerical Heat Transfer, Part A. 1999. V. 35. Pp. 291–309.
DOI: 10.1080/104077899275254