Точное решение подмодели на четырехмерной подалгебре, состоящей из галилеевых переносов по осям координат[1]

Юлмухаметова Ю.В.*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются уравнения газовой динамики (УГД) в декартовой системе координат

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0$$

$$S_t + uS_x + vS_y + wS_x = 0, p = f(\rho, S),$$

где t — время, $\vec{x} = (x, y, z)$ — декартовы независимые переменные, $u = u(t, \vec{x})$, $v = v(t, \vec{x})$, $w = w(t, \vec{x})$ – компоненты вектора скорости, $\rho = \rho(t, \vec{x})$ – плотность, $p = p(t, \vec{x})$ – давление, $p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния, $S = S(t, \vec{x})$ – энтропия. В системе УГД уравнение состояния предполагается произвольного вида.

Подалгебра с номером 4.47 из [1] задается операторами $X_1 + aX_3 = \partial_x + a\partial_z$, $X_2 = \partial_y$, $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$, где a – некоторая постоянная. Инварианты подалгебры задают представление решения, которое имеет вид:

$$u = u(t),\ v = v(t, x, y, z),\ w = \frac{z - ax}{t} + w_1(t),$$

$$p = p(t),\ \rho = \rho(t),$$

где $w_1(t)$ – произвольная функция. После подстановки представления решения в уравнения газовой динамики получим решения

$$S = S_0,\ u = 0,\ w = \frac{z - ax}{t},$$

$$v = \frac{y + \Phi(x, \frac{z-ax}{t})}{t + 1},\ \rho = \frac{\rho_0}{t(t + 1)},$$

где S_0, ρ_0 – произвольные постоянные, Φ – произвольная функция двух переменных.

Таким образом, решение уравнений газовой динамики задается последними формулами и задает изоэнтропическое движение газа. Из представления решения определяются мировые линии движения частиц газа как решение системы дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{dx}{dt} = u,\ \frac{dy}{dt} = v,\ \frac{dz}{dt} = w.$$

Для решений уравнений газовой динамики система имеет вид.

$$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = \frac{y + \Phi(x, \frac{z-ax}{t})}{t + 1}, \frac{dz}{dt} = \frac{z - ax}{t}.$$

Решение последней системы задает мировые линии движения частиц:

$$x = x_0,\ y = (t + 1)v_0 - \Phi(x_0, w_0),\ z = ax_0 + tw_0,$$

где x_0, v_0, w_0 – локальные лагранжевые переменные. Последние равенства задают прямолинейный разлет частиц газа. Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым переменным равен $|J| = t(t + 1)$ и обращается в нуль при $t = -1$ и $t = 0$. Моменты времени $t = -1$ и $t = 0$ являются моментами коллапса частиц системы дифференциальных уравнений. Система совместна и имеет точное решение с одной произвольной функцией. Полученное решение описывает прямолинейный разлет частиц газа. Найдены моменты коллапса частиц.

Список литературы

[1] Хабиров С.В. Простые частично инвариантные решения // УМЖ. 2019. Т.11 № 1. С. 87–98.

[2] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019-2022 годы (№ 0246-2019-0052).