Колебания балки с учетом вращательного движения[1]

Сабитов К.Б.

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак

Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок, подверженных продольному натяжению, с учетом вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка [1, с. 317]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - \beta^2 u_{xxtt} - \gamma^2 u_{xx} = F(x,t), \quad (1)$$

где $\alpha^2 = E\,J/\rho\,S$, $\beta^2 = r^2$, $\gamma^2 = I/\rho$, S – площадь поперечного сечения балки, E – модуль упругости материала, $J = r^2 S$ – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, r – радиус инерции относительно линий, проходящей через ось и перпендикулярной к плоскости изгиба, ρ – линейная плотность балки, T – сила натяжения, приложенная к концам балки, $F(x,t)$ – непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу длины балки, $u(x,t)$ – смещение точек балки в момент времени t.

Отметим, что многие задачи о колебаниях стержней и балок имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей [2], [3].

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки длины l нужно задать граничные условия на концах $x = 0$ и $x = l$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подперты, т.е. свободно могут вращаться вокруг точки закрепления, то в этом случае граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (2)$$

В случае балки с наглухо закрепленными концами имеем условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (3)$$

Если оба конца свободны, то имеем следующие граничные условия:

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(0,t) - \alpha^2 u_{xxx}(0,t) = 0,$$

$$u_{xx}(l,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(l,t) - \alpha^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad (4)$$

$$0 \leqslant t \leqslant T.$$

Если один конец жестко закреплен, а другой свободен, то имеем

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0,$$

$$\beta^2 u_{ttx}(l,t) - \alpha^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (5)$$

Возможны и другие многочисленные случаи задания граничных условий.

Начальные условия такие же, как и в случае уравнения струны:

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (6)$$

Уравнение (1) рассмотрим в области

$$D = \{(x,t)\,|\,0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

где l и T – заданные положительные числа, и поставим следующие задачи

Начально-граничные задачи. *Найти в определенной области D функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}), \quad (7)$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D, \quad (8)$$

удовлетворяет начальным условиям (6) *и одному из граничных условий* (2) – (5)*, где $F(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.*

Отметим, что эти задачи изучены нами в работах [4 – 6] для уравнения (1), когда $\beta = 0$ и $\gamma = 0$.

В данной работе доказаны теоремы единственности решений поставленных начально-граничных задач. В случае, когда концы балки могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, решение задачи построено в явном виде как сумма ряда Фурье и установлена устойчивость решения от начальных данных и правой части.

Список литературы

[1] Рэлей Л. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 503 с. (изд. 2).

[2] Крылов А.Н. Вибрация судов. М., 2012. 447 с. (изд. 2).

[3] Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.

[4] Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Сам. гос. техн.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19, № 2. С. 311 – 324.

[5] Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 1. С. 89 – 100.

[6] Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. уравнения, 2017. Т. 53, № 5. С. 665 – 671.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-41-020516)