



ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Аналитический обзор трудов конференции «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»

Урманчиев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Представленный аналитический обзор включает краткое описание трудов, присланных на конференцию «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения». Обзор состоит из семи тематических разделов, соответствующих направлениям исследований работ, представленных авторами. В перечень разделов, традиционно присутствующих на конференциях по многофазным системам, добавлен раздел «Микрогидродинамика и модели медико-биологических исследований», который отражает одну из наиболее интенсивно развивающихся областей науки и, в то же время, тесно связан с идеями и методами механики многофазных сред. Работы, представляющие такие новые направления, как исследования газовых гидратов и гидроразрыва пласта, вошли в раздел «Теория и практика многофазной фильтрации». В обзоре рассмотрено более шестидесяти работ, в которых достигнуты наиболее яркие результаты, и в наибольшей степени соответствующих духу конференции. Однако, отметим, что общее число присланных работ превышает сто двадцать.

**Ключевые слова:** многофазные системы, турбулентность, кавитация, волновые процессы, пористые среды, капли, пузырьки, фильтрация, теплообмен, гидродинамическая устойчивость, конвекция, микрогидродинамика, численные методы, газовые гидраты, гидравлический разрыв пласта

Представленные на конференцию «Многофазные системы» тезисы научных работ охватывают довольно широкий спектр исследований по различным вопросам теории, экспериментальных исследований и приложений механики многофазных сред. Разнообразие тем планировавшихся выступлений связано, прежде всего, с кругом научных интересов академика Роберта Искандеровича Нигматулина, в честь юбилея которого и готовилось проведение конференции.

По существу затронутых проблем большинство докладов можно отнести к следующим направлениям:

1. Многофазные потоки: турбулентность и кавитация в технологических процессах, установках и аппаратах;
2. Волновые процессы в дисперсных и пористых средах;

3. Динамика капель, одиночных пузырьков, пузырьков кластеров при акустическом и вибрационном воздействии;
4. Теория и практика многофазной фильтрации;
5. Теплообмен при течении неоднородных жидкостей, конвекция, и гидродинамическая устойчивость;
6. Микрогидродинамика и модели медико-биологических исследований;
7. Аналитические и численные методы в механике сплошных сред.

### 1. Многофазные потоки: турбулентность и кавитация в технологических процессах, установках и аппаратах

Фундаментальные исследования в области турбулентных течений многофазных потоков на основе метода фазовых полей были представлены

в работе Э.Е. Сона [1]. В ней приведён сравнительный анализ различных моделей турбулентности и предложены алгоритмы для их численной реализации. В экспериментальной части исследований обнаружен эффект левитации капель над нагретой поверхностью, для математического описания которого построена модель межфазных процессов с учётом неконгруэнтного равновесия межфазной границы. Проведённые экспериментальные и теоретические исследования привели к созданию корректной методики расчётов горения в рабочих каналах ЖРД и ПВРД.

В механике многофазных сред огромную роль играют особенности взаимодействия дисперсных частиц с поверхностью. При этом, как правило, частицы считаются сферическими, а их отражение от поверхности определяется на основе коэффициентов восстановления для скорости центра масс. Реальные частицы часто имеют призматическую форму или плоские грани, что может быть связано с кристаллической структурой материала, поэтому при их моделировании следует учитывать случайную ориентацию относительно поверхности в момент удара. В работе С.В. Панфилова и Ю.М. Циркунова [2] построена математическая модель для изучения рассеяния несферических частиц при отскоке, влияния параметров отражения на коэффициенты восстановления компонент скорости центра масс частиц. Авторами были построены пространственные индикатрисы рассеяния, а анализ результатов численного моделирования выявил существенную роль повторных ударов при отражении несферических частиц, причём потери кинетической энергии для несферических частиц оказались существенно меньше, чем для сферических.

Работа С.А. Груздя и М.А. Корепанова [3] посвящена важной задаче оптимизации состава ракетного топлива и геометрии сопла. Разработанная математическая модель процесса горения топлива предназначена для исследования течения многофазного потока с целью минимизации спонтанного осаждения оксида алюминия на стенках сопла. Результаты расчётов позволяют точно определить начало спонтанной конденсации и вычислить размеры сверхкритических кластеров частиц оксида алюминия, которые приводят к нештатным режимам горения.

Для измерения параметров потоков газожидкостных смесей в работе И.А. Давлетшина, А.Н. Михеева и их соавторов [4] представлена эталонная расходомерная установка и описаны принципиальные подходы при её разработке. В экспериментальной работе И.И. Гогонина,

А.И. Катаева и В.И. Сосунова [5] установлены неустойчивые режимы дистилляционной колонны криогенной установки и проведены исследования процесса захлёбывания. Результаты экспериментов были описаны зависимостями в безразмерных координатах.

Снижению уровня кавитации в рабочих частях гидротурбин и трубопроводных системах, содержащих газожидкостные смеси, посвящены работы Г.Р. Аветисяна [6] и его сотрудников [7]. Их идея состоит в применении многорежимных стабилизаторов давления и расхода жидкости. Следует отметить, что рабочие схемы защищены патентами.

Численное исследование особенностей истечения струи водяного пара из сосуда высокого давления и процесса формирования струи выполнено в работе Р.Х. Болотновой и Э.А. Нурисламовой [8]. Ими установлено, что причиной возникновения пульсаций в струйном течении, наблюдаемых в экспериментах других авторов, является образование тороидальных вихрей вблизи оси симметрии струи.

Задача, связанная с технологиями разделения суспензий, рассмотрена в работе Р.Р. Юлмухаметовой, А.А. Мусина и Л.А. Ковалёвой [9]. Математическая модель процесса гравитационного осаждения построена в однофазном приближении с учётом межчастичного взаимодействия. Результаты исследования зависимости величины осевшего слоя от физических параметров суспензии были сопоставлены с экспериментальными данными авторов.

Численное исследование структуры турбулентного газожидкостного потока в вертикальных трубах представлено в работе Т.В. Богатко, П.Д. Лобанова, М.А. Пахомова и П.К. Даса (P.K. Das) [10]. В ней обсуждаются результаты расчётов распределения воздушных пузырьков по сечению трубы, выполненные по различным моделям, созданным ранее. На основании сделанных оценок предложена новая модель, учитывающая достоинства предыдущих. В ней полидисперсность двухфазного течения описывается методом дельта-аппроксимации с учётом процесса дробления и коалесценции пузырьков. При этом используется эйлерово описание с учётом обратного влияния пузырьков на осреднённые характеристики и турбулентность несущей фазы. В итоге результаты расчётов продемонстрировали хорошее совпадение с экспериментальными данными.

## 2. Волновые процессы в дисперсных и пористых средах

Вопросы идентификации результатов акустического зондирования нефтяного пласта требуют решения задач о взаимодействии акустических волн с различного рода неоднородностями. В этой связи в работе А.А. Губайдуллина, О.Ю. Болдыревой и Д.Н. Дудко [11] приведены результаты математического моделирования распространения волн в высокопроницаемом слое пористой среды, содержащем цилиндрическую полость заполненную жидкостью. Построены закономерности изменения скорости распространения сигнала и декремента затухания в зависимости от параметров высокопористого слоя.

Моделированию эффекта акустической ловушки для коагуляции и очистки резервуаров от дисперсных частиц посвящена работа Д.А. Губайдуллина, П.П. Осипова и Р.Р. Насырова [12]. Установлено, что максимальная скорость дрейфа частиц достигается на границе между образующимися в резонаторе вихрями Шлихтинга и Рэлея.

Были представлены работы по изучению эффектов воздействия ударных волн на пористые среды и пены. К этой категории работ следует отнести экспериментальное исследование А.Т. Ахметова, М.А. Азаматова и А.Ф. Мухаметзянова [13], связанное с эволюцией воздушной ударной волны, при её переотражении от границ насыпной пористой среды. Отмечается различие в показаниях датчиков в случаях пористой среды насыщенной жидкостью с микропузырьками и дегазированной жидкостью. Обнаружено, что наиболее сильное изменение структуры импульсов, проходящих через насыпную среду падающей и переотраженной волн, наблюдается именно в сухих насыпках.

В работе К.И. Башировой и К.И. Михайленко [14] представлены результаты численного исследования эволюции ударных волн в слое лёгких упругих гранулированных частиц. В случае отражения от наиболее лёгких гранул волна приобретает двухпиковую конфигурацию. По мнению авторов подобное поведение можно объяснить подвижностью гранулированной среды.

Изучение демпфирующих свойств водной пены в условиях ударного нагружения выполнено в работе Р.Х. Болотновой и Э.Ф. Гайнуллиной [15]. Термодинамические свойства газовой фазы описывались уравнением состояния Пенга–Робинсона, а водной фазы — уравнением Ми–Грюнайзена. В математической модели процесса были учтены динамическая вязкость, межфазный теплообмен, синерезис пены и ряд других физических факторов.

Установлено, что учёт такого явления как синерезис сопровождается уменьшением влияния диссипативных процессов и усиливает амплитуду ударной волны. Получено хорошее соответствие результатов расчётов с экспериментальными данными.

Несколько очень интересных работ были посвящены воздействию вибраций на двухфазные системы. Так, в работе Т.П. Любимовой и О.О. Фатталова [16] изучалось поведение сферических дисперсных частиц различной плотности, помещённых в водный раствор глицерина и подвергнутых горизонтальным вибрациям. Установлено, что при некоторых значениях амплитуды скорости вибраций частицы формируют устойчивые периодические структуры в виде линейных цепочек или слоёв. А при высоких амплитудах скорости вибраций, напротив, происходило полное разделение фаз: все частицы собирались у одной из боковых стенок кюветы. В другой работе Т.П. Любимовой и её коллег [17] представлены исследования динамики кавитационных пузырьков вблизи твёрдых поверхностей с различными свойствами смачивания при воздействии ультразвука. В проведённых экспериментах было обнаружено, что динамика пузырьков вблизи твёрдой поверхности зависит от степени смачиваемости поверхности и от концентрации газа, растворённого в жидкости, например, гидрофобная поверхность тефлона способна удерживать большее число парогазовых пузырьков, которые остаются у поверхности даже после отключения ультразвука.

Особенности влияния вибраций на тепловую конвекцию в двухслойной системе, состоящей из слоя жидкости и пористой среды, насыщенной той же жидкостью, были исследованы в работе Е.А. Колчановой [18]. Численное моделирование задачи термовибрационной конвекции позволило установить, что в двухслойной системе конвекция может возникнуть либо в виде длинноволновых валов, охватывающих все слои, либо в виде коротковолновых валов, локализующихся только в слое жидкости над порами. Кроме того, показано, что в условиях невесомости с ростом угла ориентации оси вибрации должен происходить резкий переход от длинноволновой термовибрационной конвекции к коротковолновой. При продольной вибрации отмечено проникновение осреднённого течения в пористый слой.

В работе Н.В. Колчанова и Е.А. Колчановой [19] при изучении тепловой конвекции в аналогичной двухслойной пористой системе с ростом относительного числа Рэлея обнаружены осцилляционные режимы из-за дополнительных конвективных валов, образующихся сначала в верхнем

тонком слое жидкости, а затем и в пористой зоне вблизи нижней горячей границы системы. Вследствие этого и тепловой поток вовлекается в режим пульсаций с амплитудой, достигающей до 40% от среднего значения.

### 3. Динамика капель, одиночных пузырьков, пузырьков кластеров при акустическом и вибрационном воздействии

На конференциях «Многофазные системы», проводимых в г. Уфе, неизменный интерес вызывали и вызывают работы по исследованию коллапса пузырьков при воздействии интенсивных акустических полей. На седьмой по счёту конференции в этом направлении были представлены исследования А.А. Аганина и его коллег. Так, в работе А.А. Аганина и Т.Ф. Халитовой [20] приведён краткий анализ работ по явлению сверхсильного сжатия пузырьков в различных жидкостях и выявлены механизмы усиления ударной волны, одним из которых является медленный рост возмущений на поверхности пузырька. К таким жидкостям относится, например, ацетон и другие органические жидкости. В работе на основе численного моделирования проведён анализ процесса схождения пузырька в ацетоне и тетрадекане. Установлено, что нарушение сферичности ударных волн в пузырьках возникает из-за наличия малой начальной несферичности, которая задавалась в виде чётных сферических гармоник.

В работе Д.Ю. Топоркова [21] предложена модификация широкодиапазонного уравнения состояния Нигматулина–Болотновой для проведения численных расчётов динамики пузырьков при температурах ниже  $663^{\circ}\text{K}$  с учётом изменения термодинамических параметров, реализующихся в метастабильной области при высокоскоростном адиабатическом сжатии пара.

Хорошее соответствие данным эксперимента Лаутерборна и Курца (W. Lauterborn, T. Kurz, 2010) удалось получить в расчётах А.А. Аганина и И.Н. Мустафина [22], выполненных по модели парового пузырька с учётом фазовых превращений.

Взаимодействие акустических волн, наклонно падающих на поверхность жидкости, содержащей слой из многофракционных пузырьков, рассмотрено в работе Р.Н. Гафиятова [23]. Автором установлено, что увеличение угла падения приводит к уменьшению коэффициента прохождения и увеличению коэффициента отражения во всем диапазоне частот. В работе также представлен обзор литературы по различным моделям, описывающим распространение волн акустического диапазона в

слоистых пузырьковых системах.

В работе У.О. Агишевой и М.Н. Галимзянова [24] рассмотрено распространение малых возмущений в парогазовой смеси. В результате численного исследования получены линии границ устойчивости паровоздушных пузырьков в пространстве параметров для различных значений давления.

С применением сингулярного метода В.Л. Натягановым и С.А. Масловым [25] найдены решения ряда задач электрогидродинамики для сферических капель с поверхностным зарядом простого или двойного электрического слоя. Затем эти сингулярные решения методом осреднения по ансамблю возможных конфигураций были обобщены на однородные суспензии и получены их интегральные характеристики (такие, как эффективные значения вязкости, электропроводности и диэлектрической проницаемости).

Экспериментальному изучению динамического взаимодействия капель с поверхностью жидкости посвящено множество работ. В научной литературе описаны довольно детальные и тонкие эксперименты, выполненные, в частности, в Институте проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского под руководством Ю.Д. Чашечкина. Данные эксперименты получили достаточно подробное теоретическое обоснование. В этой связи нельзя не отметить работу А.Г. Терентьева [26], в которой предложена оригинальная математическая модель, описывающая основные события, сопровождающие падение капли на поверхность жидкости и дальнейший её распад.

Взаимодействие двух пузырьков различного радиуса в жидкости с заданной плотностью и вязкостью рассмотрена в работе А.Г. Петрова и Ш.В. Сандуляну [27]. В результате осреднения уравнений динамики пузырьков получено уравнение для зазора между пузырьками, а их притяжение или отталкивание связано со знаком осреднённой силы. Показано, что при отношении радиусов  $1 \leq R_2/R_1 < 2.8$  пузырьки всегда сливаются для любого безразмерного параметра вязкости. А в работе Ш.В. Сандуляну [28] вычислены силы вязкого и невязкого взаимодействия двух пузырьков, пульсирующих в жидкости.

### 4. Теория и практика многофазной фильтрации

Вопросы многофазной фильтрации и математического моделирования разработки нефтяных месторождений оказались в центре внимания наибольшего числа исследователей, приславших свои работы на конференцию.

Методика построения и адаптации цифровой

3D модели месторождения представлена в работе В.А. Байкова и его коллег [29]. Безусловным достоинством этой работы является то, что параметры модели согласованы с фактическими данными эксплуатации скважин и исходной геолого-геофизической информацией. При записи замыкающих условий в системе уравнений фильтрации учитывалась необходимость синхронной корректировки параметров петрофизической, геологической и гидродинамической подмоделей с учётом истории разработки. Распознавание фаций проводилась методами машинного обучения, что способствовало повышению точности прогнозируемых параметров.

При решении проблем разработки низкопроницаемых трещиноватых битуминозных пластов с возможной генерацией жидких углеводородов в работе М.Н. Кравченко, Н.Н. Диевой и Е.М. Вожегова [30] создана гидроперколяционная математическая модель фильтрации с учётом химических реакций между скелетом и активными реагентами, а также перетоком подвижных углеводородов из матрицы в поровое пространство. Вычислительные эксперименты авторов продемонстрировали способность математической модели прогнозировать нефтеотдачу реальных месторождений при использовании термохимических методов их разработки с учётом совокупного влияния физико-химических процессов.

Для эффективного управления процессами извлечения нефти применяют потокоотклоняющие технологии с использованием полимерных и полимер-дисперсных растворов. В очень интересной работе К.М. Фёдорова, А.П. Шевелёва и других авторов [31] получено решение обратной задачи фильтрации полимерных оторочек, на основе которого построен алгоритм интерпретации экспериментальных данных. В результате, на основании экспериментальных исследований, авторами были определены константа адсорбции Генри, недоступный объём пор для полимера, фильтрационный коэффициент и ряд других важных фильтрационных параметров.

Экспериментальное исследование закономерностей процесса коагуляции частиц суспензии на модельных образцах насыпной пористой среды было выполнено в работе С.В. Димова [32].

Во многих задачах механики многофазных сред, например, при исследовании фильтрации в пористых средах возникает необходимость задания свойств среды. Так как физические параметры реальных пород распределены случайным образом, то, естественно, следует поставить задачу о её моделировании с помощью случайной плотной

упаковкой сферических тел, что и было сделано в работе А.В. Мишина [33].

В работе А.А. Валиева [34] проведено экспериментальное исследование развития неустойчивости Тэйлора–Сэффмана при вытеснении более вязкого флюида из пористой среды различными флюидами меньшей вязкости. Установлено, что при вытеснении дистиллированной водой и газом «вязкие пальцы» имеют сильно ветвящуюся структуру и центроориентированность. А при вытеснении раствором ПАВ — более широкий охват во входной зоне и, соответственно, меньшую остаточную нефтенасыщенность до прорыва, что связано с большим объёмом каждого «пальца». Исследование, связанное с процессом «доотмыва» высоковязкого флюида после прорыва вытесняющего агента проведено в работе А.А. Валиева и А.Д. Низамовой [35].

Пример визуализации вытеснения нефти предложен в работе А.И. Муллаянова и Ю.А. Питюк [36]. Модель пористой среды состояла из двух прозрачных пластинок, пространство между которыми было заполнено стеклянными шариками. Оценка водонасыщенности в процессе вытеснения была проведена на основе результатов цифровой обработки изображений.

Во избежание негативного влияния водонефтяных эмульсий в процессе добычи нефти группой авторов под руководством Л.А. Ковалёвой [37] выполнено исследование по воздействию неоднородного переменного низкочастотного электрического поля на систему типа «вода в масле». Для этой цели была изготовлена оптически прозрачная экспериментальная ячейка, позволяющая визуализировать коалесценцию микрокапель воды в эмульсии. В ходе экспериментов получены сведения о разделении эмульсии в зависимости от амплитуды и частоты электрического поля.

В работе А.И. Филиппова [38] в задаче об упругом режиме фильтрации вытеснения пластовой нефти представлена новая формула для коэффициента, характеризующего упругие фильтрационные свойства жидкой фазы в пористой среде. Применение полученной формулы, по мнению автора, позволит получать решения в задачах фильтрации в низкопроницаемых коллекторах, имеющие прозрачную физическую интерпретацию при предельных значениях пористости. Асимптотическое представление решения задачи о распределении давления в нефтегазовом пласте, содержащем участки с перфорацией, рассмотрено в работе А.И. Филиппова и П.Н. Михайлова [39].

Значительное внимание было уделено развитию численных и аналитических методов решения

задач фильтрации для их применения в корпоративных симуляторах. Так, в работе А.В. Жонина и Ю.В. Мартыновой [40] предложен подход к гидродинамическому моделированию с использованием тороидальной сетки для задач выбора систем разработки. В итоге, при решении задач оптимизации систем разработки месторождений, авторам удалось повысить точность, добиться существенного ускорения времени расчётов и корректной работы экономических опций.

Для оптимизации численного решения задач фильтрации с точки зрения соотношения точности и вычислительных затрат Т.Н. Киреевым и Г.Т. Булгаковой [41] предложен метод сеток Вороного в комбинации с двухточечной аппроксимацией потока.

Математическая модель фильтрации с дробными производными по пространственным переменным предложена Н.С. Белевцовым и С.Ю. Лукашук [42] для исследования течения флюидов в сложных неоднородных нефтегазовых пластах с естественной и техногенной трещиноватостью. При этом авторами использовалось дробно-дифференциальное обобщение закона Дарси с потенциалом Рисса. Ими показано, что для некоторых частных случаев исходную задачу путём разделения переменных можно свести к задаче типа Штурма–Лиувилля для дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Бесселя и получить автомодельные решения.

Исследования фильтрационных процессов актуальны не только в связи с разработкой нефтяных и газовых месторождений, но и при решении природоохранных проблем. Например, работа Э.Н. Береславского и Б.А. Мкртчяна [43] посвящена изучению режима грунтовых вод в каналах, заполненных водой, с учётом фильтрации, как через дно, так и через откосы. Во внимание было принято также испарение со свободной поверхности. При исследовании течения была сформулирована смешанная краевая многопараметрическая задача теории аналитических функций, решение которой было получено с помощью метода П.Я. Полубариновой-Кочиной. Для заданных граничных условий для задачи подземной гидромеханики разработан алгоритм расчёта размеров зоны насыщения, а также искомого фильтрационного расхода. Решение авторам удалось получить в замкнутой форме.

В работе С.И. Перегудина, Э.С. Перегудиной и Е.С. Холодовой [44] поставлена задача о волновом взаимодействии потока жидкости с сыпучим дном и в предположении малых амплитуд получено её

аналитическое решение. Определены условия волнообразования на сыпучей поверхности.

Исследования процессов фильтрации затрагивает и тематику, связанную с газовыми гидратами. Как объект исследования они обладают уникальными свойствами, дающими возможность широкого их применения в топливной энергетике. Природные отложения гидрата метана могут стать предметом разработки углеводородного сырья уже в ближайшем будущем. При этом газовые гидраты можно не только добывать, но и производить с целью хранения природного газа. В работе Н.Г. Мусакаева, М.К. Хасанова и А.А. Губайдуллина [45] установлены принципиально важные для практики критерии образования газовых гидратов в объёмной области при нагнетании газа в пористый коллектор, насыщенный газом и водой. Во-первых, коэффициент пьезопроводности пласта должен быть больше его коэффициента температуропроводности, а во-вторых, давление, под которым газ закачивается в пористый коллектор, должно быть выше, чем равновесное давление гидратообразования при температуре пласта в исходном состоянии. Иначе гидратообразование будет происходить на фронтальной поверхности.

Численному моделированию процесса образования гидрата при продувке холодного газа через слой снега посвящена работа С.В. Беловой, А.С. Чиглинцевой и О.В. Дударевой [46]. На основании расчётных данных по одномерной равновесной модели авторами отмечается, что с уменьшением проницаемости массива образование гидрата происходит интенсивнее, понижение температуры снежного массива приводит к интенсификации перехода снега в гидратное состояние.

Разработка газогидратных месторождений и использование газовых гидратов сопряжены с вопросами пожаро- и взрывобезопасности. Поэтому работы И.К. Гималтдинова и М.В. Столповского [47, 48], посвящённые моделированию горения газовых гидратов, также представляют практический интерес.

В технологиях добычи нефти гидравлический разрыв пласта занимает особое место и активно применяется на практике. Естественно, что ряд работ, представленных на конференции, был посвящён различным аспектам изучения особенностей развития трещин в пористых средах. В последнее время (в свете значительных достижений в численном моделировании гидроразрыва) появился интерес к лабораторным исследованиям этого процесса. Изучению гидроразрыва на модельной установке посвящена работа Г.В. Белякова, А.А. Таировой и других авторов [49]. На основе сравнения экс-

периментальных наблюдений с проницаемыми и непроницаемыми пористыми средами авторами сделан вывод об отсутствии влияния фильтрации жидкости на процесс образования и распространения трещины. Кроме этого, ими получена зависимость проницаемости среды от давления, имитирующего в установке горное давление.

Известно, что в коллекторах с малой проницаемостью и большой вязкостью нефти продолжительность нестационарных процессов перераспределения давления может быть одного порядка с характерным временем фильтрации между скважинами. Это обстоятельство привело к необходимости развития теории нестационарной фильтрации в пластах с трещинами гидроразрыва, которая и была представлена в работе И.Л. Хабибуллина и А.А. Хисамова [50]. Решения рассмотренных краевых задач были получены методом преобразований Лапласа.

Ряд задач по моделированию фильтрации в трещинах гидроразрыва пласта был рассмотрен в работах В.Ш. Шагапова и его коллег [51–53]. Так, на основе предложенного метода последовательной смены стационарных состояний получены формулы для изменения давления в трещине и объёмного расхода флюида на единицу высоты трещины при переменных режимах работы скважины.

Замечательный пример приложения идей механики многофазных сред в решении проблем биотехнологии приведён в работе А.А. Саламатина и А.Г. Егорова [54]. Ими рассмотрен технологический процесс извлечения ценных биологически активных соединений из молотого растительного сырья, называемый сверхкритической флюидной экстракцией, и разработана математическая модель для интерпретации данных эксперимента и прогнозирования стоимости конечного продукта с учётом полидисперсности молотого сырья.

## **5. Теплообмен при течении неоднородных жидкостей, конвекция, и гидродинамическая устойчивость**

Во многих задачах гидродинамики многофазных течений ключевым фактором в развитии динамических процессов является теплообмен. Естественно, что вопросам, связанным с изучением взаимодействия гидродинамических параметров потока с температурными полями, уделено должное внимание и в работе конференции.

М.А. Пахомовым и В.И. Тереховым [55] было представлено обширное исследование, посвящённое численному моделированию двухфазного турбулентного пристенного потока в системах теплозащиты энергетических установок. С помощью раз-

работанного алгоритма решения задачи в трёхмерной области была изучена структура течения и тепловая эффективность газочапельной завесы при её вдуве через наклонные цилиндрические отверстия в рабочий канал. В математической модели перенос компонент Рейнольдсовых напряжений производился с учётом двухфазности течения. Авторами показано, что при добавлении капель в поток пристенного охладителя происходит значительное увеличение эффективности тепловой завесы: она возрастает практически в два раза по сравнению с однофазным течением, что даёт основание считать такие завесы перспективными с точки зрения их применения на практике.

В периоды протаивания мёрзлых грунтов для их стабилизации используются охлаждающие устройства — термостабилизаторы. Но в этих случаях в пористой среде возникают градиенты температуры, вызывающие конвективное течение. Оценке влияния конвективного теплопереноса на процесс охлаждения водонасыщенной пористой среды посвящена работа О.А. Симонова и Л.Н. Филимоновой [56]. Определён критерий, при котором вклад конвекции в переносе тепла может стать преобладающим. Авторами учтена особенность изменения плотности воды, обусловленная наличием максимума в окрестности +4°C.

В работах А.Ф. Пашали и В.Г. Михайлова [57] разработаны методы расчёта гидравлического сопротивления участка трубопровода с учётом влияния теплопереноса и структуры течения смеси вода–нефть, что имеет большое значение при проведении гидравлических расчётов промышленных трубопроводных систем, проложенных на реальном рельефе.

Определение критерия устойчивости течения жидкостей, в которых вязкость испытывает существенное изменение в рабочем диапазоне температур, выполнено в работе А.Д. Низамовой, В.Н. Киреева и С.Ф. Урманчеева [58]. Установлено снижение критического числа Рейнольдса при увеличении параметра термовязкости — показателя степени в экспоненциальной зависимости вязкости от температуры и, соответственно, увеличение области неустойчивых режимов течения жидкости в каналах с достаточно интенсивным теплообменом.

## **6. Микрогидродинамика и модели медико-биологических исследований**

Формирование современных представлений о развитии гидродинамики существенным образом связано с проблемами микрогидро-

динамики, в частности, при создании микрожидкостных устройств. В работе Г.В. Барткуса и В.В. Кузнецова [59] отмечается, что именно эти устройства являются мощным инструментом для развития эффективных и ресурсосберегающих технологических процессов. Их исследование направлено на изучение детальной структуры двухфазного газожидкостного течения в микроканале, для определения его локальных характеристик методом LIF (Laser-Induced Fluorescence), в результате чего была выявлена зависимость толщины пленки жидкости от расхода газовой и жидкой фаз.

При рассмотрении ламинарных и турбулентных течений в ячейке Хеле–Шоу в длинноволновом приближении в работе В.Ю. Ляпидевского и А.А. Чеснокова [60] была решена задача о формировании слоя смешения и турбулентной струи в микроканалах.

Работа В.Я. Рудяка и Д.С. Третьякова [61] посвящена экспериментальному исследованию вязкости и реологических свойств наножидкостей, их теплопроводности и электропроводности. Авторы обнаружили, что при увеличении концентрации частиц наножидкости приобретают свойства псевдопластической или вязкопластической жидкости. Уменьшение размера частиц также способствует проявлению неньютоновских свойств наножидкостей. Кроме того, показано, что на реологию наножидкостей с углеродными нанотрубками существенно влияет температура, причём с увеличением температуры растёт параметр консистентности.

В работе, представленной группой авторов под руководством Д.Б. Хисматуллина [62], предпринята попытка определения миграционного потенциала раковых клеток. С этой целью была разработана и изготовлена миграционная ячейка, в которой удалось установить ряд закономерностей, связанных с активностью раковых клеток и зафиксировать их миграцию по направлению градиента концентрации хемоаттрактанта в микроканалах.

Исследования в области медико-биологических проблем, связанных с системой кровеносных сосудов и капилляров, также является перспективной сферой приложения механики многофазных систем. Об этом свидетельствует работа коллектива под руководством А.П. Чупахина [63] по математическому моделированию течения крови в сосудах головного мозга при наличии аномалий типа церебральных аневризм. Рассмотрены конфигурации кровеносного сосуда с различными параметрами аневризмы. Модель предусматривает анализ полной энергии гидроупругой системы, складывающейся из энергии потока крови, упругой энер-

гии стенки сосуда и энергии её изгиба. На основе численного анализа с использованием промышленного пакета ANSYS CFX получены диаграммы, связывающие давление и скорость потока в модельной гидроупругой системе. Впервые результаты вычислительного эксперимента удалось совместить с данными наблюдений внутрисосудистого мониторинга кровотока, проводимого авторами совместно с нейрохирургами Национального медицинского исследовательского центра им. академика Е.Н. Мешалкина (Новосибирск).

## 7. Аналитические и численные методы в механике сплошных сред

Развитие методов решения дифференциальных уравнений является одной из основных задач механики. Мощным инструментом построения частных решений является симметричный анализ. В этом направлении С.В. Хабировым [64] была представлена работа по изучению инвариантных решений с линейным полем скоростей для идеальной газовой динамики. У полученных решений изучено движение звуковых поверхностей в зависимости от уравнений состояния и выведены уравнения для звуковых характеристик. В работе Ю.В. Юлмухаметовой [65] построено точное решение, описывающее прямолинейный разлёт частиц газа и найдены моменты коллапса частиц этого газа. Для системы уравнений газовой динамики с уравнением состояния одноатомного газа Р.Ф. Никаноровой [66] определены условия, при которых можно построить инвариантные подмодели ранга 1, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Д.Т. Сираевой [67] построены инвариантные подмодели ранга 1, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнений гидродинамического типа.

Аналитическое исследование стационарных неоднородных экзотермических течений приведено в работе А.Н. Богданова [68]. Оно предполагает использование асимптотических разложений по малому параметру. Автором установлено: чтобы избежать явлений, связанных с тепловым кризисом при одномерном течении воздуха, изменение безразмерной скорости потока должно находиться в пределах  $0.58 \leq u \leq 1$ .

Концепция метода сглаженных частиц послужила для О.П. Стояновской и её коллег [69] основой при создании нового эффективного метода расчёта интенсивного межфазного взаимодействия в двухфазной полидисперсной среде для многожидкостной гидродинамики сглаженных частиц. Авторы на конкретных примерах продемонстриро-

вали, что метод позволяет получать высокую точность результатов моделирования с шагами по пространству и по времени, независимыми от малых параметров задачи.

Перечисленные работы отнюдь не исчерпывают всего перечня тезисов, присланных на конференцию «Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения». В настоящий обзор были включены, прежде всего, работы, непосредственно относящиеся к проблемам механики многофазных сред.

## Список литературы

- [1] Сон Э.Е. Гидродинамика и турбулентность многофазных течений // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 95.
- [2] Панфилов С.В., Циркунов Ю.М. Рассеяние несферических частиц при отскоке от поверхности, обтекаемой потоком газозвеси // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 75.
- [3] Груздь С.А., Корепанов М.А. Математическая модель конденсации оксида алюминия в соплах // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 33.
- [4] Давлетшин И.А., Михеев А.Н., Михеев Н.И., Кратиров Д.В. Разработка эталонной расходомерной установки для потоков газожидкостных смесей // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 36.
- [5] Гогонин И.И., Катаев А.И., Сосунов В.И. Экспериментальное исследование режимов неустойчивости двухфазного потока в дистилляционной колонне // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 32.
- [6] Аветисян Г.Р. Устранение кавитационных явлений в рабочих частях гидротурбин // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 4.
- [7] Аветисян Г.Р., Гаспарян А.С., Симонян А.А. Управление волновыми и вибрационными процессами в трубопроводных системах содержащих двухфазную среду: жидкость–газ // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 5.
- [8] Болотнова Р.Х., Нурисламова Э.А. Исследование динамики кавитирующей струи // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 21.
- [9] Юлмухаметова Р.Р., Мусин А.А., Ковалева Л.А. Численное исследование ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости со взвешенными твердыми частицами в наклонном канале // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 124.
- [10] Богатко Т.В., Лобанов П.Д., Пахомов М.А., Das P.K. Моделирование динамики распределения пузырьков по сечению канала. Методы дельта-аппроксимации и Population Balance Equation // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 18.
- [11] Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Распространение волн в высокопроницаемом слое в пористой среде, пересекемом заполненной жидкостью цилиндрической полостью // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 34.
- [12] Губайдуллин Д.А., Осипов П.П., Насыров Р.Р. Акустические ловушки в резонаторе // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 35.
- [13] Ахметов А.Т., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф. Изменение структуры ударных волн в насыпных средах при переотражении // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 10.
- [14] Баширова К.И., Михайленко К.И. Об отражении ударной волны от гранулированного слоя средней концентрации // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 13.
- [15] Болотнова Р.Х., Гайнулина Э.Ф. Анализ влияния синергизма и реологических свойств водной пены на снижение интенсивности ударного воздействия // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 20.
- [16] Любимова Т.П., Фатталов О.О. Динамика двухфазных систем под действием горизонтальных вибраций линейной поляризации // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 60.
- [17] Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Фатталов О.О., Кучинский М.А. Динамика парогазовых пузырьков в жидкости под действием ультразвука при различной концентрации газа растворенного в жидкости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 59.
- [18] Колчанова Е.А. Нелинейная конвективная динамика жидкости в двойном слое с пористой зоной под действием высокочастотной вибрации в невесомости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 54.
- [19] Колчанов Н.В., Колчанова Е.А. Конвективный эффект удвоения волнового числа в жидкостном слое с неоднородной пористой средой // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 53.
- [20] Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Деформации ударных волн в кавитационных пузырьках в ацетоне и тетрадекане // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 7.
- [21] Топорков Д.Ю. Модификация уравнения состояния Нигматулина–Болотновой для случая высокоскоростного сжатия пара тетрадекана // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 100.
- [22] Аганин А.А., Мустафин И.Н. Импульс давления в жидкости при коллапсе кавитационного пузырька в воде // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 6.
- [23] Гафиятов Р.Н. Особенности падения акустических волн на слой многофракционной пузырьковой жидкости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 28.
- [24] Агишева У.О., Галимзянов М.Н. Особенности устойчивости и акустических свойств перегретой жидкости с газовыми зародышами // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 8.
- [25] Натяганов В.Л., Маслов С.А. Сингулярный метод в задачах электрогидродинамики однородных суспензий сферических капель // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 71.
- [26] Терентьев А.Г. Пляшущие капли на воде // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 99.
- [27] Петров А.Г., Сандуляну Ш.В. Моделирование слияния газовых пузырьков в жидкости в пульсирующем поле давления // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 80.
- [28] Сандуляну Ш.В. Силы вязкого и невязкого взаимодействия пульсирующих в жидкости двух сфер вблизи их контакта // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 88.
- [29] Байков В.А., Коновалова С.И., Рыкус М.В., Абдрашитов К.Х., Байков И.В., Сакаев Р.Ф. Синхронизация подмоделей пластовых систем в рамках механики многофазных сред // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 11.
- [30] Кравченко М.Н., Диева Н.Н., Вожегов Е.М. Моделирование изменения структуры порового пространства при термоокислительной обработке насыщенного коллектора // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 55.
- [31] Федоров К.М., Шевелев А.П., Кобяшев А.В., Захаренко В.В. Определение фильтрационных параметров раствора полимера и суспензии из решения обратных задач движения оторочек в пористой среде // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 109.
- [32] Димов С.В. Фильтрация суспензии в пористой среде // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 38.

- [33] Мишин А.В. Моделирование случайной плотной упаковки континуальными методами по описанию гетерогенных систем // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 66.
- [34] Валиев А.А. Развитие неустойчивого вытеснения при снижении поверхностного натяжения // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 24.
- [35] Валиев А.А., Низамова А.Д. Комплексное исследование вытеснения нефти водой в плоском канале // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 25.
- [36] Муллаянов А.И., Питюк Ю.А. Экспериментальное изучение вытеснения нефти пузырьковой жидкостью в модельной пористой среде // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 68.
- [37] Муллаянов А.И., Мусин А.А., Зиннатуллин Р.Р., Ковалева Л.А. Воздействие неоднородного электрического поля наводо-нефтяную эмульсию в микрожидкостной ячейке // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 67.
- [38] Филиппов А.И. Эффект вытеснения жидкости скелетом при малой пористости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 111.
- [39] Филиппов А.И., Михайлов П.Н. Асимптотические представления решения задачи о поле давления в несовершенном вскрытом нефтегазовом пласте // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 112.
- [40] Жонин А.В., Мартынова Ю.В. Гидродинамическое моделирование на тороидальной сетке в задачах оптимизации систем разработки // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 41.
- [41] Киреев Т.Ф., Булгакова Г.Т. Применение неструктурированной сетки Вороного для численного решения задач фильтрации // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 51.
- [42] Белевцов Н.С., Лукашук С.Ю. Исследование дробно-дифференциальной модели однофазной фильтрации с потенциалом Рисса // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 14.
- [43] Береславский Э.Н., Мкртчян Б.А. О режиме грунтовых вод при фильтрации из каналов в почвенном слое с нижележащим напорным горизонтом // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 17.
- [44] Перегудин С.И., Перегудина Э.С., Холодова С.Е. Волны в жидкости над деформируемой поверхностью // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 79.
- [45] Мусакаев Н.Г., Хасанов М.К., Губайдуллин А.А. Необходимые условия формирования объемной области образования гидрата при закачке газа в насыщенный метаном и водой пласт // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 69.
- [46] Белова С.В., Чиглинцева А.С., Дударева О.В. Численное моделирование процесса образования гидрата при продувке холодного газа через слой снега // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 15.
- [47] Гималдинов И.К., Столповский М.В. Математическая модель процесса горения газогидрата // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 31.
- [48] Столповский М.В. Численное исследование горения сферической частицы гидрата // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 96.
- [49] Беляков Г.В., Таирова А.А., Юдочкин Н.А., Молокочев А.С. Образование и распространение ГРП в градиентном фильтрационном поле // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 16.
- [50] Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование неустойчивой фильтрации в системе пласт-трещина гидроразрыва // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 114.
- [51] Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А. Собственные колебания жидкости при гидроразрыве в скважине, сообщаемой с пластом // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 118.
- [52] Шагапов В.Ш., Нагаева З.М. Теоретические модели фильтрации жидкости в трещине ГРП // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 120.
- [53] Шагапов В.Ш., Фокеева Н.О., Мигранова З.Н. О фильтрации жидкости в трещине ГРП при переменных режимах работы скважины // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 121.
- [54] Саламатин А.А., Егоров А.Г. Асимптотическое представление кривой выхода масла при сверхкритической флюидной экстракции из полидисперсного зернистого слоя молотого высокоомасличного растительного сырья // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 86.
- [55] Пахомов М.А., Терехов В.И. Гидродинамика и теплоперенос в газокпельном пристенном турбулентном потоке // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 76.
- [56] Симонов О.А., Филимонова Л.Н. Конвективное течение воды в пористой среде вблизи вертикального охлаждающего устройства // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 92.
- [57] Пашали А.Ф., Михайлов В.Г. Разработка математической модели гидравлического сопротивления участка трубопровода с учетом влияния теплопереноса и структуры режимов водо-нефтяной смеси // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 78.
- [58] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Устойчивость течения термовязкой жидкости в канале теплообменника // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 72.
- [59] Барткус В.Г., Кузнецов В.В. Исследование локальных характеристик газожидкостного течения в прямоугольных микроканалах методом LIF // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 12.
- [60] Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А. Модели двухфазных и струйных течений в микроканалах // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 61.
- [61] Рудяк В.Я., Третьяков Д.С. Теплофизические свойства наножидкостей с обычными частицами и углеродными трубками // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 82.
- [62] Рахимов А.А., Ахметов А.Т., Валиев А.А., Саметов С.П., Данилко К.В., Хайруллина Р.Р., Хисматуллин Д.Б. Экспериментальное изучение миграции раковых клеток в двухуровневом микрожидкостном устройстве // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 81.
- [63] Маматюков М.Ю., Паршин Д.В., Хе А.К., Чупахин А.П. Энергия гидроупругой системы и ее приложения в церебральной гемодинамике // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 62.
- [64] Хабиров С.В. Об инвариантных движениях частиц общей трехмерной подгруппы всех пространственных переносов // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 115.
- [65] Юлмухаметова Ю.В. Точное решение подмодели на четырехмерной подалгебре, состоящей из галилеевых переносов по осям координат // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 125.
- [66] Никонорова Р.Ф. Инвариантные подмодели одноатомного газа на трехмерных подалгебрах с проективным оператором // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 73.
- [67] Сираева Д.Т. Точные решения уравнений гидродинамического типа // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 93.
- [68] Богданов А.Н. Некоторые аналитические подходы к математическому моделированию неоднородных экзотермических течений // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 19.
- [69] Стояновская О.П., Давыдов М.Н., Арендаренко М.А., Исаенко Е.А., Маркелова Т.В., Снытников В.Н. Эффективный метод расчета динамики полидисперсных газовзвесей с интенсивным межфазным взаимодействием в гидродинамике сглаженных частиц // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 97.



## Analytical review of the proceedings of the conference "Multiphase Systems: Models, Experiment, Applications"

Urmancheev S.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC of RAS, Ufa

The presented analytical review includes a short description of the papers sent to the conference "Multiphase Systems: Models, Experiments, Application". The review consists of seven thematic sections corresponding to the research areas of the works presented by the authors. The list of sections traditionally present at conferences on multiphase systems has been supplemented with a section on "Microhydrodynamics and Models of Biomedical Research", which reflects one of the most rapidly developing areas of science and, at the same time, is closely related to the ideas and methods of mechanics of multiphase media. The works representing such new directions as gas hydrate and hydraulic fracturing research were included in the section "Theory and practice of multiphase filtration". The review considers more than sixty works in which the most striking results have been achieved, and most consistent with the spirit of the conference. However, we note that the total number of submitted papers exceeds one hundred and twenty.

**Keywords:** multiphase systems, turbulence, cavitation, wave processes, porous media, drops, bubbles, filtration, heat transfer, hydrodynamic stability, convection, microfluidics, numerical methods, gas hydrates, hydraulic fracturing



## Термокапиллярный дрейф капель и пузырьков в вязкой жидкости (обзор)

Насибуллаева Э.Ш., Урманчиев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование процесса скопления пузырьков газа в области источника тепла представляет собой, с физической точки зрения, достаточно интересную задачу, приводящую к важным выводам для практических приложений. Особенность рассматриваемого процесса состоит в том, что в переменном температурном поле происходит изменение поверхностного натяжения пузырька, которое, в свою очередь, приводит к возникновению течения в пограничном слое жидкости. В мировой научной литературе обнаружение и описание эффекта миграции газовых пузырьков в направлении температурного градиента обычно связывается с экспериментальной работой Янга, Гольдштейна и Блока (1959). Не умаляя ее значения, отметим, что впервые эффект был предсказан в теоретической работе Федосова (1956) как результат решения задачи о возникновении микропотока жидкости вблизи межфазных границ плоской и сферической форм при наличии градиента температуры. В обеих работах существенным фактором при объяснении описываемого явления являлась зависимость поверхностного натяжения от температуры. Спустя некоторое время, по истечении которого была осознана необходимость учета миграции не только пузырьков, но и капель в неоднородных температурных полях в космических технологиях, медико-биологических и иных приложениях, возник значительный поток публикаций по данной проблематике, а данное явление получило название термокапиллярного дрейфа (thermocapillary migration). Настоящий обзор посвящен анализу основных, по мнению авторов статьи, результатов экспериментальных, теоретических и прикладных исследований по установлению механизма дрейфа пузырьков и капель в градиентных температурных полях. В большинстве работ предполагается отсутствие зависимости физических свойств жидкости, кроме поверхностного натяжения, от температуры. Существует лишь несколько работ, рассматривающих влияние температурной зависимости коэффициента вязкости, что дает новый импульс к продолжению исследований и развитию теории эффекта с учетом терморологических свойств рабочих сред.

**Ключевые слова:** ньютоновская жидкость, пузырек, капля, термокапиллярный дрейф, скорость дрейфа капли/пузырька, градиент температуры, поверхностное натяжение

### 1. Введение

Термокапиллярный дрейф (thermocapillary migration) — это способность капель, нерастворимых в окружающей жидкости, или газовых пузырьков, которые находятся в неравномерно нагретой жидкости, самопроизвольно перемещаться в более горячую область. Данное движение обусловлено возникающими на поверхности капли или пузырька касательными термокапиллярными си-

лами, которые заставляют окружающую каплю или пузырек жидкость обтекать его по направлению градиента поверхностного натяжения (от теплого к холодному полюсу). В результате появляется приложенная к капле или пузырьку реактивная сила, толкающая его в противоположном направлении. Термокапиллярный дрейф является следствием конвективного течения Марангони, возникающего в жидких средах вблизи поверхности раздела фаз под действием тангенциальных капиллярных сил в случае неоднородности поверхностного натяжения из-за неравномерного распределения температуры.

Интерес к данному явлению вызван, в первую очередь, важными приложениями в различных областях науки и технологических процессах в космосе, где преобладает конвекция Марангони. Например:

- разработка в области космических технологий и систем жизнеобеспечения орбитальных станций, поскольку в условиях невесомости конвекция Марангони является основной причиной движения пузырьков и капель;
- интенсификация технологических процессов (в том числе протекающих в условиях невесомости), где гравитационные механизмы конвективного движения ослаблены или отсутствуют, таких как, выращивание монокристаллов, изготовление однородных полупроводниковых структур, сплавов многокомпонентных металлов, композитов и пр.;
- применение в технологических процессах для дегазации при целенаправленном подогреве, а также использование в экологии для очистки поверхности воды от загрязнений нефтепродуктами;
- изучение движения бактерий и клеточных микробиообъектов в биологии.

## 2. Постановка задачи

При решении задачи термокапиллярного дрейфа пузырька или капли рассматривается газовый пузырек или капля жидкости первоначально сферической формы с динамически свободной (межфазной) границей в неограниченном объеме несжимаемой ньютоновской жидкости. Как правило, при постановке задачи предполагается следующее:

- присутствует внешний градиент температур  $\nabla T \equiv \text{grad}T$  постоянный на бесконечности ( $\text{grad}T|_{\infty} = \text{const}$ );
- капля является нерастворимой в жидкости;
- на межфазной поверхности отсутствует обмен веществом с окружающей средой;
- направление градиента температуры параллельно вектору ускорения силы тяжести (при наличии гравитационной силы);
- зависимость всех физических свойств жидкости, кроме поверхностного натяжения, от температуры отсутствует;
- коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = \sigma(T)$  линейно изменяется с температурой  $T$

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma'_T(T - T_0),$$

где  $\sigma_0$  — коэффициент поверхностного натяжения при температуре  $T_0$ ;  $\sigma'_T = d\sigma/dT = \text{const}$ , а его градиент является отрицательным ( $\sigma'_T < 0$ ), что справедливо для большинства однокомпонентных жидкостей.

Начало сферической системы координат  $(r, \theta, \varphi)$  выбирается в центре сферы (пузырька или капли) радиуса  $a$ . Постоянный градиент температуры направлен вдоль полярной оси  $z = r \cos \theta$ ; скорость жидкости  $\mathbf{u}$  считается положительной, если ее направление совпадает с направлением полярной оси. При формулировке граничных условий обычно переходят к системе координат, движущейся вместе с центром тяжести падающей сферы. В этой системе отсчета сфера считается неподвижной, а внешняя жидкость — находящейся в движении (как целое) в сторону, противоположную направлению фактического движения этой сферы со скоростью  $-\mathbf{u}$ .

Основными безразмерными параметрами, характеризующими состояние и движение капли или пузырька, являются число Рейнольдса  $Re$ , тепловые числа Марангони  $Ma$  (аналог числа Пекле  $Pe$  для данного вида задач) и Прандтля  $Pr$  и капиллярное число  $Ca$ :

$$Re = \frac{ua\rho}{\mu}, \quad Ma = \frac{a^2}{\mu\chi} \sigma'_T \nabla T, \quad Pr = \frac{\mu}{\rho\chi}, \quad Ca = \frac{\mu u}{\sigma}.$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $\mu$  — динамическая вязкость среды;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности среды.

Малые числа Рейнольдса ( $Re \ll 1$ ) соответствуют медленному дрейфу сферы, что возможно для пузырьков или капель малого радиуса ( $a < 1$  мм) и/или большой динамической вязкости окружающей жидкости. В этом случае рассматриваются уравнения движения в стоксовом приближении (пренебрегают членом  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ ). При таких размерах сферы обычно капиллярное число  $Ca \ll 1$ , следовательно, ее поверхность можно считать недеформируемой. При больших значениях  $Re$ , когда вклад инерции в движение становится значительным, капиллярное число  $Ca$  также растет, что приводит к необходимости учета деформации поверхности. При малых числах Марангони  $Ma$  возможность возникновения в жидкости конвективных движений в результате термокапиллярного механизма мала, поэтому конвективным переносом тепла пренебрегают. При малых числах  $Re$  для малости чисел  $Ma$  обычно дополнительно требуется, чтобы числа Прандтля  $Pr$  также были малы, что соответствует значительной теплопроводности жидкости.

### 3. Теоретические методы определения скорости термокапиллярного дрейфа пузырьков/капель

Скорость движения твердого шара в однородной по температуре жидкости при  $Re \ll 1$  определяется формулой Стокса [1]:

$$u = \frac{2ga^2(\bar{\rho} - \rho)}{9\mu}, \quad (1)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения. Здесь и далее знак « $\sim$ » над параметром будет относиться к среде внутри сферы.

Скорость движения жидкой сферической капли в однородной по температуре жидкости определяется формулой Адамара–Рыбчинского [2, 3]:

$$u = \frac{2ga^2(\bar{\rho} - \rho)}{3\mu} \frac{\mu + \tilde{\mu}}{2\mu + 3\tilde{\mu}}. \quad (2)$$

Первой теоретической работой по термокапиллярному движению капель в вязкой жидкости является исследование медленного движения сферической капли при постоянном градиенте температуры в отсутствие силы гравитации, опубликованное в 1956 году Федосовым [4]. Получено следующее выражение для скорости перемещения капли при условии, что  $\sigma'_T$  не зависит от температуры:

$$u = \frac{2}{3} \frac{\sigma'_T |\text{grad}T| a}{2\mu + 3\tilde{\mu}}. \quad (3)$$

Работа Янга, Гольстейна и Блока [5] посвящена исследованию движения пузырьков при постоянном вертикальном градиенте температуры в жидкости. Представлены результаты экспериментов медленного движения (число Рейнольдса  $Re = 0$ ) маленьких пузырьков в чистых жидкостях и выведено следующее соотношение для скорости всплытия недеформируемого пузырька при наличии силы тяжести:

$$u = \frac{2}{6\mu + 9\tilde{\mu}} \left[ \sigma'_T a \frac{3\lambda \text{grad}T}{2\lambda + \tilde{\lambda}} - (\rho - \bar{\rho}) g a^2 \frac{\mu + \tilde{\mu}}{\mu} \right], \quad (4)$$

где  $\lambda$  — теплопроводность среды. Заметим, что в отсутствие силы тяжести и для одинаковых теплопроводностей имеет место выражение (3), а в случае постоянного поля температур в поле силы тяжести — формула Адамара–Рыбчинского (2) (см., например, [6]). Соотношение (4) позволяет определить отношения параметров внутри и вне пузырька, при которых пузырек в жидкости остается в покое (т.е. сила тяжести и сила сопротивления, вызванная градиентом температур, уравновешивают друг друга), что наблюдалось в экспериментах работы [5].

В работе [7] теоретически исследовано влияние неравномерного поверхностного натяжения на поверхности пузырька, вызванного неравномерным распределением температуры в жидкости, на его движение. Установлено, что в чистой жидкости (без растворенных поверхностно-активных веществ) изменение поверхностного натяжения мало влияет на движение маленьких пузырьков. В данной работе учли теплопередачу в поверхностный слой пузырька (или капли) в отличие от работы [5], которая дает незначительный эффект при рассматриваемых ограничениях задачи, поэтому выводы (в т.ч. формула (4)) работы [5] являются корректными. Аналогично предыдущим исследованиям в работах [8–10] получено соотношение для скорости дрейфа при отсутствии массовых сил:

$$u = \frac{2a\lambda}{(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})} \sigma'_T \text{grad}T. \quad (5)$$

В работе Братухина [11], в отличие от предыдущих работ, теоретически изучалось движение капли вязкой жидкости в другой жидкости при постоянном градиенте температуры в отсутствие силы тяжести при малых числах  $Re$ . Решение задачи определялось с помощью разложения по степеням числа  $Re$ . В нулевом приближении по числу Рейнольдса получено выражение для скорости дрейфа капли в виде (5). Также исследовалась форма капли при движении в приближении малого отклонения формы поверхности от сферической. Показано, что если плотность жидкости (газа) внутри капли (пузырька) меньше плотности окружающей жидкости  $\bar{\rho} < \rho$ , то капля (пузырек) стремится сплюснуться, при этом за пузырьком образуется локализованный стационарный вихрь. В случае  $\bar{\rho} > \rho$  капля стремится вытянуться вдоль направления потока. Подобное изменение формы пузырька или капли наблюдалось экспериментально (см. обзор экспериментальных результатов, например, в книге Левича [6]). Томпсон и др. в работе [12] расширили решение [11] до больших чисел  $Re$ , проведя разложение по степеням чисел Марангони (Пекле)  $Ma = PrRe$  до второго порядка, однако их решение для поля температуры уже во втором порядке не удовлетворяет граничным условиям на бесконечности.

Баласубраманиам и Чай [13] исследовали термокапиллярный дрейф капли для малых чисел Марангони в отсутствие силы тяжести и получили, что решения для поля скорости и скорости дрейфа такие же, как и в работах [5, 11] в приближении малых чисел  $Re$ . Это расширяет область применимости данных формул для произвольных чисел  $Re$  при условии, что число  $Ma$  остается малым, т.е. в рабо-

те пренебрегают конвективным переносом тепла. Аналогично предыдущим исследованиям [11, 12] малых отклонений формы капли от сферической было установлено, что форма зависит от плотностей жидкости внутри и вне капли, однако показано, что инерция не влияет на поле потока. Хай-Харири и др. [14] с помощью трехмерного численного моделирования исследовали термокапиллярный дрейф деформируемых вязких капель под воздействием постоянного градиента температуры во второй жидкой среде для конечных значений  $Re$  и  $Ma$ . Предполагалось, что жидкости имеют постоянные свойства, за исключением поверхностного натяжения, которое изменялось линейно в зависимости от температуры. Как и в предыдущих исследованиях обнаружено, что капли остаются осесимметричными, но деформируются в сплюснутые или вытянутые сфероиды в зависимости от соотношения плотностей внутренней и внешней жидкости. Кроме того, установлено, что деформации формы капли из-за инерционных эффектов, хотя и имеют небольшую величину, замедляют движение капли, а также, что влияние инерции на подвижность вязких капель слабее, чем в случае газовых пузырьков.

Для газовых пузырьков в жидкости, когда вязкостью и теплопроводностью газа можно пренебречь, т.к.  $\tilde{\mu} \ll \mu$  и  $\tilde{\lambda} \ll \lambda$ , из формулы (5) получается следующее выражение для скорости дрейфа пузырька:

$$u = \frac{a}{2\mu} \sigma'_T \text{grad} T, \quad (6)$$

что для реальных газов приводит к ошибке не более, чем в несколько процентов [15]. Отметим, что формулу (6) можно представить в виде:

$$\frac{u}{u_1} = \frac{1}{2} Ma, \quad (7)$$

где  $u_1 = \chi/a$  — масштаб скорости.

Креспо и др. в работе [16] проанализировали термокапиллярное движение пузырьков при больших числах Рейнольдса и произвольных числах Марангони. Для малых чисел  $Ma$  решение найдено в виде асимптотического разложения по степеням числа Марангони и выражение для скорости (6) получено с поправкой, которая появляется только при 2-й степени числа  $Ma$ :

$$\frac{u}{u_0} = \frac{1}{2} - \frac{49}{2880} Ma^2 + \dots,$$

где  $u_0 = a\sigma'_T \text{grad} T / \mu$  — масштаб (единица) скорости. Аналогичные предыдущей работе результаты были получены в [17] с использованием немного

другого подхода и с другой корректировкой числового коэффициента. Получено следующее выражение для скорости дрейфа:

$$\frac{u}{u_0} = \left( \frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{8} \right) - 0.1369\epsilon \ln \epsilon + 0.6578\epsilon,$$

где  $\epsilon = Ma^{-1/2}$  — параметр разложения.

Антановский и Копбосынов [18] рассмотрели нестационарное движение капли вязкой жидкости при постоянном на бесконечности градиенте температур, аналитически решив задачу разгона капли термокапиллярными и архимедовыми силами путем разложения до первого порядка в ряд по числам Марангони. Поле температуры и вызываемое им распределение коэффициента поверхностного натяжения вдоль поверхности капли получилось не зависящим от движения жидкости. В стационарном приближении выражение для скорости термокапиллярного дрейфа капли имеет вид, аналогичный работе [11]. В работе Дилла и Баласубраманиама [19] задача изолированной несмешивающейся капли, медленно дрейфующей из-за нестационарных термокапиллярных напряжений, решалась с помощью преобразования Лапласа. Все физические свойства, кроме поверхностного натяжения, предполагаются постоянными для двух ньютоновских жидкостей; сила тяжести, а также конвективный перенос импульса и энергии отсутствовали, т.е. задача решалась в пределе  $Re = 0$  и  $Ma = 0$ . Аналогичная задача решалась Галиндо и др. [20], но с учетом влияния силы тяжести на каплю.

В работе Редникова и Рязанцева [21] исследовалось термокапиллярное движение капли одной вязкой жидкости в другой при облучении капли с одной стороны однородным по сечению плоскопараллельным лучом света в отсутствии гравитации. При решении задачи предполагалось, что излучение полностью поглощается на поверхности капли, окружающая каплю среда прозрачна, движение капли является установившимся медленным вдоль направления падающего излучения (малые числа  $Re$ ) и конвективные эффекты незначительны (малые числа  $Ma$ ), кроме того, поверхность капли сохраняет сферическую форму. Все физические характеристики жидкостей принимаются постоянными, кроме поверхностного натяжения, которое является линейной функцией температуры. Получена следующая формула скорости дрейфа капли:

$$u = \frac{Ia}{3(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})} \sigma'_T,$$

где  $I$  — интенсивность падающего излучения. Из последней формулы следует, что, поскольку для

большинства жидкостей  $\sigma'_T < 0$ , то капля будет дрейфовать навстречу лучу.

Во всех рассмотренных выше работах предполагалось, что все физические характеристики жидкостей постоянны за исключением поверхностного натяжения, которое принималось линейной функцией температуры. Гупало и др. в работе [22] провели обобщение задачи о движении сферической частицы (капли или пузырька) в вязкой жидкости при наличии внешнего постоянного градиента температуры для случая произвольной нелинейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры в предположении малости чисел  $Re$  и  $Pe$ . Для скорости дрейфа капли получено следующее выражение:

$$u(x) = -\frac{3\lambda \text{grad}T}{2(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})} \times \int_{-1}^1 \sigma'_T(x, s)(1 - s^2) ds, \quad (8)$$

где  $x$  — координата на оси  $Ox$  (ось симметрии, проходящая через центр капли параллельно внешнему градиенту температуры, с началом отсчета в центра капли). В случае линейной зависимости поверхностного натяжения от температуры получается формула (5). В частном случае квадратичной зависимости поверхностного натяжения от температуры ( $\sigma = \sigma_0 + \sigma''_T(T - T_0)^2/2$ , где  $\sigma''_T = d^2\sigma/dT^2 = \text{const}$ ), характерной для водных растворов высокомолекулярных спиртов, некоторых металлических сплавов и нематических кристаллов, формула (8) принимает вид:

$$u(x) = \frac{2\sigma''_T a \lambda (\text{grad}T)^2 (x_* - x)}{2(2\mu + 3\tilde{\mu})(2\lambda + \tilde{\lambda})},$$

где  $x_* = x_0 + (T_0 - T(x_0))/(\text{grad}T)$ . Из последней формулы получается, что, вследствие нелинейной зависимости  $\sigma(T)$ , могут существовать состояния равновесия ( $x = x_*$  — плоскость равновесия, т.к. в этой точке скорость дрейфа  $u = u(x_*) = 0$ ), когда центр масс капли покоится, а жидкость внутри и вне движется стационарным образом. При этом в случае  $\sigma''_T > 0$  плоскость равновесия будет плоскостью притяжения, а равновесие — устойчивым; в случае  $\sigma''_T < 0$  плоскость равновесия будет плоскостью отталкивания, а равновесие — неустойчивым. В работе [22] также проведен анализ изменения формы капли, который показал, что при малых числах Вебера ( $We = \rho a u^2 / \sigma_0$ ) в состоянии равновесия для  $\sigma''_T > 0$  капля принимает вид эллипсоида вращения, сплюснутого в направлении градиента температуры, а в противоположном случае — растянутого в этом направлении.

Трипати и др. [23] изучали дрейф пузырька, обусловленный плавучестью и термокапиллярностью в трубе с неравномерно нагретыми стенками, содержащей так называемую «самовосстанавливающуюся жидкость» (self-rewetting fluid), в которой имеет место параболическая зависимость поверхностного натяжения от температуры  $T$  с четко определенным минимумом:

$$\sigma = \sigma_0 - \beta_1(T - T_1) + \beta_2(T - T_1)^2,$$

где введем обозначения  $\beta_1 \equiv -\sigma'_T|_{T_1}$  и  $\beta_2 \equiv \sigma''_T|_{T_1}/2$ ;  $T_1$  — температура на дне трубы ( $z = 0$ ). Температура меняется линейно в вертикальном направлении  $z$  с постоянным градиентом  $\gamma = \text{grad}T$ :

$$T = T_1 + \gamma z.$$

Выведена следующая формула дрейфа пузырька:

$$u = \frac{\rho a^2 g}{3\mu} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma \beta_1}{\rho a g} \left[ 1 - \frac{2\beta_2}{\beta_1} (T_\infty(0) - T_1) \right] \right),$$

где  $T_\infty(0)$  — температура на дне трубы вдали от центра пузырька.

Баласубраманиам и Субраманиан в работе [24] провели обобщение исследований своей работы [17] для газовых пузырьков, на случай устойчивого термокапиллярного движения сферической капли в однородном градиенте температур для больших чисел Марангони (числа Рейнольдса также должны быть большими). Скорость дрейфа капли определена равной

$$u = \frac{4h(\delta)Ma}{\lambda(2 + 3\tilde{\mu}/\mu)^2(1 + \delta)^2},$$

где  $\delta = \sqrt{\tilde{\kappa}/\kappa}/(\tilde{\lambda}/\lambda)$ ,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности среды;  $h(\delta)$  — численная функция, методика для вычисления которой представлена в работе [24] (в табл. 1 представлены некоторые ее значения). Показано, что для повышения температуры капли с постоянной скоростью при ее дрейфе в более теплое окружение необходимо такое количество энергии внутри капли, которое создает большой градиент температуры между поверхностью капли и ее внутренней частью. Изменение температуры по поверхности капли также большое и приводит с ростом числа Марангони к линейному увеличению скорости дрейфа капли.

Занг и др. [25] исследовали дрейф капли в равномерном вертикальном градиенте температур при совместном действии силы гравитации и термокапиллярной силы при малых значениях числа  $Ma$  и показали, что включение инерции имеет

Таблица 1. Численные значения функции  $h(\delta)$  [24]

$\delta$	$h(\delta)$
0	0.00568
0.25	0.00611
0.5	0.00642
1	0.00683
5	0.00775
10	0.00798
$\infty$	0.00826

решающее значение в разработке асимптотического решения для температурного поля. Получено выражение для скорости дрейфа в результате асимптотического разложения по числу Re:

$$u = u_0 + u_1 \text{Re} + o(\text{Re}),$$

где  $u_0$  определяется по формуле (4), а  $u_1$  — с помощью

$$u_1 = \frac{\text{Pr} - 1 - G(1 + \tilde{\mu}/\mu)(2 + \tilde{\lambda}/\lambda)}{2(2 + 3\tilde{\mu}/\mu)(2 + \tilde{\lambda}/\lambda)} \frac{ga(\tilde{\rho} - \rho)}{3\sigma'_T |\text{grad}T|},$$

где  $\text{Pr} = \mu/(\rho\lambda)$  — число Прандтля.

Чудхури и Райа Сехар [26] решали задачу термокапиллярного дрейфа вязкой капли в неоднородном поле температур, рассмотрев в частности случаи равномерного/сдвигового потока при равномерном распределении температуры/наличии источника тепла. Тепловая задача решалась с учетом непрерывности полей температуры и потока; гидродинамическая задача была связана с тепловой через термокапиллярные эффекты в граничных условиях. Отличительной особенностью от предыдущих исследований здесь является выражение формул для сопротивления и крутящего момента на капле в форме законов Факсена (Faxén's laws).

В отличие от авторов предыдущих работ, где вязкость окружающей среды считалась постоянной величиной, в работах [27, 28] данная характеристика рассматривалась переменной. Баласубраманиам [27] аналитически исследовал дрейф сферического пузырька, вызванный как термокапиллярной силой, так и силой плавучести, в случае, когда поверхностное натяжение и вязкость линейно зависят от температуры, при больших числах Re и постоянном градиенте температуры (сонаправленном или противоположно направленном силе тяжести). Получено, что в случае, когда вязкость является постоянной величиной ( $\mu = \text{const}$ ), а

число Бонда

$$\text{Bo} = \frac{(\rho - \tilde{\rho})ga}{(-\sigma'_T)\text{grad}T}$$

отлично от нуля, скорость дрейфа пузырька определяется как

$$v_{\infty 0} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \ln 3 \pm \frac{1}{9} \text{Bo}.$$

В последней формуле знак «+» используется, когда  $\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $g$  таковы, что сила плавучести увеличивает движение пузырька, а знак «-» в противном случае. Когда вязкость линейно зависит от температуры:

$$\mu(T) = \mu_0(T_0) + \mu'_T(T - T_0),$$

где  $\mu_0$  — вязкость невозмущенной жидкости в плоскости, перпендикулярной направлению движения, в которой находится центр пузырька (зависит от времени, т.к. температура в «контрольном» месте для вязкости постоянно изменяется), и  $\mu'_T = d\mu/dT \equiv \text{const}$  (обычно отрицательна для жидкостей), то в квазистатическом приближении скорость дрейфа пузырька будет определяться следующей формулой:

$$v_{\infty 0} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \ln 3 \pm \frac{1}{9} \text{Bo}}{1 + \frac{3}{2} K \frac{a \text{grad}T}{\mu_0} \mu'_T},$$

где  $K$  — константа, вычисленная численно при расчете скорости рассеяния энергии вязкими силами, которая получилась равной значению  $-0.326$ .

Премлата и др. [28] численно исследовали динамику поднимающегося пузырька в неограниченной неподвижной вязко-стратифицированной среде в случае, когда вязкость линейно возрастает в вертикальном направлении, с помощью открытого исходного кода для решения уравнений методом конечного объема Gerris [29]. Для отслеживания границы между двумя жидкостями использовался метод Volume of Fluid (VOF) с динамической адаптацией сетки, основанной на величине завихренности и положении границы раздела. Проведено сравнение численного метода при определении формы пузырька и линий тока с экспериментальными результатами Бхаги и Вебера [30]. Обнаружено, что в среде с линейно возрастающей вязкостью при определенных значениях параметров пузырьки подвергаются большой деформации, образуя удлиненную юбку, которая стремится физически отделить область следа от остальной окружающей жидкости. Эта своеобразная динамика объясняется переносом менее вязкой жидкости вслед за пузырьком,

когда он поднимается. Таким образом создается все больший контраст вязкости между жидкостью, занятой в области следа, и окружающей жидкостью. В среде с постоянной вязкостью такая динамика не наблюдается.

Более подробно динамика всплытия пузырьков в средах со стратифицированной вязкостью представлена в обзорной работе Саху [31].

Отметим часть исследований, изучающих движение сферической частицы в вязкой жидкости, в которой перепад температуры возникает между поверхностью частицы и жидкости вдали от нее за счет происходящей на поверхности химической реакции, сопровождающейся выделением или поглощением тепла. Так, в работе Головина и Фоминых [32] получено обобщение формулы Адамара–Рыбчинского для силы сопротивления частицы (твердой или жидкой капли) в случае ее стационарного движения в несжимаемой жидкости, вязкость которой экспоненциально зависит от температуры. При этом предполагалось, что силы гравитации отсутствуют и теплопроводность поверхности выше окружающей жидкости, что позволяло считать ее изотермической. В работе Головина и др. [33] показано, что учет баланса нормальных компонент напряжений на поверхности раздела фаз приводит к изменению формы капли при ее движении за счет хемотермокапиллярного эффекта в нулевом приближении по числу Рейнольдса.

В работе Малай [34] в стоксовом приближении приводится теоретическое описание движения равномерно нагретой сферической капли под действием силы тяжести. Получены выражения, обобщающие формулы Стокса и Адамара–Рыбчинского на случай стационарного движения равномерно нагретой твердой сферической частицы или капли в несжимаемой жидкости в поле силы тяжести при произвольных перепадах температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее. В отличие от [32] данные выражения получены с учетом произвольной зависимости вязкости от температуры, представленной в виде экспоненциально-степенного ряда:

$$\mu = \mu_{\infty} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\gamma^n}{y^n} \right) \exp(-A\gamma/y),$$

где  $\mu_{\infty} = \mu(T_{\infty})$ ,  $T_{\infty}$  — температура жидкости вдали от частицы;  $F_n$  и  $A$  — постоянные, зависящие от физических характеристик окружающей среды;  $\gamma = (T_s - T_{\infty})/t_{\infty}$  — безразмерный параметр, характеризующий перепад температуры между поверхностью частицы и областью вдали от нее;  $T_s$  — средняя температура поверхности;  $y = r/a$  — безразмерная радиальная координата. Выведенная ско-

рость падения равномерно нагретой сферической капли (аналог формулы Адамара–Рыбчинского) вдоль оси  $z$  декартовой системы координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \frac{2}{9} a^2 \frac{\bar{\rho} - \rho}{\mu_{\infty} f_{\mu}} g \mathbf{n}_z,$$

где  $\mathbf{n}_z$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ ;  $f_{\mu}$  — параметр, зависящий от вязкости, вывод которого подробно представлен в работе [34]. В последующих работах последняя формула была обобщена на случаи неравномерно распределенных источников тепла [35] и обтекания капли в вязкой неизотермической газообразной среде, внутри которой действуют равномерно распределенные источники (стоки) тепла постоянной мощности [36].

#### 4. Численные методы расчета скорости термокапиллярного дрейфа пузырьков/капель

Как правило, аналитические решения дрейфа капель/пузырьков в неоднородном поле температур ограничиваются исследованиями задачи при малых числах  $Re$  и/или  $Ma$ , поскольку при больших значениях данных параметров система уравнений становится сильно нелинейной. В связи с этим в последние два десятилетия множество исследований посвящено численным методам решения данной задачи. Так, в работе Уэлча [37] при исследовании влияния деформации пузырьков на их термокапиллярный дрейф в условиях микрогравитации используется метод конечных объемов с возможностью отслеживания границы раздела на движущейся неструктурированной сетке. Показано, что при росте капиллярного числа  $Ca$ , когда деформация пузырьков также растет, скорость дрейфа пузырьков непрерывно уменьшается, не достигая некоторого стационарного значения. Данный результат отличается от результата работы [14], где получено, что при деформации пузырька происходит уменьшение стационарного значения скорости дрейфа.

Йин и др. [38] численно изучали термокапиллярный дрейф недеформируемых капель с помощью конечно-разностной схемы отслеживания фронта для различных значений  $Re$  и  $Ma$ , а также отношений плотностей и удельных теплопроводностей капель к сплошной среде. Получено, что большие значения чисел  $Ma$  могут существенно изменить распределение температуры на границе раздела капли, что приводит к волнообразному изменению скорости дрейфа капли; число  $Re$  внешней среды оказывает непосредственное влияние на процесс дрейфа, но практически не влияет на конечную скорость; число  $Re$  капли существенно

влияет как на скорость, так и на процесс дрейфа. Обсуждалось также влияние начальных условий на теплокапиллярный дрейф. В последующей работе [39] проведено исследование термокапиллярного дрейфа с большими числами Марангони (до 400) в отсутствие сил гравитации с помощью новой численной схемы для моделирования в длинных резервуарах в очень короткой вычислительной области. Получено, что большие числа  $Ma$  приводят к более сложному процессу дрейфа капли и более продолжительному установлению окончательной стабильной скорости дрейфа. В данной статье также проведено сравнение результатов расчета с экспериментами [40], которое показало хорошее качественное соответствие. Наблюдалось различие между скоростью дрейфа в теоретическом анализе, численном моделировании и космических экспериментах, что объяснялось разной продолжительностью установления устойчивого значения данной скорости.

Брэди и др. [41] провели численное моделирование термокапиллярного дрейфа трехмерной и осесимметричной каплей в замкнутом аппарате (с холодной нижней и горячей верхней стенками) с помощью уточненного сеточного метода набора уровней (level-set grid method) для отслеживания границы раздела и учета малых деформаций. Результаты сравниваются с теоретически предсказанными скоростями термокапиллярного дрейфа каплей и измеренными скоростями дрейфа в экспериментах с микрогравитацией [40, 42]. Показано, что при больших числах  $Ma$  начальные условия сильно влияют на решение задачи; квазистационарное поведение капли также существенно зависит от геометрии области (трехмерная или осесимметричная).

В работе Ма и Боте [43] разработан численный метод прямого моделирования тепловых эффектов Марангони на динамически деформируемой границе раздела двухфазных несжимаемых жидкостей на основе метода объема жидкости с особым упором на численную обработку градиента температуры поверхности. Рассмотрены термокапиллярный дрейф капли в окружающей среде с линейным градиентом температуры, термокапиллярная конвекция в слое жидкости при линейном градиенте температуры вдоль границы раздела и конвекция Марангони из-за неустойчивости Бенара–Марангони.

Алхендал и др. в работе [44] численно моделировали термокапиллярный дрейф изначально сферических пузырьков, обусловленный постоянным градиентом температуры в жидкой ограниченной среде, для малых и средних ( $a$  в работе [45]

и для больших) чисел Рейнольдса и Марангони с использованием трехмерной модели. Для отслеживания границы раздела жидкость–газ применялся метод VOF с использованием схемы геометрической реконструкции, основанной на методе кусочно–линейного расчета границы раздела [46], для захвата границы раздела пузырьков. Результаты показали, что масштабированная скорость пузырьков уменьшается с увеличением числа Марангони, что согласуется с результатами космических экспериментов Канга и др. [47]. Кроме того, на основе данных, полученных в численном исследовании [45], было разработано выражение для прогнозирования масштабированной скорости дрейфа пузырька.

В работе Самареха и др. [48] представлена численная методика расчета термокапиллярного движения сферической деформируемой капли одной жидкости в другой с переменным поверхностным натяжением на основе параллельного трехмерного метода VOF. Численные результаты сравнивались с данными экспериментов, проведенных в отсутствие гравитации [40]. Имеющееся расхождение данных экспериментов и численного моделирования объяснялось следующим образом. Численные результаты являются чувствительными к начальным данным, однако, из-за невозможности измерения реального начального распределения температуры внутри капли при моделировании использовались идеализированные случаи линейного распределения температуры или равномерного профиля температуры внутри капли.

В работе Ву [49] исследовался нестационарный процесс дрейфа термокапиллярных каплей при больших числах Рейнольдса и Марангони путем выявления неконсервативного интегрального теплового потока через поверхность. В последующей работе [50] добавлен также источник тепла в каплю, чтобы сохранить интегральный тепловой поток через поверхность как консервативный, поэтому термокапиллярный дрейф капли при больших числах Рейнольдса и Марангони может достигать квазистационарного процесса. В работе [51] исследовался общий стационарный баланс импульса и энергии при термокапиллярном дрейфе капли при малых числах Рейнольдса и больших числах Марангони, чтобы подтвердить квазистационарное предположение о системе. Предполагалось, что капля имеет небольшое осесимметричное отклонение от сферической формы. Сравнение с исследованиями [49] показало, что термокапиллярный дрейф капли при больших числах  $Ma$  находится в нестационарном состоянии для системы при любом числе  $Re$ . Качественное различие между ко-

нечным термокапиллярным дрейфом капли при малых числах  $Ma$  и миграцией при больших числах  $Ma$  обусловлено эволюцией режима и интенсивностью теплообмена в системе.

В работе Чжана и др. [52] проводились численные исследования термокапиллярных движений капель и пузырьков под воздействием падающего однородного теплового потока. Численная модель основана на нестационарной двумерной осесимметричной модели и методе установки уровня (a level set method). Обнаружено, что капля/пузырек может самопроизвольно перемещаться под действием теплового излучения из-за теплового капиллярного эффекта, движущую силу которого вызывает перепад давления в средней области капли/пузырька. При низких числах  $Re$  скорость дрейфа зависит только от соотношений динамической вязкости и теплопроводности, а при высоких числах — от соотношений плотности и теплоемкости. При всех числах Рейнольдса с увеличением разницы между динамической вязкостью или теплопроводностью непрерывной и дискретной фаз скорость дрейфа растет.

В работе Абу-аль-Сауда и др. [53] описана новая численная схема для моделирования поверхностного натяжения границы раздела капли, представленного функцией установки уровня (a level set function), которая сохраняет импульс жидкости и точно восстанавливает равновесие Лапласа. Утверждается, что переменное поверхностное натяжение естественным образом учитывается в схеме и получаются точные решения для термокапиллярных течений. Применение к распаду Марангони осесимметричной капли показывает, что метод устойчив также в случае искажения формы границы раздела.

## 5. Экспериментальные работы по исследованию дрейфа пузырьков/капель

Первой работой, в которой были представлены результаты эксперимента по термокапиллярному дрейфу пузырька, является работа Янга и др. [5]. Обнаружено, что сферические пузырьки малого размера в чистой жидкости при наличии гравитационных сил могут оставаться неподвижными или перемещаться вниз за счет достаточно сильного отрицательного температурного градиента в вертикальном направлении.

В работе Братухина и др. [54] проведено экспериментальное исследование гравитационной тепловой конвекции и термокапиллярного дрейфа воздушных пузырьков в воде при температуре около  $4^\circ\text{C}$  в вертикальной щели, подогреваемой сбо-

ку. Оценки, сделанные по результатам измерения скорости конвекции, показали, что при  $\text{grad}T < 15$  град/см искажения скорости термокапиллярного дрейфа за счет действия поперечных сил лежат в пределах погрешности эксперимента. Кроме того, для предотвращения искажений результатов экспериментов, вызванных загрязнением воды, измерения проводились в динамическом режиме, когда время образования пузырька не превышало десятых долей секунды. Таким образом, в данных областях параметров конвекция не оказывала существенного влияния на дрейф. Экспериментально установлено, что в диапазоне параметров, где побочные эффекты исключены, для оценки скорости дрейфа возможно применение формулы (7) для дрейфа пузырька в отсутствии силы тяжести без учета внутреннего движения и в линейном по числу Марангони приближении.

В работе Братухина и Зуева [55] теоретически и экспериментально изучено движение воздушного пузырька, обусловленное термокапиллярным эффектом, в горизонтальной ячейке Хеле-Шоу, которая значительно ослабляет влияние побочных эффектов, вызванных силой тяжести (сила Архимеда и гравитационная тепловая конвекция). Показано, что в однородном градиенте температуры скорость термокапиллярного дрейфа пузырька остается постоянной и определяется его диаметром, величиной градиента температуры и физико-химическими свойствами окружающей жидкости. Определено наличие трех характерных областей зависимости скорости термокапиллярного дрейфа пузырька от его радиуса и формы пузырька, которые соответствуют различным значениям отношения радиуса пузырька  $a$  к толщине слоя жидкости  $h$ : при  $2a < h$  пузырьки сферические и их скорость растет с увеличением  $a$ ; при  $2a \approx h$  пузырьки имеют форму круглого цилиндра, а их скорость резко уменьшается с увеличением радиуса; при  $2a \gg h$  скорость дрейфа цилиндрических пузырьков возрастает по линейному закону.

В работе Баласубраманиама и др. [56] экспериментально исследовалось движение одиночных капель и пузырьков в силиконовом масле при наличии температурного градиента для небольших чисел Марангони в условиях малой гравитации. Они обнаружили, что в случае газовых пузырьков нормированная скорость уменьшается с увеличением числа Марангони и в пределе больших  $Ma$  приближается к теоретической асимптоте. Предварительные эксперименты с парой капель показали, что капля небольшого размера приводит к значительному падению градиента температуры и, как следствие, значительно замедляет движение боль-

шой, в то время, как она сама движется так, как будто на нее практически не влияет присутствие большой капли.

Хадланд и др. [40] проводили эксперименты по термокапиллярному дрейфу воздушных пузырьков и Fluorinert капель в силиконовом масле Dow-Corning на борту космического корабля NASA «Колумбия» во время миссии «Науки о жизни и микрогравитации». Данные эксперименты позволили проводить измерения при больших числах  $Re$  и  $Ma$ . Наблюдения в случае дрейфа пузырьков воздуха в силиконовом масле согласуются с численными данными [57, 58], а также подтверждают правильность результатов асимптотической теории для больших значений числа Марангони [17]. В случае капель Fluorinert данные для небольших капель согласуются с численными прогнозами [58] примерно до значения  $Ma = 90$ . При более высоких значениях числа Марангони отмечаются отклонения от численных прогнозов: резко возрастает масштабированная скорость. Обнаружено, что большие пузырьки воздуха (с радиусом более 12 мм) при дрейфе слегка деформируются по форме, превращаясь в сплюснутые сфероиды, в то время, как деформация даже самых больших капель Fluorinert находится в пределах погрешности измерения их размера.

В экспериментах Братухина и др. [59] по изучению термокапиллярного дрейфа в растворах метанола было обнаружено, что даже незначительная добавка воды (~10%) к чистому спирту при наличии градиента температуры приводит к прекращению движения пузырьков. Объясняется это тем, что перераспределение поверхностно-активных веществ на поверхности пузырька приводит к компенсации поверхностного натяжения, вызванного тепловой неоднородностью. А поскольку характерные диффузионные времена значительно превышают времена тепловые, то основание для движения жидкости (т.е. неоднородность поверхностного натяжения) исчезает.

В работе Канга и др. [47] представлены результаты бортового космического эксперимента по термокапиллярному дрейфу пузырьков в силиконовом масле. Пузырьки воздуха впрыскивали в жидкость в том же направлении, что и постоянный градиент температуры в жидкости. Число Марангони в данных экспериментах было расширено до значений  $Ma = 9288$ . Получено, что масштабированная скорость пузырьков уменьшается с увеличением числа  $Ma$ , что согласуется с результатами предыдущих космических экспериментов и численного моделирования [17, 60].

## 6. Заключение

Анализ работ, представленных в данном обзоре, свидетельствует о значительном интересе исследователей к рассматриваемой проблеме термокапиллярного дрейфа как пузырьков, так и капель в неоднородном температурном поле, а также образованию пузырьков кластеров в области источников тепла. При этом следует отметить и возрастающий интерес со стороны разработчиков новых технологий в различных отраслях промышленности.

В ряде работ, наряду с неизбежным учетом зависимости поверхностного натяжения от температуры, было рассмотрено влияние температурной зависимости коэффициента вязкости, что дает новый импульс к продолжению исследований и развитию теории эффекта с учетом реологических и особенно терморологических свойств рабочих сред.

## Список литературы

- [1] Stokes G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluid on the Motion of Pendulums // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1850. V. 9. P. 8.
- [2] Hadamard J.S. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *Comput. Rend. Acad. Sci. (Paris)*. 1911. V. 152, No 25. Pp. 1735–1738.
- [3] Rybczynski D.W. Uber die fortschreitende Bewegung einer flussigen Kugel in einem zahren Medium, *Bull. Acad. Sci. Cracow, Ser. A (Sci. Math.) Bull. Acad. Sci. Cracovie*. 1911. V. 1. Pp. 40–46.
- [4] Федосов А.И. Термокапиллярное движение // *Журн. физ. химии*. 1956. Т. XXX, вып. 2. С. 366–370.
- [5] Young N.O., Goldstein J.S., Block M.J. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient // *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6, Iss. 3. Pp. 350–356.  
DOI: 10.1017/S0022112059000684
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
- [7] Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27, part 2. Pp. 361–366.  
DOI: 10.1017/S0022112067000370
- [8] Любин Л.Я., Повицкий А.С. Термокапиллярные движения в жидкости при отсутствии массовых сил // *ПМТФ*. 1961. № 2. С. 40–46.  
[http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158570&ARTICLE\\_ID=158894](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158570&ARTICLE_ID=158894)
- [9] Кузнецов В.М., Луговцов Б.А., Шер Е.И. О движении газовых пузырьков в жидкости под действием градиента температуры // *ПМТФ*. 1966. № 1. С. 124–126.  
eLIBRARY ID: 29210348
- [10] Яламов Ю.И., Санасарян А.С. Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде // *ИФЖ*. 1975. Т. XXVIII, № 6. С. 1061–1064.
- [11] Братухин Ю.К. Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1975. № 5. С. 156–161.
- [12] Thompson R.L., DeWitt K.J., Labus T.L. Marangoni bubble motion phenomenon in zero gravity // *Chem.Eng. Commun.* 1980. V. 5. Pp. 299–314.  
DOI: 10.1080/00986448008935971

- [13] Balasubramaniam R., Chai A. Thermocapillary Migration of Droplets: An Exact Solution for Small Marangoni Numbers // *J. Colloid Interface Sci.* 1987. V. 119, No. 2. Pp. 531–538. DOI: [10.1016/0021-9797\(87\)90300-6](https://doi.org/10.1016/0021-9797(87)90300-6)
- [14] Haj-Hariri H., Shi Q., Borhan A. Thermocapillary motion of deformable drops at finite Reynolds Marangoni numbers // *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. Pp. 2265–2276. DOI: [10.1063/1.869182](https://doi.org/10.1063/1.869182)
- [15] Зуев А.Л. Тепловая и концентрационная конвекция Марангони в тонких слоях жидкости: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05 / Зуев Андрей Леонидович. Пермь, 2009. 303 с.
- [16] Crespo A., Migoya E., Manuel F. Thermocapillary migration of bubbles at large Reynolds numbers // *Int. J. Multiphase Flow*. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 685–692. DOI: [10.1016/S0301-9322\(97\)00076-1](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(97)00076-1)
- [17] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Thermocapillary bubble migration—thermal boundary layers for large Marangoni numbers // *Int. J. Multiphase Flow*. 1996. V. 22, No. 3. Pp. 593–612. DOI: [10.1016/0301-9322\(95\)00075-5](https://doi.org/10.1016/0301-9322(95)00075-5)
- [18] Антановский Л.К., Копбосынов Б.К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // *ПМТФ*. 1986. № 2. С. 59–64. [http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119917&ARTICLE\\_ID=136327](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119917&ARTICLE_ID=136327)
- [19] Dill L.H., Balasubramaniam R. Unsteady thermocapillary migration of isolated drops in creeping flow // *Int. J. Heat Fluids Flow*. 1992. V. 13, No. 1. Pp. 78–85. DOI: [10.1016/0142-727X\(92\)90062-E](https://doi.org/10.1016/0142-727X(92)90062-E)
- [20] Galindo V., Gerbeth G., Langbein D., Treuner M. Unsteady thermocapillary migration of isolated spherical drops in a uniform temperature gradient // *Int. J. Microgravity Science and Technology*. 1994. V. 7, No. 3. Pp. 234–241. <https://www.hzdr.de/publications/Publ-73>
- [21] Редников А.Е., Рязанцев Ю.С. О термокапиллярном движении капли под действием излучения // *ПМТФ*. 1989. № 2. С. 179–183. [http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119923&ARTICLE\\_ID=134445](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119923&ARTICLE_ID=134445)
- [22] Гупало Ю.П., Редников А.Е., Рязанцев Ю.С. Термокапиллярный дрейф капли при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // *ПММ*. 1989. Т. 53, вып. 3. С. 433–442.
- [23] Tripathi M.K., Sahu K.C., Karapetsas G., Sefiane K., Matar O.K. Non-isothermal bubble rise: non-monotonic dependence of surface tension on temperature // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 763. Pp. 82–108. DOI: [10.1017/jfm.2014.659](https://doi.org/10.1017/jfm.2014.659)
- [24] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. The migration of a drop in a uniform temperature gradient at large Marangoni numbers // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12, No. 4. Pp. 733–743. DOI: [10.1063/1.870330](https://doi.org/10.1063/1.870330)
- [25] Zhang L., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Motion of a drop in a vertical temperature gradient at small Marangoni number — the critical role of inertia // *J. Fluid Mech.* 2001. V. 448. Pp. 197–211. DOI: [10.1017/S0022112001005997](https://doi.org/10.1017/S0022112001005997)
- [26] Choudhuri D., Raja Sekhar G.P. Thermocapillary drift on a spherical drop in a viscous fluid // *Phys. Fluids*. 2012. V. 25, No. 4. Pp. 043104-1–043104-14. DOI: [10.1063/1.4799121](https://doi.org/10.1063/1.4799121)
- [27] Balasubramaniam R. Thermocapillary and buoyant bubble motion with variable viscosity // *Int. J. Multiphase Flow*. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 679–683. DOI: [10.1016/S0301-9322\(97\)00075-X](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(97)00075-X)
- [28] Premalata A.R., Tripathi M.K., Sahu K.Ch. Dynamics of rising bubble inside a viscosity-stratified medium // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27, No. 7. Pp. 072105-1–072105-15. DOI: [10.1063/1.4927521](https://doi.org/10.1063/1.4927521)
- [29] Popinet S. Gerris: A tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 190, No. 2. Pp. 572–600. DOI: [10.1016/S0021-9991\(03\)00298-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00298-5)
- [30] Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 105. Pp. 61–85. DOI: [10.1017/S002211208100311X](https://doi.org/10.1017/S002211208100311X)
- [31] Sahu K.Ch. A review on rising bubble dynamics in viscosity-stratified fluids // *Sādhanā*. 2017. V. 42, No. 4. Pp. 575–583. DOI: [10.1007/s12046-017-0634-8](https://doi.org/10.1007/s12046-017-0634-8)
- [32] Головин А.М., Фоминых В.В. Движение сферической частицы в вязкой неизотермической жидкости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1983. № 1. С. 38–42.
- [33] Головин А.А., Гупало Ю.П., Рязанцев Ю.С. Изменение формы капли при ее движении за счет хемотермокапиллярного эффекта // *ПМТФ*. 1989. № 4. С. 98–106. [http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119925&ARTICLE\\_ID=134494](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119925&ARTICLE_ID=134494)
- [34] Малай Н.В. К вопросу о термофоретическом движении нагретой сферической капли в вязкой жидкости // *ЖТФ*. 2002. Т. 72, вып. 11. С. 35–43. eLIBRARY ID: [21324678](https://elibrary.ru/21324678)
- [35] Малай Н.В., Щукин Е.Р., Яламов Ю.И. Влияние движения среды на термокапиллярную силу нагретой капли в вязкой жидкости в поле внешнего градиента температуры // *ТВТ*. 2002. Т. 40, вып. 1. С. 114–120. DOI: [10.1023/A:1014246518603](https://doi.org/10.1023/A:1014246518603)
- [36] Малай Н.В., Рязанов К.С., Щукин Е.Р., Стукалов А.А. О силе, действующей на нагретую сферическую каплю, движущуюся в газообразной среде // *ПМТФ*. 2011. Т. 52, № 4. С. 63–71. eLIBRARY ID: [16973561](https://elibrary.ru/16973561)
- [37] Welch S.W. Transient thermocapillary migration of deformable bubbles. // *J. Colloid Interface Sci.* 1998. V. 208, No. 2. Pp. 500–508. DOI: [10.1006/jcis.1998.5883](https://doi.org/10.1006/jcis.1998.5883)
- [38] Yin Z., Gao P., Hu W., Chang L. Thermocapillary migration of nondeformable drops // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20, No. 8. Pp. 082101-1–082101-20. DOI: [10.1063/1.2965549](https://doi.org/10.1063/1.2965549)
- [39] Yin Z., Chang L., Hu W., Li Q., Wang H. Numerical simulations on thermocapillary migrations of nondeformable droplets with large Marangoni numbers // *Phys. Fluids*. 2012. V. 24, No. 9. Pp. 092101-1–092101-18. DOI: [10.1063/1.4752028](https://doi.org/10.1063/1.4752028)
- [40] Hadland P.H., Balasubramaniam R., Wozniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate to large Marangoni number and moderate Reynolds number in reduced gravity // *Exp. Fluids*. 1999. V. 26, No. 3. Pp. 240–248. DOI: [10.1007/s003480050285](https://doi.org/10.1007/s003480050285)
- [41] Brady P.T., Herrmann M., Lopez J.M. Confined thermocapillary motion of a three-dimensional deformable drop // *Phys. Fluids*. 2011. V. 23, No. 2. Pp. 022101-1–022101-11. DOI: [10.1063/1.3529442](https://doi.org/10.1063/1.3529442)
- [42] Wozniak G., Balasubramaniam R., Hadland P.H., Subramanian R.S. Temperature fields in a liquid due to the thermocapillary motion of bubbles and drops // *Exp. Fluids*. 2001. V. 31, No. 1. Pp. 84–89. DOI: [10.1007/s003480000262](https://doi.org/10.1007/s003480000262)
- [43] Ma Ch., Bothe D. Direct numerical simulation of thermocapillary flow based on the Volume of Fluid method // *Int. J. Multiphase Flow*. 2011. V. 37, No. 9. Pp. 1045–1058. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.06.005](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.06.005)

- [44] Alhendal Y., Turan A., Hollingsworth P. Thermocapillary simulation of single bubble dynamics in zero gravity // *Acta Astronautica*. 2013. V. 88. Pp. 108–115.  
DOI: [10.1016/j.actaastro.2013.03.017](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.03.017)
- [45] Alhendal Y., Turan A., Kalendar A., Abou-Ziyan H., El-shiaty R. Thermocapillary Bubble Migration at High Reynolds and Marangoni Numbers: 3D Numerical Study // *Microgravity-Science and Technology*. 2018. V. 30, No. 4. Pp. 561–569.  
DOI: [10.1007/s12217-018-9643-4](https://doi.org/10.1007/s12217-018-9643-4)
- [46] Ansys-Fluent: ANSYS Fluent User's Guide. ANSYS, Inc., 2011.
- [47] Kang Q., Cui H.L., Duan L. On-board experimental study of bubble thermocapillary migration in a recoverable satellite // *Microgravity Sci. Technol.* 2008. V. 20, No. 2. Pp. 67–71.  
DOI: [10.1007/s12217-008-9007-6](https://doi.org/10.1007/s12217-008-9007-6)
- [48] Samareh B., Mostaghimi J., Moreau Ch. Thermocapillary migration of a deformable droplet // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2014. V. 73. Pp. 616–626.  
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.022](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.022)
- [49] Wu Z.-B., Hu W.R. Effects of Marangoni numbers on the thermocapillary drop migration: constant for quasi-steady state? // *J. Math. Phys.* 2013. V. 54. Pp. 023102.  
DOI: [10.1063/1.4792476](https://doi.org/10.1063/1.4792476)
- [50] Wu Z.-B. Thermocapillary migration of a droplet with a thermal source at large Reynolds and Marangoni numbers // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2014. V. 75. Pp. 704–709.  
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.011](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.011)
- [51] Wu Z.-B. Terminal thermocapillary migration of a droplet at small Reynolds numbers and large Marangoni numbers // *Acta Mech.* 2017. V. 228. Pp. 2347–2361.  
DOI: [10.1007/s00707-017-1833-4](https://doi.org/10.1007/s00707-017-1833-4)
- [52] Zhang B., Liu D., Chenga Yo., Xu J., Sui Y. Numerical investigation on spontaneous droplet/bubble migration under thermal radiation // *Int. J. Therm. Sci.* 2018. V. 129. Pp. 115–123.  
DOI: [10.1016/j.ijthermalsci.2018.02.031](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.02.031)
- [53] Abu-Al-Sauda M.O., Popinet S., Tchepelia H.A. A conservative and well-balanced surface tension model // *J. Comput. Phys.* 2018. V. 371. Pp. 896–913.  
DOI: [10.1016/j.jcp.2018.02.022](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.02.022)
- [54] Братухин Ю.К. Брискман В.А., Зуев А.Л., Пшеничников А.Ф., Ривкинд В.Я. Экспериментальное исследование термокапиллярного дрейфа пузырей газа в жидкости // *Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости / под ред. Авдеевского В.С., Полежаева В.И. М.: Наука, 1982. С. 98–109.*
- [55] Братухин Ю.К., Зуев А.Л. Термокапиллярный дрейф пузырьков воздуха в горизонтальной ячейке Хеле–Шоу // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1984. № 3. С. 62–67.
- [56] Balasubramaniam R., Lacy C.E., Woniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate values of the Marangoni number in reduced gravity // *Phys. Fluids*. 1996. V. 8, No. 4. Pp. 872–880.  
DOI: [10.1063/1.868868](https://doi.org/10.1063/1.868868)
- [57] Balasubramaniam R., Lavery J.E. Numerical simulation of thermocapillary bubble migration under microgravity for large Reynolds and Marangoni numbers // *Numer. Heat Transfer*. 1989. V. 16. Pp. 175–187.  
DOI: [10.1080/10407788908944712](https://doi.org/10.1080/10407788908944712)
- [58] Ma X. Numerical simulation and experiments on liquid drops in a vertical temperature gradient in a liquid of nearly the same density: Ph.D. Thes. in Chemical Engineering, Clarkson University, 1998.
- [59] Bratukhin Yu.K., Kostarev K.G., Zuev A.L., Viviani A. Experimental study of Marangoni bubble migration in normal gravity // *Int. J. Experiments in Fluids*, 2005. V. 38, No. 5. Pp. 594–605.  
DOI: [10.1007/s00348-005-0930-7](https://doi.org/10.1007/s00348-005-0930-7)
- [60] Ma X., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Numerical simulation of thermocapillary drop motion with internal circulation // *Numerical Heat Transfer, Part A*, 1999. V. 35. Pp. 291–309.  
DOI: [10.1080/104077899275254](https://doi.org/10.1080/104077899275254)



## Thermocapillary migration of droplets and bubbles in a viscous liquid (review)

Nasibullaeva E.Sh., Urmancheev S.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Investigation of the process of accumulation of gas bubbles in the area of a heat source is, from a physical point of view, quite an interesting problem that leads to important conclusions for practical applications. The peculiarity of the process under consideration is that the surface tension of the bubble changes in an alternating temperature field, which, in turn, leads to the appearance of a flow in the boundary layer of the liquid. In the world scientific literature, the discovery and description of the effect of gas bubble migration in the direction of the temperature gradient is usually associated with the experimental work of Yang, Goldstein and Block (1959). Without diminishing its significance, we note that the effect was first predicted in the theoretical work of Fedosov (1956) as a result of solving the problem of the onset of a microflow of a liquid near plane and spherical interphase boundaries in the presence of a temperature gradient. In both works, a significant factor in explaining the described phenomenon was the dependence of surface tension on temperature. After some time, after which it was realized the need to take into account the migration of not only bubbles, but also droplets, in inhomogeneous temperature fields in space technologies, biomedical and other applications, there was a significant number of publications on this subject, and this phenomenon was called thermocapillary migration. This review is devoted to the analysis of the main, in the opinion of the authors of the article, results of experimental, theoretical and applied research to establish the mechanism of migration of bubbles and drops in temperature gradient fields. In most works, it is assumed that there is no dependence of the physical properties of a liquid, except for surface tension, on temperature. There are only a few studies where the influence of the temperature dependence of the viscosity coefficient was considered, which gives a new impetus to the continuation of research and the development of the theory of the effect, taking into account the thermorheological properties of working media.

**Keywords:** Newtonian fluid, bubble, drop, thermocapillary migration, droplet/bubble migration velocity, temperature gradient, surface tension

### References

- [1] Stokes G.G. On the Effect of the Internal Friction of Fluid on the Motion of Pendulums. *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1850. V. 9. P. 8.
- [2] Hadamard J.S. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *Comput. Rend. Acad. Sci. (Paris)*. 1911. V. 152, No. 25. Pp. 1735–1738.
- [3] Rybczynski D.W. Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium. *Bull. Acad. Sci. Cracow, Ser. A (Sci. Math.) Bull. Acad. Sci. Cracovie*. 1911. V. 1. Pp. 40–46.
- [4] Fedosov A.I. Thermocapillary motion. *Zhurnal Fizicheskoi Khimii*. 1956. V. 30, No. 2. Pp. 366–373.  
<https://arxiv.org/abs/1303.0243v1>
- [5] Young N.O., Goldstein J.S., Block M.J. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient. *J. Fluid Mech.* 1959. V. 6, Iss. 3. Pp. 350–356.  
DOI: 10.1017/S0022112059000684
- [6] Levich V.G. *Physicochemical hydrodynamics*. Englewood Cliffs, NJ., Prentice-Hall. 1962.
- [7] Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops. *J. Fluid Mech.* 1967. V. 27, part 2. Pp. 361–366.  
DOI: 10.1017/S0022112067000370
- [8] Lyubin L.Ya., Povitsky A.S. [Thermocapillary motion in a liquid in the absence of mass forces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 1961. No. 2. Pp. 40–46 (in Russian).  
[http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158570&ARTICLE\\_ID=158894](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=158570&ARTICLE_ID=158894)
- [9] Kuznetsov V.M., Lugovtsov B.A., Sher E.I. Motion of gas bubbles in a liquid under the influence of a temperature gradient. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1966. V. 7. Pp. 88–89.  
DOI: 10.1007/BF00912842

- [10] Yalamov Yu.I., Sanasaryan A.S. Droplet motion in an inhomogeneous-in-temperature viscous medium. *Journal of Engineering Physics*. 1975. V. 28. Pp. 762–765.  
DOI: [10.1007/BF00867387](https://doi.org/10.1007/BF00867387)
- [11] Bratukhin Yu.K. Thermocapillary drift of a droplet of viscous liquid. *Fluid Dynamics*. 1975. V. 10. Pp. 833–837.  
DOI: [10.1007/BF01015460](https://doi.org/10.1007/BF01015460)
- [12] Thompson R.L., DeWitt K.J., Labus T.L. Marangoni bubble motion phenomenon in zero gravity. *Chem.Eng.Commun.* 1980. V. 5. Pp. 299–314.  
DOI: [10.1080/00986448008935971](https://doi.org/10.1080/00986448008935971)
- [13] Balasubramaniam R., Chai A. Thermocapillary Migration of Droplets: An Exact Solution for Small Marangoni Numbers. *J. Colloid Interface Sci.* 1987. V. 119, No. 2. Pp. 531–538.  
DOI: [10.1016/0021-9797\(87\)90300-6](https://doi.org/10.1016/0021-9797(87)90300-6)
- [14] Haj-Hariri H., Shi Q., Borhan A. Thermocapillary motion of deformable drops at finite Reynolds-Marangoni numbers. *Phys. Fluids*. 1997. V. 9. Pp. 2265–2276.  
DOI: [10.1063/1.869182](https://doi.org/10.1063/1.869182)
- [15] Zuev A.L. [Thermal and Concentration Marangoni Convection in Thin Liquid Layers]. *Teplovaya i kontsentratsionnaya konveksiya Marangoni v tonkikh sloyakh zhidkosti*. Ph.D. Thes. Perm, 2009 (in Russian).
- [16] Crespo A., Migoya E., Manuel F. Thermocapillary migration of bubbles at large Reynolds numbers. *Int. J. Multiphase Flow*. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 685–692.  
DOI: [10.1016/S0301-9322\(97\)00076-1](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(97)00076-1)
- [17] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Thermocapillary bubble migration—thermal boundary layers for large Marangoni numbers. *Int. J. Multiphase Flow*. 1996. V. 22, No. 3. Pp. 593–612.  
DOI: [10.1016/0301-9322\(95\)00075-5](https://doi.org/10.1016/0301-9322(95)00075-5)
- [18] Antanovskii L.K., Kopbosynov B.K. Nonstationary thermocapillary drift of a drop of viscous liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1986. V. 27. Pp. 208–213.  
DOI: [10.1007/BF00914730](https://doi.org/10.1007/BF00914730)
- [19] Dill L.H., Balasubramaniam R. Unsteady thermocapillary migration of isolated drops in creeping flow. *Int. J. Heat Fluids Flow*. 1992. V. 13, No. 1. Pp. 78–85.  
DOI: [10.1016/0142-727X\(92\)90062-E](https://doi.org/10.1016/0142-727X(92)90062-E)
- [20] Galindo V., Gerbeth G., Langbein D., Treuner M. Unsteady thermocapillary migration of isolated spherical drops in a uniform temperature gradient. *Int. J. Microgravity Science and Technology*. 1994. V. 7, No. 3. Pp. 234–241.  
<https://www.hzdr.de/publications/Publ-73>
- [21] Rednikov A.E., Ryazantsev Yu.S. Thermocapillary motion of a drop under the action of radiation. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1989. V. 30. Pp. 337–340.  
DOI: [10.1007/BF00852187](https://doi.org/10.1007/BF00852187)
- [22] Gupalo Yu.P., Rednikov A.E., Ryazantsev Yu.S. Thermocapillary drift of a drop in the case when the surface tension depends non-linearly on the temperature. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1989. V. 53, Iss. 3. Pp. 332–339.  
DOI: [10.1016/0021-8928\(89\)90031-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90031-2)
- [23] Tripathi M.K., Sahu K.C., Karapetsas G., Sefiane K., Matar O.K. Non-isothermal bubble rise: non-monotonic dependence of surface tension on temperature. *J. Fluid Mech.* 2015. V. 763. Pp. 82–108.  
DOI: [10.1017/jfm.2014.659](https://doi.org/10.1017/jfm.2014.659)
- [24] Balasubramaniam R., Subramanian R.S. The migration of a drop in a uniform temperature gradient at large Marangoni numbers. *Phys. Fluids*. 2000. V. 12, No. 4. Pp. 733–743.  
DOI: [10.1063/1.870330](https://doi.org/10.1063/1.870330)
- [25] Zhang L., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Motion of a drop in a vertical temperature gradient at small Marangoni number — the critical role of inertia. *J. Fluid Mech.* 2001. V. 448. Pp. 197–211.  
DOI: [10.1017/S0022112001005997](https://doi.org/10.1017/S0022112001005997)
- [26] Choudhuri D., Raja Sekhar G.P. Thermocapillary drift on a spherical drop in a viscous fluid. *Phys. Fluids*. 2012. V. 25, No. 4. Pp. 043104-1–043104-14.  
DOI: [10.1063/1.4799121](https://doi.org/10.1063/1.4799121)
- [27] Balasubramaniam R. Thermocapillary and buoyant bubble motion with variable viscosity. *Int. J. Multiphase Flow*. 1998. V. 24, No. 4. Pp. 679–683.  
DOI: [10.1016/S0301-9322\(97\)00075-X](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(97)00075-X)
- [28] Premkata A.R., Tripathi M.K., Sahu K.Ch. Dynamics of rising bubble inside a viscosity-stratified medium. *Phys. Fluids*. 2015. V. 27, No. 7. Pp. 072105-1–072105-15.  
DOI: [10.1063/1.4927521](https://doi.org/10.1063/1.4927521)
- [29] Popinet S. Gerris: A tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. *J. Comput. Phys.* 2003. V. 190, No. 2. Pp. 572–600.  
DOI: [10.1016/S0021-9991\(03\)00298-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00298-5)
- [30] Bhaga D., Weber M.E. Bubbles in viscous liquids: Shapes, wakes and velocities. *J. Fluid Mech.* 1981. V. 105. Pp. 61–85.  
DOI: [10.1017/S002211208100311X](https://doi.org/10.1017/S002211208100311X)
- [31] Sahu K.Ch. A review on rising bubble dynamics in viscosity-stratified fluids. *Sādhanā*. 2017. V. 42, No. 4. Pp. 575–583.  
DOI: [10.1007/s12046-017-0634-8](https://doi.org/10.1007/s12046-017-0634-8)
- [32] Golovin A.M., Fominykh V.V. Motion of a spherical particle in a viscous nonisothermal fluid. *Fluid Dynamics*. 1983. V. 18. Pp. 26–29.  
DOI: [10.1007/BF01090504](https://doi.org/10.1007/BF01090504)
- [33] Golovin A.A., Gupalo Yu.P., Ryazantsev Yu.S. Change in shape of drop moving due to the chemithermocapillary effect. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1989. V. 30. Pp. 602–609.  
DOI: [10.1007/BF00851103](https://doi.org/10.1007/BF00851103)
- [34] Malai N.V. On the thermophoretic motion of a heated spherical drop in a viscous liquid. *Technical Physics*. 2002. V. 47. Pp. 1380–1388.  
DOI: [10.1134/1.1522106](https://doi.org/10.1134/1.1522106)
- [35] Malai N.V., Shchukin E.R., Yalamov Yu.I. The Effect of the Medium on the Thermocapillary Force of a Heated Droplet Drifting in a Viscous Liquid in the Field of External Temperature Gradient. *High Temperature*. 2002. V. 40. Pp. 105–111.  
DOI: [10.1023/A:1014246518603](https://doi.org/10.1023/A:1014246518603)
- [36] Malai N.V., Ryazanov K.S., Shchukin E.R., Stukalov A.A. On the force acting on a heated spherical drop moving in a gaseous medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2011. V. 52. Pp. 553–559.  
DOI: [10.1134/S0021894411040079](https://doi.org/10.1134/S0021894411040079)
- [37] Welch S.W. Transient thermocapillary migration of deformable bubbles. *J. Colloid Interface Sci.* 1998. V. 208, No. 2. Pp. 500–508.  
DOI: [10.1006/jcis.1998.5883](https://doi.org/10.1006/jcis.1998.5883)
- [38] Yin Z., Gao P., Hu W., Chang L. Thermocapillary migration of non-deformable drops. *Phys. Fluids*. 2008. V. 20, No. 8. Pp. 082101-1–082101-20.  
DOI: [10.1063/1.2965549](https://doi.org/10.1063/1.2965549)
- [39] Yin Z., Chang L., Hu W., Li Q., Wang H. Numerical simulations on thermocapillary migrations of nondeformable droplets with large Marangoni numbers. *Phys. Fluids*. 2012. V. 24, No. 9. Pp. 092101-1–092101-18.  
DOI: [10.1063/1.4752028](https://doi.org/10.1063/1.4752028)
- [40] Hadland P.H., Balasubramaniam R., Wozniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate to large Marangoni number and moderate Reynolds number in reduced gravity. *Exp. Fluids*. 1999. V. 26, No. 3. Pp. 240–248.  
DOI: [10.1007/s003480050285](https://doi.org/10.1007/s003480050285)

- [41] Brady P.T., Herrmann M., Lopez J.M. Confined thermocapillary motion of a three-dimensional deformable drop. *Phys. Fluids*. 2011. V. 23, No. 2. Pp. 022101-1–022101-11. DOI: [10.1063/1.3529442](https://doi.org/10.1063/1.3529442)
- [42] Wozniak G., Balasubramaniam R., Hadland P.H., Subramanian R.S. Temperature fields in a liquid due to the thermocapillary motion of bubbles and drops. *Exp. Fluids*. 2001. V. 31, No. 1. Pp. 84–89. DOI: [10.1007/s003480000262](https://doi.org/10.1007/s003480000262)
- [43] Ma Ch., Bothe D. Direct numerical simulation of thermocapillary flow based on the Volume of Fluid method. *Int. J. Multiphase Flow*. 2011. V. 37, No. 9. Pp. 1045–1058. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.06.005](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.06.005)
- [44] Alhendal Y., Turan A., Hollingsworth P. Thermocapillary simulation of single bubble dynamics in zero gravity. *Acta Astronautica*. 2013. V. 88. Pp. 108–115. DOI: [10.1016/j.actaastro.2013.03.017](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.03.017)
- [45] Alhendal Y., Turan A., Kalendar A., Abou-Ziyan H., El-shiaty R. Thermocapillary Bubble Migration at High Reynolds and Marangoni Numbers: 3D Numerical Study. *Microgravity Science and Technology*. 2018. V. 30, No. 4. Pp. 561–569. DOI: [10.1007/s12217-018-9643-4](https://doi.org/10.1007/s12217-018-9643-4)
- [46] Ansys-Fluent: ANSYS Fluent User's Guide. ANSYS, Inc. 2011.
- [47] Kang Q., Cui H.L., Duan L. On-board experimental study of bubble thermocapillary migration in a recoverable satellite. *Microgravity Sci. Technol.* 2008. V. 20, No. 2. Pp. 67–71. DOI: [10.1007/s12217-008-9007-6](https://doi.org/10.1007/s12217-008-9007-6)
- [48] Samareh B., Mostaghimi J., Moreau Ch. Thermocapillary migration of a deformable droplet. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2014. V. 73. Pp. 616–626. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.022](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.02.022)
- [49] Wu Z.-B., Hu W.R. Effects of Marangoni numbers on the thermocapillary drop migration: constant for quasi-steady state? *J. Math. Phys.* 2013. V. 54. Pp. 023102. DOI: [10.1063/1.4792476](https://doi.org/10.1063/1.4792476)
- [50] Wu Z.-B. Thermocapillary migration of a droplet with a thermal source at large Reynolds and Marangoni numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2014. V. 75. Pp. 704–709. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.011](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.011)
- [51] Wu Z.-B. Terminal thermocapillary migration of a droplet at small Reynolds numbers and large Marangoni numbers. *Acta Mech.* 2017. V. 228. Pp. 2347–2361. DOI: [10.1007/s00707-017-1833-4](https://doi.org/10.1007/s00707-017-1833-4)
- [52] Zhang B., Liu D., Chenga Yo., Xu J., Sui Y. Numerical investigation on spontaneous droplet/bubble migration under thermal radiation. *Int. J. Therm. Sci.* 2018. V. 129. Pp. 115–123. DOI: [10.1016/j.ijthermalsci.2018.02.031](https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.02.031)
- [53] Abu-Al-Sauda M.O., Popinet S., Tchepia H.A. A conservative and well-balanced surface tension model. *J. Comput. Phys.* 2018. V. 371. Pp. 896–913. DOI: [10.1016/j.jcp.2018.02.022](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.02.022)
- [54] Bratukhin Yu.K., Briskman V.A., Zuev A.L., Pshenichnikov A.F., Rivkind V.Ya. In book: [Experimental study of thermocapillary drift of gas bubbles in a liquid] *Gidromekhanika i teplotasooobmen v nevesomosti* (eds. by Avduevsky V.S., Polezhaev V.I.). M.: Nauka, 1982. Pp. 98–109 (in Russian).
- [55] Bratukhin Yu.K., Zuev A.L. Thermocapillary drift of an air bubble in a horizontal Hele-Shaw cell. *Fluid Dynamics*. 1984. V. 19. Pp. 393–398. DOI: [10.1007/BF01093902](https://doi.org/10.1007/BF01093902)
- [56] Balasubramaniam R., Lacy C.E., Woniak G., Subramanian R.S. Thermocapillary migration of bubbles and drops at moderate values of the Marangoni number in reduced gravity. *Phys. Fluids*. 1996. V. 8, No. 4. Pp. 872–880. DOI: [10.1063/1.868868](https://doi.org/10.1063/1.868868)
- [57] Balasubramaniam R., Lavery J.E. Numerical simulation of thermocapillary bubble migration under microgravity for large Reynolds and Marangoni numbers. *Numer. Heat Transfer*. 1989. V. 16. Pp. 175–187. DOI: [10.1080/10407788908944712](https://doi.org/10.1080/10407788908944712)
- [58] Ma X. Numerical simulation and experiments on liquid drops in a vertical temperature gradient in a liquid of nearly the same density. Ph.D. Thes. in Chemical Engineering, Clarkson University, 1998.
- [59] Bratukhin Yu.K., Kostarev K.G., Zuev A.L., Viviani A. Experimental study of Marangoni bubble migration in normal gravity. *Int. J. Experiments in Fluids*. 2005. V. 38, No. 5. Pp. 594–605. DOI: [10.1007/s00348-005-0930-7](https://doi.org/10.1007/s00348-005-0930-7)
- [60] Ma X., Balasubramaniam R., Subramanian R.S. Numerical simulation of thermocapillary drop motion with internal circulation. *Numerical Heat Transfer, Part A*. 1999. V. 35. Pp. 291–309. DOI: [10.1080/104077899275254](https://doi.org/10.1080/104077899275254)



## Влияние синерезиса водной пены на скорость распространения ударной волны<sup>1</sup>

Гайнуллина Э.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Выполнено численное моделирование распространения сферического ударного импульса в водной пене с объемным водосодержанием  $\alpha_{10} = 0.0083$  в соответствии с литературными экспериментальными данными по взрыву взрывчатого вещества в водной пене. Используется допущение о разрушении пенной структуры ударной волной, что приводит к преобразованию пены в монодисперсную газочапельную смесь. Система уравнений двухфазной газочапельной модели водной пены включает законы сохранения массы, импульса, энергии каждой фазы и уравнение динамики объемного водосодержания в однодавленческом, двухскоростном, двухтемпературном приближении в трехмерной постановке и учитывает силы межфазного сопротивления Шиллера–Наумана, межфазный контактный теплообмен Ранца–Маршалла и влияние синерезиса пены на начальное распределение ее объемного водосодержания. Реалистичные уравнения состояния в форме Пенга–Робинсона и Ми–Грюнайзена использованы при описании термодинамических свойств воздуха и воды, составляющих газочапельную смесь. Численное моделирование рассматриваемых процессов выполнено в открытом программном комплексе вычислительной гидродинамики OpenFOAM методом контрольных объемов на основе итеративного двухшагового алгоритма PIMPLE. Проведен анализ влияния синерезиса пены на динамику ударного импульса в водной пене. Установлено, что неравномерное распределение объемного содержания воды в пене, обусловленное ее осаждением под действием силы тяжести, приводит к увеличению скорости ударного импульса в верхних слоях пены. При сравнительном анализе численных решений и экспериментальных данных в местоположениях датчиков показана важность учета явлений синерезиса при моделировании динамики ударной волны в водной пене. Достоверность расчетов по предлагаемой модели подтверждена их согласованием с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** сферический взрыв, ударная волна, водная пена, пакет OpenFOAM, численное моделирование

### 1. Введение

Теоретические и экспериментальные исследования ударных волн (УВ) в водных пенах важны для изучения процессов, влияющих на демпфирующие свойства газожидкостных смесей. Снижение интенсивности УВ водными пенами, осуществляемое за счет высокой сжимаемости пенных структур, может быть использовано в различных отраслях промышленности для защиты производственных объектов от высокоэнергетического воздействия и обеспечения безопасности технологических процессов.

Способности водных пен снижать основные параметры УВ были исследованы экспериментально в работах [1–3], в которых показано, что применение пенных преград снижает амплитуду ударного импульса на порядок по сравнению с газом.

В [4, 5] теоретически изучены пространственные эффекты, сопровождающие взаимодействие воздушных ударно-волновых импульсов с преградами из водных пен.

Численное моделирование взрыва взрывчатого вещества (ВВ) в пене с использованием односкоростной смеси модели, учитывающей контактный теплообмен между фазами и особенности дисперсной среды, проведено в работе [6]. Динамика сферического взрыва в пене, соответствующего экспериментам [3], численно исследована в [7, 8] на основе одномерной односкоростной модели газо-

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке средствами государственного бюджета по госзаданию 0246–2019–0052.

капельной смеси методом сквозного счета с учетом псевдовязкости Неймана–Рихтмайера, в [9, 10] — с применением трехмерной двухскоростной модели водной пены, учитывающей межфазные силы, тепловую релаксацию фаз и влияние процесса синерезиса (осаждения) пены, численно реализованной методом контрольных объемов в программном комплексе OpenFOAM.

В настоящем исследовании проведено изучение волновых течений, возникающих при сферическом взрыве в водной пене, с более детальным, по сравнению с [9, 10], анализом влияния гравитационных сил на динамику УВ в пенной среде.

## 2. Уравнения модели

При описании водной пены используется предположение о разрушении ее структуры ударным импульсом с формированием взвеси микрокапель диаметра  $d_{10} = 30$  мкм [6] в газе за фронтом сильной УВ. Система модельных уравнений газожидкостной среды включает уравнения неразрывности, импульса, энергии каждой фазы и уравнение динамики объемного водосодержания в соответствии с однодавленческим, двухскоростным, двухтемпературным приближениями для газожидкостной смеси в двумерной осесимметричной постановке [11].

- Закон сохранения массы фаз:

$$\frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i) = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha_i$  — объемное содержание;  $\rho_i$  — плотность;  $\vec{v}_i$  — вектор скорости;  $t$  — время;  $i, j = 1, 2$  — обозначения жидкой и газовой фаз.

- Закон сохранения импульса фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \vec{v}_i) = \\ = -\alpha_i \nabla p + \operatorname{div}(\alpha_i \vec{\tau}_i) + \vec{F}_i, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\operatorname{div}(\alpha_i \rho_i \vec{v}_i \vec{v}_i)$  — вектор-дивергенция пары векторов [11];  $p$  — давление; тензор вязких напряжений  $\vec{\tau}_i$  и плотность межфазных сил  $\vec{F}_i$  имеют вид:

$$\vec{\tau}_i = \mu_i (\nabla \vec{v}_i + \nabla \vec{v}_i^T) - \frac{2}{3} (\mu_i \operatorname{div} \vec{v}_i) I,$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,drag} + \vec{F}_{i,vm}.$$

Здесь  $\mu_i$  — динамическая вязкость;  $I$  — единичный тензор;  $\vec{F}_{i,drag}$  — сила межфазного сопротивления, определяемая моделью Шиллера–Наумана [12]:

$$\vec{F}_{i,drag} = \frac{3}{4} \alpha_1 C_D \frac{\rho_2}{d_{10}} (\vec{v}_i - \vec{v}_j) |\vec{v}_i - \vec{v}_j|;$$

$\vec{F}_{i,vm}$  — сила присоединенных масс:

$$\vec{F}_{i,vm} = 0.5 \alpha_1 \rho_2 \left( \frac{d_i \vec{v}_i}{dt} - \frac{d_j \vec{v}_j}{dt} \right).$$

Коэффициент  $C_D$  в выражении силы межфазного сопротивления зависит от параметра  $c_s(\alpha_{10})$ , определяющего влияние синерезиса пены на интенсивность межфазного взаимодействия [9, 10]:

$$C_D = \frac{c_s(\alpha_{10})(1 + 0.15 \operatorname{Re}^{0.687})}{\operatorname{Re}}, \quad \operatorname{Re} \leq 1000. \quad (3)$$

- Закон сохранения энергии фаз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i))}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_i \rho_i (e_i + K_i) \vec{v}_i) = \\ = -p \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_i \vec{v}_i p) + \\ + \operatorname{div}(\alpha_i \gamma_i \frac{c_{p,i}}{c_{v,i}} \nabla h_i) + K_{ht} (T_j - T_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $e_i, K_i$  — внутренняя и кинетическая энергии;  $\gamma_i$  — температуропроводность;  $c_{p,i}, c_{v,i}$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме;  $h_i$  — энтальпия;  $T_i$  — температура.

Коэффициент теплообмена  $K_{ht}$  определен согласно модели Ранца–Маршалла [13]:

$$K_{ht} = \frac{\kappa_2 \operatorname{Nu}}{d_{10}}, \quad \operatorname{Nu} = 2 + 0.6 \operatorname{Re}^{1/2} \operatorname{Pr}^{1/3},$$

где  $\kappa_2$  — теплопроводность газа;  $\operatorname{Nu}, \operatorname{Re}, \operatorname{Pr}$  — числа Нуссельта, Рейнольдса и Прандтля.

- Уравнение динамики содержания воды в пене:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha_1 (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)) + \\ + \operatorname{div}(\alpha_1 \alpha_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)) - \alpha_1 \operatorname{div}(\alpha_1 \vec{v}_1 + \\ + \alpha_2 \vec{v}_2) = \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{1}{\rho_2} \frac{d \rho_2}{dt} - \frac{1}{\rho_1} \frac{d \rho_1}{dt} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

- Уравнение состояния газа в форме Пенга–Робинсона [14]:

$$p = \frac{RT_2}{V_m - b} - \frac{a(T_2)}{V_m(V_m + b) + b(V_m - b)}, \quad (6)$$

в котором

$$a = 0.45724 \frac{R^2 T_c^2}{p_c} \lambda(T_r, \omega), \quad b = 0.07780 \frac{RT_c}{p_c},$$

$$\lambda = (1 + \theta(1 - T_r^{0.5}))^2, \quad T_r = \frac{T_2}{T_c},$$

$$\theta = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2,$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $V_m$  — молярный объем;  $T_c, p_c$  — критические значения температуры и давления для воздуха;  $\omega$  — ацентрический фактор.

- Широкодиапазонное уравнение состояния воды [15] в форме Ми–Грюнайзена с упругим потенциалом типа Борна–Майера:

$$p = p^{(p)} + p^{(T)}, \quad e = e^{(p)} + e^{(T)}, \quad (7)$$

где

$$p^{(p)}(\rho) = A \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\beta+1} \exp \left[ b \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\beta} \right) \right] - K \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\xi+1}, \quad \rho = \frac{1}{V},$$

$$e^{(p)}(\rho) = \int_{\rho^*}^{\rho} \frac{p^{(p)}(\rho)}{\rho^2} d\rho = \frac{A}{\beta \rho_0 b} \exp \left[ b \left( 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\beta} \right) \right] - \frac{K}{\xi \rho_0} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\xi} + e^*,$$

$$\frac{\xi_V(\rho)}{\rho} = \Gamma(\rho) c_V.$$

Константа интегрирования  $e^*$  обеспечивает выполнение условий  $e^{(p)}(\rho^*) = 0, p^{(p)}(\rho^*) = 0$ .

### 3. Постановка задачи и анализ результатов

Рассматривается задача о воздействии УВ на водную пену для условий экспериментов по сферическому взрыву ВВ в пенной среде, подробно описанных в [3]. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1: в цилиндрическом сосуде, заполненном водной пеной с начальным объемным водосодержанием  $\alpha_{10} = 0.0083$ , происходит детонация ВВ PLANP (масса заряда 145 г). Параметры сильной УВ, инициированной взрывом, измерялись датчиками, расположенными на расстояниях  $l_1 = 0.41, l_2 = 0.53, l_3 = 0.67$  и  $l_4 = 0.93$  м от его центра.

В соответствии с экспериментом [3] (рис. 1) расчетная область исследуемой задачи представляет собой цилиндр радиусом 2 м, заполненный водной пеной. При формировании начальных условий поставленной задачи предварительно учитывается процесс синерезиса, который определяется временным интервалом  $\Delta t \approx 10$  мин от момента заливки пены до инициирования взрыва. В настоящей работе предполагается, что распределение  $\alpha_{10}$  по мере увеличения высоты варьируется от 0.0083



Рис. 1. Схема эксперимента: 1–4 — местоположения датчиков давления

до 0.001, что показано изменением насыщенности синего цвета на рис. 1.

В центре расчетной области задается импульс давления, моделирующий взрыв:

$$p(x, y, z) = p_0 + \Delta p e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2},$$

где  $\Delta p = 3000$  МПа,  $p_0 = 0.1$  МПа,  $a = 0.035$  м.

Центр взрыва изолирован сферой радиусом 0.04 м с граничным условием жесткой стенки на ее поверхности с целью повышения устойчивости расчетов. Система уравнений (1)–(7) была численно реализована методом контрольных объемов в новом решателе, созданном автором в открытом пакете OpenFOAM, с использованием алгоритма PIMPLE.

Сравнительный анализ расчетов и экспериментальных данных [3] в местоположении датчиков 1–4 показан на рис. 2. Численные решения с учетом и без учета явлений синерезиса обозначены линиями черного и синего цвета соответственно, данные экспериментов [3] — линией красного цвета. На графиках видно, что расчетная динамика УВ, фиксируемая датчиками 1 и 2, имеет двухволновую структуру и согласуется с экспериментальными осциллограммами давлений по скорости и амплитуде ударного импульса. Процесс синерезиса пены сопровождается увеличением объемного газосодержания в ее верхних слоях за счет перемещения жидкой фракции пены вниз под действием гравитационных сил. Неравномерное по высоте распределение объемного водосодержания влияет на скорость распространения УВ в пенной среде: с увеличением высоты пена становится менее плотной, а скорость ударного импульса в вертикальном направлении увеличивается, что сильнее всего проявляется на датчике 4, расположенном выше остальных.

Динамика сферического ударно-волнового импульса в водной пене показана на рис. 3 в виде расчетных пространственных распределений дав-

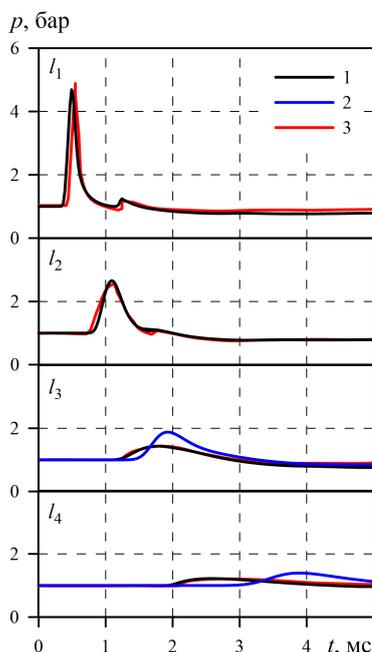


Рис. 2. Результаты расчетов динамики импульса давления в пене для датчиков, расположенных на расстоянии  $l_1 = 0.41$ ,  $l_2 = 0.53$ ,  $l_3 = 0.67$ ,  $l_4 = 0.93$  м от центра взрыва, 1 – с учетом и 2 – без учета процесса синергизиса, 3 – экспериментальные данные [3]

ления (а) и векторных полей скоростей (б) в указанные моменты времени. Снижение объемного водосодержания в верхних слоях пены в процессе ее синергизиса приводит к ускорению движения ударного импульса в вертикальном направлении до  $\approx 100$  м/с ( $t = 2$  мс, рис. 3(б)). По мере распространения УВ в центре взрыва формируется область низких давлений и малых скоростей ( $t = 2.5$  мс), которая со временем расширяется (см. рис. 3 при  $t = 3$  мс,  $t = 3.5$  мс). В окрестности этой зоны происходит смена направления потока к центру взрыва. Описанный процесс показан на рис. 3(б) при  $t = 2.5$  мс. Дальнейшее отражение волн разрежения от центра симметрии приводит к образованию второй волны сжатия амплитудой  $\approx 1.1$  бар ( $t = 3$  мс, рис. 3(а)), распространяющейся со скоростью  $\approx 20$  м/с вслед за основной УВ ( $t = 3$  мс, рис. 3(б)). В местоположении датчиков 3 и 4 ( $t = 3$  мс, рис. 3(б)) сохраняется локальная зона высоких скоростей, что ускоряет движение фронта УВ в вертикальном направлении.

#### 4. Заключение

Численно исследована эволюция сферического взрыва в водной пене, моделируемого в соответствии с данными экспериментов [3]. Простран-

ственная математическая модель, используемая для описания динамики УВ в водной пене, учитывает силы межфазного взаимодействия, контактный теплообмен и влияние осаждения водной пены под гравитационным воздействием на начальное распределение объемного содержания воды в пенной среде. Численная реализация предлагаемой модели выполнена в открытом программном комплексе OpenFOAM. Исследованы особенности структуры формирующегося ударно-волнового течения. Показано, что снижение объемного содержания воды в верхних слоях пены в процессе ее синергизиса сопровождается увеличением скорости УВ в вертикальном направлении. Установлено наилучшее согласование расчетов при учете процесса синергизиса пены с экспериментальными данными [3].

Автор работы выражает искреннюю благодарность научному руководителю д.ф.–м.н. Раисе Хакимовне Болотновой за ценные советы и помощь в постановке и решении задачи.

#### Список литературы

- [1] Borisov A.A., Gelfand B.E., Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Stepanov V.V., Timofeev E.I. and Khomik S.V. Shock waves in water foams // *Acta Astronautica*. 1978. Vol. 5, No. 11/12. P. 1027–1033. DOI: 10.1016/0094-5765(78)90007-3
- [2] Hartman W., Boughton B., Larsen M. Blast mitigation capabilities of aqueous foam // Technical Report. SAND2006-0533. Sandia: Sandia National Laboratories. 2006. 98 p. <https://prod-ng.sandia.gov/techlib-noauth/access-control.cgi/2006/060533.pdf>
- [3] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23, No. 1. P. 39–53. DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0
- [4] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование осесимметричных волновых течений при взаимодействии сферического ударного импульса с барьером из водной пены // *Труды Института механики Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 2. С. 238–243. DOI: 10.21662/uim2017.2.036
- [5] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Dynamics of a spherical explosion in aqueous foam taking into account heat-exchange and dissipative processes // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Vol. 1400. 077027. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077027
- [6] Ждан С.А. Численное моделирование взрыва заряда ВВ в пене // *ФГВ*. 1990. Т. 26, № 2. С. 103–110. eLIBRARY ID: 30555610
- [7] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Исследование демпфирующих свойств водной пены под воздействием сферической ударной волны // *Известия ВУЗов. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2017. № 2. С. 108–121. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [8] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // *ПММ*. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477. DOI: 0.1134/S0032823519030020

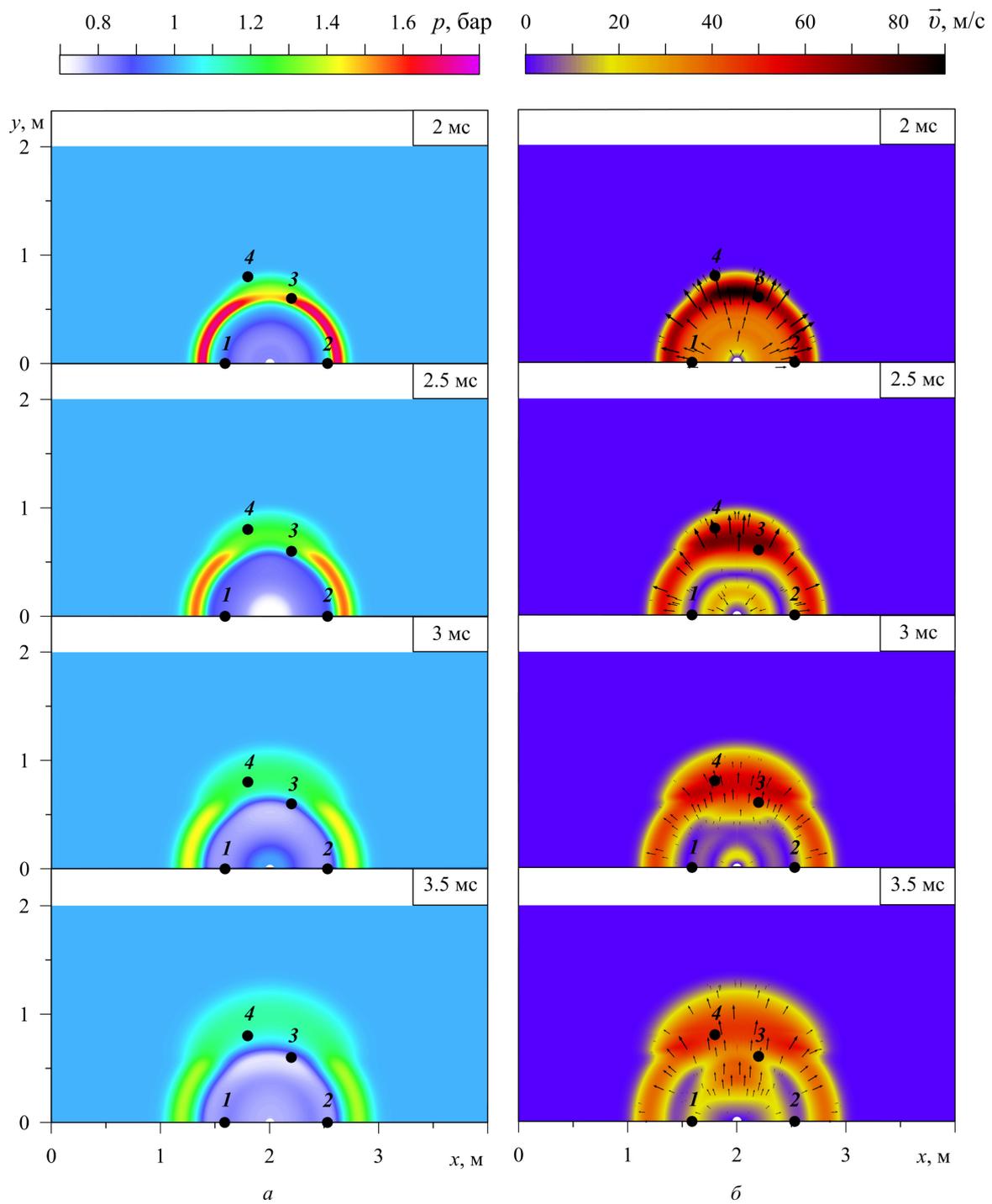


Рис. 3. Динамика полей давления и векторных полей скоростей в указанные моменты времени; 1–4 – местоположения датчиков давления

- [9] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф., Нурисламова Э.А. Моделирование процесса ослабления сферического взрыва применением водной пены // Многофазные системы. 2019. Т. 14, №. 2. С. 108–114.  
DOI: [10.21662/mfs2019.2.015](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.015)
- [10] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Моделирование динамики ударного воздействия на водные пены с учетом вязкоупругих свойства явлений синерезиса // Изв. РАН. МЖГ. 2020. №. 5. Р. 28–32.  
DOI: [10.31857/S0568528120050023](https://doi.org/10.31857/S0568528120050023)
- [11] Zeno Tacconi. Feasibility analysis of a two-fluid solver for cavitation and interface capturing as implemented in OpenFOAM // Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica, Politecnico di Milano. 2018. 134 p.  
<https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/139684>
- [12] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // Z. Ver. Deutsch. Ing. 1935. Vol. 77. P. 40–65.
- [13] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // Chem. Eng. Prog. 1952. Vol. 48, No. 22. P. 141–146.
- [14] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. Vol. 15. P. 59–64.  
DOI: [10.1021/i160057a011](https://doi.org/10.1021/i160057a011)
- [15] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма //ТВТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310–313.  
eLIBRARY ID: [15639102](https://elibrary.ru/15639102)



## Influence of aqueous foam syneresis on the shock wave propagation velocity

Gainullina E.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Numerical simulation of the spherical shock pulse propagation in aqueous foam with volumetric liquid fraction of 0.0083 has been carried out in accordance with the published experimental data on the explosion of HE in aqueous foam. The assumption is used that the foam structure is destroyed by the shock wave, which leads to the transformation of the foam into a monodisperse gas-droplet mixture. The system of equations for the two-phase gas-droplet model of aqueous foam includes the laws of conservation of mass, momentum, energy for each phase and the equation for the dynamics of the volumetric liquid fraction in a single-pressure, two-velocity, two-temperature approximations in a three-dimensional formulation and takes into account the forces of the Schiller-Naumann interfacial drag, the Ranz-Marshall interphase contact heat exchange and the effect of foam syneresis on the initial distribution of its volumetric liquid fraction. Realistic equations of state in the form of Peng-Robinson and Mie-Gruneisen are used to describe the thermodynamic properties of air and water that make up a gas-droplet mixture. Numerical modeling of the processes under consideration was carried out in the open software of computational fluid dynamics OpenFOAM using the finite volume method based on the iterative two-step PIMPLE algorithm. The analysis of the effect of foam syneresis on the dynamics of shock pulse in aqueous foam is given. It was found that the uneven distribution of the liquid fraction in the foam, caused by its sedimentation under the gravity, leads to the increase in the shock pulse velocity in upper layers of the foam. In comparative analysis of numerical solutions and experimental data at sensor locations, the importance of taking into account syneresis phenomena in modeling the dynamics of shock wave in aqueous foam is shown. The reliability of calculations obtained by the proposed model is confirmed by their agreement with experimental data.

**Keywords:** spherical explosion, shock wave, aqueous foam, OpenFOAM package, numerical modeling

### References

- [1] Borisov A.A., Gelfand B.E., Kudinov V.M., Palamarchuk B.I., Stepanov V.V., Timofeev E.I. and Khomik S.V. Shock waves in water foams // *Acta Astronautica*. 1978. Vol. 5. No. 11/12. P. 1027–33.  
DOI: 10.1016/0094-5765(78)90007-3
- [2] Hartman W., Boughton B., Larsen M. Blast mitigation capabilities of aqueous foam // Technical Report. SAND2006-0533. Sandia: Sandia National Laboratories. 2006. 98 p.  
<https://prod-ng.sandia.gov/techlib-noauth/access-control.cgi/2006/060533.pdf>
- [3] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23. No. 1 P. 39–53.  
DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0
- [4] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [Investigation of axisymmetric wave flows under interaction of a spherical impact pulse with a barrier of aqueous foam] *Trudy Instituta Mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo Nauchnogo Centra Rossijskoj Akademii Nauk* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2017. V. 12. No. 2. Pp. 238–243 (in Russian).  
DOI: 10.21662/uim2017.2.036
- [5] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Dynamics of a spherical explosion in aqueous foam taking into account heat-exchange and dissipative processes // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Vol. 1400. 077027.  
DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077027
- [6] Zhdan S.A. Numerical modeling of the explosion of a high explosive (HE) charge in foam // *Combust., Explos., Shock Waves*. 1990. V. 26. No. 2. Pp. 221–227.  
DOI: 10.1007/BF00742416
- [7] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. [A research of damping properties of aqueous foam under the impact of spherical shock waves] *Izvestiya VUZov. Povolzhskij Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017. No. 2. Pp. 108–121 (in Russian).  
DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-9
- [8] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54. No. 7. Pp. 970–977.  
DOI: 10.1134/S0015462819070024

- [9] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F., Nurislamova E.A. [Modeling of the spherical explosion attenuation process using aqueous foam] *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase systems]. 2019. V. 14. No. 2. Pp. 108–114 (in Russian).  
DOI: [10.21662/mfs2019.2.015](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.015)
- [10] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Modeling the Dynamics of Shock Impact on Aqueous Foams with Account for Viscoelastic Properties and Syneresis Phenomena // *Fluid Dynamics*. 2020. V. 55. No. 5. P. 604–608.  
DOI: [10.1134/S001546282005002X](https://doi.org/10.1134/S001546282005002X)
- [11] Zeno Tacconi. Feasibility analysis of a two-fluid solver for cavitation and interface capturing as implemented in OpenFOAM // *Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Energetica, Politecnico di Milano*. 2018. 134 p.  
<https://www.politesi.polimi.it/handle/10589/139684>
- [12] Schiller L., Naumann Z. A Drag Coefficient Correlation // *Z. Ver. Deutsch. Ing.* 1935. Vol. 77. P. 40–65.
- [13] Ranz W.E., Marshall W.R. Evaporation from Drops // *Chem. Eng. Prog.* 1952. Vol. 48. No. 22. P. 141–146.
- [14] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // *Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals*. 1976. Vol. 15. P. 59–64.  
DOI: [10.1021/i160057a011](https://doi.org/10.1021/i160057a011)
- [15] Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-Range Equation of State of Water and Steam: Simplified Form // *High Temperature*. 2011. Vol. 49. Issue 2. P. 303–306.  
DOI: [10.1134/S0018151X11020106](https://doi.org/10.1134/S0018151X11020106)



## Моделирование выноса жидкости глушения после запуска нефтедобывающей скважины

Топольников А.С.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

В работе представлены результаты математического моделирования процесса запуска и вывода на режим нефтедобывающей скважины, в которую на этапе проведения ремонта была закачана жидкость глушения. После запуска электроцентробежного насоса происходит снижение давления на забое и инициируется приток пластовой жидкости. В результате в скважине образуется многокомпонентная смесь, состоящая из нефти, попутно-добываемой воды, жидкости глушения и свободного газа, выделяющегося из нефти при ее разгазировании, которая откачивается насосом в направлении устья. Поскольку характеристики насоса при прокачке им жидкости с изменяющейся плотностью варьируются, то для обеспечения стабильного режима его работы необходимо регулировать скорость вращения вала насоса. В работе эта задача решается для различных соотношений плотностей жидкости глушения и пластового флюида на основе математического моделирования течения многофазного потока в элементах скважины и насосе. В качестве математической модели применяется одномерная квазистационарная модель в приближении дрейфа для описания относительного движения компонентов, которая хорошо зарекомендовала себя при моделировании нестационарных процессов в скважинах, длящихся несколько суток. Приводится сравнение расчетных параметров с промышленными данными. Показано, что от соотношения плотностей жидкости глушения и пластового флюида и объема жидкости глушения зависит скорость ее выноса на поверхность и вероятность остановки насоса из-за срыва подачи по напору. Установлено, что на основе мониторинга изменения параметров электроцентробежного насоса во времени с помощью математического моделирования можно оптимизировать вывод скважины на режим. Это позволит избежать остановок из-за срывов подачи по напору и сократить затраты электроэнергии.

**Ключевые слова:** многофазный поток, нестационарное течение, нефтедобывающая скважина

### 1. Введение

Вывод скважины на режим — период времени с момента кнопочного запуска насоса и начала движения флюида в скважине до момента достижения установившегося режима работы — является важным этапом в жизни скважины и спущенной в нее установки электроцентробежного насоса (УЭЦН). От того, насколько удачно пройдет процесс вывода на режим, зависит срок эксплуатации оборудования и вероятность проведения корректирующих геолого-технических мероприятий.

В процессе ремонта скважины, предшествующего выводу на режим, часто приходится прибегать к операции глушения. Она заключается

в закачке в скважину технологической жидкости, обычно с плотностью, превышающей плотность пластовой жидкости, с целью компенсации силы пластового давления. При высоком пластовом давлении на остановленной скважине может происходить самопроизвольный излив жидкости на устье и для того, чтобы этого не происходило, вес столба жидкости искусственно утяжеляют за счет жидкости глушения.

Особенностью вывода на режим заглушенных скважин является то, что в процессе отбора продукции сначала на устье в основном выносятся жидкость глушения, и только потом начинается добыча пластового флюида, состоящего из нефти, попутно-добываемой воды и газа, выделяющегося из нефти, где он в пластовых условиях находится в растворенном состоянии. При этом, если речь

идет о наиболее распространенной сегодня добыче с помощью электроцентробежных насосов (ЭЦН), следует понимать, что напорная характеристика последних весьма чувствительна к плотности перекачиваемого флюида. При одинаковом расходе на чистой нефти напор ЭЦН на 10–20 % выше, чем на пластовой воде, и на 30–40 % выше, чем на тяжелой жидкости глушения. Это может напрямую повлиять на работу насоса: при недостаточном напоре произойдет срыв подачи по напору, а при избыточном насос быстро откачает уровень из затрубного пространства скважины и произойдет срыв подачи по уровню. В обоих случаях последует остановка скважины, что является нежелательным событием во время вывода на режим.

Во избежание риска остановок из-за изменения полезного напора насоса под влиянием переменной плотности откачиваемой жидкости необходима адаптация частоты питающего напряжения погружного электродвигателя (ПЭД), осуществляющего вращение вала, на котором располагаются рабочие колеса ЭЦН. Такая адаптация возможна только при наличии алгоритма оперативного мониторинга параметров скважины, основанного на моделировании течения нестационарного потока и, в частности, выноса жидкости глушения из скважины.

За основу математической модели для описания многофазного потока в элементах скважины (обсадная колонна, насосно-компрессорные трубы (НКТ), затрубное пространство между обсадной колонной и НКТ) взята система уравнений, приведенная в работах [1, 2]. Она состоит из дифференциальных уравнений, описывающих законы сохранения массы компонентов и количества движения смеси в целом в одномерной постановке, записанных в квазистационарном приближении. Квазистационарное приближение для описания нестационарного потока состоит в том, что на каждом временном шаге распределения параметров в скважине находятся в приближении мгновенного установления стационарного течения среды. Такое приближение, как показано в работах [2, 3], допустимо, если характерное время изменения параметров в скважине исчисляется десятками минут и более. При этом скорость расчетов по квазистационарной модели значительно выше, чем при использовании нестационарной.

Поскольку в работе акцент делается на моделировании выноса жидкости глушения из скважины, то имеющаяся система дифференциальных уравнений для описания трехкомпонентного течения (нефть, вода, газ) обобщается на случай присутствия четвертой компоненты — жидкости глуше-

ния. Пласт при этом моделируется с помощью эмпирической корреляции типа Вогеля с переменным коэффициентом продуктивности для учета нестационарных процессов, протекающих в пласте, а насос — с помощью паспортной расходно-напорной характеристики (РХН).

В настоящей работе приводится решение двух модельных задач, связанных с выносом жидкости глушения при выводе скважины на режим. В первой задаче исследуется влияние изменения плотности флюида, проходящего через насос, на параметры скважины. Анализируется зависимость скорости выноса жидкости глушения из скважины и риска остановки насоса из-за срыва подачи по напору от соотношения плотностей жидкости глушения и скважинной жидкости. Приводится сравнение с промышленными данными. Вторая задача посвящена поиску оптимального алгоритма настройки частоты вращения вала ПЭД для снижения влияния изменения состава скважинного флюида во время вывода на режим. Алгоритм подбирается исходя из минимизации рисков остановки скважины из-за срыва подачи и стабилизации энергетических параметров насосной установки.

## 2. Математическая модель

Математическая модель для описания процесса вывода скважины на установившийся режим включает в себя три взаимосвязанные подмодели: модель притока жидкости из пласта, модель течения многофазного потока в трубных элементах скважины и модель насосного оборудования.

В пласте сразу после запуска скважины начинается перераспределение поля давлений: при включении насоса он начинает интенсивно отбирать жидкость не только из затрубного пространства скважины, но и из обсадной колонны. В результате давление на забое и в околоскважинной области снижается и начинается фильтрация жидкости в пласте от периферии к перфорационным отверстиям скважины. Поскольку, в общем случае, течение в пласте может быть достаточно сложным (это связано с особенностями заканчивания скважин, наличием трещин гидроразрыва пласта и прочими факторами), а число влияющих параметров велико, то моделирование притока из пласта рискует превратиться в отдельную задачу, требующую больших вычислительных затрат. В то же время наличие промысловых замеров дебита жидкости и давления в скважине позволяет применить более простые эмпирические корреляции, параметры которых могут быть адаптированы на замерные данные. В работе применяется именно такой подход. Связь притока из пласта и забойного дав-

ления при условии, что давление насыщения меньше пластового давления, выражается с помощью корреляции Вогеля:

$$\begin{aligned} Q_l &= wcQ_w + (1 - wc)Q_o, \\ Q_w &= K_{pr} (p_{res} - p_{wf}), \\ Q_o &= K_{pr} (p_{res} - p_{bp}) + \frac{K_{pr} p_{wf}}{1.8} \times \\ &\times \left( 1 - 0.2 \left( \frac{p_{wf}}{p_{res}} \right) - 0.8 \left( \frac{p_{wf}}{p_{res}} \right)^2 \right), \\ p_{wf} < p_{bp}, \quad Q_o &= K_{pr} (p_{res} - p_{wf}), \quad p_{wf} \geq p_{bp}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $Q_l$ ,  $Q_w$ ,  $Q_o$  — дебиты жидкости, воды и нефти соответственно, приведенные к поверхностным условиям ( $\text{м}^3/\text{сут}$ );  $wc$  — объемная доля воды в жидкости;  $p_{wf}$ ,  $p_{bp}$  и  $p_{res}$  — забойное давление, давление насыщения нефти газом и пластовое давление (МПа);  $K_{pr}$  — коэффициент продуктивности скважины ( $\text{м}^3/(\text{сут} \cdot \text{МПа})$ ), который в общем случае является функцией от времени  $t$  (с):

$$K_{pr} = K_0 + (K_1 - K_0) \exp(-K_2 t),$$

где  $K_0$  ( $\text{м}^3/(\text{сут} \cdot \text{МПа})$ ),  $K_1$  ( $\text{м}^3/(\text{сут} \cdot \text{МПа})$ ),  $K_2$  ( $\text{с}^{-1}$ ) — константы, выбираемые из условия наилучшей аппроксимации промысловых данных для рассматриваемой скважины.

Для описания течения многофазного потока в элементах скважины используются приближения об одномерности течения и равенства скоростей воды и нефти в составе скважинной жидкости. Система дифференциальных уравнений для нестационарной модели выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g u_g) = \Gamma_{og}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \rho_s) + \frac{\partial}{\partial x} (n \rho_s u_s) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} ((1 - n - \alpha_g) \rho_l) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} ((1 - n - \alpha_g) \rho_l u_l) = -\Gamma_{og}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g u_g + n \rho_s u_s + (1 - n - \alpha_g) \rho_l u_l) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g u_g^2 + n \rho_s u_s^2 + (1 - n - \alpha_g) \rho_l u_l^2) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau S}{A} - \rho g \cos \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q, \quad (6)$$

где  $x$  — пространственная координата вдоль ствола скважины (м);  $\alpha_g$  — объемное содержание газа в сечении трубы;  $\rho_g$ ,  $\rho_l = wc\rho_w + (1 - wc)\rho_o$ ,  $\rho_w$ ,  $\rho_o$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho = \alpha_g \rho_g + n \rho_s + (1 - n - \alpha_g) \rho_l$  — плотности газа, пластовой жидкости, воды, нефти, жидкости глушения и смеси соответственно ( $\text{кг}/(\text{м}^3)$ );  $n$  — объемное содержание жидкости глушения в смеси;  $u_g$ ,  $u_l$ ,  $u_s$ ,  $u = \alpha_g u_g + n u_s + (1 - n - \alpha_g) u_l$  — скорости движения газа, пластовой жидкости, жидкости глушения и смеси (м/с), которые связаны соотношениями:

$$u_g = u + u_{og}, \quad u_s = u_l + u_{os},$$

где  $u_{og}$  рассчитывается в зависимости от режима течения (пузырьковый–снарядный, ламинарный–турбулентный) [4], а  $u_{os} = 10^{-4}(\rho_s - \rho_l)$  является линейной функцией от разности плотностей жидкости глушения и пластовой жидкости;

$$\Gamma_{og} = -\rho_{g0} \frac{\partial}{\partial x} ((1 - \alpha_g - n) (1 - wc) u_l R_s)$$

— массовый приток за счет выделения газа из нефти при снижении давления ( $\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ );  $\rho_{g0}$  — плотность газа при нормальных условиях ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $R_s$  — растворимость газа в нефти;  $p$  и  $T$  — давление (Па) и температура смеси ( $^\circ\text{C}$ );  $S$  и  $A$  — периметр (м) и площадь ( $\text{м}^2$ ) поперечного сечения трубного элемента;  $\tau = 1/2 f \rho u$  — касательное напряжение на стенке трубы для смеси в целом (Па), которое задается через переменный коэффициент  $f$  гидравлического трения потока о стенки трубы, зависящий от режима потока [4];  $\theta$  — угол наклона к вертикали;  $c_v$  и  $\lambda$  — коэффициенты удельной теплоемкости ( $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ ) и теплопроводности ( $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{м} \cdot ^\circ\text{C})$ ) смеси;  $q$  — приток тепла за счет внешнего теплообмена ( $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$ ), являющийся функцией от эффективного диаметра трубного канала, перепада температур в потоке и на границе трубы, коэффициентов теплопроводности и теплопереноса [5]. Система уравнений (2)–(6) замыкается уравнениями состояния и корреляциями для параметров газожидкостной смеси [4].

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_g(x, 0) &= \alpha_g^0(x), \quad n(x, 0) = n^0(x), \quad u_l(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) &= p^0(x), \quad T(x, 0) = T^0(x), \\ x_{1k} &\leq x \leq x_{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где  $\alpha_g^0(x)$ ,  $n^0(x)$ ,  $p^0(x)$  и  $T^0(x)$  — начальные распределения объемного содержания газа, жидкости глушения, давления и температуры в элементах скважины (обсадная колонная ( $k = 1$ ), НКТ ( $k = 2$ ), затрубное пространство ( $k = 3$ )). При этом обсадная колонна ( $x_{11} = -H_{res}$ ,  $x_{21} = -H_{tub}$ ) всегда заполнена жидкостью (пластовой или глушения), в НКТ

( $x_{12} = -H_{tub}$ ,  $x_{22} = -H_{dyn}^*$ ) в начальный момент времени может находиться газовая шапка, которая вскоре после запуска насоса выдавливается на поверхность ( $H_{dyn}^* = 0$ ), а в затрубном пространстве ( $x_{13} = -H_{tub}$ ,  $x_{23} = -H_{dyn}$ ) в течение всего времени вывода на режим находится смесь пластовой жидкости, газа и жидкости глушения, которая постепенно перемещается к приему насоса.

Граничные условия в рассматриваемой задаче задаются в четырех сечениях:

- на забое скважины из уравнения притока вычисляется переменная во времени скорость жидкости  $u_1(-H_{res}, t)$ , из уравнения состояния нефти и функции газосодержания определяется объемная доля газа в смеси  $\alpha_g(-H_{res}, t)$ , которая также является переменной, объемная доля жидкости глушения  $n(-H_{res}, t)$  задается в виде дискретной функции, принимающей значения 1, если часть жидкости глушения находится в призабойной зоне (когда объем жидкости глушения больше объема скважины), и 0, если с забоя поступает только пластовая жидкость, температура поддерживается равной пластовой температуре  $T(-H_{res}, t) = T_{res}$ ;
- на устье скважины задается постоянное буферное давление  $p(-H_{dyn}^*, t) = p_{buf}$ ;
- на границе уровня жидкости в затрубном пространстве задается постоянное затрубное давление  $p(-H_{dyn}, t) = p_{an}$ ;
- на приеме насоса задается условие непрерывности давлений и потоков смеси в каждом из трубных элементов скважины.

Положения подвижных границ жидкости в НКТ  $H_{dyn}^*$  и затрубном пространстве  $H_{dyn}$  вычисляются из законов сохранения массы жидкости. Так, например, скорость изменения динамического уровня согласно [2] вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial H_{dyn}}{\partial t} = - \left( \int_0^t (1 - \alpha_{g3}(-H_{tub}, t)) u_{13}(-H_{tub}, t) dt - \int_{-H_{tub}}^{-H_{dyn}} (\alpha_g(x, t) - \alpha_g(x, 0)) dx \right) / \int_{-H_{tub}}^{-H_{dyn}} (1 - \alpha_g(x, t)) dx,$$

где  $\alpha_{g3}(-H_{tub}, t)$  и  $u_{13}(-H_{tub}, t)$  — объемная доля газа и скорость жидкости на входе в затрубное пространство.

Третья составляющая математической модели скважины — это модель насосного оборудования. Поскольку линейные размеры ЭЦН и электродвигателя малы по сравнению с длиной обсадной колонны и НКТ, то будем ими пренебрегать. При таком

упрощении двигатель и насос будут располагаться на глубине  $x = -H_{tub} - \epsilon$  и  $x = -H_{tub} + \epsilon$ , где  $\epsilon \ll 1$ , и представлять собой две поверхности разрыва, на которых будут меняться скачком давление (в случае насоса) и температура (в случае насоса и электродвигателя).

Перепад давлений в ЭЦН определяется с учетом его РХН на технической воде  $H = H(Q)$  по формуле

$$\Delta p = \rho g H(Q) K_{degr} \left( \frac{F}{F_0} \right)^2, \quad (7)$$

где  $F$  и  $F_0$  — фактическая и базовая (соответствующая паспортной РХН) частота вращения вала насоса (Гц);  $K_{degr}$  — коэффициент деградации напора насоса из-за разности свойств газожидкостной смеси и технической воды.

Перепад температур в насосе вычисляется из равенства

$$\Delta T = \frac{W(1 - \eta)}{c_v \rho Q},$$

где  $\eta = \eta(Q)$  — КПД насоса;  $W = W(Q)$  — потребляемая мощность (Вт);  $Q$  — средний по длине расход газожидкостной смеси в насосе ( $\text{м}^3/\text{с}$ ). Аналогичная формула используется для расчета нагрева жидкости после обтекания ПЭД.

Общий алгоритм решения задачи для каждого временного шага включает следующие этапы (более подробно см. [2]):

- 1) расчет параметров ЭЦН, в том числе расхода газожидкостной смеси через насос;
- 2) расчет притока жидкости из пласта по формулам (1);
- 3) определение параметров газожидкостного потока при  $x = H_{tub}$  и в затрубном пространстве скважины и нового положения динамического уровня  $H_{dyn}$ ;
- 4) расчет течения в обсадной колонне по формулам (2)–(6) и определение забойного давления  $p_{res}$ ;
- 5) расчет течения в НКТ, нового значения  $H_{dyn}^*$  и давления на выкиде насоса  $p_{out}$ .

Квазистационарная модель, применяемая в настоящей работе для ускорения расчетов, вместо решения уравнений (2)–(6) на каждом временном шаге использует их стационарные приближения ( $\partial/\partial t = 0$ ). Численное решение строится на основе метода конечного объема [6].

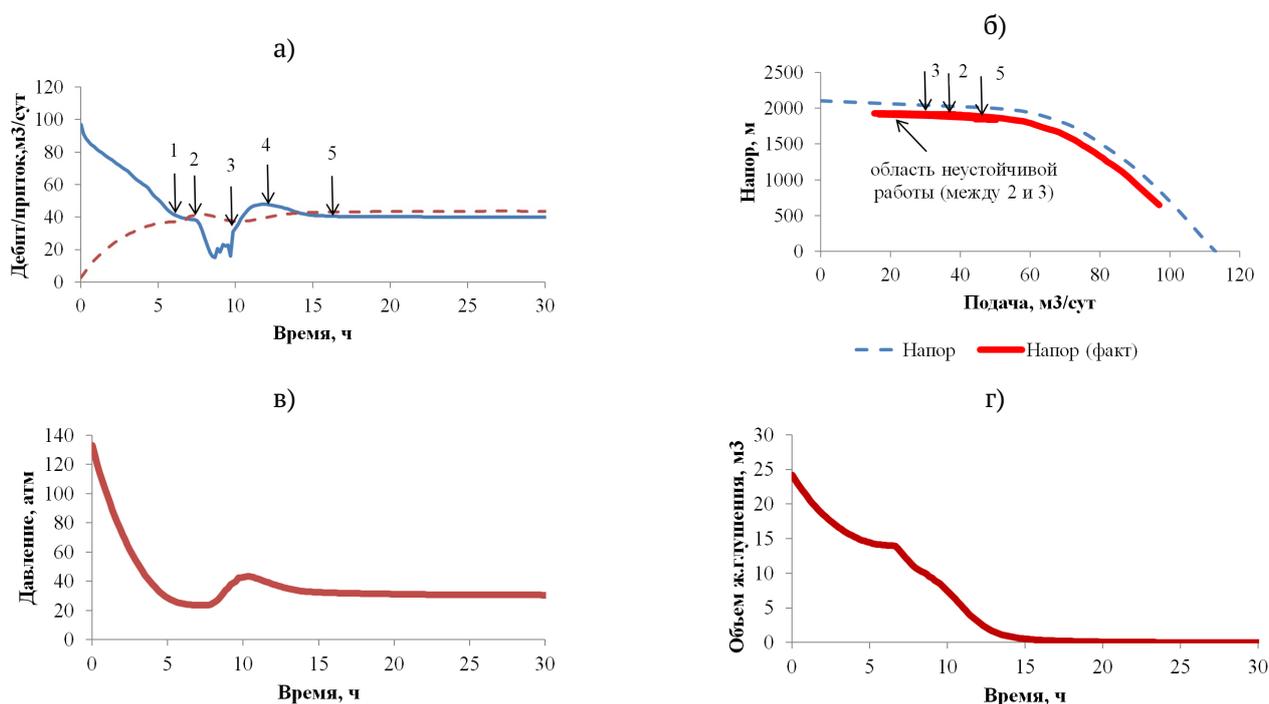


Рис. 1. Зависимости дебита жидкости, притока (а), давления на приеме насоса (в) и объема жидкости глушения в скважине (г) от времени в модельной задаче. Траектория рабочей точки на расходно-напорной характеристике ЭЦН (б)

### 3. Результаты моделирования

Рассмотрим модельную задачу по выводу на режим скважины, которая в начальный момент времени была полностью заполнена жидкостью глушения с плотностью, превышающей плотность пластовой жидкости. Задачу будем решать со следующими исходными параметрами пласта и пластовой жидкости:  $p_{res} = 200$  атм,  $T_{res} = 90^\circ\text{C}$ ,  $p_{bp} = 70$  атм,  $wc = 0,5$ ,  $R_{sb} = 50$  м<sup>3</sup>/т — растворимость газа в нефти в стандартных условиях (газовый фактор),  $\rho_w = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{o0} = 870$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{g0} = 1$  кг/м<sup>3</sup> (вода считается несжимаемой, плотности нефти и газа указаны для стандартных условий),  $H_{res} = 2500$  м,  $\theta = 0$ ,  $p_{buf} = p_{an} = 10$  атм,  $H_{tub} = 2000$  м,  $d_{cas} = 130$  мм,  $d_{tub} = 73$  мм (диаметры обсадной колонны и НКТ). В скважину спущен ЭЦН номинальной производительностью 50 м<sup>3</sup>/сут и напором 2000 м, работающий на базовой частоте 50 Гц, которая не изменяется в течение всего процесса вывода на режим. Жидкость глушения имеет плотность  $\rho_s = 1200$  кг/м<sup>3</sup> и заполняет не только целиком всю скважину, но и часть околоскважинной зоны пласта, поскольку ее начальный объем  $V_0 = 30$  м<sup>3</sup> превышает объем скважины.

На рис. 1 показаны графики изменения основных параметров задачи во времени и соответствующая

им траектория перемещения рабочей точки по РНХ ЭЦН в течение первых 30 часов после запуска насоса. Весь процесс вывода скважины на режим можно разбить на несколько частей. Сразу после запуска насоса он начинает интенсивно откачивать жидкость глушения, которая поступает главным образом из затрубного пространства. При этом резко уменьшается давление на приеме и падает приток из пласта. Рабочая точка на РНХ перемещается справа налево в область меньших расходов и больших напоров. Примерно через 6 часов в скважину начинает поступать пластовая жидкость, представляющая собой смесь нефти и воды (точка 1 на рис. 1(а)). Этот момент времени характеризуется изломом на кривых дебита и объема жидкости глушения в скважине. Еще через 1 час пластовая жидкость достигает приема насоса и постепенно разбавляет жидкость глушения в насосе (точка 2). Из-за снижения плотности перекачиваемой смеси полезный напор насоса резко возрастает и происходит переход в нестабильную область работы ЭЦН с малыми подачами. В данном случае срыва подачи из-за напора, когда требуемый напор насоса превышает максимально допустимый по РНХ, не происходит, давление на приеме постепенно увеличивается и примерно через 10 часов (точка 3) ЭЦН переходит в рабочий режим эксплуатации пре-

имущественно на пластовой жидкости. Стабилизация режима наступает примерно через 12 часов после запуска насоса (точка 4), а еще через 4 часа объем оставшейся в скважине жидкости глушения уменьшается до 1% от первоначального объема  $V_0$  (точка 5). После этого параметры скважины и ЭЦН практически не изменяются, скважина выходит на установившийся режим работы.

Как видно из рис. 1, при замещении пластовым флюидом жидкости глушения возникает риск срыва подачи по напору из-за резкого снижения плотности смеси в насосе. Из формулы (7) следует, что в этом случае при неизменном перепаде давлений на выкиде и приеме насоса увеличивается его напор. Если значение напора превысит максимально допустимое на данной частоте с учетом деградации напора, то произойдет срыв подачи и остановка скважины. Чтобы не допустить риска остановки достаточно увеличить частоту тока (переменная  $F$  в формуле (7)).

На рис. 2 показана зависимость минимального дебита жидкости в насосе и времени выноса жидкости глушения из скважины (момент времени, когда остаточный ее объем в скважине равен 1% от начального) от плотности жидкости глушения. Зависимость минимального дебита от плотности жидкости глушения является монотонной: чем выше плотность жидкости глушения, тем глубже провал дебита жидкости в насосе при замещении ее пластовой жидкостью. Немонотонной является зависимость времени выноса жидкости глушения из скважины от ее плотности. Это связано с тем, что зависимость неодинаково влияет на скорость выноса жидкости глушения из затрубного пространства и обсадной колонны. В первом случае с ростом плотности скорость увеличивается, во втором — уменьшается.

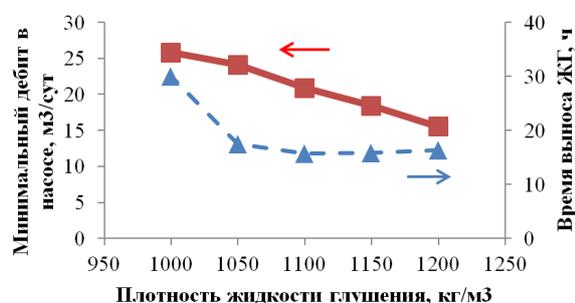


Рис. 2. Зависимость минимального дебита жидкости в насосе и времени выноса жидкости глушения из скважины от плотности жидкости глушения для модельной задачи

На рис. 3 показано сравнение расчетных и замерных параметров для одной из скважин во время вывода на режим. При проведении ремонта в скважину было закачано  $28 \text{ м}^3$  жидкости глушения плотностью  $1240 \text{ кг/м}^3$ , превышающей плотность пластовой жидкости, которая равна  $1153 \text{ кг/м}^3$ . На графиках представлена динамика изменения дебита, давления на приеме насоса, обводненности и частоты тока в течение первых 150 часов после запуска скважины. Следует отметить, что во время вывода на режим частота тока увеличилась несколько раз по линейному закону. Расчетные параметры, полученные по результатам моделирования, удовлетворительно согласуются с замерными значениями.

Вернемся к модельной задаче (см. рис. 1) и опишем алгоритм регулирования частоты тока ПЭД. Будем стремиться к тому, чтобы дебит газожидкостной смеси в насосе находился около номинального значения подачи ЭЦН (в модельной задаче номинальная подача при частоте 50 Гц равна  $50 \text{ м}^3/\text{сут}$  и изменяется пропорционально ей, если насос эксплуатируется на других частотах). На практике существует понятие «рабочей области» ЭЦН — диапазон изменения подач при базовой частоте, где насос работает стабильно с высоким коэффициентом полезного действия (КПД). В нашем случае в качестве такой области можно взять интервал подач от  $35$  до  $65 \text{ м}^3/\text{сут}$  и отслеживать, чтобы дебит смеси не выходил за эти границы.

Для того чтобы предотвратить риск остановки насоса из-за срыва подачи по напору (выход за левую границу рабочей области) и обеспечить энергоэффективную эксплуатацию ЭЦН, примем следующий алгоритм управления частотой тока: при выходе дебита смеси за левую границу рабочей области проводится увеличение частоты со скоростью  $u_F$ , а при выходе за верхнюю границу — снижение частоты с той же скоростью. Решение модельной задачи для  $u_F = 1 \text{ Гц/ч}$  показано на рис. 4. Из графиков видно, что отсутствует характерный для постоянной частоты провал дебита при подходе жидкости глушения к насосу, а рабочая точка на РХН находится вблизи номинальной подачи. При этом частота ЭЦН сначала уменьшается с 50 до 47,2 Гц, а затем вырастает до 48,7 Гц.

Основным параметром, определяющим выбор частоты тока, является дебит смеси в насосе. На практике он, как правило, не замеряется, а точность показаний многофазного расходомера, если такой все же установлен на ЭЦН, оставляет желать лучшего. В этом случае на помощь приходит моделирование. Описанная в предыдущем разделе математическая модель позволяет на основе заме-

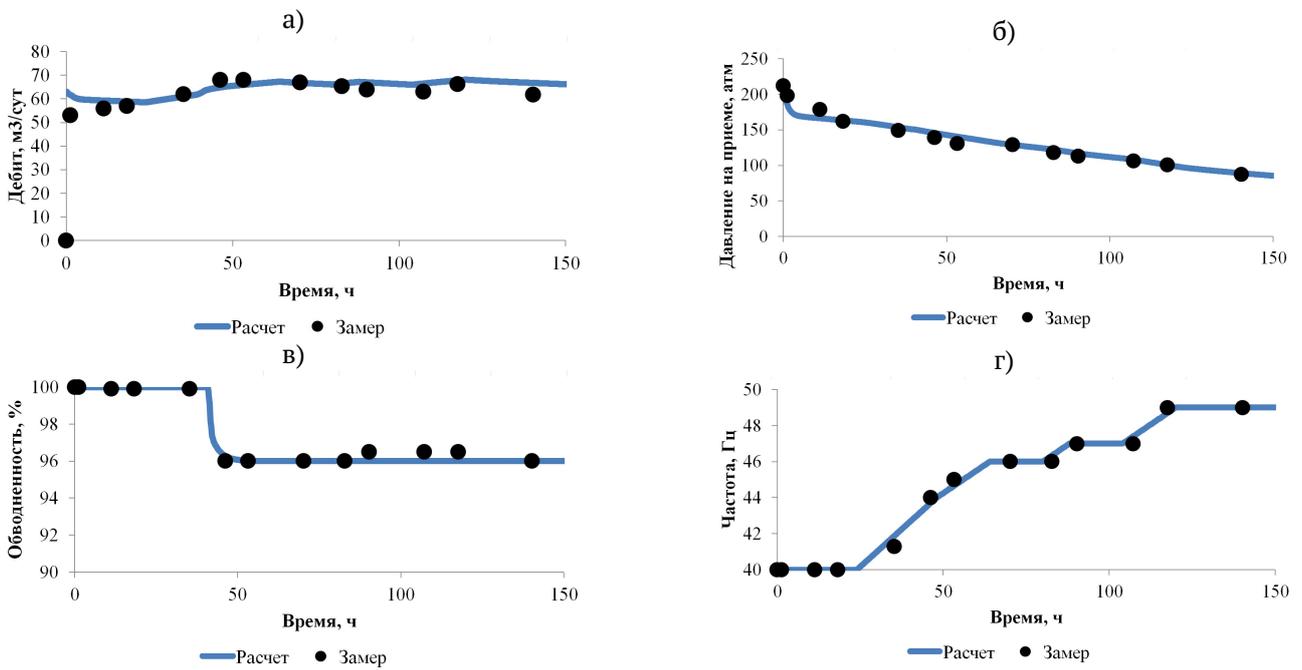


Рис. 3. Сравнение расчетных (линия) и замерных (точки) параметров при выводе скважины на режим: а) дебит жидкости, б) давление на приеме насоса, в) обводненность, г) частота тока

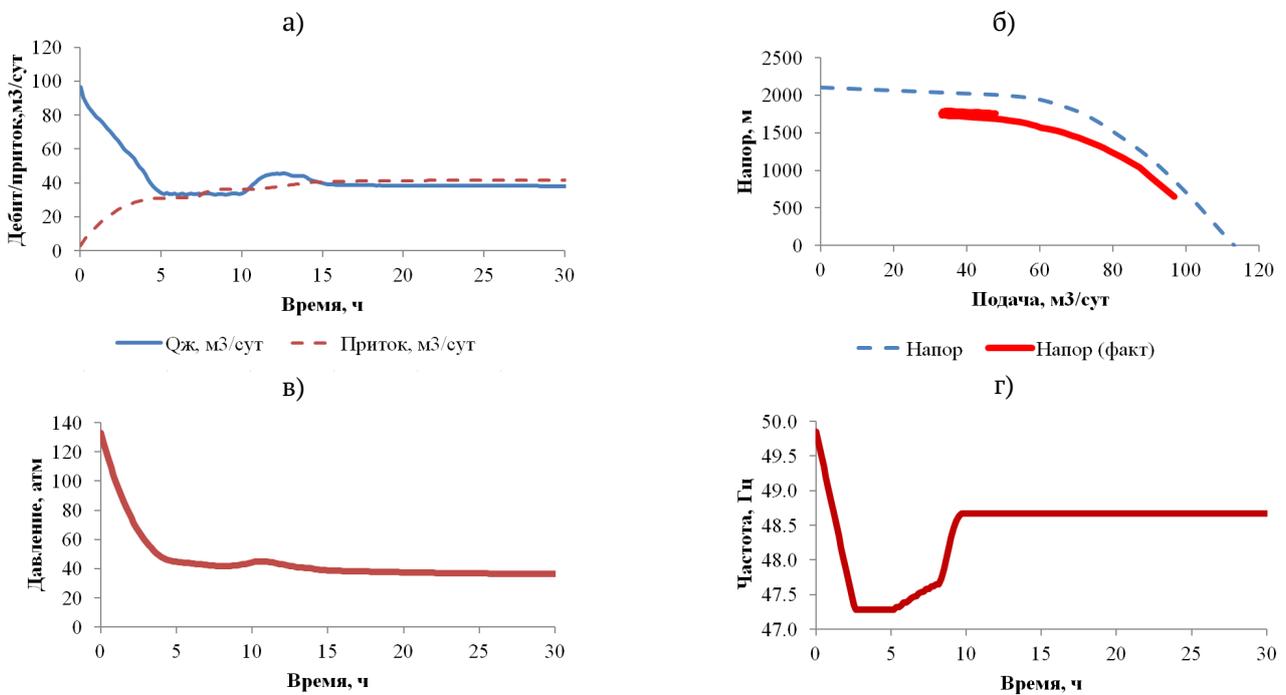


Рис. 4. Зависимости дебита жидкости, притока (а), давления на приеме насоса (в) и частоты тока (г) от времени в модельной задаче (см. рис. 1) при адаптации частоты тока. Траектория рабочей точки на расходно-напорной характеристике ЭЦН (б)

ров давления на приеме насоса и известной РНХ ЭЦН пересчитать дебит смеси.

#### 4. Заключение

На основе представленных в настоящей работе результатов моделирования вывода скважины на режим с учетом жидкости глушения можно сделать следующие выводы:

- 1) Присутствие жидкости глушения в скважине влияет на скорость установления стационарного режима работы скважины и насосного оборудования, на риски остановки скважины из-за срыва подачи насоса по напору и энергозатраты при добыче. При этом определяющим фактором является отношение плотностей жидкости глушения и пластовой жидкости.
- 2) Негативные последствия, связанные с влиянием жидкости глушения на изменение параметров режима работы скважины, могут быть устранены за счет варьирования частоты вращения вала ЭЦН. Для этого, с помощью предложенной математической модели, рассчитывается расход газожидкостной смеси через насос и на его основе производится корректировка частоты.

Результаты проведенных исследований могут быть использованы для оптимизации вывода на режим нефтяных скважин, оборудованных УЭЦН, доля которых в механизированном фонде скважин в Российской Федерации составляет около 70%.

#### Список литературы

- [1] Топольников А.С. Применение методов математического моделирования при контроле и оптимизации нестационарного режима работы нефтяной скважины // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, №. 1. С. 53–59.  
DOI: [10.21662/uim2016.1.008](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.008)
- [2] Топольников А.С. Обоснование применения квазистационарной модели при описании периодического режима работы скважины // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, №. 1. С. 15–26.  
DOI: [10.21662/uim2017.1.003](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.003)
- [3] Topolnikov A.S., Gimaltdinov I.K., Gimaltdinova A.A., Kochanova E.Y. To the question of modeling processes in oil-producing a well during short periodic operation by electric centrifugal pump installations // IOP Conf.Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 919. 062068.  
DOI: [10.1088/1757-899X/919/6/062068](https://doi.org/10.1088/1757-899X/919/6/062068)
- [4] Брилл Дж.П., Мукерджи Х. Многофазный поток в скважинах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2006. 384 с.
- [5] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т.1. М.: Наука. 1987. 464 с.
- [6] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Наука, 1984. 154 с.



## Modeling of washout of a well-killing liquid after launching of an oil well

Topolnikov A.S.

Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

The paper presents the results of mathematical modeling of the process of launching and output to the mode of an oil well, which was uploaded by a well-killing liquid at the stage of repairs. After the launching of the electric submersible pump the drop of the bottomhole pressure occurs and the inflow of reservoir fluid begins. As a result the multicomponent mixture is generated inside the well, which consists of oil, associated water, well-killing liquid and free gas, originated from the oil during degassing, and this mixture is pumped out towards wellhead. As soon as the pump characteristics are changed, when the liquid with variable density is pumped out, it is necessary to control the speed of a shaft of the pump for providing the stable pump regime. This problem is solved in the paper for different ratios of densities of well-killing liquid and reservoir fluid by the mathematical modeling of multiphase flow in the well elements and inside the pump. As a mathematical model the one-dimensional quasi-stationary model in approach of drift for description of relative motion of the components is applied, which proved itself well for modeling of non-stationary processes lasting for several days. The comparison of calculated and measuring field parameters is presented. It is shown that the speed of washout of the well-killing liquid from the oil well and the probability of the pump stop due to its head failure depend on the ration of densities of the well-killing liquid and reservoir fluid. It is stated that the monitoring of change of parameters of the pump in time through the mathematical modeling can help to optimize the output to the mode of the well. This allows to avoid stops due to the pump head failure and to diminish the electricity costs.

**Keywords:** multiphase flow, non-stationary flow, oil well

### References

- [1] Topolnikov A.S. Application of mathematical modeling during monitoring and optimization of non-stationary regime of oil well // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2016. V. 11, No. 1. Pp. 53–59 (in Russian).  
DOI: 10.21662/uim2016.1.008
- [2] Topolnikov A.S. Argumentation of application of quasi-stationary model to describe th periodic regime of oil well // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 15–26 (in Russian).  
DOI: 10.21662/uim2017.1.003
- [3] Topolnikov A.S., Gimaltdinov I.K., Gimaltdinova A.A., Kochanova E.Y. To the question of modeling processes in oil-producing a well during short periodic operation by electric centrifugal pump installations // IOP Conf.Series: Materials Science and Engineering. 2020. V. 919. 062068.  
DOI: 10.1088/1757-899X/919/6/062068
- [4] Brill J.P., Mukherjee H. Multiphase flow in wells. Richardson, Texas, 1999. P. 156.
- [5] Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase media. Hemisphere Publ. 1990. P. 507.
- [6] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publ. 1980. P. 197.



## Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Акустическое рассеяние от препятствий малых размеров при внешнем воздействии является одной из важнейших задач в акустике, в первую очередь, из-за практических применений данного явления. Решение данной задачи сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала с определенными граничными условиями. При применении методики расчета, основанной на быстром методе мультиполей, потенциалы раскладываются в ряды по специальным сферическим функциям, вид которых зависит от области, в которой данный потенциал вычисляется. В результате, при численной реализации полученной матричной системы возникает вопрос о правильном выборе числа членов рядов при их усечении, поскольку при малом числе членов ряда точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет не только точность, но и время расчета. Анализ научной литературы показал, что существует два подхода к выбору числа членов ряда при усечении для такого рода задач. При первом подходе усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень точности. При втором подходе происходит усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе членов ряда, определяемом с помощью эвристических формул. В настоящей работе на примере трех звукопроницаемых сфер разных радиусов в случае их сильного взаимодействия, когда численные расчеты становятся «чувствительными» к числу членов при усечении, было проведено сравнение данных подходов. Анализ полученных данных показал, что для определения значения искомой функции с необходимой точностью оптимально использовать комбинацию рассмотренных подходов.

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, множество звукопроницаемых сфер, мультиполь, усечение ряда, плоская волна, монополюсный источник излучения

### 1. Введение

При решении уравнения Гельмгольца для задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер [1] с помощью численной техники [2], основанной на быстром методе мультиполей, возникают бесконечные ряды как результат разложения потенциалов по специальным сферическим функциям (мультиполям). В связи с чем, при численной реализации данного решения возникает вопрос правильного выбора числа членов  $N_{tr}$  при усечении полученных рядов, поскольку при малом числе  $N_{tr}$  точность расчетов будет низкой, а

при большом — возрастет не только точность, но и время расчета.

Целью настоящей работы является определение наиболее оптимального подхода к выбору числа членов при усечении рядов для решения поставленной задачи.

### 2. Подходы к определению числа членов при усечении рядов

Анализ научных исследований по данной проблематике показал, что можно выделить два подхода к определению числа членов при усечении бесконечного ряда вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m S_n^m(r, \theta, \varphi),$$

где  $A_n^m$  — коэффициенты разложения;  $S_n^m(r, \theta, \varphi)$  — специальные сферические функции, вид которых зависит от вида потенциала, раскладываемого в ряд;  $(r, \theta, \varphi)$  — сферические координаты точки, в которой вычисляются потенциалы.

*Подход I:* усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда (при  $n = N$  и  $n = N + 1$ ) — как только их абсолютная погрешность становится меньше некоторого фиксированного значения, дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение  $N_{tr} = N$  [3].

*Подход II:* происходит усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе  $N_{tr}$ , определяемом с помощью эвристических формул.

Имеют место две эвристические формулы для расчета числа членов ряда при усечении  $N_{tr}$ :

$$N_{tr} = \left[ ka_p + \left( \frac{\ln(2\sqrt{2}\pi ka_p \varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} (ka_p)^{\frac{1}{3}} + 1 \right], \quad (1)$$

вывод которой представлен, например, в работах [4] (для одиночного рассеяния) и [5] (для множественного рассеяния), и

$$N_{tr} = \begin{cases} [ekr_{pq}], & \text{для малых } k r_{pq}, \\ [ekr_{pq}/2], & \text{для больших } k r_{pq}, \end{cases} \quad (2)$$

представленная в работе [2]. В формулах (1) и (2)  $[z]$  — целая часть числа  $z$ ;  $k$  — волновое число;  $a_p$  — радиус  $p$ -ой сферы;  $\varepsilon$  — искомая ошибка, связанная с коэффициентами Фурье;  $e$  — число Эйлера;  $r_{pq}$  — расстояние между центрами  $p$ -ой и  $q$ -ой сфер.

### 3. Численный анализ различных подходов к выбору числа членов при усечении рядов

В качестве примера рассмотрим три сферы различных радиусов ( $a_1 = 0.9$  мм,  $a_2 = 1$  мм и  $a_3 = 1.1$  мм), центры которых расположены на одной оси. Расстояния от центра 1-й сферы до остальных сфер определяются как

$$r_{12} = (1 + \chi)a_1 + a_2$$

и

$$r_{13} = (1 + 2\chi)a_1 + 2a_2 + a_3,$$

где  $\chi$  — параметр, характеризующий расстояние между сферами (наименьшее расстояние между точками поверхности соседних сфер). Отметим, что в рассматриваемом примере соседние сферы отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии. Физические параметры системы: плотность и скорость звука в окружающей среде  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и

$c_0 = 1.5 \cdot 10^3$  м/с; плотность и скорость звука в среде внутри сфер  $\rho_1 = 1.1\rho_0$  и  $c_1 = 0.95c_0$ ; частота внешнего поля  $f = 1350$  кГц. Данные параметры были выбраны, поскольку они позволяют рассмотреть случай сильного взаимодействия в системе, где основные параметры внутренней и внешней сред сопоставимы, что делает численные расчеты «чувствительными» к выбору числа членов при усечении рядов. Для монопольного источника излучения расстояние от него до центра 1-й сферы равно  $d = 10a_1$ , а углы в сферической системе координат равны  $\theta_s = \pi/3$ ,  $\varphi_s = \pi/2$ . Для плоской падающей волны единичный вектор нормали к ее фронту имеет координаты  $(1, \theta_{in}, \varphi_{in}) = (1, 2\pi/3, 3\pi/2)$ . На рис. 1 представлена диаграмма распределения модуля нормированного давления  $|p/p_{in}|$  ( $p$  — общее давление;  $p_{in}$  — давление падающей волны) в плоскости  $Oyz$ , где ось  $Oz$  — ось, на которой расположены центры сфер, для случая монопольного ис-

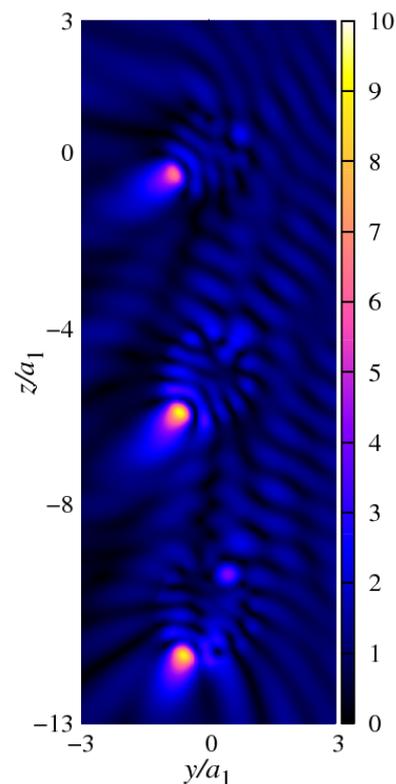


Рис. 1. Диаграмма распределения модуля нормированного давления  $|p/p_{in}|$  в плоскости  $Oyz$  вокруг и внутри трех звукопроницаемых сфер различных радиусов с центрами, расположенными на одной оси, при воздействии монопольного источника излучения ( $d = 10a_1$ ,  $\theta_s = \pi/3$ ,  $\varphi_s = \pi/2$ ) и значениями параметра  $\chi = 3$

точника излучения и параметра  $\chi = 3$ . Данная диаграмма была получена с помощью численной методики, представленной в работе [1], при  $N_{\text{тр}} = 21$ .

Как правило, численный анализ эмпирических формул (1) и (2) сводится к определению искомой функции в зависимости от числа членов ряда при усечении только для некоторых расчетных точек. В работе [2] подобный анализ был проведен для обоснования формулы (2). А в работе [6] проведено сравнение результатов, полученных при выборе числа членов при усечении рядов по данным формулам, на примере одной расчетной точки, на основании чего делается вывод, что расчетная величина достигает устойчивого значения раньше при использовании формулы (1), и эта формула применяется в их дальнейших расчетах.

В настоящей работе проведен анализ с применением Подхода I для всех расчетных точек плоскости  $Oyz$ , которая разбивалась по оси  $Oy$  ( $y = [-3a_1, 3a_1]$ ) прямыми  $y = n_y h$ , по оси  $Oz$  ( $z = [-(7 + 2\chi)a_1, 3a_1]$ ) — прямыми  $z = n_z h$ , где  $h$  — шаг сетки;  $n_y, n_z$  — целые числа, а в узлах сетки проводились расчеты нормированного давления  $|p/p_{\text{in}}|$ .

В табл. 1–5 представлены значения  $N_{\text{тр}}$ , полученные с помощью Подхода I, для различных  $\chi$  и относительных погрешностей  $\delta$ , выраженных в %, в случаях монополюсного источника излучения (MS) и плоской волны (PW). В табл. 1 анализируются все точки расчетной плоскости, число которых равно 216600 при  $\chi = 0$ , 259920 — при  $\chi = 1$ , 346921 — при  $\chi = 3$  и 433561 — при  $\chi = 5$ ; в табл. 2 — точки внутри и на границе 1-ой сферы (11277 точек); в табл. 3 — точки внутри и на границе 2-ой сферы (13959 точек); в табл. 4 — точки внутри и на границе 3-ей сферы (16902 точки); в табл. 5 — точки вне сфер.

Для рассмотренного примера по формуле (1) при  $\varepsilon = 10^{-8}$  получим следующие значения числа  $N_{\text{тр}} = 12, 13, 14$  соответственно для сфер радиусов  $a_1, a_2, a_3$ . Заметим, что данные значения не зависят от расстояния между соседними сферами, в отличие от формулы (2), которая при  $\chi = 0, 1, 3, 5$  дает значения  $N_{\text{тр}} = 14, 21, 35, 49$  для  $r_{12}$  и  $N_{\text{тр}} = 16, 23, 39, 56$  для  $r_{23}$ .

На рис. 2 для наглядности представлено изменение функции  $H = |p/p_{\text{in}}|$  в зависимости от  $N_{\text{тр}}$  при  $\chi = 1$  в некоторых точках пространства  $M$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  (соответствующие значения приведены над графиками) для различных внешних воздействий: монополюсный источник излучения (MS) и плоская волна (PW). Отметим, что точка  $M(0, 0, 0)$  лежит в центре 1-ой сферы;  $M(0, 0, 1)$  — на границе 1-й сферы;

$M(0, 0.83, -0.5)$  и  $M(0, -0.83, -0.5)$  — внутри 3-ей сферы;  $M(0, -1, -2)$  и  $M(0, -2, 2)$  — вне сфер.

Отметим, что при превышении значения  $N_{\text{тр}}$ , определенного уравнением (2), могут возникнуть трудности, связанные с экспоненциальным ростом части членов в разложении, приводящие к переполнению относительных ошибок. Объясняется это наличием сферических функций Ханкеля большого порядка  $h_n(kr_{pq})$ , входящих в матрицу переразложения системы [1], причем асимптотическое разложение этих функций при больших  $n$  и фиксированных  $kr_{pq}$  показывает, что рост начинается при  $n \approx ekr_{pq}/2$  (см., например, рис. 2 для точек  $M(0, 0, 1)$  и  $M(0, 0.83, -0.5)$ ), поэтому данное значение и легло в основу формулы (2) [2]. В случае, когда с некоторого значения  $N_{\text{тр}}$  наблюдается рост искомой функции в точках рассматриваемой области, то фиксируется  $N_{\text{тр}}$ , при котором данное число минимально, а в скобках пишется процент точек от общего количества, где заданная точность не достигнута. Для таких точек необходимо дополнительное исследование.

Заметим также, что экспоненциальный рост с некоторого значения  $N_{\text{тр}}$  наблюдается в точке  $r = 0$  (центр 1-ой сферы) из-за роста функции  $h_n(kr) \equiv h_n(0)$ . В рассмотренном примере рост функции в данной точке начинается при  $N_{\text{тр}} > 15$  (рис. 2 при  $M(0, 0, 0)$ ), то есть раньше, чем в других точках пространства. В связи с этим «\*» около числа  $N_{\text{тр}}$  в табл. 1 и 2 обозначает, что в точке  $r = 0$  имеет место рост расчетной функции, в то время как относительная погрешность в остальных точках меньше заданного значения  $\delta$ .

Анализ полученных данных (табл. 1–5 и рис. 2) показал следующее:

- с увеличением расстояния между сферами число  $N_{\text{тр}}$  уменьшается, причем для  $\delta = 1\%$  данное значение стремится к значению, полученному по формуле (1). Значение же, полученное по формуле (2), с увеличением расстояния, наоборот, растет;
- вне сфер заданная точность достигается при меньшем значении  $N_{\text{тр}}$  в случае малых расстояний между сферами;
- тип внешнего воздействия (монополюсный источник или плоская волна) несущественно влияет на значение  $N_{\text{тр}}$ ;
- увеличение точности ведет к росту значения  $N_{\text{тр}}$ ;
- формула (2) позволяет оценить верхнее значение числа  $N_{\text{тр}}$ , выше которого возможен экспоненциальный рост искомой функции, и требуемая точность может быть не достигнута.

Таблица 1. Число членов  $N_{\text{ГР}}$  при усечении рядов для различных значений относительной погрешности  $\delta$  и параметра  $\chi$  (все точки расчетной области)

$\delta, \%$	$\chi$							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	24*	23* (0.001%)	15*	14	13	13	13	13
$10^{-1}$	24 (0.015%)	23 (0.323%)	16*	17*	14	15	14	15
$10^{-2}$	24 (0.589%)	24 (0.732%)	19*	19*	16*	16*	16*	17*
$10^{-3}$	24 (3.181%)	25 (3.479%)	19 (0.001%)	19 (0.003%)	17*	17*	17*	17*

Таблица 2. Число членов  $N_{\text{ГР}}$  при усечении рядов для различных значений относительной погрешности  $\delta$  и параметра  $\chi$  (расчетные точки внутри и на границе 1-ой сферы)

$\delta, \%$	$\chi$							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	19*	23*	12	13	12	12	12	12
$10^{-1}$	23*	23 (0.089%)	14	13	14	14	13	13
$10^{-2}$	23 (2.075%)	23 (2.891%)	15*	15*	15	14	14	15
$10^{-3}$	24 (11.448%)	23 (13.825%)	17*	17*	16*	16*	15	16*

Таблица 3. Число членов  $N_{\text{ГР}}$  при усечении рядов для различных значений относительной погрешности  $\delta$  и параметра  $\chi$  (расчетные точки внутри и на границе 2-ой сферы)

$\delta, \%$	$\chi$							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	22	20	12	13	12	13	12	12
$10^{-1}$	26 (0.029%)	26 (0.021%)	14	15	14	14	14	14
$10^{-2}$	24 (2.278%)	25 (1.605%)	16	17	15	16	15	15
$10^{-3}$	24 (13.095%)	25 (11.505%)	18	19	16	17	16	17

Таблица 4. Число членов  $N_{\text{ГР}}$  при усечении рядов для различных значений относительной погрешности  $\delta$  и параметра  $\chi$  (расчетные точки внутри и на границе 3-ей сферы)

$\delta, \%$	$\chi$							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	24	26	15	14	13	13	13	13
$10^{-1}$	26 (0.006%)	26 (0.018%)	16	17	14	15	14	14
$10^{-2}$	26 (1.651%)	26 (1.438%)	19	19	16	16	16	17
$10^{-3}$	26 (12.667%)	26 (10.549%)	20	20	17	17	17	17

Таблица 5. Число членов  $N_{tr}$  при усечении рядов для различных значений относительной погрешности  $\delta$  и параметра  $\chi$  (расчетные точки вне всех сфер)

$\delta, \%$	$\chi$							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	18	18	12	13	12	12	13	13
$10^{-1}$	22	23	14	14	13	14	13	13
$10^{-2}$	24 (0.008%)	23 (0.012%)	15	16	14	16	15	15
$10^{-3}$	24 (0.376%)	24 (0.542%)	17	18	16	16	16	17

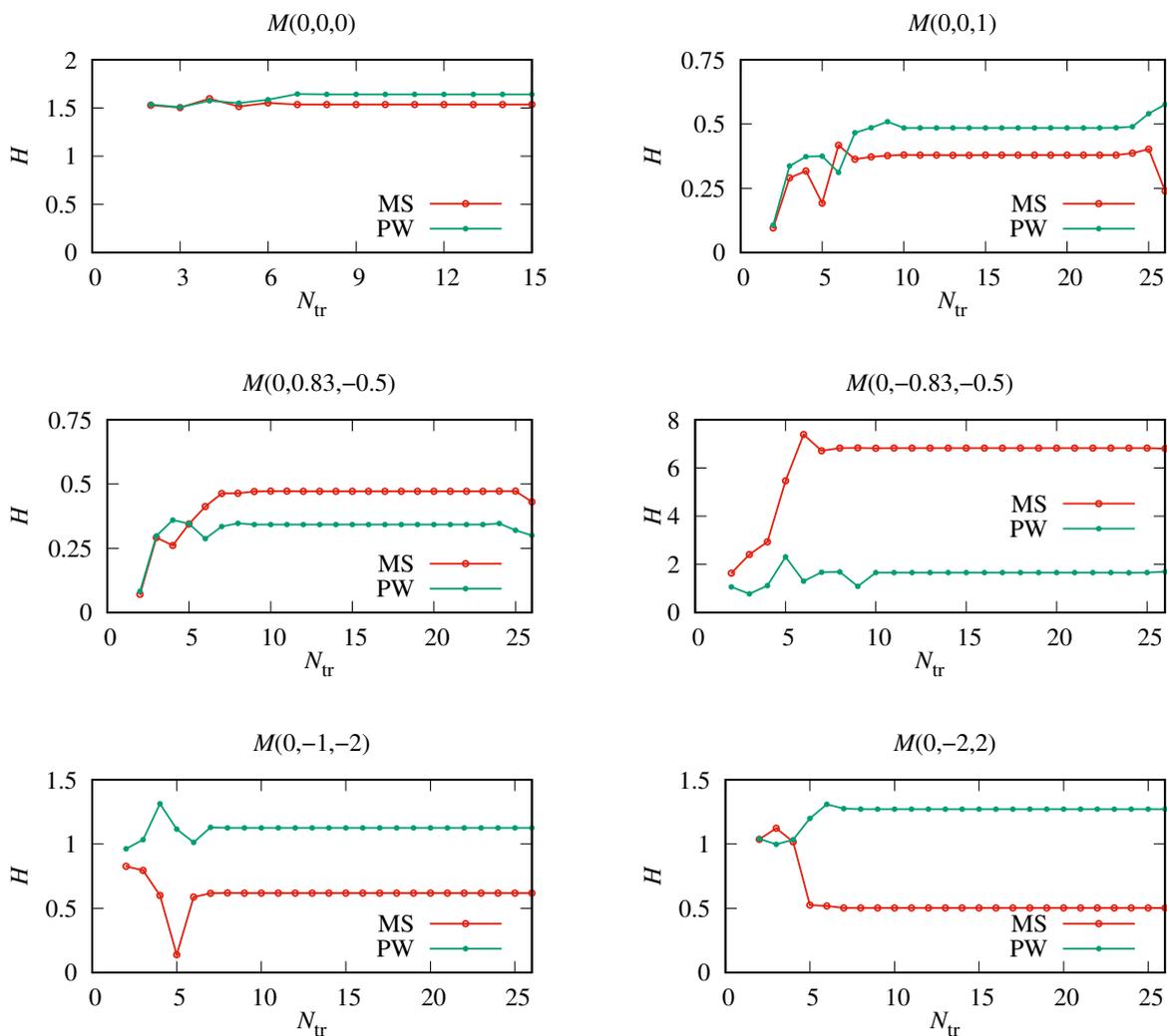


Рис. 2. Расчетная функция  $H$  от числа членов  $N_{tr}$  при усечении рядов для шести точек расчетной плоскости  $M(x, y, z)$  (соответствующие значения приведены над графиками) при значении параметра  $\chi = 1$  в случаях монополюсного источника излучения (MS) и плоской волны (PW)

#### 4. Заключение

В настоящей работе проведено сравнение различных подходов к усечению рядов при численном решении задачи рассеяния акустических волн от множества звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии. Анализ полученных данных показывает, что для определения числа членов при усечении рядов, позволяющего вычислить искомую функцию с заданной точностью, оптимальным является применение комбинированного подхода. А, именно, с помощью *Подхода II* (формулы (1) и (2)) определяется минимальное значение  $N_{tr}$ . Затем, начиная с этой минимальной величины, применяется *Подход I* до достижения необходимой точности. Заметим, что в рассмотренном примере минимальное значение  $N_{tr}$  определяется по формуле (1), однако при других значениях параметров системы  $N_{tr}$  можно получить по формуле (2). Для предотвращения накопления ошибок, связанных с экспоненциальным ростом сферических функций Ханкеля большого порядка, которые входят в матрицу переразложения системы, необходимо контролировать результат при превышении значений  $N_{tr}$ , полученных по формуле (2). В этом случае решение для

точки определяется в момент его стабилизации до начала экспоненциального роста, даже если заданная точность не достигается.

#### Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. DOI: [10.21662/mfs2019.2.016](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.016)
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [3] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. P. 3048–3058. DOI: [10.1121/1.423886](https://doi.org/10.1121/1.423886)
- [4] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227, No. 3. P. 1754–1771. DOI: [10.1016/j.jcp.2007.09.030](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.030)
- [5] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library, 2001. 932 p.
- [6] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // Acoustical Physics. 2016. Vol. 62, No. 3. P. 280–291. DOI: [10.1134/S1063771016030015](https://doi.org/10.1134/S1063771016030015)



## Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Acoustic scattering from small-sized obstacles under external influence is one of the most important problems in acoustics, primarily because of the practical applications of this phenomenon. The solution of this problem is reduced to solving the Helmholtz equation for a complex potential with certain boundary conditions. When using the calculation method based on the fast multipole method, the potentials are decomposed into series according to special spherical functions, the form of which depends on the region in which this potential is calculated. As a result, the numerical implementation of the resulting matrix system raises the question of the correct choice of the number of series members when truncating them, since with a small number of series members, the calculation accuracy will be low, and with a large one will be increase not only the accuracy, but also the calculation time. An analysis of the scientific literature has shown that there are two approaches to choosing the number of terms of a series when truncating for such problems. In the first approach, truncation of the series is based on comparing two consecutive values of the sum of the sought series until the required degree of accuracy is achieved. In the second approach, all series in each expansion are truncated for a fixed number of series terms determined using heuristic formulas. In this paper, using the example of three sound-permeable spheres of different radii in the case of their strong interaction, when numerical calculations become «sensitive» to the number of terms during truncation, we compared these approaches. The analysis of the obtained data showed that to determine the value of the desired function with the necessary accuracy, it is optimal to use a combination of the considered approaches.

**Keywords:** acoustic scattering, sound-permeable spheres set, multipole, series truncation, plane wave, monopole radiation source

### References

- [1] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.  
DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104. P. 3048–3058.  
DOI: 10.1121/1.423886
- [4] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // *J. Comput. Phys.* 2008. Vol. 227, No. 3. P. 1754–1771.  
DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- [5] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library, 2001. 932 p.
- [6] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // *Acoustical Physics*. 2016. Vol. 62, No. 3. P. 280–291.  
DOI: 10.1134/S1063771016030015



# Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX для моделирования статических задач упругости<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе рассматриваются этапы компьютерного численного моделирования инженерных задач и способы повышения точности моделирования; приводится краткий обзор свободных программ моделирования задач упругости методом конечных элементов, а также тенденции развития свободных систем автоматизированного проектирования и инженерного анализа. Для успешного проведения инженерного исследования необходимо подобрать удобный инструмент, учитывающий все особенности решаемой задачи. На основе решения тестовой статической задачи линейной упругости продемонстрировано два подхода к инженерному моделированию. Для первого подхода необходимы навыки программирования – полный цикл моделирования был написан на языке программирования пакета *FreeFem++*. Дополнительно показан способ создания расчетной сетки в программе *Gmsh* с последующим использованием в программе *FreeFem++*. Во втором подходе полный цикл моделирования проводится через интерфейс программы *FreeCAD* со встроенным решателем *CalculiX* и не требуется навыков программирования. Также предложен способ параметризации задачи с использованием встроенного в *FreeCAD* интерпретатора языка *Python*. Проведено сравнение результатов моделирования, полученных с использованием обоих подходов, для объекта, к которому приложено внешнее воздействие, определяемое граничными условиями Дирихле или Неймана, а также проанализированы два вида закрепления объекта: жесткая заделка и ограничение плоскостью с нулевым трением. Проведен анализ использования вычислительных ресурсов различными прямыми и итерационными методами. В рамках рассмотренной тестовой задачи статической линейной упругости наиболее оптимальным методом в *FreeFem++* является итерационный метод сопряженных градиентов *CG* как по времени вычислений, так и по используемому объему памяти. Наибольшую скорость вычислений дает итерационный метод *Cholesky* с обуславливанием неполным разложением Холецкого в программе *CalculiX*.

**Ключевые слова:** статическая задача упругости, свободное инженерное программное обеспечение, *FreeFem++*, *Gmsh*, *FreeCAD*, *CalculiX*, прямые и итерационные методы решения СЛАУ

## 1. Введение

В настоящее время существует множество программ компьютерного инженерного анализа задач упругости. Среди коммерческого ПО можно выделить *Ansys Mechanical* [1], *Simulia Abaqus* [2], *LS-DYNA* [3]. Данные программы позволяют провести полный цикл исследования: создание геометрии и расчетной сетки исследуемого объекта,

моделирование с помощью различных методов и анализ полученных результатов. Использование этих программ в промышленности позволяет значительно сократить время и стоимость разработки конечного продукта за счет замены части натуральных экспериментов компьютерным моделированием.

При проведении научных и инженерных исследований предпочтение отдается свободному ПО прежде всего из-за высокой стоимости коммерческих продуктов (бесплатные студенческие версии коммерческих продуктов имеют ограничение на количество узлов в модели и подходят

<sup>1</sup>Работа выполнена за счет средств государственного задания № 0246-2018-007.

больше для обучения, чем для исследования). Большое разнообразие свободных пакетов моделирования методом конечных элементов (МКЭ, FEM, finite element method) позволяет выбрать наиболее подходящий для целей исследования пакет. В настоящей работе приводится небольшой обзор свободного ПО для решения статических задач упругости и предлагается два подхода для проведения полного цикла исследования, а также показан пример использования различных пакетов в рамках одного исследования.

Компьютерное моделирование в пакетах разделяется на три этапа: подготовка модели, моделирование и обработка результатов. С каждым этапом связаны свои программы или программные модули:

1. *Препроцессор* (preprocessor) позволяет подготовить геометрию объекта, создать конечно-элементную (КЭ) сетку по геометрии используя, например, триангуляцию Делоне [4], задать модель материала, определить уравнения и граничные условия.
2. *Решатель* (solver) из системы дифференциальных уравнений в частных производных, записанных на узлах расчетной сетки, формирует систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и решает ее прямым или итерационным методом. Нелинейные уравнения решаются с помощью специальных численных алгоритмов. Например, в методе Ньютона [5] для нелинейной системы уравнений  $F(\mathbf{u}) = 0$  сначала находится приближенное решение линеаризованной задачи  $\mathbf{u}_0$ , а затем итерационным методом решается СЛАУ  $F(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u}J = 0$  и определяется поправка решения  $\delta\mathbf{u}_{i-1} = -F(\mathbf{u}_{i-1})/J$ , где  $J$  — якобиан  $F(\mathbf{u})$ ;  $i$  — номер итерации. Решение  $\mathbf{u}$  обновляется на каждом шаге по времени:  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i-1} + \delta\mathbf{u}_{i-1}$ . То есть решение нелинейных задач также сводится к решению СЛАУ.
3. *Постпроцессор* (postprocessor) позволяет визуализировать результаты моделирования и провести обработку полученных данных.

В задачах с большим количеством степеней свободы необходимо подобрать оптимальный метод решения СЛАУ  $Ax = b$  [6]. Прямые методы решения СЛАУ преобразуют исходную матрицу  $A$  к более простой форме (например, диагональной или треугольной), что позволяет получить точное решение  $x$ . Время, необходимое для решения системы, зависит от количества уравнений  $k$ , например, в методе Гаусса [7] производится  $k^3$  вычислительных операций. Также для преобразования

матрицы используется большой объем оперативной памяти. Таким образом, прямые методы подходят для решения задач с небольшим количеством степеней свободы (на современном персональном компьютере  $k < 10^6$ ). Итерационные методы используют оперативную память более экономично, но скорость сходимости сильно зависит от числа обусловленности матрицы СЛАУ. Скорость сходимости можно повысить предобуславливанием матрицы [7]: умножая СЛАУ на матрицу  $P$  получим  $PAx = Pb$ . Новая система уравнений имеет то же решение, что и исходная, но сходимость итерационного решения изменится в зависимости от свойств матрицы  $P$ . Для матриц с различными особенностями (разреженная, симметричная, положительно определенная и т.д.) нужно выбирать методы, учитывающие эти особенности.

В МКЭ переменные определяются дискретным набором значений в узлах расчетной сетки, а значение в произвольной точке сетки определяется с помощью аппроксимации полиномами заданной степени. Для корректного моделирования необходимо подобрать тип КЭ и плотность узлов расчетной сетки и провести серию расчетов, пока искомые физические переменные не достигнут насыщения. Точность расчетов можно повысить двумя способами: увеличением количества узлов (уменьшением среднего расстояния между узлами) с фиксированным порядком аппроксимирующих полиномов ( $h$ -метод) или увеличением порядка аппроксимирующего полинома на фиксированных узлах сетки ( $p$ -метод) [8]. В  $h$ -методе точность результатов моделирования повышается за счет увеличения количества КЭ (с уменьшением их характерных размеров) без изменения типа. Для широкого спектра задач физики  $p$ -метод дает более быструю скорость сходимости (по крайней мере двукратную) по сравнению с  $h$ -методом [9]. Комбинация этих двух методов позволяет значительно увеличить скорость сходимости (в некоторых задачах экспоненциально) [10]. В современном подходе эффективность расчетной схемы повышается использованием КЭ высокого порядка с применением неравномерных адаптивных сеток, где плотность узлов пропорциональна градиентам переменных.

В последние годы в развитии свободных систем автоматизированного проектирования (CAD, computer-aided design) наметилась тенденция на включение в рамках одной программы дополнительных модулей, позволяющих сократить количество пакетов, необходимых для проведения полного цикла исследования. Приведем список программ, в которых к модулям пре/постпроцессоров были добавлены решатели различных физических

уравнений, включая задачи упругости (т.е. переход в сторону систем инженерного анализа, CAE, computer-aided engineering):

- *OneLAB* [11] объединяет генератор расчетных сеток и постпроцессор *Gmsh* [12] с решателем *GetDP* [13] (моделирование на сетках со смешанными элементами задач электромагнетизма, теплопереноса, акустики, упругости, решение уравнений в частных производных общего вида).
- *FreeCAD* [14] — программа параметрического трехмерного моделирования, которая позволяет проводить КЭ анализ структурных задач с помощью решателя *Z88* [15], а также гидродинамических задач и задач упругости с помощью решателей *CalculiX* [16] и *ElmerFEM* [17] и визуализировать результаты моделирования.
- *Salome Meca* — платформа для пре/постпроцессинга *Salome* [18] с интегрированным решателем термоупругих задач *Code Aster* [19].
- Генератор расчетных сеток *Netgen* содержит Python-интерфейс для решателей гидродинамических задач и задач упругости и электромагнетизма *Netgen/NGSolve* [20]

В данной работе, для демонстрации полного цикла исследования, приводится пример решения статической задачи линейной упругости с использованием двух подходов. В первом подходе для генерации расчетной сетки используется программа *Gmsh*, а само моделирование и анализ результатов проводятся с помощью программы, написанной на языке программирования *FreeFem++* [21]. Данный подход требует определенных навыков программирования.

*FreeFem++* представляется собой подобный Си++ язык программирования для решения уравнений в частных производных, записанных в вариационной форме МКЭ на одно-, двух- и трехмерных расчетных сетках. *FreeFem++* имеет инструменты для препроцессинга (построение геометрии, генерация расчетной сетки, параметризация компьютерной модели); для решения систем алгебраических уравнений (прямые и итерационные методы LU, CG, Crout, Cholesky, GMRES, UMFPACK) и динамического перестроения и адаптации расчетных сеток; для постпроцессинга (визуализация расчетной сетки и КЭ переменных). Развитие компьютерного моделирования в *FreeFem++* осуществляется преимущественно за счет разработки новых алгоритмов и программного кода пользователями. В работе [22] была предложена модель течения

жидкости через динамически изменяемое гидросопротивление. Полная трехмерная модель взаимодействия жидкости и упругой границы с анализом влияния граничных условий Дирихле и Неймана на деформацию границы представлена в работе [23]. Полное трехмерное моделирование регулирования течения жидкости деформацией упругой эластичной трубки пьезоэлементом показано в [24]. Интегрирование уравнений в *FreeFem++* реализовано для декартовой системы координат. В работе [25] предлагается подход для решения модели деформации гиперупругого материала в жидкости в осесимметричной системе координат, а в [26] представлены осесимметричные модели течения жидкости и деформации трубки в модели микронасоса, прокачивающего жидкость за счет несимметричной в осевом направлении динамической деформации трубки системой круговых пьезоэлементов. Особый интерес представляют работы [27] и [28], где предлагается расширение функциональности пакета для решения контактных задач упругости. В [29] предложен алгоритм «безопасной» перестройки расчетной сетки при динамическом изменении геометрии рассматриваемой системы, предотвращающий появление конечных элементов с отрицательными объемами.

Второй подход основан на использовании решателя *CalculiX*, интегрированного в пакет трехмерного моделирования *FreeCAD*, и не требует опыта в программировании. Для полноты описания программы приводятся примеры использования интерфейса программы и параметрической оптимизации построения модели с помощью Python-скрипта (оба примера являются полностью функционально эквивалентными и независимыми).

*CalculiX* представляет собой две программы — решатель *CalculiX CrunchiX* (cxx) [30], с помощью которого проводится моделирование командного файла формата *ABAQUS*, и пре/постпроцессора *CalculiX GraphiX* (cgx) [31], позволяющего проводить подготовку модели, визуализировать и анализировать результаты моделирования. Дистрибутив пакета содержит пример начала 90-х гг. трехмерного моделирования термоупругой и модальной (определение собственных резонансных частот) задачи ротора турбокомпрессора реактивного двигателя [32]. В работе [33] представлена параметрическая оптимизация трехмерной конструкции, состоящей из алюминиевой структуры в виде пчелиных сот, заключенной между двумя пластинами из стекловолокна, а также решается статическая задача упругости на определение деформаций в алюминиевой конструкции. Целью работы являлось определение оптимальной конструкции

с минимальным весом, при котором деформации не превышают заданных значений. В работе [34] представлена связанная динамическая задача по определению вибраций и напряжений на лопатках ротора (решалась в *CalculiX*), вызываемых аэродинамическим воздействием (которое рассчитывалось в стороннем ПО).

В настоящей работе в качестве пре/постпроцессора предлагается использовать *FreeCAD*, поскольку данная программа имеет удобный интерфейс и значительный инструментарий по построению геометрии, генерации расчетной сетки и анализу результатов моделирования, что позволяет значительно сократить время разработки модели.

Проводится сравнение различных прямых и итерационных методов решения СЛАУ:

- Прямые методы в *FreeFem++*: *LU* [6] (LU-decomposition; LU-разложение; несимметричная матрица), *Crout* [35] (Crout matrix decomposition; алгоритм Краута; симметричная матрица), *Cholesky* [7] (Cholesky decomposition; разложение Холецкого; симметричная и положительно определенная матрица), *UMFPACK* [36] (Unsymmetric MultiFrontal method; разреженная матрица);
- Итерационные методы в *FreeFem++*: *CG* [6] (conjugate gradient method; метод сопряженных градиентов; разреженная, симметричная и положительно определенная матрица), *GMRES* [37] (generalized minimal residual method; обобщенный метод минимальных невязок; разреженная матрица);
- Прямой метод в *CalculiX*: *SPOOLES* (SParse Object Oriented Linear Equations Solver; решатель для уравнений с разреженными матрицами [38]);
- Итерационные методы в *CalculiX*: внутренний итерационный метод, основанный на алгоритме, описанном в [39]; *ITERATIVE SCALING* использует предобуславливание масштабированием диагональных элементов матрицы СЛАУ; *ITERATIVE CHOLESKY* — предобуславливание с неполным разложением Холецкого.

## 2. Уравнения линейных деформаций в декартовых координатах

Геометрия тестовой задачи показана на рис. 1. Упругий цилиндр радиуса  $R$  и высотой  $H$  закреплен на нижнем основании  $\Gamma_d$ , а на поверхность  $\Gamma_u$  приложена нагрузка.

Упругие деформации твердого тела описываются уравнением движения (второй закон Ньютона), связывающим динамическое изменение вектора перемещений  $\mathbf{u}$  под действием внутренних (описываемых тензором напряжений  $\sigma$ ) и объемных сил  $\mathbf{f}$  [40]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \sigma + \mathbf{f},$$

где  $\rho$  — плотность;  $t$  — время.

Статическое условие равновесия (после приложения силы прошло достаточно времени для установления поля деформации) в отсутствии объемных сил имеет вид:

$$\nabla \sigma = 0. \quad (1)$$

В изотропном теле тензор напряжений  $\sigma$  зависит от тензора деформаций  $\varepsilon$  и вектора перемещений  $\mathbf{u}$  следующим образом:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\nabla \mathbf{u})\mathbf{I}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор; параметры Ламе

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

зависят от модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Подставляя (2) в уравнение (1) и исключая тензор деформаций  $\varepsilon$  согласно определению

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T),$$

получим уравнение равновесия, содержащее только вектор перемещений (уравнения Навье–Коши):

$$\nabla [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda(\nabla \mathbf{u})\mathbf{I}] = 0. \quad (3)$$

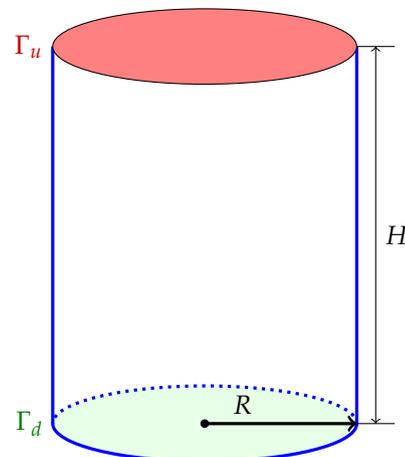


Рис. 1. Геометрия тестовой задачи

Граничные условия на верхней поверхности  $\Gamma_u$  могут быть заданы в виде условий Дирихле (перемещение на величину  $\mathbf{u}_p$ )

$$\vec{u}(\Gamma_u) = \mathbf{u}_p \quad (4)$$

или Неймана (на поверхность  $\Gamma_u$  приложено давление  $p$  и условием равновесия является баланс соответствующего напряжения  $\sigma_{ii}$ )

$$\mu\sigma_{ii} = -p, \quad (5)$$

где знак « $-$ » означает, что сила, создающая давление, направлена против нормали поверхности  $\Gamma_u$ .

Закрепление на нижней поверхности  $\Gamma_d$  можно задать двумя способами: жесткая заделка

$$\vec{u}(\Gamma_d) = (0, 0, 0) \quad (6)$$

или ограничение плоскостью с нулевой силой трения

$$u_z(\Gamma_d) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (3) записано в сильной (strong) формулировке. В МКЭ решаются уравнения в вариационной (variational, weak) формулировке. Умножим уравнение (1) на вектор пробных функций  $\mathbf{v}$  и интегрируем по объему  $V$ . Согласно теореме Грина [41]:

$$\int_V (\nabla \cdot \sigma) \mathbf{v} dV = \int_{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{v} d\Gamma - \int_V \sigma \cdot \nabla \mathbf{v} dV. \quad (8)$$

Интеграл по поверхности  $\Gamma$  можно определить интегрированием граничных условий Неймана (5):

$$\int_{\Gamma} \mu\sigma_{ii} \mathbf{v} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mu \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{v} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} (-p) \mathbf{v} d\Gamma. \quad (9)$$

Интегрирование уравнения (1) с учетом правила (8) и граничных условий Неймана (9) дает вариационную форму уравнения равновесия [21]:

$$\int_V 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) + \lambda(\nabla \mathbf{u}) \cdot \nabla \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_u} (-p) \mathbf{v} d\Gamma = 0, \quad (10)$$

где символ « $:$ » означает тензорное скалярное произведение, т. е.  $a : b = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ .

По известным значениям поля деформаций можно вычислить эквивалентные напряжения фон Мизеса:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \right], \quad (11)$$

где компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \\ \sigma_{ij} &= \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (12)$$

### 3. Создание расчетной сетки в Gmsh

*Gmsh* — программа для параметрического построения геометрии объекта (в 1D, 2D или 3D) и генерации расчетной сетки с указанием необходимых свойств (плотность сетки, порядок и тип КЭ).

Для создания геометрии объекта предусмотрены два способа: с помощью интерфейса программы или с помощью тестового документа с командами в формате geo. Оба способа можно комбинировать (например создать геометрию в интерфейсе, затем отредактировать файл с заданием параметров). Рассмотрим второй способ, для того чтобы показать, как строится параметрическая геометрия.

В текстовом редакторе создадим файл *cylinder.geo*. Параметры определяются в виде переменных. Определим характерный размер расчетной сетки, радиус цилиндра и его высоту:

```
chl=5.0e-3;
r=2.5e-2;
h=5.0e-2;
```

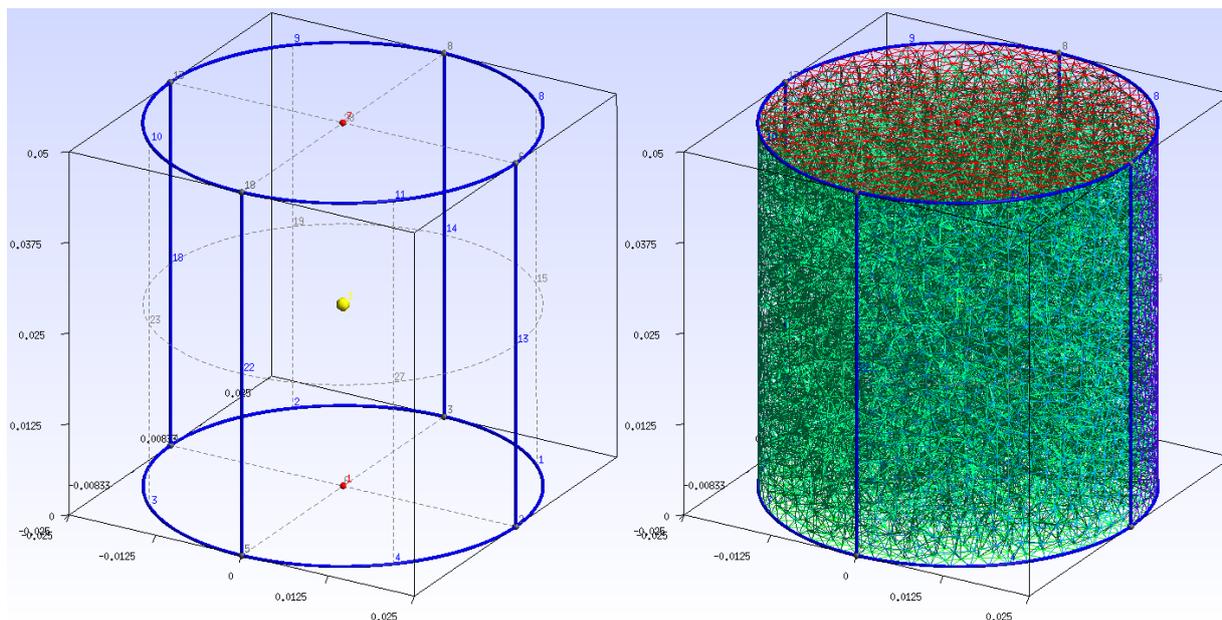
Определим четыре точки основания цилиндра: центр; крайние правую, верхнюю, левую и нижнюю точки. Точки (линии, поверхности) задаются в стандартном порядке — против часовой стрелки, если создается замкнутый объект, и по часовой стрелке, если область объекта лежит вне замкнутого контура (например, если замкнутая область описывает полость в объекте). В качестве параметров указываются координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и характерный размер сетки:

```
Point(1) = {0,0,0,chl};
Point(2) = {r,0,0,chl};
Point(3) = {0,r,0,chl};
Point(4) = {-r,0,0,chl};
Point(5) = {0,-r,0,chl};
```

В *Gmsh* окружность состоит из нескольких дуг, каждая из которых имеет угловой размер, не превышающий  $\pi/2$ . Составим окружность из 4 дуг размером  $\pi/2$  с тремя параметрами-точками — начало дуги, центр окружности, конец дуги:

```
Circle(1) = {2,1,3};
Circle(2) = {3,1,4};
Circle(3) = {4,1,5};
Circle(4) = {5,1,2};
```

Собираем части в окружность и составляем поверхность

Рис. 2. Геометрия цилиндра и его расчетная сетка, построенные в *Gmsh*

```
Line Loop(5) = {1,2,3,4};
Plane Surface(6) = {5};
```

Для создания цилиндра вытягиваем круглое основание вдоль оси  $z$  на величину высоты цилиндра  $h$ :

```
cyl[] = Extrude {0,0,h} {Surface{6}};
```

Для того чтобы в программе моделирования задавать граничные условия, необходимо установить метки для всех поверхностей и объема объекта. Для этого сохраним текстовый документ, откроем его в *Gmsh*, в настройках геометрии зададим отображение номеров для поверхностей и объемов. Ориентируясь по этим номерам, создадим физические группы для основания цилиндра, его верхней и боковой поверхностей и всего объема. При создании расчетной сетки все узлы, сегменты и поверхность будут иметь метку физической группы, к которой они принадлежат. Добавляем определение физических групп в файл и перезагружаем его в *Gmsh*.

```
Physical Surface("cyl down") = {6};
Physical Surface("cyl up") = {28};
Physical Surface("cyl side") = {15,19,23,27};
Physical Volume("cyl vol") = {cyl[]};
```

Если в системе установлена библиотека *OpenCASCADE*, то для файла геометрии достаточно использовать библиотечную функцию построения цилиндра и задать граничные поверхности и само тело следующим образом:

```
SetFactory("OpenCASCADE");
Cylinder(1) = {0,0,0,0,0,0.05,0.025,2*Pi};
Physical Volume("1", 1) = {1};
Physical Surface("1", 1) = {1};
Physical Surface("2", 2) = {2};
Physical Surface("3", 3) = {3};
```

На рис. 2 слева показана полученная геометрия с визуализацией всех меток для узлов, сегментов и поверхностей.

Для более точной настройки сетки указываем минимальный и максимальный размеры элементов (Options/Mesh/General/Min/Max element size)  $\min = 1.e - 5$ ,  $\max = 2.65e - 5$  и их порядок (первый или второй). Для создания трехмерной сетки во вкладке Mesh в списке команд выбираем элемент 3D и сохраняем сетку в формате msh (без записи дополнительной информации, только данные, связанные с физическими группами). На рис. 2 справа показана построенная расчетная сетка.

#### 4. Моделирование в FreeFem++

Приведем пример построения трехмерной модели статического сжатия цилиндра в *FreeFem++* с использованием линейной упругой модели. Программа написанная на языке *FreeFem++* представляет собой текстовый файл с расширением edr.

*FreeFem++* может работать с внешней расчетной сеткой в формате *Gmsh*. Подключаем библиотеку для работы с трехмерными расчетными сетками, библиотеку для работы с форматом *Gmsh* и загружаем ранее созданный файл с сеткой:

```
load "msh3"
load "Gmsh"
mesh3 ThE = Gmshload3("cylinder.msh");
```

Расчетную сетку для простой двумерной или трехмерной геометрии можно сделать средствами *FreeFem++*. Принцип построения геометрии следующий: задаются границы в параметрическом виде  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  с указанием метки границы (label); границы, составляющие замкнутый контур, образуют поверхность, а поверхности можно собрать в объемный объект. Задаем параметры геометрии (масштаб, радиус и высоту цилиндра) и модели (перемещение для граничных условий Дирихле и давление для граничных условий Неймана):

```
load "msh3"
real scale = 1.e-3;
real radius = 25*scale;
real height = 50*scale;
real displacementZ = 0.5*scale;
real pressureZ = 1.0e4;
```

Создаем окружность радиуса  $R$  с помощью параметрического уравнения окружности:

```
border bC(t=0,2*pi){
  x=radius*sin(t); y=radius*cos(t); label=0;};
```

Плотность расчетной сетки определяется количеством узлов на границе. Зададим количество узлов вдоль окружности цилиндра и вдоль его высоты:

```
int NBEC = 50, NBEZ = 20;
```

Строим двумерную сетку в границах окружности с указанием количества узлов на границе. Поскольку параметрическое уравнение окружности задает границу в направлении по часовой стрелки, количество узлов указываем со знаком «-», чтобы инвертировать направление:

```
mesh mC = buildmesh(bC(-NBEC));
```

Задаем номера (метки) для верхней, боковой и нижней поверхностей цилиндра (по этим меткам далее будут заданы граничные условия):

```
int[int] refTop = [0, 2], refBottom = [0, 3],
  refSide = [0, 1];
```

Вытягиваем двумерную сетку на величину  $H$  для создания трехмерной сетки цилиндра с метками на каждой поверхности:

```
mesh3 ThE = buildlayers(mC, NBEZ,
  zbound=[0, height], labelmid=refSide,
  labelup = refTop, labeldown = refBottom);
```

Выбирается один из двух приведенных выше способов задания сетки. Далее посмотрим, как выглядит сетка (будут показаны только граничные элементы) и выведем в консоль информацию по параметрам сетки (количество узлов, граничных/треугольных элементов и объемных элементов/тетраэдров). Информация по сетке позволяет провести проверку импортированной сетки и значения должны совпадать с информацией в *Gmsh* (Tools/Statistics):

```
plot(ThE);
cout << "Vertex, Border, Tetrahedra: "
  << ThE.nv << ", " << ThE.nbe << ", "
  << ThE.nt << endl;
```

Сечение расчетной сетки плоскостью  $z = \text{const}$  представляет собой многоугольник, вписанный в окружность, что дает погрешность в величине объема  $V_m$  цилиндра. Оценить эту погрешность  $\gamma_V$  относительно реального объема  $V_r$  можно следующим образом:

$$V_r = \pi R^2 H, \quad V_m = \int_V dV, \quad \gamma_V = |1 - V_m/V_r|. \quad (13)$$

Соответствующий код:

```
real vr = pi*radius^2*height;
real vm = int3d(ThE)(1.0);
cout << "Volume: real = " << vr << ", mesh = "
  << vm << ", err = " << 100.0*abs(1.0-vm/vr)
  << "%" << endl;
```

Аналогично можно оценить изменение объема сетки после деформации, например, для проверки условия несжимаемости материала.

Зададим свойства материала (модуль Юнга и коэффициент Пуассона) и рассчитаем коэффициенты Ламе:

```
real E = 1.0E6, sigma = 0.49;
real mu = E/(2*(1+sigma)),
  lambda = E*sigma/((1+sigma)*(1-2*sigma));
```

Точность решения зависит от порядка полиномов аппроксимирующих конечно-элементные переменные. Можно задать элементы первого

```
fespace Vh(ThE, [P1, P1, P1]);
```

или второго порядка

```
fespace Vh(ThE, [P2, P2, P2]);
```

Описываем компоненты вектора деформаций и соответствующих пробных функций:

```
Vh [d1, d2, d3] = [0, 0, 0], [vv1, vv2, vv3];
```

Определим макросы для тензора деформаций и дивергенции (макрос обязательно должен заканчиваться символами комментария //):

```

real sqrt2=sqrt(2.0);
macro epsilon(u1,u2,u3)
  [dx(u1),dy(u2),dz(u3),
  (dz(u2)+dy(u3))/sqrt2,
  (dz(u1)+dx(u3))/sqrt2,
  (dy(u1)+dx(u2))/sqrt2]
  // EOM
macro div(u1,u2,u3)
  ( dx(u1)+dy(u2)+dz(u3) )
  // EOM

```

Перейдем к решению уравнения (10) с помощью команды `solve` выбранным методом (`solver=[LU, CG, Crout, Cholesky, GMRES, UMFPACK]`); для итерационных методов указывается абсолютная погрешность `eps`. Для трехмерных интегралов используется команда `int3d` (объемные интегралы в (10)) с двумя аргументами: расчетная сетка и подинтегральное выражение. Символ одинарной кавычки означает операцию транспонирования. Код для решения задачи линейной упругости (10) имеет вид [21]:

```

solve Lamé([d1,d2,d3],[vv1,vv2,vv3],
  solver=CG,eps=1.e-8)=
int3d(ThE)(
  lambda*div(d1,d2,d3)*div(vv1,vv2,vv3)
  +2.0*mu*( epsilon(d1,d2,d3)'*
  epsilon(vv1,vv2,vv3) ))

```

Зададим граничные условия на нижней поверхности  $\Gamma_d$  в виде (6)

```
+ on(3,d1=0,d2=0,d3=0)
```

или в виде (7)

```
+ on(3,d3=0)
```

и граничные условия на верхней поверхности  $\Gamma_u$  в виде условий Дирихле (4)

```
+ on(2,d3=-displacementZ);
```

или Неймана (5) (команда `int2d` используется для задания поверхностного интеграла в (10)):

```
+int2d(ThE,2)(pressureZ*vv3);
```

Если выбран метод `UMFPACK`, то для решения задачи, использующей более 2 ГБ памяти, необходимо подключить 64-разрядную версию:

```
load "UMFPACK64"
```

Поскольку деформации малы, для визуализации введем коэффициент для масштабирования деформаций и создадим новую, деформированную сетку:

```

real coef = 20.0;
mesh3 ThED = movemesh3(ThE, transfo=[
  x+coef*d1(x,y,z), y+coef*d2(x,y,z),
  z+coef*d3(x,y,z)]);

```

Выводим в консоль минимальное и максимальное значения компонент вектора деформаций и компоненты вектора деформаций на верхней поверхности:

```

cout << "Disp[mm]: min = " << d1[].min/scale
<< ", max = " << d1[].max/scale << ", d1 = "
<< d1(radius, 0, height)/scale << ", d2 = "
<< d2(0, radius, height)/scale << ", d3 = "
<< d3(0, 0, height)/scale << endl;

```

Визуализация недеформированной и деформированной сеток:

```
plot(ThE, ThED);
```

Для трехмерной визуализации значений переменных в `FreeFem++` есть два способа. Первый — построение сетки сечения трехмерного объекта и вычисление на ней двумерных КЭ-переменных по значению трехмерной переменной. Покажем этот способ для сечения в плоскости  $y = 0$  деформированного цилиндра:

```

mesh Thsec=square(NBEC,NBEZ,
  [(2.0*x-1.0)*radius,y*height]);
mesh ThsecD = movemesh(Thsec,
  [x+coef*d1(x,0,y),y+coef*d3(x,0,y)]);
fespace Xh(ThsecD,P2);
Xh secd3;
secd3=d3(x-coef*d1(x,0,y),0,
  y-coef*d3(x,0,y))/scale;
plot(Thsec,ThsecD);
real[int] viso(26);
for (int i = viso.n-1; i >= 0; i--)
  viso[viso.n-1-i] =
    i*d3(0,0,height)/scale/(viso.n-1);
plot(Thsec, ThsecD, secd3, viso=viso,
  nbiso=viso.n, fill=1, value=1);

```

Команда визуализации `plot` может сохранять изображение в виде графического файла формата `eps` опцией `ps` (работает только для двумерных объектов), также можно указать область визуализации опцией `bb`:

```

func bb = [[-1.1*radius,-0.1*height],
  [1.5*radius,1.1*height]];
plot(Thsec, ThsecD, secd3, viso=viso,
  nbiso=viso.n, fill=1, value=1,
  bb=bb, ps="f.eps");

```

Второй способ — визуализация трехмерной сетки с определенной на ней переменной с помощью подключаемого модуля `medit`:

```
load "medit"
medit("dz", ThED, d3/scale);
```

Команда `medit` открывает графическое окно, в котором можно настроить параметры визуализации сетки и значения переменной. Пока окно

открыто, выполнение кода *FreeFem++* приостанавливается, поэтому, для отображения промежуточных результатов моделирования, рекомендуется использовать команду *plot*.

Можно рассчитать компоненты тензора напряжений (12) и эквивалентные напряжения фон Мизеса (11):

```

namespace Eh(Thsec, P2);
Eh sxx = lambda*(dx(d1)+dy(d2)+dz(d3))+
  2*mu*dx(d1);
Eh syy = lambda*(dx(d1)+dy(d2)+dz(d3))+
  2*mu*dy(d2);
Eh szz = lambda*(dx(d1)+dy(d2)+dz(d3))+
  2*mu*dz(d3);
Eh sxy = mu*(dy(d1)+dx(d2));
Eh syz = mu*(dz(d2)+dy(d3));
Eh sxz = mu*(dz(d1)+dx(d3));
Eh sv = sqrt( (sxx-syy)^2+(syy-szz)^2+
  (szz-sxx)^2+6*(sxy^2+syx^2+sxz^2) )/sqrt2;

```

Во время разработки компьютерной модели удобно использовать встроенные функции *FreeFem++* для профилирования кода. Задаем две переменные

```

real cputime1=0, cputime2=0;

```

Время выполнения фрагментов кода (в секундах) определяется следующей конструкцией:

```

cputime1 = clock();
// here code for profiling
cputime2 = clock();
cout << "Time = " << cputime2-cputime1 << endl;

```

Код программы запускается в консоли (ОС Linux) или в командной оболочке (ОС Windows):

```

FreeFem++ cylinder.edp

```

Результаты моделирования для граничных условий (6) и (7) показаны на рис. 3.

## 5. Моделирование в FreeCAD/CalculiX

При определении геометрических и физических единиц нужно учитывать, что в *FreeCAD* и *CalculiX* используется инженерная система единиц по умолчанию: длина [мм], масса [кг], время [с]. Поэтому в интерфейсе, где размерность не указывается в явном виде, необходимо учитывать систему единиц по умолчанию.

Рассмотрим порядок подготовки модели в *FreeCAD*. Для удобства все инструменты разделены на модули: PartDesign (геометрия объекта), FEM (моделирование методом конечных элементов).

После выбора модуля Part Design создаем цилиндр (создать аддитивный примитив→аддитивный цилиндр) с радиусом  $R = 25$  mm и высотой  $H = 50$  mm (в интерфейсе

программы размерность указывается латинскими символами).

В модуле FEM сначала создаем новый анализ (model→analysis), выделяем цилиндр и добавляем для него свойства материала (model→material→Material for Solid, достаточно задать модуль Юнга 1 МПа и коэффициент Пуассона 0.49). Задаем граничные условия: фиксированные на нижней грани (model→mechanical constraints→constraint fixed) и условия Дирихле (constraint displacement) или Неймана (constant pressure) на верхней. Создаем расчетную сетку для объекта (mesh→create FEM mesh from a shape by Gmsh) с указанием порядка КЭ (первый или второй) и плотности сетки (максимальный/минимальный размер КЭ min = 1 mm, max = 2.65 mm).

Для запуска решателя (*CalculiX*Tools) задаем рабочую папку, сохраняем \*.inp файл и запускаем расчет. Результаты расчета можно посмотреть в *CalculiX\_static\_results* (z Displacement, scale=20).

Отметим, что в процессе моделирования в рабочей папке создаются два файла: командный файл модели в формате Abaqus "FEMMeshGmsh.inp" и файл результатов моделирования в формате Abaqus "FEMMeshGmsh.frd". Первый может быть использован для запуска модели в *CalculiX/cxx* в командной строке

```

ccx FEMMeshGmsh

```

а второй — для анализа результатов в постпроцессоре *CalculiX/cgx*

```

cgx FEMMeshGmsh.frd

```

т. е. *FreeCAD* может использоваться в качестве пре-процессора, а сам анализ модели можно проводить непосредственно в *CalculiX*. По умолчанию *FreeCAD* в командном файле указывает метод решения SLAU SPOOLES. Чтобы выбрать итерационный метод нужно в командном файле заменить строку (с помощью любого текстового редактора)

```

*STATIC

```

на строку

```

*STATIC, SOLVER=ITERATIVE SCALING

```

или

```

*STATIC, SOLVER=ITERATIVE CHOLESKY

```

В варианте *SCALING* используется предобуславливание с масштабированием диагональных элементов матрицы SLAU, а в *CHOLESKY* — неполное разложение Холецкого.

Деформация цилиндра, полученная в *FreeCAD/CalculiX*, с граничными условиями (6) и (7) показана на рис. 4.

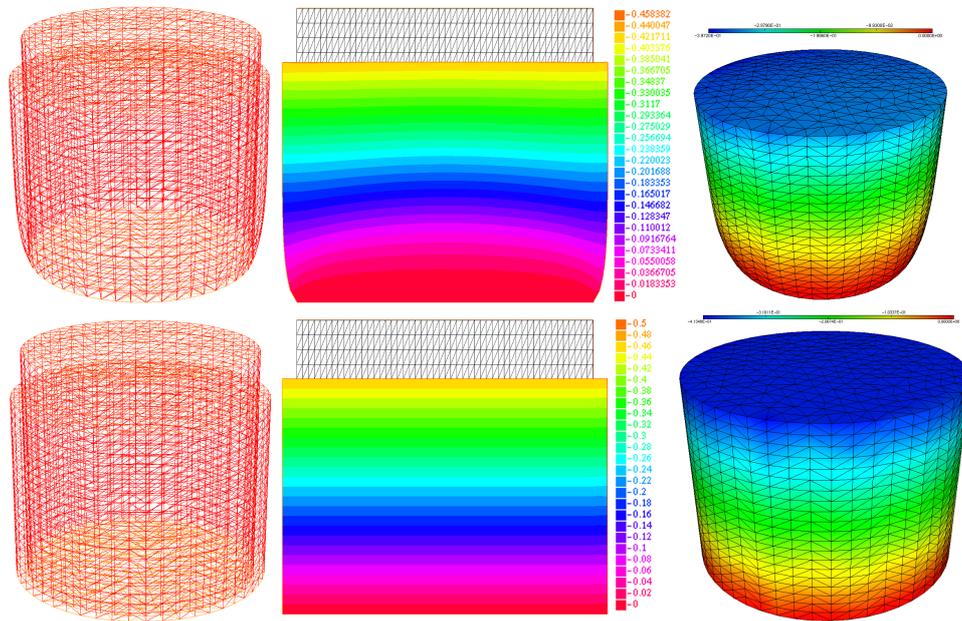


Рис. 3. Деформация цилиндра (слева), сечение  $y = 0$  (по центру) и визуализация в *medit* (справа), рассчитанные в *FreeFem++* с граничными условиями (6) (вверху) и (7) (внизу). Деформация увеличена в 20 раз

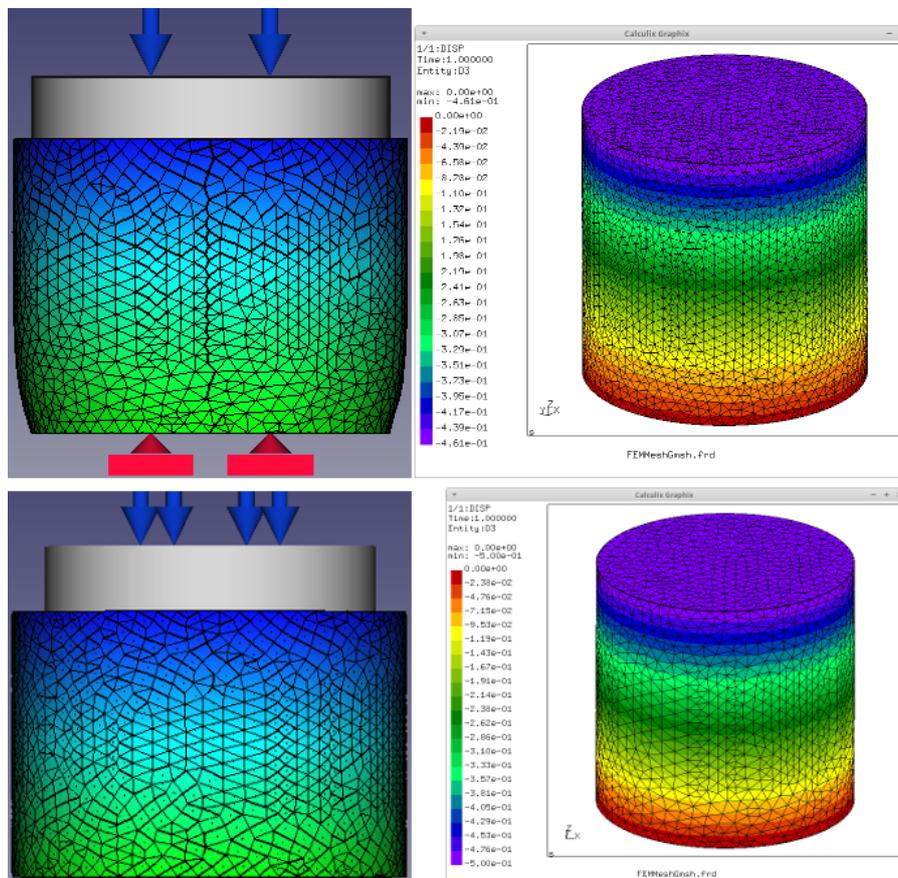


Рис. 4. Деформация цилиндра, полученная в *FreeCAD/CalculiX*, с граничными условиями (6) (сверху) и (7) (снизу). Визуализация результатов в *FreeCAD* (слева) и *CalculiX-cgx* (справа). Деформация в *FreeCAD* увеличена в 20 раз

Полученную модель можно редактировать в самой среде *FreeCAD*. В некоторых случаях, например, если необходимо провести большую серию расчетов с изменением геометрических и/или физических параметров модели, то более эффективным будет использование встроенного интерпретатора языка *Python*. Скрипты можно запускать через интегрированную в интерфейс *Python*-консоль. Продемонстрируем пример параметрического скрипта для рассматриваемой модели (пример основан на скрипте без параметризации [42]).

Создаем новый проект и определяем все параметры модели (радиус и высоту цилиндра; модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала; плотность расчетной сетки; перемещение и давление на верхней поверхности цилиндра; рабочую папку):

```
doc = App.newDocument("Cyl")
r = 25
h = 50
ym = "1.0 MPa"
pr = "0.49"
mms = 2.65
zd = -0.5
cp = 0.01
wdir = "~/calculix"
```

Создаем цилиндр заданного радиуса и высоты и отображаем его в интерфейсе:

```
import Part
cylObj = doc.addObject('Part::Cylinder', \
'Cylinder')
cylObj.Radius = r
cylObj.Height = h
import FreeCADGui
FreeCADGui.ActiveDocument.activeView().\
viewAxonometric()
FreeCADGui.SendMsgToActiveView("ViewFit")
```

Задаем тип анализа модели:

```
import ObjectsFem
analysis = ObjectsFem.makeAnalysis(doc, \
'Analysis')
solver = ObjectsFem.\
makeSolverCalculiXCcxTools(doc, "CalculiX")
solver.GeometricalNonlinearity = 'linear'
solver.ThermoMechSteadyState = True
solver.MatrixSolverType = 'default'
solver.IterationsControlParameterTimeUse=False
analysis.addObject(solver)
```

Добавляем материал с заданными параметрами:

```
matObj=ObjectsFem.makeMaterialSolid(doc, \
'SolidMaterial')
mat = matObj.Material
mat['Name'] = "Silicone"
mat['YoungsModulus'] = ym
mat['PoissonRatio'] = pr
matObj.Material = mat
analysis.addObject(matObj)
```

Зафиксируем основание цилиндра (6):

```
fixed=ObjectsFem.makeConstraintFixed(doc, \
'FemConstraintFixed')
fixed.References = [(doc.Cylinder, "Face3")]
analysis.addObject(fixed)
```

Задаем на верхней грани цилиндра граничные условия Дирихле (4):

```
disp = ObjectsFem.makeConstraintPressure(doc, \
'FemConstraintDisplacement')
disp.References = [(doc.Cylinder, "Face2")]
disp.zDisplacement = zd
analysis.addObject(disp)
```

или Неймана (5):

```
pressure = ObjectsFem.makeConstraintPressure(\
doc, "FemConstraintPressure")
pressure.References = [(doc.Cylinder, "Face2")]
pressure.Pressure = cp
analysis.addObject(pressure)
```

Создаем расчетную сетку с элементами второго порядка генератором *NetGen*:

```
mesh = doc.addObject(\
'Fem::FemMeshShapeNetgenObject', \
'FEMMeshNetgen')
mesh.Shape = doc.Cylinder
mesh.MaxSize = mms
mesh.Fineness = "Moderate"
mesh.Optimize = True
mesh.SecondOrder = True
```

или генератором *Gmsh*:

```
femObj=ObjectsFem.makeMeshGmsh(doc, \
cylObj.Name + "_Mesh")
femObj.Part = doc.Cylinder
femObj.ElementOrder = u"2nd"
femObj.CharacteristicLengthMax = '2.65 mm'
femObj.CharacteristicLengthMin = '1 mm'
doc.recompute()
from femmesh.GmshTools import GmshTools as gt
mesh = gt(femObj)
```

Добавляем созданную расчетную сетку в анализ, настраиваем решатель и запускаем расчет деформаций (в указанной рабочей папке создается файл модели и файл с результатами моделирования):

```
analysis.addObject(mesh)
from femtools import ccxtools
fea = ccxtools.FemToolsCcx()
fea.update_objects()
fea.setup_working_dir(wdir)
fea.setup_ccx()
fea.purge_results()
fea.write_inp_file()
fea.ccx_run()
```

Загружаем результаты из рабочей папки и показываем недеформированную и деформированную (с 20-кратным масштабированием деформаций) сетки:

```

fea.load_results()
for m in analysis.Group:
    if m.isDerivedFrom('Fem::FemResultObject'):
        result = m
        break
mesh.ViewObject.setNodeDisplacementByVectors(\
result.NodeNumbers, result.DisplacementVectors)
mesh.ViewObject.applyDisplacement(20)

```

Отметим основное отличие программирования в *FreeFem++* от *FreeCAD* — в *FreeFem++* программируется полная задача с геометрией, параметрами модели, заданием уравнений в явном виде и их решением, обработкой и сохранением полученных результатов; в *FreeCAD* скрипты автоматизируют настройку модели через интерфейс программы (значительно сокращая время при модификации модели за счет возможности параметризации задачи).

## 6. Анализ результатов

Проведем анализ тестовой задачи со сплошным цилиндром радиуса  $R$  и высотой  $H$  и с ограничением перемещения у основания вдоль оси  $Oz$  (7). На верхнюю плоскость цилиндра приложено давление  $p$ . Под действием давления цилиндр сжимается в осевом направлении на величину  $\Delta H_a$ , которую можно оценить из определения для модуля Юнга  $E$ :

$$E = \frac{p}{\Delta H_a / H} \Rightarrow \Delta H_a = \frac{pH}{E}. \quad (14)$$

Для значений  $R = 2.5$  см,  $H = 5$  см,  $E = 1$  МПа,  $p = 10$  кПа получим  $\Delta H_a = -0.5$  мм.  $\Delta H_a$  зависит от приложенного давления  $p$  линейно.

Во время деформации цилиндр растягивается в радиальном направлении и его радиус увеличивается на величину  $\Delta R_a$ , которую можно вычислить из определения для коэффициента Пуассона:

$$\nu = -\frac{\Delta R_a}{R} \frac{H}{\Delta H_a} \Rightarrow \Delta R_a = -\nu \frac{\Delta H_a}{H} R. \quad (15)$$

Для  $H = 5$  см,  $R = 2.5$  см, величины  $\Delta H_a$ , вычисленной по формуле (14) и значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0.49$  получим  $\Delta R = 0.1225$  мм.

При численном моделировании в программе *FreeFem++* с граничными условиями (7), для расчетной сетки, состоящей из 25920 объемных элементов второго порядка, погрешность величины объема цилиндра относительно его точного значения, определяемого по формуле (13), составила  $\gamma_V = 0.29\%$ , а погрешности величин осевого сжатия  $\Delta H$  и радиального растяжения  $\Delta R$  относительно аналитических решений (14) и (15) составили  $\gamma_H = 3 \cdot 10^{-7}\%$  и  $\gamma_R = 0.47\%$ . С увеличением числа

КЭ погрешности снижаются: например, при восьмикратном увеличении количества КЭ погрешности составили  $\gamma_V = 0.066\%$ ,  $\gamma_H = 3 \cdot 10^{-7}\%$  (погрешность округления) и  $\gamma_R = 0.053\%$ , что является подтверждением корректности построенной численной модели.

Рассмотрим жесткое закрепление на основании:  $\mathbf{u} = 0$  (6) — сила трения скольжения достаточна для предотвращения скольжения основания цилиндра по поверхности. В этом случае площадь основания останется неизменной, а увеличение площади верхней поверхности цилиндра будет пропорциональна приложенному давлению. Следовательно, величина вертикального сжатия  $\Delta H_f$  будет меньше  $\Delta H_a$ . Поскольку уравнения (3) линейные,  $H_f$  зависит от величины давления  $p$  линейно.

В табл. 1 приведены следующие параметры моделирования и результаты: тип конечных элементов (КЭ) и их порядок (П), количество узлов  $m_v$  и объемных элементов (тетраэдров)  $m_t$  расчетной сетки, количество решаемых уравнений в СЛАУ  $k$ , метод решения СЛАУ (прямые методы обозначены прямым шрифтом, а итерационные — наклонным), величина вертикальной деформации  $\Delta H$  на верхнем ребре цилиндра и ее относительная погрешность  $\gamma$ , процессорное время генерации расчетной сетки  $T_m$  и время расчета задачи упругости  $T_s$ , занимаемый объем оперативной памяти и файла подкачки (если он использовался), номер расчета  $n$ . Все расчеты проводились на одном ядре процессора. Затраченное на выполнение расчета время определялось в *FreeFem++* с помощью профилирования кода (команда *clock*), а в *CalculiX* — консольной командой *time*. Используемый объем ОЗУ и файла подкачки определялся с помощью программы *gnome-system-monitor*.

Первые 17 расчетов проводились в ОС CAELinux-2020 на процессоре Core 2 Duo-E8500 (два ядра по 3.16 ГГц, кэш 6 МБ) с 4 ГБ оперативной памяти и файлом подкачки, размещенным на твердотельном жестком диске, в *FreeFem++* ( $n = 1 - 10$ ) и *CalculiX* ( $n = 11 - 17$ ). Выбор параметров генерации сетки произведен таким образом, чтобы сетки были близки по количеству объемных элементов и размеру СЛАУ (15165 уравнений для КЭ первого порядка и 112545 уравнений — для второго). Остальные расчеты ( $n = [18 - 33]$ ) проводились в ОС Ubuntu 14.04 на процессоре Intel Core i7-3770K (4 ядра и 8 потоков по 3.5 ГГц, кэш 8 МБ) с 16 ГБ ОЗУ и файлом подкачки, размещенном на жестком диске SATA-6Gb. Максимальная абсолютная погрешность для итерационных методов в *FreeFem++* задавалась равной  $2 \cdot 10^{-7}$ . В *CalculiX* максимальная абсолютная погрешность

Таблица 1. Результаты моделирования тестовой статической задачи линейной упругости с использованием различных методов решения СЛАУ в программах *FreeFem++* и *CalculiX*.

Программа	КЭ, П	$m_v, m_t, k$	Метод	$\Delta H$ , мм	$\gamma$ , %	$T_m$ , с	$T_s$ , с	ОЗУ+ФП	$n$
FreeFem++	P1, 1	5082, 25920, 15246	LU	-0.439048	4.9	0.019	24.6	237.4 МБ	1
			Crout				11.9	121.1 МБ	2
			Cholesky				8.7	121.1 МБ	3
			UMFPACK				5.64	144.9 МБ	4
			CG				3.0	8.7 МБ	5
			GMRES				11.2	18 МБ	6
	P2, 2	5082, 25920, 112545	UMFPACK	-0.458382	0.71	0.019	330	3.5 + 4 ГБ	7
			CG				86.1	65.4 МБ	8
			GMRES				477	161.3 МБ	9
	P1, 1	38663, 214080, 115989	CG	-0.451112	2.3	0.15	46	55 МБ	10
CalculiX	C3D4, 1	5458, 25876, 15967	SPOOLES	-0.443498	3.9	2.5	3.9	68.5 МБ	11
			Scaling	-0.443501	3.9		1.5	13.25 МБ	12
			Cholesky	-0.443974	3.8		1.3	15.5 МБ	13
	C3D10, 2	39187, 25855, 116071	SPOOLES	-0.460443	0.26	4.4	66.8	990 МБ	14
			Scaling	-0.460444	0.26		50.1	92,9 МБ	15
			Cholesky	-0.460735	0.2		26.7	127.5 МБ	16
	C3D4, 1	37871, 204843, 108861	Cholesky	-0.454901	1.5	8.8	15	115.7 МБ	17
FreeFem++	P2, 2	5082, 25920, 112545	UMFPACK	-0.458382	0.7	0.01	77.7	7.5 ГБ	18
			GMRES				271	161 МБ	19
			CG				46.9	65 МБ	20
		38663, 214080, 891567	CG	-0.461349	0.062	0.085	782	516 МБ	21
				-0.461561	0.017	0.3	3990	1.6 ГБ	22
				-0.461638	0	0.6	13173	3.9 ГБ	23
CalculiX	C3D10, 2	39187, 25855, 226581	SPOOLES	-0.460443	0.26	4.4	47.4	990 МБ	24
			Scaling	-0.460444	0.26		30	92,9 МБ	25
			Cholesky	-0.460700	0.2		15.5	127.5 МБ	26
		77960, 52887, 226581	SPOOLES	-0.460738	0.19	8	186	2.5 ГБ	27
				Cholesky	-0.460769		0.19	52	258.5 МБ
		146068, 101434, 426972	SPOOLES	-0.460998	0.14	14.4	644	5.8 ГБ	29
				Cholesky	-0.460977		0.14	112	495.5 МБ
		290182, 204844, 1851447	SPOOLES	-0.461233	0.088	30.3	2485	14 + 1 ГБ	31
				Cholesky	-0.461517		0.026	310	971 МБ
		627812, 448982, 4427019	Cholesky	-0.461687	0.011	66.4	764	2.1 ГБ	33

$\gamma_m$  определяется самой программой и составляет  $2 \cdot 10^{-7}$  для метода *Scaling* и  $10^{-6}, \dots, 5 \cdot 10^{-6}$  для метода *Cholesky* (для большего  $k$  меньше  $\gamma_m$ ). Расчеты  $n = [21 - 23]$  и  $n = [27 - 33]$  проведены для определения насыщения величины максимальной деформации  $\Delta H$  при увеличении  $m_v$ . Относительная погрешность  $\gamma$  определялась относительно расчета  $n = 23$  на сетке с  $m_v = 294111$  узлами. Относительная погрешность

величины объема цилиндра определялась по формуле (13) и для расчетов  $n = [20 - 23]$  составила  $\gamma_V = [0.26\%, 0.066\%, 0.029\%, 0.016\%]$ . Прямые методы *LU*, *Crout* и *Cholesky* в *FreeFem++* удалось запустить только для КЭ первого порядка. Ускорение расчетов за счет более производительного процессора составило  $\sim 70\%$ .

Итерационные методы решения СЛАУ для рассматриваемой задачи продемонстрировали более

высокую скорость вычислений по сравнению с прямыми методами. Это связано с тем, что решалась трехмерная задача и даже для элементов первого порядка количество уравнений в СЛАУ  $k$  значительно. В *FreeFem++* метод сопряженных градиентов *CG*  $n = [5, 8]$  показал более быструю скорость вычислений с использованием меньшего объема памяти по сравнению с другими методами. В *CalculiX* самую высокую скорость вычислений показал итерационный метод *Cholesky* с обуславливанием неполным разложением Холецкого ( $n = [13, 15]$ ). Итерационный метод *Scaling* использовал на 30% меньше объема памяти из-за более простого обуславливания, чем метод *Cholesky*, а скорость вычислений была почти в 2 раза меньше, чем в *Cholesky* ( $n = [15, 16]$ ). Метод *Cholesky* показал двукратную скорость вычислений по сравнению с *CG* для КЭ первого порядка ( $n = [13, 5]$ ) и трехкратную скорость для элементов второго порядка ( $n = [16, 8]$ ). Это может быть связано с тем, что итерационные методы в *FreeFem++* используют обуславливание только через подключение соответствующих пользовательских функций, а в проведенных расчетах обуславливание не использовалось.

На тестовой задаче из прямых методов *SPOOLES* ( $n = 11$ ) показал лучшее быстродействие (в 1.6) и использовал меньший объем памяти (в 7.6 раз) относительно *UMFPACK*  $n = 4$ . Падение скорости вычислений для  $n = 7$  в 5 раз по сравнению с  $n = 14$  связано с использованием в  $n = 7$  файла подкачки.

Использование элементов первого порядка приводит к высокой погрешности. В  $n = 10$  и  $n = 17$  расчетная сетка выбиралась таким образом, чтобы число уравнений  $k$  было близким к числу уравнений для элементов второго порядка ( $n = [8, 16]$ ). Увеличение количества узлов в 7 раз ( $n = [5, 10]$  и  $n = [13, 17]$ ) уменьшило погрешность в 2 раза. При использовании КЭ второго порядка для того же количества уравнений погрешности уменьшаются в 7 раз ( $n = [5, 8]$ ) или в 20 раз ( $n = [13, 16]$ ). То есть при одинаковых вычислительных затратах точность вычислений для элементов второго порядка на грубой сетке выше, чем для элементов первого порядка на более плотной сетке.

Погрешность вычислений  $\gamma$  в пакете *CalculiX* и *FreeFem++* для элементов второго порядка для тестовых расчетов  $n = 8$  и  $n = 16$  составляет 0.7% и 0.2%. Элементы C3D4/C3D10 [43] и элементы P1/P2 [44] схожи (см. рис. 5): геометрия, количество узлов, порядок аппроксимирующих полиномов и положение промежуточных узлов в КЭ второго порядка (в середине соответствующего ребра) совпадают в обеих программах. Согласно документации,

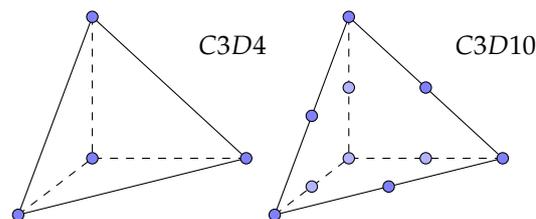


Рис. 5. Геометрия и расположение узлов (круги) в конечных элементах C3D4 и C3D10

в численном интегрировании КЭ-функции используется три точки интегрирования в *FreeFem++* и четыре точки в *CalculiX*.

## 7. Заключение

В работе приведен краткий обзор свободных программ численного моделирования статических задач упругости методом КЭ. Приведены примеры построения модели с использованием *FreeFem++/Gmsh* и *FreeCAD/CalculiX* (с использованием интерфейса программы и с использованием параметрического скрипта на языке *Python*). Проведен анализ использования вычислительных ресурсов различными прямыми и итерационными методами. В рамках рассмотренной тестовой задачи статической линейной упругости наиболее оптимальным методом в *FreeFem++* является итерационный метод сопряженных градиентов *CG* как по времени вычислений, так и по используемому объему памяти. Наибольшую скорость вычислений дает итерационный метод *Cholesky* с обуславливанием неполным разложением Холецкого в программе *CalculiX*.

На основе проведенного анализа вычислительных возможностей программ, их функциональности и удобства использования, обозначим особенности, которые могут повлиять на выбор программы численного моделирования. Особенности *FreeFem++*:

- необходимы навыки программирования;
- имеются функции пре/постпроцессора (создание 2D/3D геометрии и расчетной сетки; загрузка сетки, созданной в *Gmsh*; визуализация результатов расчетов);
- имеющиеся прямые методы используют больше вычислительных ресурсов по сравнению с *CalculiX*;
- имеются итерационные методы с возможностью подключения пользовательских предобуславливателей;

- позволяет создавать, перестраивать, адаптировать расчетные сетки в ходе выполнения кода, проводить полную параметризацию задачи, запускать серии расчетов по наборам параметров, проводить обработку результатов вычислений.

#### Особенности *CalculiX*:

- навыки программирования не требуются;
- *FreeCAD/CalculiX* позволяет провести полный цикл исследования в рамках одной программы, а также параметризацию задачи на языке программирования *Python*;
- в качестве отдельной программы содержит пре/постпроцессор (создание геометрии и расчетной сетки по командному файлу, визуализация данных по файлу результатов расчетов);
- имеет быстрый и экономичный к вычислительным ресурсам (в сравнении с прямыми методами *FreeFem++*) прямой метод *SPOOLES*;
- имеет быстрые итерационные методы с преобуславливанием.

## Список литературы

- [1] Ansys Mechanical – finite element analysis (FEA) software. <https://www.ansys.com/products/structures/ansys-mechanical> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [2] Simulia Abaqus. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [3] LS-DYNA. <http://www.lstc.com/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [4] Delaunay B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoi // Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. 1934. V. 6. P. 793–800. [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=4937&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=4937&option_lang=eng)
- [5] Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа. 1994. 544 с.
- [6] Chen K. Matrix Preconditioning Techniques and Applications, Cambridge University Press. 2005. 592 pp. <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/matrix-preconditioning-techniques-and-applications-by-k-chen-cambridge-university-press-2005-592-pp-isbn-0521-83828-2-55/BC30A72326AF23ED5D852AD2D0B145D2>
- [7] Golub G.H., Van Loan Ch.F. Matrix Computations. Fourth Edition. The Johns Hopkins University Press. 2013. 780 pp.
- [8] Babuška I., Szabó B.A., Katz I.N. The p-version of the finite element method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1981. V. 18. P. 515–545.
- [9] Babuška I., Szabó B.A. On the Rates of Convergence of the Finite Element Method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1982. V. 18. P. 323–341,
- [10] Babuška I., Dorr M.R. Error estimates for the combined h- and p- versions of the finite element method // Numer. Math. 1981. V. 7. P. 257–277. DOI: 10.1007/BF01398256
- [11] ONELAB – Open Numerical Engineering LABoratory. <http://onelab.info/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [12] Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 79, No. 11. P. 1309–1331. [http://gmsh.info/doc/preprints/gmsh\\_paper\\_preprint.pdf](http://gmsh.info/doc/preprints/gmsh_paper_preprint.pdf) (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [13] GetDP – A General Environment for the Treatment of Discrete Problems. <http://getdp.info/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [14] FreeCAD. <https://www.freecadweb.org/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [15] Rieg F., Hackenschmidt R., Alber-Laukant B. Finite Element Analysis for Engineers. Basics and Practical Applications with Z88Aurora. Hanser. 2014. 719 pp.
- [16] CalculiX – A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. <http://www.calculix.de/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [17] Lyly M., Ruokolainen J., Järvinen E. ELMER - A finite element solver for multiphysics // CSC-report on scientific computing. 1999–2000. P. 156–159. <https://www.csc.fi/documents/49902/86943/cscreport.pdf> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [18] SALOME – the open source integration platform for numerical simulation. <https://www.salome-platform.org/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [19] Salome Meca and Code Aster. <https://www.code-aster.org/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [20] Schöberl J. NETGEN – An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules // Computing and Visualization in Science. 1997. V. 1, No. 1. P. 41–52. DOI: 10.1007/s007910050004
- [21] Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265. DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [22] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66. DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [23] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10. DOI: 10.21662/mfs2018.3.001
- [24] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750. DOI: 10.17587/mau.20.740-750
- [25] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // Fluids. 2017. V. 2, No. 2. P. 34. DOI: 10.3390/fluids2020034

- [26] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh., Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // Proceedings of 15th international conference on electromechanics and robotics "Zavalishin's reading" (Eds. by V. Shishlakov, A. Ronzhin), Smart Innovation, Systems and Technologies, 2021. Vol. 187, Chapter 43.  
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0\\_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [27] Pantz O. Treatment of contact between finite deformable bodies using FreeFem++. CMAP Ecole Polytechnique. 2011.  
<https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/ff++days/2011/Pantz.pdf> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [28] Houssein H., Garnotel S., Hecht F. Frictionless contact problem for hyperelastic materials with interior point optimizer. 2019. hal-02355429  
<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02355429/document> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [29] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232.  
DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [30] Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications. Wiley. 2004.
- [31] Wittig K. CalculiX USER'S MANUAL- CalculiX GraphiX, Version 2.17.1. 2020.  
[http://www.dhondt.de/cgx\\_2.17.1.pdf](http://www.dhondt.de/cgx_2.17.1.pdf) (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [32] Funke A., Wittig K. An investigation of a small jet engine.  
<http://www.calculix.de/> (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [33] Abdulaziz A., Hedayat M., Mccrory J., Holford K., Elsabbagh A. Parametric Study of Honeycomb Composite Structure Using Open Source Finite Element Software. 2019.
- [34] Vanti F., Agnolucci A., Pinelli L., Arnone A. An integrated numerical procedure for flutter and forced response assessment of turbomachinery blade-rows // Proceedings of 13th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics and Thermodynamics ETC13, April 8-12, 2019; Lausanne, Switzerland.
- [35] Press W.H. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press. 2007. P. 50–52.
- [36] Davis T.A. Algorithm 832: UMFPACK V4.3-an unsymmetric-pattern multifrontal method // ACM Trans. Math. Softw. 2004. V. 30, No. 2. P. 196–199.  
DOI: [10.1145/992200.992206](https://doi.org/10.1145/992200.992206)
- [37] Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1986. V. 7. P. 856–869.  
DOI: [10.1137/0907058](https://doi.org/10.1137/0907058)
- [38] Ashcraft C., Grimes R. SPOOLES: An Object-Oriented Sparse Matrix Library. PPSC. 1999.  
[https://static.aminer.org/pdf/PDF/000/548/747/spooles\\_an\\_object\\_oriented\\_sparse\\_matrix\\_library.pdf](https://static.aminer.org/pdf/PDF/000/548/747/spooles_an_object_oriented_sparse_matrix_library.pdf) (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [39] Schwarz H.R. FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente. Teubner. 1981.  
DOI: [10.1002/zamm.19830631220](https://doi.org/10.1002/zamm.19830631220)
- [40] Ландау Л., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука. 1987. 248 с.
- [41] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1977. 735 с.
- [42] FEM CalculiX Cantilever 3D.  
[https://wiki.freecadweb.org/FEM\\_Tutorial\\_Python/en](https://wiki.freecadweb.org/FEM_Tutorial_Python/en) (дата обращения: 22.11.2020 г.)
- [43] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. McGraw-Hill Book Company. 1989.
- [44] FreeFEM Documentation.  
[https://doc.freefem.org/\\_static/pdf/FreeFEM-doc-v3.pdf](https://doc.freefem.org/_static/pdf/FreeFEM-doc-v3.pdf) (дата обращения: 22.11.2020 г.)



## Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems

Nasibullayev I.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The paper discusses the stages of computer numerical simulation of engineering problems and ways to improve the accuracy of simulation; provides a brief overview of free software for simulation elasticity problems by the finite element method, as well as trends in the development of free CAD and CAE software. For a successful engineering study, it is necessary to choose a convenient tool that takes into account all the features of the problem being solved. Based on the solution of a test static problem of linear elasticity, two approaches to engineering modeling were demonstrated. The first approach requires programming skills - the full modeling cycle was written in the programming language of the *FreeFem++* software. Additionally, the method mesh generating in the *Gmsh* program with subsequent use in the *FreeFem++* program is shown. In the second approach, the full cycle of modeling is carried out through the interface of the *FreeCAD* program with the built-in *CalculiX* solver, which does not require programming skills. A way to parameterize the task using the *Python* interpreter built into *FreeCAD* is also proposed. The simulation results obtained using both approaches are compared for an object to which an external action is applied, determined by the Dirichlet or Neumann boundary conditions, and two types of object fastening are analyzed: rigid embedding and limitation by a plane with zero friction. The analysis of the use of computing resources by various direct and iterative methods is carried out. Within the framework of the considered test problem of static linear elasticity, the most optimal method in *FreeFem++* is the iterative method of conjugate gradients CG both in terms of computation time and in terms of the memory used. The highest speed of calculations is provided by the Cholesky iterative method with conditioning by the incomplete Cholesky expansion in the *CalculiX* program.

**Keywords:** static elasticity, free engineering software, FreeFem++, Gmsh, FreeCAD, CalculiX, direct and iterative solution methods of the system of linear equations

### References

- [1] Ansys Mechanical – finite element analysis (FEA) software. <https://www.ansys.com/products/structures/ansys-mechanical> (accessed: 22.11.2020).
- [2] Simulia Abaqus. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/> (accessed: 22.11.2020).
- [3] LS-DYNA. <http://www.lstc.com/> (accessed: 22.11.2020).
- [4] Delaunay B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoi // Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. 1934. V. 6. P. 793–800. [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=4937&option\\_lang=eng](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=4937&option_lang=eng)
- [5] Amosov A.A., Dubinsky Yu.A., Kopchenova N.V. [Computational methods for engineers] Vychislitel'nyye metody dlya inzhenerov. M: Vysshaya shkola. 1994. P. 544 (in Russian).
- [6] Chen K. Matrix Preconditioning Techniques and Applications, Cambridge University Press. 2005. 592 pp. <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/matrix-preconditioning-techniques-and-applications-by-k-chen-cambridge-university-press-2005-592-pp-isbn-0521-83828-2-55/BC30A72326AF23ED5D852AD2D0B145D2>
- [7] Golub G.H., Van Loan Ch.F. Matrix Computations. Fourth Edition. The Johns Hopkins University Press. 2013. 780 pp.
- [8] Babuška I., Szabó B.A., Katz I.N.. The p-version of the finite element method // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1981. V. 18. P. 515–545.
- [9] Babuška I., Szabó B.A. On the Rates of Convergence of the Finite Element Method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1982. V. 18. P. 323–341.
- [10] Babuška I., Dorr M.R. Error estimates for the combined h- and p- versions of the finite element method // Numer. Math. 1981. V. 7. P. 257–277. DOI: 10.1007/BF01398256

- [11] ONELAB – Open Numerical Engineering LABORatory. <http://onelab.info/> (accessed: 22.11.2020).
- [12] Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2009. Vol. 79, No. 11. P. 1309–1331. [http://gmsh.info/doc/preprints/gmsh\\_paper\\_preprint.pdf](http://gmsh.info/doc/preprints/gmsh_paper_preprint.pdf) (accessed: 22.11.2020).
- [13] GetDP – A General Environment for the Treatment of Discrete Problems. <http://getdp.info/> (accessed: 22.11.2020).
- [14] FreeCAD. <https://www.freecadweb.org/> (accessed: 22.11.2020).
- [15] Rieg F., Hackenschmidt R., Alber-Laukant B.. Finite Element Analysis for Engineers. Basics and Practical Applications with Z88Aurora. Hanser. 2014. 719 pp.
- [16] CalculiX – A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. <http://www.calculix.de/> (accessed: 22.11.2020).
- [17] Lyly M., Ruokolainen J., Järvinen E. ELMER - A finite element solver for multiphysics // CSC-report on scientific computing. 1999–2000. P. 156–159. <https://www.csc.fi/documents/49902/86943/cscreport.pdf> (accessed: 22.11.2020).
- [18] SALOME – the open source integration platform for numerical simulation. <https://www.salome-platform.org/> (accessed: 22.11.2020).
- [19] Salome Meca and Code Aster. <https://www.code-aster.org/> (accessed: 22.11.2020).
- [20] Schöberl J. NETGEN - An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules // Computing and Visualization in Science. 1997. V. 1, No. 1. P. 41–52  
DOI: 10.1007/s007910050004
- [21] Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.  
DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [22] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through hydraulic resistance with dynamically changing geometry] *Techeniye zhidkosti cherez gidrosoprotivleniye s dinamicheskimi izmenyayemoy geometriyey. Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]* [ces, Ufimskiy Nauchnyy Centr RAN]. 2017. V. 12, N. 1. P. 59–66 (in Russian).  
DOI: 10.21662/uim2017.1.009
- [23] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Study of fluidflow through a channel deformed by piezoelement] *Izucheniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom kanal. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]*. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2018.3.001
- [24] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems] *Modelirovaniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom elastichnyy mikrokanal sistemy okhlazhdeniye mikrozhzhvata. Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian).  
DOI: doi:10.17587/mau.20.740-750
- [25] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // *Fluids*. 2017. V. 2, No. 2. P. 34.  
DOI: 10.3390/fluids2020034
- [26] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh., Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // *Proceedings of 15th international conference on electromechanics and robotics "Zavalishin's reading"* (Eds. by V. Shishlakov, A. Ronzhin), Smart Innovation, Systems and Technologies, 2021. Vol. 187, Chapter 43.  
DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0\_43
- [27] Pantz O. Treatment of contact between finite deformable bodies using FreeFem++. CMAP Ecole Polytechnique. 2011 <https://www.ljll.math.upmc.fr/hecht/ftp/ff++days/2011/Pantz.pdf> (accessed: 22.11.2020).
- [28] Houssein H., Garnot S., Hecht F. Frictionless contact problem for hyperelastic materials with interior point optimizer. 2019. hal-02355429 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02355429/document> (accessed: 22.11.2020).
- [29] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., [Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel] *Dvumernaya dinamicheskaya model' vzaimodeystviya zhidkosti i p'yezoelektricheskogo privoda s poperechnym izgibom v ploskom kanale. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]*. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 220–232 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2019.4.029
- [30] Dhondt G. The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications. Wiley. 2004.
- [31] Wittig K. CalculiX USER'S MANUAL – CalculiX GraphiX, Version 2.17.1. 2020. [http://www.dhondt.de/cg\\_x\\_2.17.1.pdf](http://www.dhondt.de/cg_x_2.17.1.pdf) (accessed: 22.11.2020).
- [32] Funke A., Wittig K. An investigation of a small jet engine. <http://www.calculix.de/> (accessed: 22.11.2020).
- [33] Abdulaziz A., Hedaya M., Mccrory J., Holford K., Elsabbagh A. Parametric Study of Honeycomb Composite Structure Using Open Source Finite Element Software. 2019.
- [34] Vanti F., Agnolucci A., Pinelli L., Arnone A. An integrated numerical procedure for flutter and forced response assessment of turbomachinery blade-rows // *Proceedings of 13th European Conference on Turbomachinery Fluid dynamics and Thermodynamics ETC13*, April 8–12, 2019; Lausanne, Switzerland.
- [35] Press W.H. Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press. 2007. P. 50–52.
- [36] Davis T.A. Algorithm 852: UMFPACK V4.3-an unsymmetric-pattern multifrontal method // *ACM Trans. Math. Softw.* 2004. V. 30, No. 2. P. 196–199.  
DOI: 10.1145/992200.992206
- [37] Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1986. V. 7. P. 856–869.  
DOI: 10.1137/0907058
- [38] Ashcraft C., Grimes R. SPOOLES: An Object-Oriented Sparse Matrix Library. PPSC. 1999. [https://static.aminer.org/pdf/PDF/000/548/747/spooles\\_an\\_object\\_oriented\\_sparse\\_matrix\\_library.pdf](https://static.aminer.org/pdf/PDF/000/548/747/spooles_an_object_oriented_sparse_matrix_library.pdf) (accessed: 22.11.2020).
- [39] Schwarz H.R. FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente. Teubner. 1981.  
DOI: 10.1002/zamm.19830631220
- [40] Landau L.D., Lifshitz E.M. [Theoretical physics. V. 7. Theory of Elasticity] *Teoreticheskaya fizika. T. 7. Teoriya uprugosti*. M.: Nauka. 2003. P. 259. (in Russian).
- [41] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. [Equations of mathematical physics] *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. M.: Nauka. 1977. P. 735 (in Russian).
- [42] FEM CalculiX Cantilever 3D. [https://wiki.freecadweb.org/FEM\\_Tutorial\\_Python/en](https://wiki.freecadweb.org/FEM_Tutorial_Python/en) (accessed: 22.11.2020).
- [43] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. McGraw-Hill Book Company. 1989.
- [44] FreeFEM Documentation. [https://doc.freefem.org/\\_static/pdf/FreeFEM-doc-v3.pdf](https://doc.freefem.org/_static/pdf/FreeFEM-doc-v3.pdf) (accessed: 22.11.2020).



## Динамика дислокаций в доменной структуре нематического жидкого кристалла<sup>1</sup>

Делев В.А.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Уфа

Исследуются динамика и взаимодействие классических дислокаций в доменной структуре закрученного на  $\pi/2$  нематического жидкого кристалла. Особенностью закрученных нематиков является то, что гидродинамические потоки в доменах Вильямса, наряду с тангенциальной компонентой скорости, имеют и аксиальную составляющую, направление которой противоположно в соседних доменах. Дислокации могут двигаться как перпендикулярно (*glide*) доменам Вильямса, так и вдоль (*climb*) них. Установлено, что при столкновении дислокаций с противоположными топологическими зарядами  $S = \pm 1$  при заданном напряжении их скорость увеличивается на расстояниях, порядка пространственного периода доменной решетки. Показано, что динамика и взаимодействие дислокаций с топологическими зарядами  $S = \pm 1$  качественно хорошо описываются возмущенным уравнением синус-Гордона.

**Ключевые слова:** нематический жидкий кристалл, доменная структура, дислокация, кинк, уравнение синус-Гордона

### 1. Введение

Образование и разрушение надмолекулярного порядка в неравновесных системах, как правило, сопровождается появлением дефектов [1]. Поэтому изучение свойств дефектов при структурообразовании и возникновении турбулентности является одной из важных задач физики конденсированного состояния. С другой стороны, возможность управления не только количеством дефектов, но и их взаимодействием при изменении внешнего воздействия позволяет использовать экспериментальные данные для верификации, например,  $(1+1)$ -мерных моделей. В этом отношении дефекты, возникающие в доменных структурах нематических жидких кристаллов (НЖК), являются уникальными объектами для экспериментального изучения их динамических характеристик. Важную роль при этом играет исходная ориентация поля директора  $\mathbf{n}$ , характеризующая преимущественное направление молекул в пространстве, так как имен-

но она задает симметрию доменных структур и их дефектов [2–4]. Таким образом, динамика дефектов в доменных структурах существенным образом зависит не только от амплитуды приложенного напряжения, но и от исходной конфигурации поля директора  $\mathbf{n}$ .

Изучению дефектов в доменных структурах НЖК посвящен ряд работ [5–8]. Результаты этих работ свидетельствуют о важной роли дефектов при усложнении пространственно-временной динамики доменных структур с увеличением приложенного напряжения. В частности, установлено, что наиболее общими механизмами при формировании двумерных структур являются процессы рождения и аннигиляции дислокаций.

Типичными элементарными дефектами электроконвективных структур в НЖК являются дислокации с топологическими зарядами  $S = \pm 1$ . Дефект с топологическим зарядом  $S = \pm 1$  соответствует скачку фазы на  $\pm 2\pi$  в структуре доменов Вильямса, т.е. его сингулярность определяется лишним (или недостающим) пространственным периодом при обходе замкнутого контура вокруг его ядра [8]. Поведение дислокаций в приближе-

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках госзадания № АААА-А19-119022290052-9.

нии слабой надкритичности хорошо описывается уравнением Гинзбурга–Ландау [6–8].

Другой подход для описания динамики дислокаций в жидких кристаллах [9, 10] основан на глубокой аналогии свойств и поведения дефектов с моделью Френкеля–Конторовой (ФК) [11, 12]. Если в стандартной модели пренебречь эффектами дискретности, то получится хорошо известное уравнение синус-Гордона (УСГ). Данное уравнение было одним из первых обнаруженных уравнений с многосолитонным решением, а первое приложение УСГ нашло в физике для построения упрощенных моделей дислокаций.

Несмотря на большое количество теоретических работ, прямые экспериментальные исследования приложений модели ФК для кристаллов все еще достаточно редки (см. ссылки в [12]). Тем не менее, модель ФК с успехом использовалась, в частности, в теории сверхпроводников для описания эффекта Джозефсона [15, 16], динамики доменных границ в ферроэлектриках [17] и ферромагнетиках [18], а также структуры адсорбированных слоев на поверхности кристаллов [19, 20]. О возможности наблюдения резонансной динамики кинков УСГ в системе с одиночной точечной примесью с учетом генерации локализованных волн сообщается в [21]. С этой точки зрения перспективным объектом, где топологические дефекты в одномерной системе могут быть легко созданы, а их свойства изучены, являются также НЖК. Так, в [22] впервые сделана попытка применения модели ФК для описания динамического поведения дефектов в закрученных на  $\pi/2$  нематиках. В работах [23, 24] для описания взаимодействия дислокаций в линейном протяженном дефекте, возникающем в закрученном НЖК, использовалось невозмущенное УСГ.

В настоящей работе исследуются динамика и взаимодействие краевых дислокаций с противоположными топологическими зарядами  $S = \pm 1$  в закрученных НЖК. Дислокации движутся перпендикулярно доменам Вильямса и при взаимодействии аннигилируют. Показано, что такое столкновение дислокаций качественно хорошо описываются возмущенным УСГ.

## 2. Методика эксперимента

В качестве НЖК использовался 4-n-метоксибензилиден-n-бутиланилин (МББА), который помещался в ЖК-ячейку между двумя стеклянными подложками с проводящим покрытием из  $SnO_2$ . Поверхность подложек с электродами покрывалась слоем ориентанта полиимида AL1254 (JSR Corp. Japan), который затем натирался в одном направлении для создания однородной планарной ориен-

тации директора  $\mathbf{n}$ . Толщина ЖК-ячейки размером  $16 \times 12$  мм задавалась майларовыми прокладками  $d \simeq 20$  мкм. После заполнения ячейки нематиком и формирования однородной планарной ориентации верхняя подложка медленно поворачивалась относительно нижней по часовой стрелке на угол  $\pi/2$  так, что во всем слое НЖК возникла однородно закрученная ориентация директора  $\mathbf{n}$ . К ЖК-слою прикладывалось переменное напряжение  $U$  с частотой  $f_U = 30$  Гц. Пороговое напряжение возникновения доменов Вильямса составляло  $U_c = 5.6$  В. При этом их ось ориентирована перпендикулярно директору  $\mathbf{n}$  в середине слоя НЖК и составляет углы  $-45^\circ$  и  $45^\circ$  соответственно с ориентацией директора на верхней и нижней подложках. Направления гидродинамических потоков в доменах определялись путем анализа движений пробных частиц диаметром  $2 \div 3$  мкм, добавленных в НЖК. Доменные структуры и их дефекты наблюдались в поляризационный микроскоп Axiolab (Zeiss, Germany), а их изображения регистрировались видеокамерой VX44 (PCO Inc., Germany) с разрешением  $720 \times 576$  пикселей и оцифровывались внешней платой Pinnacle 700-USB (USA).

## 3. Результаты и обсуждение

Процесс взаимодействия двух дислокаций с противоположными топологическими зарядами  $S = \pm 1$  представлен на рис. 1. Заметим, что в модельных представлениях дислокация с  $S = +1$  соответствует кинку, а с  $S = -1$  — антикинку.

При столкновении кинка и антикинка в невозмущенном УСГ, последние проходят друг через друга без изменения формы, скорости и энергии, т.е. не изменяют своих свойств после взаимодействия, кроме смещения фазы [12]. В нашем случае при столкновении дислокаций с противоположными топологическими зарядами последние аннигилируют, поэтому для описания наблюдаемого процесса используем модель синус-Гордона с диссипативным членом  $-\gamma u_t$  [13, 14].

Получение невозмущенного УСГ, описывающего динамику дислокаций, показано в работе [22]. Поскольку размер элементарной ячейки доменной структуры в закрученном на  $\pi/2$  НЖК определяется как  $T = 2\lambda$  (где  $\lambda$  — ширина одного линейного домена), что связано с антипараллельностью аксиальных компонент скорости потока анизотропной жидкости в соседних доменах, то в качестве узла доменной решетки рассматривается центр «двойного домена» вдоль направления  $x$ .

УСГ, полученное на основе гамильтониана модели ФК [22] после перехода к

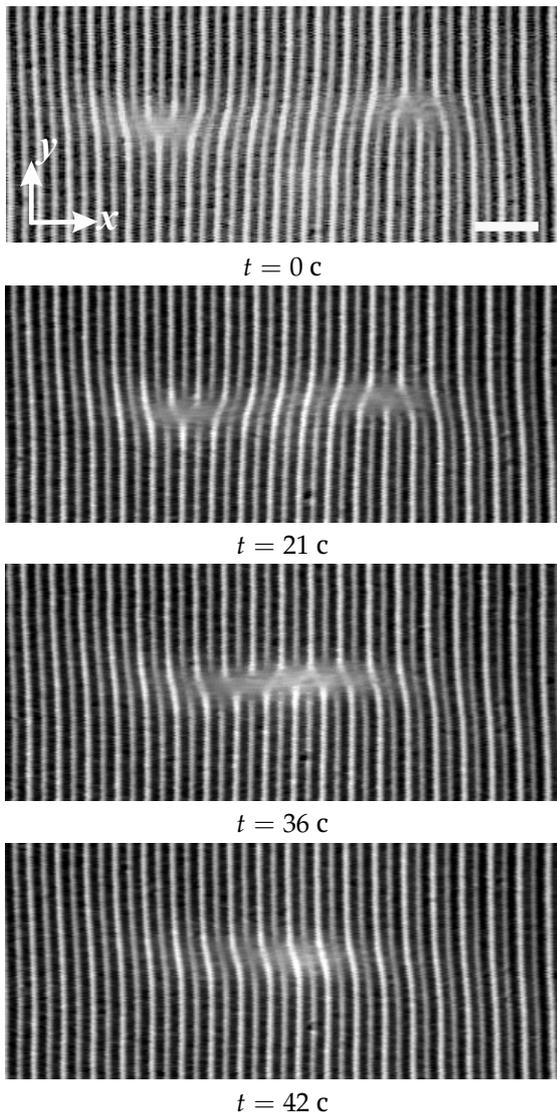


Рис. 1. Процесс столкновения двух дислокаций типа glide с топологическими зарядами  $S = -1$  и  $S = +1$  при  $U = 6$  В и  $f = 30$  Гц. Масштаб – 100 мкм

континуальному приближению:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + \sin \eta = 0, \quad (1)$$

где  $\eta = \pi u / \lambda$  – нормированная функция смещения двойного домена от его равновесного положения вдоль направления  $x$ ;  $\xi = x / (2\lambda\sqrt{k})$  – нормированная координата;  $k = (\lambda/\pi)^2(k'/V_0')$ ;  $k'$  – константа взаимодействия соседних доменов;  $V_0'$  – энергия, приходящаяся на единицу длины двойного домена;  $\tau = (\pi/\lambda)\sqrt{V_0'/m'}t$  – нормированное время;  $m' = m/l$  – удельная масса двойного домена;  $l$  –

длина двойного домена.

Как известно, УСГ (1) имеет ряд аналитических решений [25]. Одно из них, называемое кинком (антикинком), представляет дислокацию в модели ФК:

$$\eta = 4 \arctan \left[ \exp \left( \sigma \frac{\xi - \xi_0 + v(\tau - \tau_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right],$$

где  $\sigma = \pm 1$  – топологический заряд кинка;  $0 \leq v \leq 1$  – скорость движения кинка; величина  $\xi_0$  – характеризует положение кинка в момент времени  $\tau = \tau_0$ .

Рассмотрим движение кинков с противоположными топологическими зарядами навстречу друг к другу. В нашем случае слева имеем антикинк, а справа – кинк. В численных расчетах использовалось экспериментально полученное значение безразмерной скорости движения дислокаций  $v = 0.3$ , представляющее собой отношение абсолютной скорости движения дислокаций, отдаленных друг от друга на достаточное расстояние к скорости движения вблизи точки их столкновения (порядка пространственного периода доменной решетки).

Численная иллюстрация столкновения антикинка и кинка показана на рис. 2.

Таким образом в данной работе показано, что столкновение дислокаций с противоположными топологическими зарядами в электроконвективной структуре НЖК хорошо описывается двумя независимыми решениями возмущенного УСГ в виде кинков с  $\sigma = -1$  и  $\sigma = +1$ , движущихся навстречу друг другу.

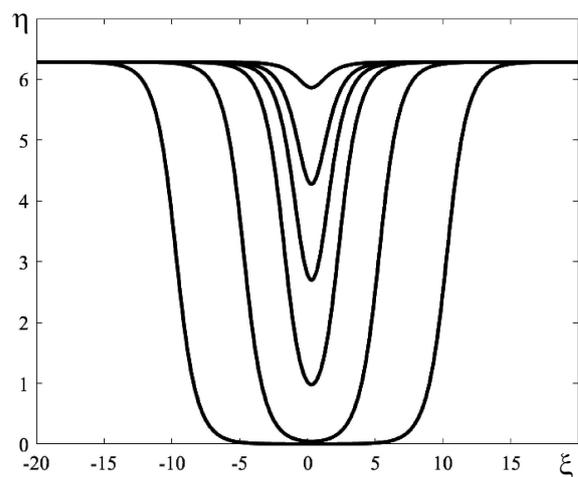


Рис. 2. Теоретические зависимости столкновения кинков с топологическими зарядами  $\sigma = -1$  и  $\sigma = +1$  в различные моменты времени при наличии диссипативного возмущения  $-\gamma u_t$ ,  $\gamma = 0.25$

## 4. Заключение

В настоящей работе экспериментально и теоретически изучены динамика и взаимодействие двух дислокаций с противоположными топологическими зарядами  $S = \pm 1$ , возникающих в доменной структуре закрученного на  $\pi/2$  НЖК. Показана принципиальная возможность описания их динамики и взаимодействия в рамках возмущенного УСГ.

Следует отметить, что дефекты доменной решетки, возникающие в НЖК во внешних электрических полях, наряду с дислокациями в кристаллах, доменными границами в сегнетоэлектриках и магнетиках, являются новым примером реалистических нелинейных физических систем, для которых применение нелинейных моделей и учет локализованных возмущений решетки представляется вполне успешным [22–24]. Важным преимуществом системы электроконвекции в НЖК, по сравнению с другими, является относительная простота управления структурой и симметрией доменной решетки посредством изменения частоты и величины внешнего электрического поля, приложенного к ЖК-слою (толщиной  $d \sim 10 - 100$  мкм). Использование прозрачных электродов в ЖК-ячейке позволяет легко визуализировать эту систему конвективных доменов и возникающие в ней дефекты. Кроме того, имеются апробированные способы создания неоднородных слоев НЖК (закрученных и/или гомеопланарных), что увеличивает разнообразие типов и симметрий наблюдаемых доменных структур, а также их дефектов. Всё это делает данную систему электроконвекции в НЖК перспективным объектом приложения классической модели ФК и ее обобщений.

В экспериментальных исследованиях использовалось оборудование Центра коллективного пользования «Спектр» ИФМК УФИЦ РАН и Регионального центра коллективного пользования «Агидель».

## Список литературы

- [1] Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // *Reviews of Modern Physics*. 1993. V. 65. P. 851–1112.  
DOI: [10.1103/RevModPhys.65.851](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.65.851)
- [2] Пикин С.А. Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [3] De Gennes P.G. and Prost J. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford: Clarendon, 1994. 596 p.
- [4] Buka A. and Kramer L. (editors). *Pattern Formation in Liquid Crystals*. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
- [5] Kai S., Chizumi N., and Kohno M. Pattern formation, defect motions and onset of defect chaos in the electrohydrodynamic instability of nematic liquid crystals // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1989. V. 58. Pp. 3541–3554.  
DOI: [10.1143/JPSJ.58.3541](https://doi.org/10.1143/JPSJ.58.3541)
- [6] Rasenat S., Steinberg V., and Rehberg I. Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection // *Physical Review A*. 1990. V. 42, No. 10. Pp. 5998–6008.  
DOI: [10.1103/PhysRevA.42.5998](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.42.5998)
- [7] Bodenschatz E., Weber A., and Kramer L. Interaction and dynamics of defects in convective roll patterns of anisotropic fluids // *Journal of Statistical Physics* 1991. V. 64, No. 5. Pp. 1007–1015.  
DOI: [10.1007/BF01048810](https://doi.org/10.1007/BF01048810)
- [8] Joets A. and Ribotta R. Localized bifurcations and defect instabilities in the convection of a nematic liquid crystal // *Journal of Statistical Physics* 1991. V. 64, No. 5/6. Pp. 981–1005.  
DOI: [10.1007/BF01048809](https://doi.org/10.1007/BF01048809)
- [9] Lowe M. and Gollub J.P. Solitons and the commensurate-incommensurate transition in a convecting nematic fluid // *Physical Review A*. 1985. V. 31, No. 6. Pp. 3893–3897.  
DOI: [10.1103/PhysRevA.31.3893](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3893)
- [10] Lam L. and Prost J. (editors). *Solitons in Liquid Crystals*. N.Y.: Springer Science & Business Media, 1992. 335 p.
- [11] Френкель Я.И., Конторова Т.А. К теории пластической деформации // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 1938. Ч. I. Т. 8, Вып. 1. С. 89–95.
- [12] Браун О.М., Кившарь Ю.С. Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения. М.: Физматлит, 2008. 536 с.
- [13] Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61, No. 4. Pp. 763–915.  
DOI: [10.1103/RevModPhys.61.763](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.61.763)
- [14] Malomed B.A. Inelastic interactions of solitons in nearly integrable systems. II // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. V. 15, No 3. Pp. 385–401.  
DOI: [10.1016/S0167-2789\(85\)80006-3](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(85)80006-3)
- [15] Ustinov A.V., Cirillo M., Malomed B.A. Fluxon dynamics in one-dimensional Josephson-junction arrays // *Physical Review B*. 1993. V. 47, No. 13. Pp. 8357–8360.  
DOI: [10.1103/PhysRevB.47.8357](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.47.8357)
- [16] Van der Zant H.S.J., Orlando T.P., Watanabe S., Strogatz S.H. Kink propagation in a highly discrete system: observation of phase locking to linear waves // *Physical Review Letters*. 1995. V. 74. Pp. 174–177.  
DOI: [10.1103/PhysRevLett.74.174](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.174)
- [17] Cowley R.A., Axe J.D., Iizumi M. Neutron scattering from the ferroelectric fluctuations and domain walls of lead germanate // *Physical Review Letters*. 1976. V. 36. Pp. 806–809.  
DOI: [10.1103/PhysRevLett.36.806](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.36.806)
- [18] A.R. Bishop, W.F. Lewis. A theory of intrinsic coercivity in narrow magnetic domain wall materials // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1979. V. 12, No. 18. Pp. 3811–3825.  
DOI: [10.1088/0022-3719/12/18/027](https://doi.org/10.1088/0022-3719/12/18/027)
- [19] Люксютов И.Ф., Наумовец А.Г., Покровский В.Л. Двумерные кристаллы. Киев: Наукова Думка, 1988. 218 с.
- [20] De la Figuera J., Pohl K., de la Fuente R.O., Schmid A.K., Bartelt N.C., Carter C.B., and Hwang R.Q. Direct observation of misfit dislocation glide on surfaces // *Physical Review Letters*. 2001. V. 86, No. 17. Pp. 3819–3822.  
DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.3819](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3819)
- [21] Екомасов Е.Г., Гумеров А.М., Кудрявцев Р.В. О возможности наблюдения резонансного взаимодействия кинков уравнения синус-Гордона с локализованными волнами в реальных физических системах // *Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. 2015. Т. 101, Вып. 12. С. 935–939.  
eLIBRARY ID: [23864373](https://elibrary.ru/23864373)

- [22] Чувывров А.Н., Скалдин О.А., Делев В.А., Лебедев Ю.А., Батыршин Э.С. Структура и динамика дислокаций Френкеля-Конторовой при электроконвекции в жидких кристаллах // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2006. Т. 130, № 6. С. 1072–1081.  
[eLIBRARY ID: 9430706](#)
- [23] Делев В.А., Скалдин О.А., Батыршин Э.С., Назаров В.Н., Екомасов Е.Г. Кинк-антикинк взаимодействие в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2019. Т. 109, Вып. 2. С. 84–88.  
[DOI: 10.1134/S0370274X19020036](#)
- [24] Делев В.А., Назаров В.Н., Скалдин О.А., Батыршин Э.С., Екомасов Е.Г. Сложная динамика каскада кинк-антикинковых взаимодействий в линейном дефекте электроконвективной структуры нематика // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2019. Т. 110, 607–613 (2019).  
[DOI: 10.1134/S0370274X19210070](#)
- [25] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.



## Dynamics of dislocations in the domain structure of the nematic liquid crystal

Delev V.A.

Institute of Molecule and Crystal Physics UFRC RAS, Ufa

Dynamics and interaction of classical dislocations in the domain structure of  $\pi/2$  nematic liquid crystal is studied. A feature of twisted nematics is that hydrodynamic flows in Williams domains, together with the tangential component of velocity, also have an axial component, the direction of which is opposite in neighboring domains. Dislocations can move both perpendicular (*glide*) to Williams domains, and along (*climb*) them. It was found that when dislocations collide with opposite topological charges  $S = \pm 1$  at given voltage, their speed increases. It has been shown that dynamics and interaction of dislocations with topological charges  $S = \pm 1$  are qualitatively well described by the perturbed sine-Gordon equation.

**Keywords:** nematic liquid crystal, domain structure, dislocation, kink, sine-Gordon equation

### References

- [1] Cross M.C., Hohenberg P.C. Pattern formation outside of equilibrium // *Reviews of Modern Physics*. 1993. V. 65. P. 851–1112. DOI: 10.1103/RevModPhys.65.851
- [2] Pikin S.A. Strukturnye prevrashcheniya v zhidkikh kristallah. M.: Nauka, 1981. 336 s. (In Russian)
- [3] De Gennes P.G. and Prost J. *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford: Clarendon, 1994. 596 p.
- [4] Buka A. and Kramer L. (editors). *Pattern Formation in Liquid Crystals*. N.Y.: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
- [5] Kai S., Chizumi N., and Kohno M. Pattern formation, defect motions and onset of defect chaos in the electrohydrodynamic instability of nematic liquid crystals // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1989. V. 58. Pp. 3541–3554. DOI: 10.1143/JPSJ.58.3541
- [6] Rasenat S., Steinberg V., and Rehberg I. Experimental studies of defect dynamics and interaction in electrohydrodynamic convection // *Physical Review A*. 1990. V. 42, No. 10. Pp. 5998–6008. DOI: 10.1103/PhysRevA.42.5998
- [7] Bodenschatz E., Weber A., and Kramer L. Interaction and dynamics of defects in convective roll patterns of anisotropic fluids // *Journal of Statistical Physics* 1991. V. 64, No. 5. Pp. 1007–1015. DOI: 10.1007/BF01048810
- [8] Joets A. and Ribotta R. Localized bifurcations and defect instabilities in the convection of a nematic liquid crystal // *Journal of Statistical Physics* 1991. V. 64, No. 5/6. Pp. 981–1005. DOI: 10.1007/BF01048809
- [9] Lowe M. and Gollub J.P. Solitons and the commensurate-incommensurate transition in a convecting nematic fluid // *Physical Review A*. 1985. V. 31, No. 6. Pp. 3893–3897. DOI: 10.1103/PhysRevA.31.3893
- [10] Lam L. and Prost J. (editors). *Solitons in Liquid Crystals*. N.Y.: Springer Science & Business Media, 1992. 335 p.
- [11] Frenkel' YA.I., Kontorova T.A. K teorii plasticheskoy deformatsii // *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*. 1938. CH. I. T. 8., Vyp. 1. S. 89–95. (In Russian)
- [12] Braun O.M., Kivshar' YU.S. Model' Frenkelya-Kontorovoj. Konceptii, metody, prilozheniya. M.: Fizmatlit, 2008. 536 s. (In Russian)
- [13] Kivshar Yu.S., Malomed B.A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61, No. 4. Pp. 763–915. DOI: 10.1103/RevModPhys.61.763
- [14] Malomed B.A. Inelastic interactions of solitons in nearly integrable systems. II // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. V. 15, No 3. Pp. 385–401. DOI: 10.1016/S0167-2789(85)80006-3
- [15] Ustinov A.V., Cirillo M., Malomed B.A. Fluxon dynamics in one-dimensional Josephson-junction arrays // *Physical Review B*. 1993. V. 47, No. 13. Pp. 8357–8360. DOI: 10.1103/PhysRevB.47.8357
- [16] Van der Zant H.S.J., Orlando T.P., Watanabe S., Strogatz S.H. Kink propagation in a highly discrete system: observation of phase locking to linear waves // *Physical Review Letters*. 1995. V. 74. Pp. 174–177. DOI: 10.1103/PhysRevLett.74.174
- [17] Cowley R.A., Axe J.D., Iizumi M. Neutron scattering from the ferroelectric fluctuations and domain walls of lead germanate // *Physical Review Letters*. 1976. V. 36. Pp. 806–809. DOI: 10.1103/PhysRevLett.36.806

- [18] A.R. Bishop, W.F. Lewis. A theory of intrinsic coercivity in narrow magnetic domain wall materials // *Journal of Physics C: Solid State Physics*. 1979. V. 12, No. 18. Pp. 3811–3825.  
DOI: [10.1088/0022-3719/12/18/027](https://doi.org/10.1088/0022-3719/12/18/027)
- [19] Lyuksyutov I.F., Naumov A.G., Pokrovskij V.L. Dvumernye kristally. Kiev: Naukova Dumka, 1988. 218 s. (In Russian)
- [20] De la Figuera J., Pohl K., de la Fuente R.O., Schmid A.K., Bartelt N.C., Carter C.B., and Hwang R.Q. Direct observation of misfit dislocation glide on surfaces // *Physical Review Letters*. 2001. V. 86, No. 17. Pp. 3819–3822.  
DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.3819](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3819)
- [21] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavcev R.V. O Vozmozhnosti nablyudeniya rezonansnogo vzaimodejstviya kinkov uravneniya sinus-Gordona s lokalizovannymi volnami v real'nyh fizicheskikh sistemah // *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*. 2015. T. 101, Vyp. 12. S. 935–939. (In Russian)  
eLIBRARY ID: [23864373](https://elibrary.ru/23864373)
- [22] CHuvyrov A.N., Skaldin O.A., Delev V.A., Lebedev YU.A., Batyrshin E.S. Struktura i dinamika dislokacij Frenkelya-Kontorovoj pri elektrokonvekcii v zhidkih kristallah // *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*. 2006. T. 130, № 6. S. 1072–1081. (In Russian)  
eLIBRARY ID: [9430706](https://elibrary.ru/9430706)
- [23] Delev V.A., Skaldin O.A., Batyrshin E.S., Nazarov V.N., Ekomasov E.G. Kink-antikink vzaimodejstvie v linejnom defekte elektrokonvektivnoj struktury nematika // *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*. 2019. T. 109, Vyp. 2. S. 84–88. (In Russian)  
DOI: [10.1134/S0370274X19020036](https://doi.org/10.1134/S0370274X19020036)
- [24] Delev V.A., Nazarov V.N., Skaldin O.A., Batyrshin E.S., Ekomasov E.G. Slozhnaya dinamika kaskada kink-antikinkovyh vzaimodejstvij v linejnom defekte elektrokonvektivnoj struktury nematika // *Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*. 2019. T. 110, 607–613. (In Russian)  
DOI: [10.1134/S0370274X19210070](https://doi.org/10.1134/S0370274X19210070)
- [25] Dodd R., Ejlbek Dzh., Gibbon Dzh., Morris H. Solitony i nelinejnye volnovye uravneniya. M.: Mir, 1988. 694 s. (In Russian)



## Математическая модель вытеснения нефти водой в плоском канале<sup>1</sup>

Низамова А.Д., Валиев А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Неустойчивое вытеснение несмешивающихся жидкостей в плоском канале является актуальным исследованием как в теоретических, так и в практических приложениях. В настоящей работе рассмотрен плоский канал, заполненный несжимаемой жидкостью. С течением времени в канал нагнетается другая жидкость. Жидкости являются не смешивающимися. В работе строится математическая модель процесса вытеснения нефти водой в плоском канале, позволяющая провести дальнейшие численные исследования и выполнить сравнение результатов с полученными экспериментальными данными на примере ячейки Хеле–Шоу. Математическая модель для многофазного, многокомпонентного течения состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Современные методы моделирования динамики «вязких пальцев» основаны главным образом на численных методах решения систем дифференциальных уравнений, использующих в качестве параметров градиент давления, вязкость и капиллярные силы. Влияние этих параметров должно быть определено экспериментально. Для решения задачи применяется квазигидродинамический подход, основанный на добавлении некоторого малого параметра и позволяющий описать устойчивые схемы с центральными разностями. Сложность решения таких задач заключается в размерах рассматриваемых моделей, которые на практике имеют широкий диапазон применения от микро-масштабных до порядков одного сантиметра. Комплексное исследование позволит оценить и проанализировать весь процесс в целом, а также установить параметры течения для повышения эффективности вытеснения и увеличения нефтеотдачи, поскольку в численном моделировании процесса проще создать множество независимых экспериментов с одинаковыми начальными данными в отличие от экспериментального исследования.

**Ключевые слова:** несмешивающиеся жидкости, неустойчивость, вытеснение, микромодель, ячейка Хеле–Шоу

### 1. Введение

Неустойчивое вытеснение является актуальной задачей нефтегазовой промышленности и проявляется при вытеснении более вязкого флюида менее вязким. Например, вытеснение нефти в пласте водой и различными агентами, вязкость которых значительно меньше вязкости нефти, приводящее к заводнённости пласта со временем.

Основы современного состояния исследований в теории фильтрации несмешивающихся

жидкостей были заложены еще в работах Лейбензона Л.С. и Маскета М. [1, 2]. В данных работах были впервые решены плоско-параллельная и плоско-радиальная задачи поршневого вытеснения вязкой жидкости из пористой среды. Задачи такого рода получили свое дальнейшее развитие в работах Щелкачева В.Н., Чарного И.А., Полубариновой-Кочиной П.Я., Пирвердяна А.М., Баренблата Г.И., Николаевского В.Н. и других.

Моделью вытеснения несмешивающихся жидкостей является модель Бакли–Лeverетта, которая в настоящее время наиболее часто используется в теории фильтрации двухфазных жидкостей. Математическая модель данного процесса состоит из обобщенного закона Дарси и законов сохранения

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-31-80008-мол\_эв\_а).

масс обеих несмешивающихся фаз. Первый из этих законов подразумевает зависимость фазовых проницаемостей от объемных долей каждой из несмешивающихся жидкостей в поровом пространстве. Получаемая в результате система уравнений решается с учетом начальных и граничных условий, налагаемых на функции распределения насыщенностей и давлений в фазах. Допущение, принимаемое в модели Бакли–Левретта, об отсутствии капиллярного скачка давления на границе подвижных фаз позволяет упростить исходную систему уравнений. Однако, такое упрощение приводит к необходимости введения фронта разрыва насыщенности, впервые описанного Бакли и Левреттом [3].

Модель Рапопорта–Лиса является более полной моделью несмешивающейся фильтрации [4]. Математическая модель Рапопорта–Лиса содержит дополнительное уравнение, которое определяет скачок давления на границе фаз. Учет влияния капиллярных сил позволяет описать так называемую стабилизированную зону, возникающую вблизи границы раздела фаз. Протяженность этой зоны обратно пропорциональна скорости вытеснения. Такой подход справедлив для малых скоростей вытеснения. В рамках модели Рапопорта–Лиса был получен ряд важнейших результатов, касающихся изменения нефтенасыщенности коллекторов в процессе их обводнения.

При описании двухфазной фильтрации в реальных средах также важным является вопрос устойчивости фронта вытеснения к малым возмущениям. Экспериментальные исследования, проведенные Саффманом, Тейлором [5] и другими, показали, что развитие возмущений плоского фронта вытеснения в пористой среде при нарушении устойчивости происходит в виде неограниченно разрастающихся языков вытесняющей жидкости. Эксперименты на насыпных пористых средах [6] показали, что нарушение устойчивости происходит при отношении вязкости взаимодействующих жидкостей, превышающем критическое значение 10–15. В то же время, при малых скоростях вытеснения, возмущения затухают даже при отношениях вязкостей, больших критического. Математическая модель развития языков вытесняющей жидкости была предложена Баренблаттом [7]. Предполагается, что этот процесс может быть описан при помощи уравнений модели Бакли–Левретта с относительными фазовыми проницаемостями, линейно зависящими от соответствующих насыщенностей.

К современному исследованию неустойчивого вытеснения несмешивающихся жидкостей в плоском канале также посвящены работы [8, 9].

А процесс развития вытеснения, который был изучен экспериментально, подробно описан в работах [10, 11].

В настоящей работе рассмотрен плоский канал, заполненный несжимаемой жидкостью. С течением времени в канал нагнетается другая жидкость. Жидкости являются несмешивающимися. В работе строится математическая модель процесса вытеснения нефти водой в плоском канале, которая позволит провести дальнейшие численные исследования и выполнить сравнение результатов с полученными экспериментальными данными на примере ячейки Хеле–Шоу [12]. Сложность описания математической модели заключается в широком диапазоне рассматриваемых пространств от микро-масштабов до порядка одного сантиметра.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим плоский канал, заполненный несжимаемой жидкостью. С течением времени в канал нагнетается другая жидкость. Жидкости являются несмешивающимися. Канал имеет прямоугольную форму со следующими размерами: ширина  $b = 20$  мм, длина  $l = 35$  мм, толщина  $h = 0,02$  мм, отверстия входа и выхода жидкости с диаметрами  $d = 1$  мм, расположенные на центральной линии канала (рис. 1). Ось абсцис размещена также на центральной линии канала, а ось ординат — на левой границе канала. Направление течения — горизонтальное. В процессе вытеснения образуется зона совместного движения двух жидкостей.

Для решения задачи применяется квазигидродинамический подход, основанный на добавлении малого параметра  $\tau$  и позволяющий описать устойчивые схемы с центральными разностями.

Математическая модель для однофазного, однокомпонентного течения состоит из уравнений Навье–Стокса, уравнения сохранения массы, им-

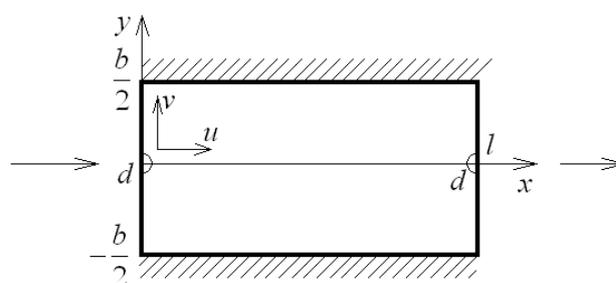


Рис. 1. Схема плоского канала

пульса и энергии:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m \otimes u) = \operatorname{div} \Pi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[ j_m \left( e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] \operatorname{div} q = \\ = \operatorname{div}(\Pi \cdot u), \end{cases}$$

где  $\rho$  — плотность;  $t$  — время;  $j_m = \rho(u - w)$  — поток массы;  $w = \frac{\tau}{\rho}(\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p)$  — квазигидродинамическая скорость;  $u$  — скорость течения;  $\Pi = \Pi_{NS} + \rho u \otimes w$  — тензор напряжения;  $\Pi_{NS}$  — тензор напряжения Навье–Стокса;  $e$  — энергия;  $p$  — давление;  $q$  — количество тепла.

Эта модель также используется при рассмотрении изотермического односкоростного, двухфазного течения с несмешивающимися жидкостями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j_m = 0, \\ \frac{\partial C_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m C) = \operatorname{div}(M \nabla \mu), \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(j_m \otimes u - \Pi) \right) = 0, \end{cases}$$

где  $C_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho}$  — концентрация фазы  $\alpha$ ;  $\rho_\alpha = \frac{dm_\alpha}{dV_\alpha}$  —

плотность фазы  $\alpha$ ;  $dm = \sum_{\alpha=1}^2 dm_\alpha$  — масса

смеси;  $V_\alpha$  — объем фазы;  $C = \sum_{\alpha=1}^2 C_\alpha = 1$ ;

$M = M_0 C(1 - C)$  — масса компонент;  $M_0$  — начальная масса компонент;  $\mu = \frac{\partial \psi_0}{\partial C} - \frac{\lambda_1}{\rho} \operatorname{div}(\rho)$ ;

$\psi(\rho, C, \nabla C) = \psi_0(\rho, C) + \frac{\lambda_1}{2} |\nabla C|^2$  — энергия Гельмгольца;  $\psi_0 = C\psi_1 + (1 - C)\psi_2 + \psi_{sep}$  — разделяющая энергия;  $\psi_1 = \psi_2 = C_\alpha^2 \ln \rho$ ; слагаемое  $\psi_{sep}$  — несмешиваемость фаз;  $\lambda$  — некоторая постоянная величина, определяемая с помощью дополнительных условий.

Стоит отметить, что в данном случае, в отличие от однокомпонентного, изменятся следующие величины:  $w = \frac{\tau}{\rho}(\rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p + \operatorname{div} Q)$ ;  $\Pi = \Pi_{NS} - pI + Q + \rho u \otimes w$ ;  $pI$  — шаровая давления;  $p = \rho^2 \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho}$ ;  $Q = -\rho \lambda_1 \nabla C \otimes \nabla C$  — тензор Кортвега (силы поверхностного натяжения между фазами).

### 3. Заключение

Полученная система уравнений будет в дальнейшем решаться разностными методами. Полученные численные результаты будут сравниваться с экспериментальными для дальнейшего анализа и выявления оптимальных условий для повышения эффективности нефтеотдачи.

Комплексное исследование позволит оценить и проанализировать весь процесс в целом, а также установить параметры течения для повышения эффективности вытеснения и увеличения нефтеотдачи, поскольку в численном моделировании процесса проще создать множество независимых экспериментов с одинаковыми начальными данными в отличие от экспериментального исследования.

### Список литературы

- [1] Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 44 с.
- [2] Muskat M., Meres M.W. The Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media // *Physics*, 1936. 7(Sept.). P. 346–363. DOI: 10.1063/1.1745403
- [3] Buckley S.E., Leverett M.S. Mechanism of Fluid Displacement in Sands // *Journ. Petr. Technology*. 1941. P. 1337.
- [4] Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of Linear Waterfloods // *Trans AIME*. 1953. 198. Pp. 139–148.
- [5] Saffman P.G., Sir Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proc. R. Soc. London*. 1958. A245. Pp. 321–329.
- [6] Рыжик В.М., Кисленко Б.Е. Исследование устойчивости движения раздела воды и нефти. ВНК. Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Недра. 1969. С. 82–92.
- [7] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра. 1984. 207 с.
- [8] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1958. Vol. 245, No. 1242. Pp. 312–329. М.: Дрофа, 2003. 840 с. <https://www.jstor.org/stable/100420>
- [9] Homsy G.M. Viscous fingering in porous media // *Annual review of fluid mechanics*. 1987. Vol. 19, No. 1. Pp. 271–311.
- [10] Мавлетов М.В., Валиев А.А. Эффективность неустойчивого вытеснения нефти из ячейки Хеле-Шоу // *Нефтепромышленное дело*. 2018. № 8. С. 42–45. DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45
- [11] Валиев А.А. Развитие неустойчивого вытеснения при снижении поверхностного натяжения // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 24. DOI: 10.21662/mfs2020.1.022
- [12] Валиев А.А., Низамова А.Д. Комплексное исследование вытеснения нефти водой в плоском канале // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 25. DOI: 10.21662/mfs2020.1.023



## Mathematical model of oil displacement by water in a plane channel

Nizamova A.D., Valiev A.A.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Unstable displacement of immiscible liquids in a plane channel is a topical research in both theoretical and practical applications. In this paper, we consider a plane channel filled with an incompressible fluid. Over time, another fluid is injected into the channel. The fluids are immiscible. The paper builds a mathematical model of the process of oil displacement by water in a plane channel, which allows further numerical studies and comparison of the results with the obtained experimental data using the example of the Hele-Shaw cell. The mathematical model for a multiphase, multicomponent flow consists of the Navier-Stokes equations, the equations of conservation of mass, momentum and energy. Modern methods for modeling the dynamics of "viscous fingers" are based mainly on numerical methods for solving systems of differential equations using the pressure gradient, viscosity and capillary forces as parameters. The influence of these parameters must be determined experimentally. To solve the problem, a quasi-hydrodynamic approach is used, based on the addition of a certain small parameter and allowing one to describe stable schemes with central differences. The complexity of solving such problems lies in the size of the considered models, which in practice have a wide range of applications from micro-scale to orders of one centimeter. A comprehensive study will allow us to evaluate and analyze the entire process as a whole, as well as to establish flow parameters to improve the efficiency of displacement and increase oil recovery, since in the numerical modeling of the process it is easier to create many independent experiments with the same initial data, in contrast to the experimental study.

**Keywords:** immiscible liquids, instability, displacement, micromodel, Hele-Shaw cell

### References

- [1] Leibenzon L.S. [The movement of natural liquids and gases in a porous medium] M., L.: Gostexizdat, 1947. P. 44 (in Russian).
- [2] Muskat M., Meres M.W. The Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media. *Physics*, 1936. 7(Sept.). P. 346–363.  
DOI: 10.1063/1.1745403
- [3] Buckley S.E., Leverett M.S. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. *Journ. Petr. Technology*. 1941. P. 1337.
- [4] Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of Linear Waterfloods. *Trans AIME*. 1953. 198. Pp. 139–148.
- [5] Saffman P.G., Sir Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. London*. 1958. A245. Pp. 321–329.
- [6] Ryigik V.M., Kislenco B.E. [Investigation of the stability of the movement of water and oil separation. VNK. Physical and geological factors in the development of oil and oil and gas condensate fields] M.: Nedra. 1969. Pp. 82–92 (in Russian).
- [7] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryigik V.M. [The movement of liquids and gases in natural formations] M.: Nedra. 1984. P. 207 (in Russian).
- [8] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 1958. Vol. 245, No. 1242. Pp. 312–329. M.: Дрофа, 2003. 840 с.  
<https://www.jstor.org/stable/100420>
- [9] Homsy G.M. Viscous fingering in porous media. *Annual review of fluid mechanics*. 1987. Vol. 19, No. 1. Pp. 271–311.
- [10] Mavletov M.V., Valiev A.A. [Efficiency of unstable oil displacement from the Hele-Shaw cell] *Neftegazovoe delo*. 2018. № 8. Pp. 42–45 (in Russian).  
DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45
- [11] Valiev A.A. [Development of unstable displacement with a decrease in surface tension] *Mnogofaznyie sistemyi*. 2020. V. 15, № 1–2. P. 24 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2020.1.022
- [12] Valiev A.A., Nizamova A.D. [Comprehensive study of oil displacement by water in a plane channel] *Mnogofaznyie sistemyi*. 2020. V. 15, № 1–2. P. 25 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2020.1.023



## Сопоставление численного и автомодельного решений задачи Седова о точечном взрыве в газе<sup>1</sup>

Болотнова Р.Х.\* , Коробчинская В.А.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Проведен сравнительный анализ решений задачи Седова о точечном взрыве в газе для плоского случая, полученных аналитическим методом и с использованием открытого программного комплекса вычислительной гидродинамики OpenFOAM. Приведен краткий анализ методов теории размерности и подобия, применяемых для аналитического автомодельного решения задачи о точечном взрыве в совершенном газе (азоте), которое определяется плотностью несжатого газа, величиной выделившейся энергии, соотношением удельных теплоемкостей и показателем геометрии взрыва. Используемая в аналитическом решении система одномерных уравнений газовой динамики включает законы сохранения массы, импульса и энергии. Предполагается, что в начальный момент времени происходит точечный взрыв с мгновенным выделением энергии. Автомодельные решения поставленной задачи приведены для эйлеровой и лагранжевой координат, массовой скорости, давления, температуры и плотности в случае плоской геометрии. Численное моделирование рассматриваемого процесса выполнено в решателе sonicFoam пакета OpenFOAM, построенном на алгоритме PISO. В процессе численного моделирования используется система дифференциальных уравнений газовой динамики, включающая уравнения неразрывности, движения Навье–Стокса для сжимаемой среды и сохранения внутренней энергии. Начальные и граничные условия выбирались в согласии с полученным аналитическим решением с помощью утилит setFieldsDict, blockMeshDict и uniformFixedValue. Полученные аналитические и численные решения имеют удовлетворительное согласование.

**Ключевые слова:** точечный взрыв, автомодельное решение, численное моделирование, пакет OpenFOAM, сравнительный анализ

### 1. Введение

При исследовании динамических процессов в газожидкостных средах необходимо проведение сравнительного анализа аналитических решений и численных исследований, полученных применением решателей, используемых при решении различных газодинамических задач. Проведение такого анализа позволяет оценить достоверность результатов по изучаемой проблеме и получить оценки важных термодинамических характеристик формирующихся ударно-волновых течений таких, как скорости распространения формирую-

щихся волн, массовые скорости частиц, интенсивности давлений и температур.

В работе [1] рассматриваются решения ряда модельных задач газовой динамики, обладающих плоской, цилиндрической и сферической симметрией при нестационарном сжатии невязкого газа. Дискретизация уравнений Эйлера проводится при помощи метода конечных объемов и разностных схем типа WENO. Результаты численного моделирования сравниваются с точными решениями, полученными в том числе для задачи Л.И. Седова о точечном взрыве.

В работе [2] на основе двумерной осесимметричной модели двухфазной газожидкостной смеси в случае однофазного подхода получено численное решение задачи Седова для цилиндрической симметрии, которое имеет удовлетворитель-

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках госзадания 0246–2019–0052.

ное согласование с аналитическим автомодельным решением [3].

В [4] численное решение, полученное с использованием метода сквозного счета с учетом псевдовязкости Неймана–Рихтмайера и условия устойчивости Куранта при моделировании взрыва в газе в одномерном сферическом приближении [3] удовлетворительно согласуется с аналитическим решением аналогичной задачи о точечном сферическом взрыве в газе [3].

В настоящей работе проведен сравнительный анализ численных результатов, реализованных с использованием решателя OpenFOAM [5], и аналитического автомодельного решения задачи Седова о точечном взрыве в газе плоской геометрии [3].

## 2. Автомодельное решение Л.И. Седова о точечном взрыве в газе

В работе [1] приведен обзор моделей газовой динамики, обладающих свойством симметрии, которые являются основой при решении важных практических задач, связанных с моделированием процессов взрыва и сжатия газа. Точные решения уравнений газовой динамики удается получить с использованием методов теории размерностей и подобия для задачи о сильном точечном взрыве [3], где рассматривается распространение ударной волны большой мощности, возникшей в результате сильного взрыва (мгновенное выделение большого количества энергии в некотором небольшом объеме). В этой задаче, сформулированной и решенной Л.И. Седовым, из параметров среды, в которой происходит взрыв, только плотность несжатого газа входит в соотношения для ударной волны. При взрыве в совершенном газе определяющими параметрами задачи являются величина выделившейся энергии  $E$ , плотность несжатого газа  $\rho$ , отношение удельных теплоемкостей  $\gamma$  и показатель геометрии взрыва  $\nu$ .

Система модельных одномерных уравнений газовой динамики совершенного газа для плоского случая в дифференциальной форме включает законы сохранения массы, импульса и энергии [3, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $v$  — скорость;  $x$  — эйлерова координата;  $p$  — давление.

В начальный момент времени в покоящемся газе происходит взрыв с мгновенным выделением

энергии. Для аналитического решения задачи введен единственный безразмерный параметр:

$$\lambda = \frac{x}{\left( \frac{E}{\rho_1} \right)^{1/3} t^{2/3}}. \quad (2)$$

Закон движения  $r_2$  плоской волны ( $\nu = 1$ ) и скорость ударной волны  $c$  определяются через начальную энергию взрыва  $E$  и плотность  $\rho_1$ :

$$r_2 = \left( \frac{E}{\rho_1} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E}{\rho_1 r_2}}. \quad (3)$$

Из определения (1) и условий на ударной волне с учетом (2), (3) получено:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{4}{3(\gamma+1)} \left( \frac{E}{\rho_1} \right)^{1/3} \frac{1}{t^{1/3}}, \quad \rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1, \\ p_2 &= \frac{8E}{9r_2(\gamma+1)}, \quad T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2}, \end{aligned}$$

где  $R$  — газовая постоянная.

Аналитические решения для эйлеровой  $x$  и лагранжевой  $r$  координат, скорости  $v$ , температуры  $T$ , плотности  $\rho$  и давления  $p$  в плоском случае имеют следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r_2} &= \left[ \frac{3}{4} (\gamma+1) V \right]^{-2/3} \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( \frac{3}{2} \gamma V - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma-1}{2\gamma-1}} \times \\ &\quad \times \left[ 3 \left( 1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma-4}{3(1-2\gamma)}}, \\ \frac{r}{r_2} &= \left[ \frac{3}{4} (\gamma+1) V \right]^{-2/3} \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( \frac{3}{2} \gamma V - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma}{2\gamma-1}} \times \\ &\quad \times \left[ 3 \left( 1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma^2+\gamma-4}{3(1-2\gamma)(\gamma-2)}} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{3}{2} V \right) \right]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}, \\ \frac{v}{v_2} &= \frac{3}{4} (\gamma+1) V \frac{x}{r_2}, \quad \frac{T}{T_2} = \frac{p}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho}, \\ \frac{\rho}{\rho_2} &= \left[ \frac{(\gamma+1) \left( \frac{3}{2} \gamma V - 1 \right)}{\gamma-1} \right]^{\frac{1}{2\gamma-1}} \times \\ &\quad \times \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{3}{2} V \right) \right]^{\frac{2}{2-\gamma}} \times \\ &\quad \times \left[ 3 \left( 1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma-4}{(2-\gamma)(2\gamma-1)}}, \\ \frac{p}{p_2} &= \left[ \frac{3}{4} (\gamma+1) V \right]^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left( 1 - \frac{3}{2} V \right) \right]^{\frac{\gamma}{2-\gamma}} \times \\ &\quad \times \left[ 3 \left( 1 - \frac{\gamma+1}{2} V \right) \right]^{\frac{5\gamma-4}{3(2-\gamma)}}, \end{aligned} \quad (4)$$

где интервал изменения безразмерной переменной  $V = \frac{vt}{r}$  определен неравенством:

$$\frac{2}{3\gamma} \leq V \leq \frac{4}{3(\gamma + 1)}.$$

### 3. Численный метод

В качестве метода численного решения, наиболее соответствующего поставленной задаче, выбран решатель `sonicFoam` библиотеки открытого пакета `OpenFOAM` [5], который построен на неявном алгоритме PISO, вычисляющем давление с двухшаговым корректором. Устойчивость решения при интегрировании по времени в выбранном решателе определялась условием Куранта. В соответствии с математической постановкой задачи проведено формирование расчетной сеточной области в пространственной декартовой системе координат и заданы начальные и граничные условия задачи с помощью утилит `setFieldsDict` и `blockMeshDict`. Граничные условия для давления, температуры и скорости, зависящие от времени, формируются с помощью функции `uniformFixedValue`. Для исследования рассматриваемого процесса используется следующая система дифференциальных уравнений газовой динамики:

уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (5)$$

уравнение движения Навье–Стокса для сжимаемой среды

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (6)$$

уравнение сохранения внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 - 2\mu \varepsilon^{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

где

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

— дивергенция скорости в декартовой системе координат;  $\rho$ ,  $e$  — плотность и внутренняя энергия газа;  $\vec{v}$  — вектор массовой скорости с проекциями  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  на соответствующие оси;  $\varepsilon^{ij}$  — тензор скоростей деформаций;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $\zeta$  — объемная вязкость.

### 4. Анализ результатов

Аналитическое решение задачи Седова (4) получено при следующих начальных условиях: газ —

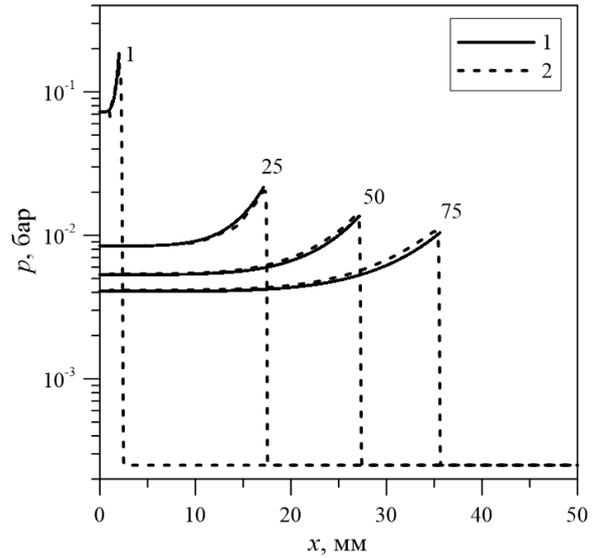


Рис. 1. Сравнение аналитического решения для давления  $p$  в указанные моменты времени (мкс): 1 — аналитическое решение Седова, 2 — численное решение с применением решателя `sonicFoam` пакета `OpenFOAM`

азот с начальной плотностью  $\rho_1 = 0.0125 \text{ кг/м}^3$ , энергия взрыва  $E = 100 \text{ Дж}$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ . При численной реализации аналогичной задачи с применением решателя `sonicFoam` для описания невозмущенного состояния использовались следующие значения:  $p = 6 \text{ Па}$ ,  $T = 25 \text{ К}$ . При вычислении внутренней энергии газа азота изобарная теплоемкость определялась как  $c_p = 1039 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ . Расчетная область была разбита на 2500 кубических ячеек. На левой границе области  $x = 1 \text{ мм}$  задавались величины давления  $p(t)$ , температуры  $T(t)$ , скорости  $v(t)$  в зависимости от времени в соответствии с полученными аналитическими решениями (4) для значений координаты  $x = 1 \text{ мм}$ . Для этого в решателе `sonicFoam` граничные условия  $p(t)$ ,  $T(t)$ ,  $v(t)$  задавались в виде табличной функции, зависящей от времени  $t$  в соответствии с типом граничного условия `uniformFixedValue`. На правой границе расчетной области использовалось условие свободного течения потока (тип `zeroGradient`). Боковые границы определялись условием скольжения (тип `slip`). В результате сравнения полученных аналитических (4) и численных решений (5)–(7) с применением решателя `sonicFoam` пакета `OpenFOAM` получено удовлетворительное согласование полученных решений, представленных в виде профилей давления (рис. 1) и массовой скорости (рис. 2) в рассматриваемых временных диапазонах.

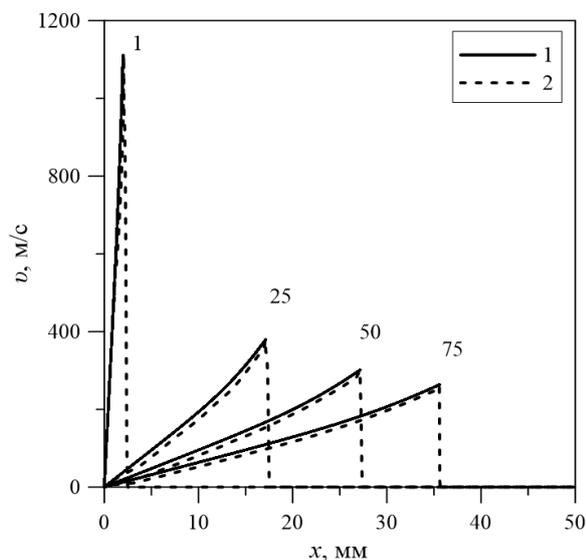


Рис. 2. Сравнение аналитического решения для скорости  $v$  в указанные моменты времени (мкс): 1 – аналитическое решение Седова, 2 – численное решение с применением решателя sonicFoam пакета OpenFOAM

## 5. Заключение

Проведен сравнительный анализ аналитического и численного решений для задачи о точечном взрыве плоской конфигурации (задачи Седова). Показана согласованность решений, полученных ана-

литически и с применением решателя sonicFoam пакета OpenFOAM, в котором использовались начальные и граничные условия, построенные на основе исследуемого автомоделного решения. Необходимость проведения такого сравнительного анализа важна для оценки достоверности получаемых решений для широкого круга газодинамических задач с применением рассматриваемого решателя.

## Список литературы

- [1] Булат П.В., Волков К.Н. Модельные задачи газовой динамики, обладающие цилиндрической и сферической симметрией, и их решение при помощи WENO-схем // ИФЖ. 2017. Т. 90, № 2. С. 438–449.  
[eLIBRARY ID: 28782911](#)
- [2] Бузина В.А. Нестационарное пространственное истечение газонасыщенной жидкости из осесимметричных сосудов // Вестник Башкирского университета. 2013. Т. 18, № 3. С. 636–639.  
[eLIBRARY ID: 20418076](#)
- [3] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука. 1977. 440 с.
- [4] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477.  
[DOI: 10.1134/S0032823519030020](#)
- [5] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.  
<http://www.openfoam.com>
- [6] Седов Л.И., Коробейников В.П., Марков В.В. Теория распространения взрывных волн // Труды математического института АН СССР. 1986. Т. 175. С. 178–217.  
[MathNet: tm2141](#)



## Comparison of the numerical and self-similar solutions of Sedov's problem on a point explosion in gas

Bolotnova R.Kh. \*, Korobchinskaya V.A. \*\*,\*\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

\*\*Bashkir State University, Ufa

Comparative analysis of solutions of Sedov's problem of a point explosion in gas for the plane case, obtained by the analytical method and using the open software package of computational fluid dynamics OpenFOAM, is carried out. A brief analysis of methods of dimensionality and similarity theory used for the analytical self-similar solution of point explosion problem in a perfect gas (nitrogen) which determined by the density of uncompressed gas, magnitude of released energy, ratio of specific heat capacities and by the index of geometry of the explosion is given. The system of one-dimensional gas dynamics equations for a perfect gas includes the laws of conservation of mass, momentum, and energy is used. It is assumed that at the initial moment of time there is a point explosion with instantaneous release of energy. Analytical self-similar solutions for the Euler and Lagrangian coordinates, mass velocity, pressure, temperature, and density in the case of plane geometry are given. The numerical simulation of considered process in sonicFoam solver of OpenFOAM package built on the PISO algorithm was performed. For numerical modeling the system of differential equations of gas dynamics is used, including the equations of continuity, Navier-Stokes motion for a compressible medium and conservation of internal energy. Initial and boundary conditions were selected in accordance with the obtained analytical solution using the setFieldsDict, blockMeshDict, and uniformFixedValue utilities. The obtained analytical and numerical solutions have a satisfactory agreement.

**Keywords:** point explosion, self-similar solution, numerical modeling, OpenFOAM package, comparative analysis

### References

- [1] Bulat P.V., Volkov K.N. Model gas-dynamical problems possessing cylindrical and spherical symmetry and their solution with the aid of weno schemes // *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2017. Vol. 90, № 2. Pp. 412–422.  
eLIBRARY ID: 28782911
- [2] Buzina V.A. Non-stationary two-dimensional outflow of gas-saturated liquid from axisymmetric vessels // *Vestnik Bashkirskogo Universiteta [Bulletin of the Bashkir State University]*. 2013. Vol. 18, № 3. Pp. 636–639 (in Russian).  
eLIBRARY ID: 20418076
- [3] Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* // Boca Raton: CRC Press. 1993. P. 479.  
DOI: 10.1201/9780203739730
- [4] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54, Suppl. 7. Pp. 970–977.  
DOI: 10.1134/S00154628190700241
- [5] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox.  
<http://www.openfoam.com>
- [6] Sedov L.I., Korobeinikov V.P., Markov V.V. The theory of blast wave propagation // *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 1988. V. 175. Pp. 187–228.  
MathNet: tm2141



## Преобразования уравнений газовой динамики и базисных операторов допускаемой 11-мерной алгебры Ли<sup>1</sup>

Сираева Д.Т.\*, Юлмухаметова Ю.В.\*\*,\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений газовой динамики, которая замыкается уравнением состояния общего вида. Данная система описывает модель невязкого нетеплопроводного газа, движущегося в отсутствие внешних силовых полей и внешних источников энергии. Система инвариантна относительно 11-параметрической группы с соответствующей ей 11-мерной алгеброй Ли. Уравнения газовой динамики, уравнения движения и базисные операторы алгебры Ли записываются в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Детально проиллюстрированы шаги, выполняемые при смене системы координат.

**Ключевые слова:** уравнения газовой динамики, цилиндрическая система координат, сферическая система координат, операторы 11-мерной алгебры Ли

### 1. Введение

Рассматриваются уравнения газовой динамики [1]:

$$\begin{aligned} D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p &= 0, & D\rho + \rho \operatorname{div}\vec{u} &= 0, \\ Dp + \rho a^2(\rho, p) \operatorname{div}\vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $D = \partial_t + (\vec{u} \cdot \nabla)$  — оператор полного дифференцирования;  $t$  — время;  $\nabla = \partial_{\vec{x}}$  — градиент по пространственным независимым переменным  $\vec{x}$ ;  $\vec{u}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление. В системе (1) первое уравнение есть уравнение сохранения импульса, второе — уравнение сохранения массы, третье — уравнение для давления, записанное вместо уравнения сохранения энергии. Скорость звука  $a(\rho, p)$  вычисляется по уравнению

состояния общего вида

$$p = f(\rho, S) \quad (2)$$

по формуле  $a^2 = f_\rho(\rho, S)$ , где  $S$  — энтропия. Система (1) замыкается уравнением состояния (2).

Уравнения газовой динамики (1) методами группового анализа впервые начал изучать выдающийся ученый XX в. Овсянников Л.В. Им же была объявлена программа «Подмодели», основные концепции которой изложены в [2].

Уравнения идеальной газовой динамики (1) с уравнением состояния общего вида (2) допускают 11-мерную алгебру Ли  $L_{11}$  с базисными операторами дифференцирования первого порядка.

Для нахождения решений системы уравнений газовой динамики (1), (2) необходимо вычислять инварианты подалгебр алгебры Ли  $L_{11}$ . Инвариант — функция, зануляющаяся при действии операторов подалгебры [3]. Система (1), (2), записанная в инвариантах — инвариантная подмодель.

Для удобства вычисления инвариантов подалгебры, содержащие один оператор вращения, представляются в цилиндрической системе координат

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

С, а подалгебры, содержащие три оператора вращения, представляются в сферической системе координат  $S$  [4, С. 139–140].

## 2. Уравнения газовой динамики в декартовой системе координат

В декартовой системе координат  $D$  векторы перемещения и скорости имеют вид:

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z, \\ \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — ортонормированный базис.

Распишем уравнения (1) по координатам в  $D$  [5]:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ \rho t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho a^2(\rho, p)(u_x + v_y + w_z) = 0.$$

## 3. Уравнения газовой динамики в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат  $C$  координаты точки преобразуются по следующему правилу [4]

$$x = x, \quad y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad (3)$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты точки. Тогда связь между  $(x, r, \theta)$  и  $(x, y, z)$  записывается формулами

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{z}{y}. \quad (4)$$

Найдем базис системы  $C$ . Для этого вектор  $\vec{x} = (x, y, z)$  разложим по ортонормированному базису декартовой системы координат с учетом (3):

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + r \cos \theta \vec{j} + r \sin \theta \vec{k}.$$

Возьмем производные от  $\vec{x}$  по координатам системы  $C$ , то есть по  $(x, r, \theta)$ :

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = \vec{i} = \vec{e}_x, \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k} = \vec{e}_r, \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r(-\sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) = r\vec{e}_\theta, \quad (5)$$

где векторы  $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$  — базисные в системе координат  $C$ .

Определим вид оператора  $\nabla$  в новом базисе. Для этого операторы дифференцирования из  $D$  запишем в  $C$ , используя связь (4):

$$\partial_x = \partial_x, \quad \partial_y = \cos \theta \partial_r - r^{-1} \sin \theta \partial_\theta, \\ \partial_z = \sin \theta \partial_r + r^{-1} \cos \theta \partial_\theta. \quad (6)$$

Тогда, с учетом (6), оператор  $\nabla$  примет вид:

$$\nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z = \vec{e}_x\partial_x + \vec{e}_r\partial_r + r^{-1}\vec{e}_\theta\partial_\theta. \quad (7)$$

Запишем вектор скорости  $\vec{u}$  в новом и старом базисах:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta, \quad (8)$$

где  $U, V, W$  — координаты вектора  $\vec{u}$  в системе  $C$ . Из (7) и (8) получаем выражение  $\vec{u} \cdot \nabla$  в системе  $C$ :

$$\vec{u} \cdot \nabla = U\partial_x + V\partial_r + r^{-1}W\partial_\theta. \quad (9)$$

Для нахождения выражения  $\nabla \cdot \vec{u}$  в системе  $C$  понадобятся значения производных от базисных векторов  $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ :

$$\partial_x \vec{e}_x = 0, \quad \partial_r \vec{e}_x = 0, \quad \partial_\theta \vec{e}_x = 0, \\ \partial_x \vec{e}_r = 0, \quad \partial_r \vec{e}_r = 0, \quad \partial_\theta \vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \\ \partial_x \vec{e}_\theta = 0, \quad \partial_r \vec{e}_\theta = 0, \quad \partial_\theta \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r. \quad (10)$$

Теперь запишем дивергенцию в  $C$ :

$$\text{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = U_x + V_r + r^{-1}V + r^{-1}W_\theta. \quad (11)$$

Подставим (8), (9) и (11) в систему (1), учитывая (10). Из первого уравнения (1) получим равенство

$$U_t \vec{e}_x + V_t \vec{e}_r + W_t \vec{e}_\theta + UU_x \vec{e}_x + VU_r \vec{e}_x + \frac{WU_\theta}{r} \vec{e}_x + \\ + UV_x \vec{e}_r + VV_r \vec{e}_r + \frac{WV_\theta}{r} \vec{e}_r + UW_x \vec{e}_\theta + \\ + VW_r \vec{e}_\theta + \frac{WW_\theta}{r} \vec{e}_\theta - \frac{W^2}{r} \vec{e}_r + \frac{VW}{r} \vec{e}_\theta + \\ + \rho^{-1} \left( p_x \vec{e}_x + p_r \vec{e}_r + \frac{p_\theta}{r} \vec{e}_\theta \right) = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим систему из трех уравнений и два уравнения на функции  $\rho$  и  $p$  [5]:

$$U_t + UU_x + VU_r + \frac{WU_\theta}{r} + \frac{p_x}{\rho} = 0, \\ V_t + UV_x + VV_r + \frac{WV_\theta}{r} + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r}, \\ W_t + UW_x + VW_r + \frac{WW_\theta}{r} + \frac{p_\theta}{r\rho} = -\frac{VW}{r}, \\ \rho_t + U\rho_x + V\rho_r + \frac{W\rho_\theta}{r} + \rho \left( U_x + V_r + \frac{W_\theta}{r} \right) = -\frac{\rho V}{r}, \\ p_t + Up_x + Vp_r + \frac{Wp_\theta}{r} + \\ + \rho a^2 \left( U_x + V_r + \frac{W_\theta}{r} \right) = -\frac{\rho a^2 V}{r}.$$

#### 4. Уравнения газовой динамики в сферической системе координат

Теперь определим вид (1) в сферической системе координат  $S$ . В  $S$  координаты точки преобразуются по следующему правилу [4, 6]

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (12)$$

где  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты. Связь между  $(r, \theta, \varphi)$  и  $(x, y, z)$  осуществляется по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad (13)$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Найдем базис для системы  $S$ . Для этого вектор  $\vec{x}$  разложим по ортонормированному базису декартовой системы координат с учетом (13):

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}.$$

Значение производных от  $\vec{x}$  по координатам системы  $S$  определяется формулами

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} = \vec{e}_r,$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r \left( \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \right) = r \vec{e}_\theta, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \left( -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \right) = r \sin \theta \vec{e}_\varphi,$$

где  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  образуют базис в  $S$ .

Найдем вид оператора  $\nabla$  в новом базисе. Для этого необходимо операторы дифференцирования из  $D$  записать в  $S$ , используя (13):

$$\begin{aligned} \partial_x &= \sin \theta \cos \varphi \partial_r + r^{-1} \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \\ &\quad - (r \sin \theta)^{-1} \sin \varphi \partial_\varphi, \\ \partial_y &= \sin \theta \sin \varphi \partial_r + r^{-1} \sin \theta \cos \theta \partial_\theta + \\ &\quad + (r \sin \theta)^{-1} \cos \varphi \partial_\varphi, \\ \partial_z &= \cos \theta \partial_r - r^{-1} \sin \theta \partial_\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда, с учетом (15), оператор  $\nabla$  примет вид:

$$\nabla = \vec{i} \partial_x + \vec{j} \partial_y + \vec{k} \partial_z = \vec{e}_r \partial_r + r^{-1} \vec{e}_\theta \partial_\theta + (r \sin \theta)^{-1} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi. \quad (16)$$

Разложим вектор скорости  $\vec{u}$  в новом и старом базисах:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi, \quad (17)$$

где  $U, V, W$  – координаты вектора  $\vec{u}$  в системе  $S$ . Используя (16) и (17) получим выражение  $\vec{u} \cdot \nabla$  в системе  $S$ :

$$\vec{u} \cdot \nabla = U \partial_r + r^{-1} V \partial_\theta + (r \sin \theta)^{-1} W \partial_\varphi. \quad (18)$$

Для нахождения выражения  $\nabla \cdot \vec{u}$  в системе  $S$  понадобятся значения производных от базисных векторов  $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ :

$$\begin{aligned} \partial_r \vec{e}_r &= 0, \quad \partial_\theta \vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \quad \partial_\varphi \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\varphi, \\ \partial_r \vec{e}_\theta &= 0, \quad \partial_\theta \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r, \quad \partial_\varphi \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\varphi, \\ \partial_r \vec{e}_\varphi &= 0, \quad \partial_\theta \vec{e}_\varphi = 0, \\ \partial_\varphi \vec{e}_\varphi &= -\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь запишем дивергенцию в  $S$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= \nabla \cdot \vec{u} = \\ &= U_r + \frac{V_\theta}{r} + \frac{W_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{2U}{r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta V}{r}. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставим (17), (18) и (20) в систему (1), учитывая (19). Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим систему [7]:

$$\begin{aligned} U_t + U U_r + \frac{V U_\theta}{r} + \frac{W U_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{p_r}{\rho} &= \frac{V^2 + W^2}{r}, \\ V_t + U V_r + \frac{V V_\theta}{r} + \frac{W V_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{p_\theta}{r \rho} &= \\ &= -\frac{U V - \operatorname{ctg} \theta W^2}{r}, \\ W_t + U W_r + \frac{V W_\theta}{r} + \frac{W W_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{p_\varphi}{r \rho \sin \theta} &= \\ &= -\frac{W}{r} (U + \operatorname{ctg} \theta V), \\ \rho_t + U \rho_r + \frac{V \rho_\theta}{r} + \frac{W \rho_\varphi}{r \sin \theta} + \\ \rho \left( U_r + \frac{V_\theta}{r} + \frac{W_\varphi}{r \sin \theta} \right) &= -\rho \frac{2U + \operatorname{ctg} \theta V}{r}, \\ p_t + U p_r + \frac{V p_\theta}{r} + \frac{W p_\varphi}{r \sin \theta} + \\ + \rho a^2 \left( U_r + \frac{V_\theta}{r} + \frac{W_\varphi}{r \sin \theta} \right) &= \\ &= -\rho a^2 \frac{(2U + \operatorname{ctg} \theta V)}{r}. \end{aligned} \quad (21)$$

#### 5. Уравнение движения частиц в цилиндрической и сферической системах координат

Положение частицы определяется ее скоростью и зависит от времени и начального положения [1]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{\xi}, \quad (22)$$

где  $t, \xi$  — лагранжевы переменные;  $t, \vec{x}$  — эйлеровы переменные. Связь между эйлеровыми и лагранжевыми переменными дается соотношением  $\vec{x} = \vec{x}(t, \xi)$  как решение задачи (22).

Определим вид (22) в цилиндрической и сферической системах координат. Для цилиндрической системы координат справедлива замена переменных (3). Ортонормированный базис задан соотношением (5). Тогда  $\vec{x} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r$ . Запишем  $\vec{u}$  в базисе цилиндрической и декартовой системах координат:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta. \quad (23)$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим уравнения движения в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= U, & x|_{t=t_0} &= x_0, \\ \dot{r} &= V, & r|_{t=t_0} &= r_0, \\ r\dot{\theta} &= W, & \theta|_{t=t_0} &= \theta_0, \end{aligned}$$

где  $x_0, r_0, \theta_0$  вычисляются по формулам (4).

Связь декартовых и сферических координат осуществляется по формулам (13), а базис системы имеет вид (14). Следовательно,  $\vec{x} = r\vec{e}_r$ . Вектор  $\vec{u}$  запишем в базисе сферической и декартовой системах координат:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi. \quad (24)$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \\ &= U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим уравнения движения в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= U, & r|_{t=t_0} &= r_0, \\ r\dot{\theta} &= V, & \theta|_{t=t_0} &= \theta_0, \\ r\dot{\varphi}\sin\theta &= W, & \varphi|_{t=t_0} &= \varphi_0, \end{aligned}$$

где  $r_0, \theta_0, \varphi_0$  вычисляются по формулам (13).

## 6. Базисные операторы алгебры Ли $L_{11}$

Замена координат  $\vec{x} = \vec{x}(x, u)$ ,  $\vec{u} = \vec{u}(x, u)$  в инфинитезимальном операторе  $X = \xi\partial_x + \eta\partial_u$  имеет вид [8]:

$$\bar{X} = X\bar{x}(x, u)\partial_{\bar{x}} + X\bar{u}(x, u)\partial_{\bar{u}}. \quad (25)$$

Базисные операторы алгебры Ли  $L_{11}$  в декартовой системе координат таковы:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, & X_3 &= \partial_z, & X_4 &= t\partial_x + \partial_u, \\ X_5 &= t\partial_y + \partial_v, & X_6 &= t\partial_z + \partial_w, \\ X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \\ X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\ X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \\ X_{10} &= \partial_t, & X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \end{aligned}$$

где  $X_1, X_2, X_3$  — операторы переноса по осям координат  $Ox, Oy, Oz$  соответственно;  $X_4, X_5, X_6$  — операторы преобразования Галилея;  $X_7, X_8, X_9$  — операторы вращения;  $X_{10}$  — оператор переноса по времени;  $X_{11}$  — оператор равномерного растяжения.

При расчете операторов в  $\mathbf{C}$  нужны формулы связи координат вектора скорости  $\vec{u}$  в  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{C}$ . Для этого необходимо в уравнение (23) подставить формулы (5) и приравнять коэффициенты при базисных векторах  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Получаются следующие формулы связи:

$$\begin{aligned} u &= U, \\ v &= V\cos\theta - W\sin\theta, \\ w &= V\sin\theta + W\cos\theta. \end{aligned}$$

Из этих равенств следуют соотношения для координат вектора скорости в  $\mathbf{C}$ . Выразим их еще и в  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned} U &= u, \\ V &= v\cos\theta + w\sin\theta = \frac{vy + wz}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ W &= w\cos\theta - v\sin\theta = \frac{-vz + wy}{\sqrt{y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Приведем пример вычисления базисного оператора алгебры Ли  $L_{11}$  в  $\mathbf{C}$ :

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v. \quad (27)$$

По формуле (25) требуется оператором (27) поочередно подействовать на  $x, r, \theta$  (3), (4) и  $U, V, W$  (26) в  $\mathbf{D}$ :

$$\begin{aligned} X_7 &= r\cos\theta \left( \sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}(\partial_\theta + W\partial_v - V\partial_w) \right) - \\ &- r\sin\theta \left( \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}(\partial_\theta + W\partial_v - V\partial_w) \right) + \\ &+ (V\cos\theta - W\sin\theta)(\sin\theta\partial_v + \cos\theta\partial_w) - \\ &- (V\sin\theta + W\cos\theta)(\cos\theta\partial_v - \sin\theta\partial_w) = \\ &= \partial_\theta + W\partial_v - V\partial_w + V\partial_w - W\partial_v = \partial_\theta. \end{aligned}$$

Базисные операторы  $L_{11}$  в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}(\partial_\theta + W\partial_v - V\partial_w),$$

$$\begin{aligned}
X_3 &= \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W), \\
X_4 &= t \partial_x + \partial_U, \\
X_5 &= \cos \theta [t \partial_r + \partial_V] - t \frac{\sin \theta}{r} \left[ \partial_\theta + W \partial_V - \left( V - \frac{r}{t} \right) \partial_W \right], \\
X_6 &= \sin \theta [t \partial_r + \partial_V] + t \frac{\cos \theta}{r} \left[ \partial_\theta + W \partial_V - \left( V - \frac{r}{t} \right) \partial_W \right], \\
X_7 &= \partial_\theta, \\
X_8 &= \sin \theta (r \partial_x - x \partial_r + V \partial_U - U \partial_V) + \\
&+ \cos \theta \left[ W \partial_U - U \partial_W - \frac{x}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W) \right], \\
X_9 &= \cos \theta [x \partial_r - r \partial_x + U \partial_V - V \partial_U] + \\
&+ \sin \theta \left[ W \partial_U - U \partial_W - \frac{x}{r} (\partial_\theta + W \partial_V - V \partial_W) \right], \\
X_{10} &= \partial_t, \quad X_{11} = t \partial_t + x \partial_x + r \partial_r.
\end{aligned}$$

При расчете операторов в  $\mathbf{S}$  нужны формулы связи координат вектора скорости  $\vec{u}$  в  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{S}$ . Для этого необходимо в уравнение (23) подставить формулы (14) и приравнять коэффициенты при базисных векторах  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Получаются следующие формулы связи:

$$\begin{aligned}
u &= U \sin \theta \cos \varphi + V \cos \theta \cos \varphi - W \sin \varphi, \\
v &= U \sin \theta \sin \varphi + V \cos \theta \sin \varphi + W \cos \varphi, \\
w &= U \cos \theta - V \sin \theta.
\end{aligned}$$

Из этих равенств следуют соотношения для координат вектора скорости в  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned}
U &= u \sin \theta \cos \varphi + v \sin \theta \sin \varphi + w \cos \theta, \\
V &= u \cos \theta \cos \varphi + v \cos \theta \sin \varphi - w \sin \theta, \\
W &= v \cos \varphi - u \sin \varphi.
\end{aligned} \quad (28)$$

При расчете базисных операторов  $L_{11}$  в  $\mathbf{S}$  по формуле (25) нужно дифференцировать (28) как сложные функции с учетом (12), (13). Тогда базисные операторы  $L_{11}$  в сферической системе координат примут вид:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \cos \varphi \sin \theta \left[ \partial_r + \frac{\text{ctg} \theta}{r} (\partial_\theta + V \partial_U - U \partial_V) \right] + \\
&+ \frac{\sin \varphi}{r} \left[ U \partial_W - W \partial_U - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi - \text{ctg} \theta (V \partial_W - W \partial_V) \right], \\
X_2 &= \sin \varphi \sin \theta \left[ \partial_r + \frac{\text{ctg} \theta}{r} (\partial_\theta + V \partial_U - U \partial_V) \right] - \\
&- \frac{\cos \varphi}{r} \left[ U \partial_W - W \partial_U - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi + \text{ctg} \theta (V \partial_W - W \partial_V) \right], \\
X_3 &= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} (\partial_\theta + V \partial_U - U \partial_V),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4 &= \cos \varphi \sin \theta \left[ \frac{t \text{ctg} \theta}{r} (\partial_\theta + V \partial_U - U \partial_V) + t \partial_r + \right. \\
&+ \partial_U + \text{ctg} \theta \partial_V \left. \right] + \frac{t \sin \varphi}{r} \left[ U \partial_W - W \partial_U - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi + \right. \\
&+ \text{ctg} \theta (V \partial_W - W \partial_V) + \frac{r}{t} \partial_W \left. \right], \\
X_5 &= \sin \varphi \sin \theta \left[ \frac{t \text{ctg} \theta}{r} (\partial_\theta + V \partial_U - U \partial_V) + t \partial_r + \right. \\
&+ \partial_U + \text{ctg} \theta \partial_V \left. \right] - \frac{t \cos \varphi}{r} \left[ U \partial_W - W \partial_U - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi + \right. \\
&+ \text{ctg} \theta (V \partial_W - W \partial_V) + \frac{r}{t} \partial_W \left. \right], \\
X_6 &= \cos \theta [t \partial_r + \partial_U] - \frac{t \sin \theta}{r} \left[ \partial_\theta + V \partial_U - U \partial_V + \frac{r}{t} \partial_V \right], \\
X_7 &= -\sin \varphi \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} [V \partial_W - W \partial_V - \cos \theta \partial_\varphi], \\
X_8 &= \cos \varphi \partial_\theta + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} [V \partial_W - W \partial_V - \cos \theta \partial_\varphi], \\
X_9 &= \partial_\varphi, \quad X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = r \partial_r + t \partial_t.
\end{aligned}$$

## 7. Заключение

Уравнения газовой динамики удобно использовать в различных системах координат. Если в подалгебре есть один оператор вращения, то следует выбрать цилиндрическую систему координат. Если подалгебра содержит три оператора вращения, то уравнения газовой динамики представляются в сферической системе координат. Упрощение модели рассматриваемой системы уравнений иногда может достигаться с помощью введения дополнительной замены [5].

## Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 335 с. eLIBRARY ID: 19448621
- [2] Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
- [3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [4] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ. 2013. 224 с.
- [5] Хабиров С.В. Простые частично инвариантные решения // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11, № 1. С. 87–98. MathNet: ufa463
- [6] Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Просвещение, 1965. 539 с.
- [7] Овсянников Л.В. Особый вихрь // Прикладная механика и техническая физика. 1995. Т. 36, вып. 3. С. 45–52. eLIBRARY ID: 35253156
- [8] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с. eLIBRARY ID: 21714062



## Transformations of gas dynamics equations and basis operators of a admitted 11-dimensional Lie algebra

Siraeva D.T.\* , Yulmukhametova Y.V.\*\*,\*\*

\*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

\*\*Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

In this paper, the gas dynamics equations are considered. The system is closed by a general equation of state. This equations describe a model of an inviscid non-heat-conducting gas motion in the absence of external force fields and external energy sources. The system is invariant under the 11-parameter group with the corresponding 11-dimensional Lie algebra. The gas dynamics equations, equations of motion, and basis operators of the Lie algebra are written in Cartesian, Cylindrical, and Spherical coordinate systems. The steps involved when changing the coordinate system are illustrated in detail.

**Keywords:** gas dynamics equations, cylindrical coordinate system, spherical coordinate system, operators of 11-dimensional Lie algebra

### References

- [1] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the fundamentals of gas dynamics] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki*. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003. P. 336 (in Russian). eLIBRARY ID: 19448621
- [2] Ovsyannikov L.V. The "podmodeli" program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V 58, No. 4. Pp. 601–627. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90137-6
- [3] Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. Academic press, 1982.
- [4] Khabirov S.V. [Lectures Analytical methods in gas dynamics] *Lektsii Analiticheskiye metody v gazovoy dinamike*. Ufa: BSU, 2013. P. 224 (in Russian).
- [5] Khabirov S.V. Simple partially invariant solutions // Ufa Mathematical Journal. 2019. V. 11, No. 1. Pp. 90–99. DOI: 10.13108/2019-11-1-90
- [6] Kosmodemyanskii A.A. [Theoretical mechanics course] *Kurs teoreticheskoi mehaniki* M.: Prosveshenie. 1965. P. 539. (in Russian).
- [7] Ovsyannikov L.V. Singular vortex // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1995. Vol. 36, No. 3. Pp. 360–366. DOI: 10.1007/BF02369772
- [8] Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics: monograph, Novosibirsk: NSTU publisher, 2012. 659 pp. (in Russian). eLIBRARY ID: 21714062



## Об искажении проходящей и отраженной ударных волн при взаимодействии со слоем гранулированной среды

Баширова К.И.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Подготовлена модель ударной трубы для исследования поведения ударной волны в изогнутом слое легких упругих гранулированных частиц, размещенном в центре трубы. Для поставленной задачи записана стандартная математическая модель для двухфазной системы, состоящая из уравнений неразрывности, состояния и энергии, а также уравнения для силы межфазного взаимодействия. Вычислительные эксперименты проводились с использованием пакета OpenFOAM. Подготовленная модель позволила провести моделирование перепада давления между  $3 \times 10^5$  Па и  $10^5$  Па в трубе с концентрацией частиц 20 %, создающего ударную волну. Получены распределения давления в разные моменты времени в различных сечениях до и после прохождения сквозь изогнутый слой, а также профили скорости в аналогичных сечениях. Численные эксперименты показали, что искривление слоя гранулированных частиц приводит к существенному рассеянию волны. Помимо этого выявлены изменения фронта волны в пристеночных областях после прохождения слоя среды. Перераспределение потока жидкости в пристеночной области вызвано искривлением нижней границы слоя частиц.

**Ключевые слова:** ударные волны, гранулированный слой, рассеяние волн, численное моделирование

### 1. Введение

Ударные волны — распространенное природное явление, представляющее собой движущуюся внутри какой-либо среды поверхность разрыва. В ходе движения волны возникают скачки давления, скорости и температуры. Для исследования этого процесса удобным представляется использование моделей таких установок, как ударные трубы [1]. Они применяются при исследовании обтекания сложных геометрических объектов, потоков газовых смесей при сверхзвуковых скоростях. Процесс прохождения ударных волн через многофазные среды активно изучается [2–4]. Слой гранулированной среды, помещенный в установку, позволяет добиться значительного рассеяния и замедления волн.

В представленной работе рассматриваются распределения давлений и скоростей после про-

хождения ударной волны сквозь изогнутый гранулированный слой. В литературе встречаются описания исследований подобных процессов с применением устоявшихся ламинарных течений [5]. Ранее автором рассматривалась задача, в которой слой гранулированной среды располагался на дне ударной трубы [6, 7]. В настоящей работе рассматриваются изменение фронта и рассеяние ударной волны с турбулентными эффектами при прохождении сквозь гранулированный слой в середине трубы.

### 2. Постановка задачи

В ходе изучения процесса прохождения ударной волны сквозь зернистый слой рассматривается модель трубы длиной 0.6 м и диаметром 0.1 м. В верхней части трубы находится область повышенного давления  $3 \times 10^5$  Па, в остальных частях давление  $10^5$  Па. В середине трубы расположен слой гранулированной среды (рис. 1). Объемное содержание засыпки 0.2. Диаметр гранул  $2.75 \times 10^{-3}$  м. Радиус окружности, ограничивающей зернистый слой снизу, составляет 0.07 м.



Рис. 1. Схема размещения гранулированной среды

В качестве граничных были заданы условия непротекания для скорости воздуха на всех стенках трубы и проскальзывания для частиц на всех границах. Для давления принято условие  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$  на стенках трубы.

Расчет проводился до 0.005 с. За это время волна доходит до нижней стенки трубы и отражается от нее.

### 3. Математическая модель

Процесс прохождения ударной волны сквозь слой гранулированной среды описывается стандартной системой уравнений [8], для несущей фазы используются уравнения неразрывности, импульсов, энергии и уравнение состояния для идеального газа для замыкания системы:

$$\frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{(1)} v_{(1)i})}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_{(1)} v_{(1)j})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{(1)} v_{(1)j} v_{(1)i})}{\partial x_i} = \\ = -\alpha_{(1)} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{(1)ji}}{\partial x_i} + \rho_{(1)} g_j + F_{(21)j}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_{(1)} E)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{(1)} v_{(1)i} E)}{\partial x_i} = -\alpha_{(1)} \frac{\partial (p v_{(1)i})}{\partial x_i} + \\ + \frac{\partial (\tau_{(1)ji} v_{(1)i})}{\partial x_j} + \rho_{(1)} v_{(1)i} g_i, \end{aligned} \quad (3)$$

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1) \rho_{(1)}}. \quad (4)$$

Для несомой гранулированной фазы записана аналогичная система, состоящая из уравнений

неразрывности и импульсов:

$$\frac{\partial \rho_{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{(2)} v_{(2)i})}{\partial x_i} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho_{(2)} v_{(2)j})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{(2)} v_{(2)j} v_{(2)i})}{\partial x_i} = \\ = -\alpha_{(2)} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{(2)ji}}{\partial x_i} + \rho_{(2)} g_j + F_{(12)j}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях (1)–(6) используются следующие обозначения:  $\rho_{(k)}$  — эффективная плотность газовой фазы, связанная с истинной плотностью  $\rho_{(k)0}$  соотношением  $\rho_{(k)} = \alpha_{(k)} \rho_{(k)0}$ ;  $t$  — время;  $\alpha_{(k)}$  — объемная концентрация  $k$ -й фазы, где  $k = 1$  для несущей фазы,  $k = 2$  для несомой дисперсной фазы;  $v_{(k)i}$  —  $i$ -я составляющая вектора скорости  $k$ -й фазы,  $i = 1, 2, 3$ ;  $p$  — давление;  $g_i$  — компоненты вектора ускорения свободного падения;  $E = e + \frac{(\vec{v}_1)^2}{2}$  — удельная полная энергия;  $e$  — внутренняя энергия;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\tau_{(k)ij}$  — тензор напряжений:

$$\tau_{(k)ij} = \mu_{(k)} \left[ \left( \frac{\partial v_{(k)i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{(k)j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_{(k)l}}{\partial x_l} \right].$$

Силы межфазного взаимодействия связаны между собой соотношением  $F^{21} = -F^{12}$ , сила межфазного взаимодействия приведена в уравнении:

$$F_{(km)i} = \frac{3}{4} \alpha_k \alpha_m \rho_{(2)} \frac{C_D}{d} (v_{(k)} - v_{(m)}) |v_{(k)} - v_{(m)}|.$$

Здесь  $C_D = \frac{4\pi d^2 \mu_{(1)}}{\alpha_{(1)} \alpha_{(2)} \rho_{(1)} |\vec{v}_{(1)} - \vec{v}_{(2)}|}$  — коэффициент сопротивления, основанный на силе Стокса [9];  $d$  — диаметр гранул в среде;  $m$  — принимает значения 1 или 2 и показывает значение номера фазы.

Вязкость гранулированной фазы  $\mu_{(2)}$  описывается эмпирическим уравнением Багнольда [10]:

$$\mu_{(2)} = \beta \left( \frac{\alpha_{(2)*} - \alpha_{(2)0}}{\alpha_{(2)*} - \alpha_{(2)}} \right), \quad \alpha_{(2)0} < \alpha_{(2)} < \alpha_{(2)*},$$

где  $\beta$  — эмпирический коэффициент;  $\alpha_{(2)0}$  — объемная концентрация дисперсной фазы, начиная с которой вязкость отлична от нуля;  $\alpha_{(2)*}$  — объемная концентрация, начиная с которой сыпучая среда остается неподвижной.

Представленной модели достаточно для описания процессов в ударной трубе, поскольку гранулированная среда моделируется при помощи конечно-объемной сетки.

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

В качестве среды моделирования был использован пакет OpenFOAM. OpenFOAM — свободно распространяемый пакет, предназначенный для решения задач механики сплошных сред, численного моделирования в гидродинамике.

Поставленная задача решалась с использованием стандартного солвера пакета OpenFOAM twoPhaseEulerFoam. Солвер предназначен для моделирования систем из несжимаемых флюидных фаз и дисперсной среды.

Турбулентные свойства воды были заданы при помощи модели  $k - \omega$  (kOmegaSST) RAS, для гранулированной среды выбрана модель RAS kineticTheory, позволяющая задать максимальную концентрацию гранул, равную 0.62.

При прохождении волны вдоль трубы происходит несколько отражений. На рис. 2(а) показано распределение давления в начале прохождения слоя, на рис. 2(б) — во время прохождения сквозь слой, на рис. 2(в) — после прохождения слоя, на рис. 2(г) — после отражения от нижней стенки.

При прохождении сквозь слой гранулированной среды возникает незначительное отражение, после прохождения сквозь слой фронт волны меняется. Наиболее заметны изменения фронта волны на графике продольной скорости после прохождения слоя. Для представленных выше моментов времени рассмотрим продольное распределение давления по центру (рис. 3(а)–6(а)), поперечные эпюры давления в сечениях 0.16 м, 0.23 м, 0.375 м и 0.445 м (рис. 3(б)–6(б)) и профиль скорости в этих же сечениях (рис. 3(в)–6(в)). Графики эпюр давления были нормированы к значениям [0, 1]. Цвета пунктирных линий на графиках распределения давления обозначают сечения вдоль трубы и соответствуют цветам профилей скорости и давления.

Таким образом можно сделать вывод, что после прохождения сквозь искривленный гранулированный слой наблюдается изменение скорости потока в пристеночном слое. В соответствии с моментами времени на графиках профилей давления заметны множественные отражения от гранулированного слоя и от нижней стенки установки, а также неоднородность фронта волны.

#### 5. Заключение

В представленной работе показано, что прохождение ударной волны сквозь гранулированную среду может быть описано континуальной моделью, записанной для двух фаз.

Численные эксперименты показали, что с использованными начальными и граничными усло-

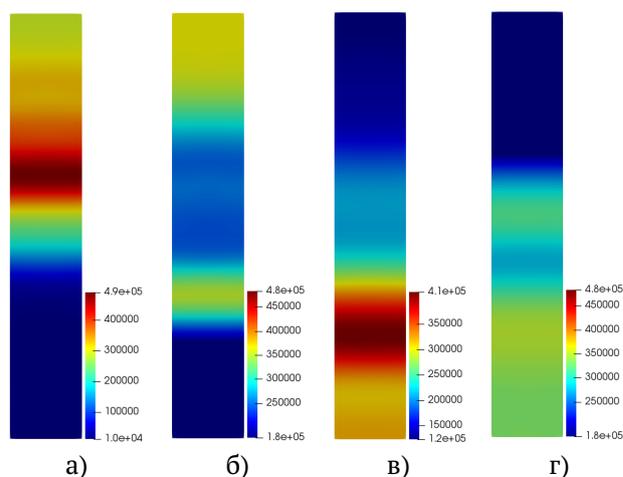


Рис. 2. Распределение давления в ударной трубе в моменты времени: а)  $t = 0.0003$  с, б)  $t = 0.0005$  с, в)  $t = 0.0009$  с, г)  $t = 0.0011$  с

вия в полученной модели наблюдаются перераспределения потока жидкости в пристеночной области, связанные с прохождением волны сквозь искривленный слой.

#### Список литературы

- [1] Arun K.R., Pathak V. Shock wave mitigation using zig-zag structures and cylindrical obstructions // Defence Technology. 2020. 12 p. DOI: 10.1016/j.dt.2020.10.001
- [2] Кедринский В.К. Ударные волны в жидкости с пузырьками газа // ФГВ. 1980. Т. 16, № 5. С. 14–25. eLIBRARY ID: 29137129
- [3] Britain A., Ben-Dor G. Shock tube study of the dynamical behavior of granular materials // International Journal of Multiphase Flow. 2006. V. 32. Pp. 623–642. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007
- [4] Fedgun V.R., Karinski Y.S., Yankelevsky D.Z. A two-phase model to simulate the 1-D shock wave propagation in porous metal foam // International Journal of Impact Engineering. 2015. V. 82. Pp. 113–129. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.03.012
- [5] Михайленко К.И., Кулешов В.С. Математическое моделирование скоростной неравномерности потока газа за пористой преградой // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 6. С. 46–58. eLIBRARY ID: 25408686
- [6] Баширова К.И., Михайленко К.И. Трехмерное моделирование ударной трубы в пакете OpenFOAM // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 3. С. 621–626. eLIBRARY ID: 36476517
- [7] Баширова К.И., Михайленко К.И. Отражение ударной волны от слоя мелкодисперсной среды малых концентраций // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 279–283. DOI: 10.21662/mfs2019.4.036
- [8] Bashirova K.I., Mikhaylenko C.I. Reflection of a shock wave from a finely dispersed medium of low concentrations // Journal of Physics: Conference Series. XXXVI Siberian Thermophysical Seminar (STS 36). 2020. V. 1677. 012051. DOI: 10.1088/1742-6596/1677/1/012051
- [9] Mikhaylenko C.I., Valeeva Yu.R. Highly dispersed medium sedimentation from air under pressure forces // Numerical methods and Programming. 2013. V. 14. Pp. 328–33. eLIBRARY ID: 21014483
- [10] Bagnold, R.A. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // Proc. R. Soc. Lond. 1954. V. 225. Pp. 49–63. DOI: 10.1098/rspa.1954.0186

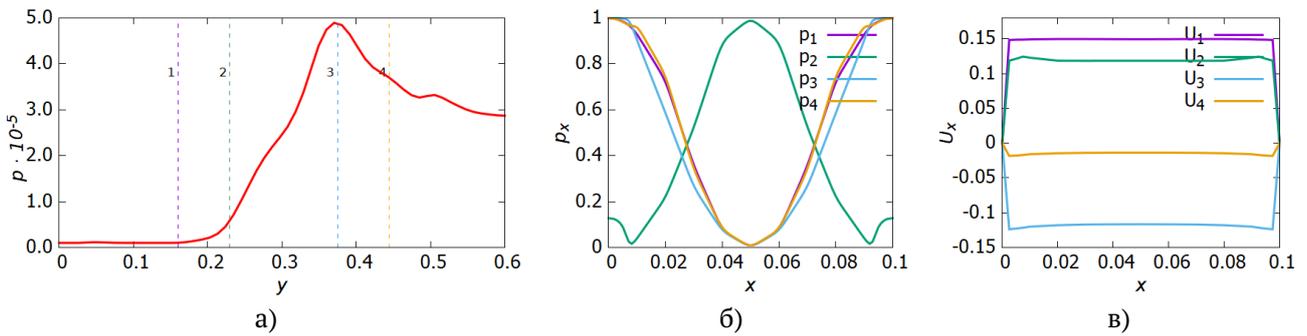


Рис. 3. Продольное распределение давления по центру трубы (а), поперечные эпюры давления в сечениях (б), профиль скорости в сечениях (в) в момент времени  $t = 0.0003$  с

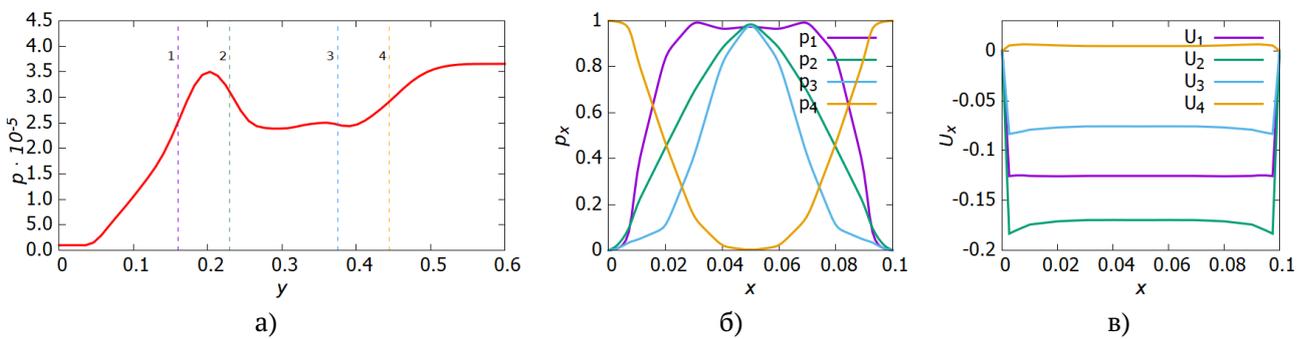


Рис. 4. Продольное распределение давления по центру трубы (а), поперечные эпюры давления в сечениях (б), профиль скорости в сечениях (в) в момент времени  $t = 0.0005$  с

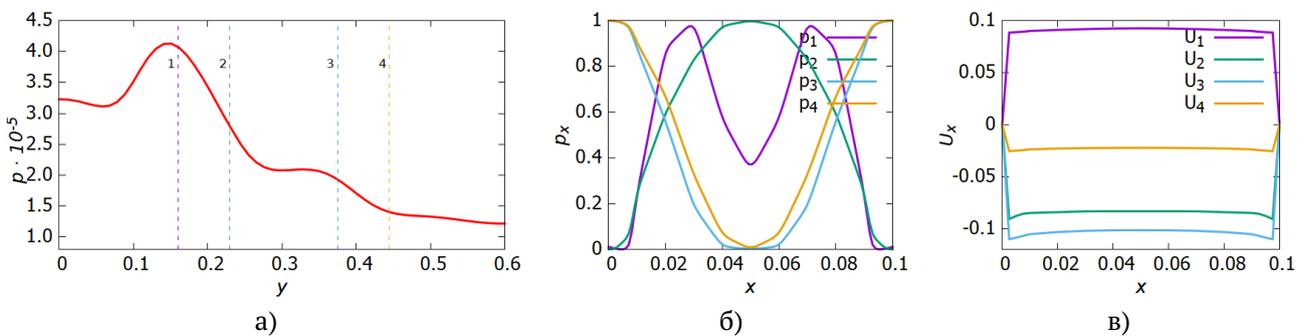


Рис. 5. Продольное распределение давления по центру трубы (а), поперечные эпюры давления в сечениях (б), профиль скорости в сечениях (в) в момент времени  $t = 0.0009$  с

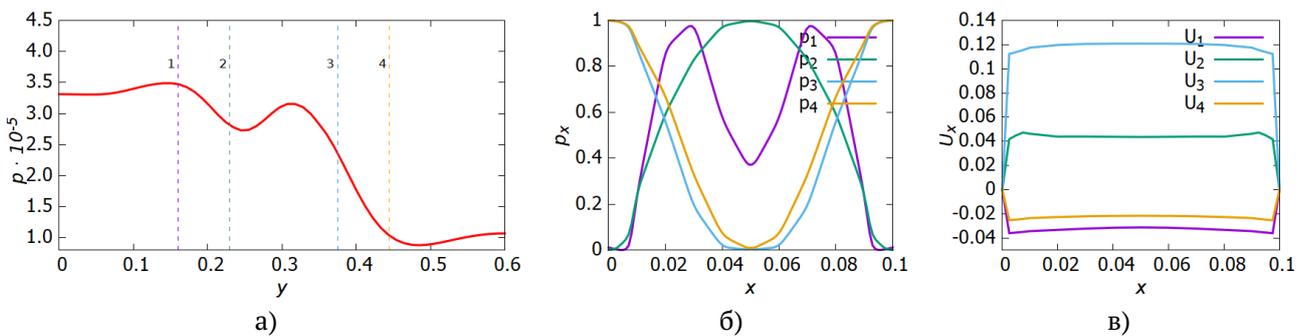


Рис. 6. Продольное распределение давления по центру трубы (а), поперечные эпюры давления в сечениях (б), профиль скорости в сечениях (в) в момент времени  $t = 0.0011$  с



## On the distortion of transmitted and reflected shock waves when interacting with a layer of a granular medium

Bashirova K.I.

Ufa state aviation technical university, Ufa

A model of a shock tube has been prepared to study the behavior of a shock wave in a curved layer of light elastic granular particles located in the center of the tube. For the given problem, a standard mathematical model is written for a two-phase system, consisting of equations of continuity, state and energy, as well as an equation for the force of interphase interaction. Computational experiments were made using the OpenFOAM package. The prepared model allowed to carry out simulations for pressure between  $3 \times 10^5$  Pa and  $10^5$  Pa and concentration of particles 20%, which creates a shock wave. Pressure distributions were obtained at different times in different sections before and after passing through the curved layer, as well as velocity profiles in similar sections. Numerical experiments have shown that the curvature of the layer of granular particles leads to significant scattering of the wave. In addition, significant changes in the wave front were revealed in the near-wall regions after the passage of a layer of granular medium. The redistribution of the fluid flow in the near-wall region is caused by the curvature of the lower boundary of the particle layer.

**Keywords:** shock waves, granular layer, wave scattering, numerical simulation

### References

- [1] Arun K.R., Pathak V. Shock wave mitigation using zig-zag structures and cylindrical obstructions // *Defence Technology*. 2020. 12 p.  
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.10.001>
- [2] Kedrinsky V. K. Shock waves in liquid with gas bubbles // *Combustion, explosion, and shock waves*. 1980. V. 16, No. 5. Pp. 14–25.  
eLIBRARY ID: 35463272
- [3] Britain A., Ben-Dor G. Shock tube study of the dynamical behavior of granular materials // *International Journal of Multiphase Flow*. 2006. V. 32. Pp. 623–642.  
DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007)
- [4] Fedgun V.R., Karinski Y.S., Yankelevsky D.Z. A two-phase model to simulate the 1-D shock wave propagation in porous metal foam // *International Journal of Impact Engineering*. 2015. V. 82. Pp. 113–129.  
DOI: [10.1016/j.ijimpeng.2015.03.012](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2015.03.012)
- [5] Mikhaylenko C.I., Kuleshov V.S. Mathematical modeling of velocity non-uniformity of gas flow behind a porous barrier // *Computational technologies*. 2015. V. 20, No. 6. Pp. 46–58 (in Russian).  
eLIBRARY ID: 25408686
- [6] Bashirova K.I., Mikhaylenko C.I. Three-dimensional modeling of a shock tube in the OpenFOAM package // *Bulletin of Bashkir University*. 2018. V. 23, No. 3. Pp. 621–626 (in Russian).  
eLIBRARY ID: 36476517
- [7] Bashirova K.I., Mikhaylenko C.I. Reflection of a shock wave from a layer of a finely dispersed medium of low concentrations // *Multiphase systems*. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 279–283 (in Russian).  
DOI: [10.21662/mfs2019.4.036](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.036)
- [8] Bashirova K.I., Mikhaylenko C.I. Reflection of a shock wave from a finely dispersed medium of low concentrations // *Journal of Physics: Conference Series*. XXXVI Siberian Thermophysical Seminar (STS 36). 2020. V. 1677. 012051.  
DOI: [10.1088/1742-6596/1677/1/012051](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1677/1/012051)
- [9] Mikhaylenko C.I., Valeeva Yu.R. Highly dispersed medium sedimentation from air under pressure forces // *Numerical methods and Programming*. 2013. V. 14. Pp. 328–33.  
eLIBRARY ID: 21014483
- [10] Bagnold R.A. Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // *Proc. R. Soc. Lond.* 1954. V. 225. Pp. 49–63.  
DOI: [10.1098/rspa.1954.0186](https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0186)



## Пляшущие капли на воде

Терентьев А.Г.

Чувашский государственный университет им И.Н. Ульянова, Чебоксары

В работе предлагается теоретическая модель подпрыгивания капли воды на свободной поверхности. Движение капли в воздухе описывается обычными уравнениями, связывающими силы инерции, тяжести и Стокса (сопротивление вязкости). Капля считается сферической с заданным поверхностным натяжением. Численные расчеты проводились по одному и тому же алгоритму, но с разными начальными условиями. Одни условия задаются для распада капли, другие – для отражения капли от свободной поверхности. Показано, что распад капли происходит периодически с уменьшением размера капли и увеличением высоты подъема капли. В промежутке между распадами капли происходит периодическое отражение от свободной поверхности с уменьшением высоты подъема.

**Ключевые слова:** капля, поверхность, поверхностное натяжение

### 1. Введение

Исследованию взаимодействия капли со свободной поверхностью воды посвящено большое количество работ [1–4]. Подробная информация представлена в статьях [5, 6]. Численные методы применительно к каплям и кавернам можно найти в [7]. Следует отметить, что достаточно широкий материал, особенно съёмки замедленных движений капли, можно найти в интернете. В частности, Вячеслав Медведь представил интересный кинофильм с замедленным падением капли на воду. Путем сравнения снимков он показал, что после распада капли диаметр новой капли уменьшается вдвое. В промежутке между распадами капли происходит периодическое отражение от свободной поверхности с уменьшением амплитуды. Так повторяется несколько раз, демонстрируя «пляску» капли на воде. Процесс происходит в весьма малом промежутке времени, так что при обычном наблюдении невооруженным глазом это невозможно зафиксировать, только высокочастотной фотокамерой (2000 кадров в секунду и более). Несмотря на многочисленные опытные наблюдения такой «пляски», теоретического объяснения данного явления

не имеется. Скоростные фотоснимки показывают также, что капля при падении с малой высоты на свободную поверхность подпрыгивает, как на батуте, и постепенно успокаивается, хотя и не разрушается. Можно предположить, что свободные поверхности при соприкосновении не сразу разрушаются, а каждая из них продолжают быть независимой, но соприкасающейся поверхностью. Через некоторый промежуток времени в точке касания происходит разрыв поверхности, и жидкость под внутренним давлением капли выливается в основной поток. Однако часть жидкости образует новую каплю диаметром примерно в два раза меньшим, и которая также совершает вертикальное движение. Это повторяется несколько раз, пока размер капли не уменьшится до предельного малого значения и не исчезнет в основной жидкости.

В настоящей работе предлагается теоретическая модель распада капли воды и последующее колебательное движение на свободной поверхности. Задача состоит из двух проблем: 1) распад капли, 2) отражение капли от свободной поверхности. Последующее вертикальное движение капли в поле силы тяжести с учетом поверхностной силы трения воздуха описывается одним и тем же уравнением. Поскольку движение происходит с малой скоростью, то жидкость (вода) и воздух считаются несжимае-

мыми.

## 2. Начальные условия деформации капли

Пусть капля воды имеет сферическую форму радиуса  $R$ , тогда разность внешнего и внутреннего давлений в соответствии с формулой Лапласа  $\Delta p = 2\sigma/R$ , где  $\sigma$  — поверхностное натяжение. Потенциальная энергия капли  $U = 4\pi\sigma R^2$ . Будем предполагать, что капля первоначально соприкасается с поверхностью основной жидкости, заполняющей нижнее полупространство. При соприкосновении со свободной поверхностью капля некоторый малый промежуток не реагирует на касание, затем поверхность капли разрушается, и часть жидкости из капли перетекает в основную жидкость; другая часть в виде сферы радиуса  $r = R/2$  совершает свободное вертикальное движение в воздухе. Из уравнения Бернулли вычисляется скорость истечения жидкости

$$V_e = 2\sqrt{\sigma/R\rho}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность воды.

Поскольку масса уменьшенной капли  $M_0 = \rho\pi R^3/6$ , а масса жидкости, перетекающей из капли, равна  $M_e = 7\rho\pi R^3/6$ , то сохранение энергии капли выражается равенством

$$U = U_0 + K_0 + K_e,$$

где  $U_0 = 4\pi\sigma r^2$ ,  $K_0 = M_0 V_0^2/2$  — потенциальная и кинетическая энергии уменьшенной капли;  $K_e = M_e V_e^2/2$  — кинетическая энергия части жидкости, перетекающей в основную жидкость.

Отсюда вычисляется начальная скорость капли:

$$V_0 = -\sqrt{2}V_e. \quad (2)$$

## 3. Вертикальное движение капли

На каплю радиуса  $r = R/2$ , кроме силы инерции  $F_{in} = -4\pi r^3 \rho y''/3$ , действуют сила тяжести  $F_g = -4\pi r^3 \rho g/3$  и стоковая сила трения  $F_{St} = -6\pi r \mu V(t)$ , где  $\mu$  — динамическая вязкость воздуха. Поэтому движение капли описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{9\mu}{2\rho r^2} V - g.$$

Решение уравнения с учетом начальных условий ( $V(0) = V_0$ ) определяется стандартными методами. Если обозначить параметр  $a = 9\mu/2r^2\rho$ , то из (2) следует

$$V(t) = \left(\frac{g}{a} + V_0\right) e^{-at} - \frac{g}{a}. \quad (3)$$

Ордината  $y(t) = \int_0^t V(t)dt + r$  или

$$y(t) = \frac{1}{a} \left(\frac{g}{a} + V_0\right) (1 - e^{-at}) + r - \frac{gt}{a}. \quad (4)$$

Из уравнения (3) можно найти момент времени, когда капля достигнет максимальной высоты и скорости  $V(T_0) = 0$ :

$$T_0 = \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{aV_0}{g}\right).$$

Максимальная высота подъема капли  $h = y(T_0)$ .

Момент времени  $T_1$ , когда капля вернется назад и коснется свободной поверхности  $y(T_1) = r$ , можно вычислить только численно, приняв, например, в качестве начального приближения  $t_0 = 2T_0$ .

Через определенное время происходит распад капли: 7/8 жидкости со скоростью (1) устремляются вниз, другая 1/8 часть в виде уменьшенной капли с начальной скоростью (2) совершает вертикальное движение. Если обозначить теперь радиус  $r$  как  $R$ , то все предыдущие формулы будут справедливы и для последующей капли. Так можно проследить весь процесс распада заданной капли. Между распадами капли вновь образованная капля совершает вертикальное затухающее колебание.

## 4. Затухающее колебание капли

После касания свободной поверхности основной жидкости капля не исчезает, а получает некоторый вертикальный импульс и совершает свободное вертикальное движение. Теперь уже рассматривается капля постоянного радиуса  $r$ , и формулы (3), (4) справедливы и в данном случае. Определение начальной скорости представляет очень трудную проблему, связанную с деформацией капли и потерей энергии за счет вязкости. Ясно, что скорость отскока будет меньше скорости падения капли. Здесь для простоты предполагается, что скорость отскока  $V_0 = -V(T_1)/2$ , что примерно согласуется с экспериментальными наблюдениями. С энергетической точки зрения это означает, что 3/4 кинетической энергии капли до удара переходит в диссипативную энергию, 1/4 часть энергии — в кинетическую энергию после удара.

## 5. Результаты расчетов

Все расчеты проводились для конкретных значений плотности воды  $\rho = 999,1 \text{ кг/м}^3$ , плотности воздуха  $\rho_a = 1,225 \text{ кг/м}^3$ , поверхностного натяжения  $\sigma = 0,0728 \text{ Н/м}$ , динамической вязкости воздуха  $\mu_a = 1,746 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м}\cdot\text{с}$ , что соответствует температуре  $15^\circ$ .

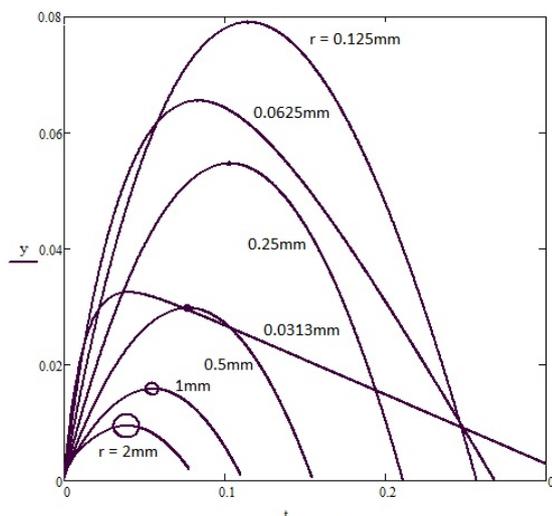


Рис. 1. Кривые зависимости подъема капли различного радиуса. Указанный радиус  $r = 2$  мм соответствует первоначальному радиусу  $R = 4$  мм до распада капли

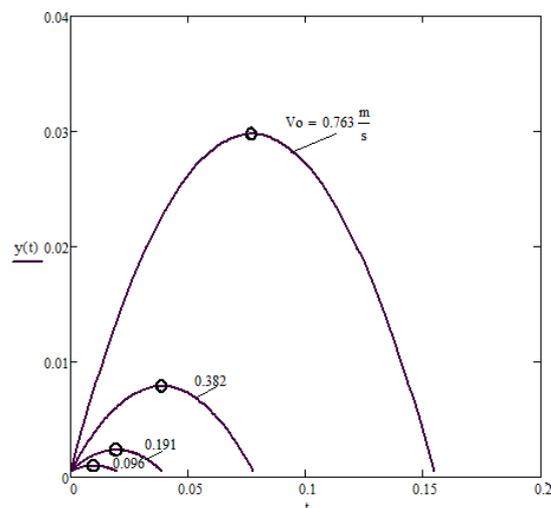


Рис. 2. Зависимость высоты подъема одной и той же капли радиуса  $r = 0,25$  мм после распада капли радиуса  $r = 0,5$  мм

Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 нанесены кривые зависимости подъема капли после распада. Радиус капли показан в миллиметрах, время в секундах. Видно, что с уменьшением капли до  $r = 0,125$  мм высота подъема увеличивается. Это связано с тем, что внутреннее давление капли увеличивается и растет начальная скорость. Однако с уменьшением радиуса  $r < 0,125$  мм высота подъема капли уменьшается, так как большее влияние оказывает вязкость воздуха. Например, при радиусе  $r = 0,0314$  мм, что свойственно каплям в облаках, сила вязкостного трения уравнивается с силой тяжести; капля движется по инерции.

Из рис. 2 видно, что капля между распадами капли радиуса  $R = 0,5$  мм и  $r = 0,25$  мм совершает затухающее колебание. Аналогичное колебание наблюдается и на других интервалах. Заметим, что результаты расчетов справедливы для малых чисел Рейнольдса и чисел Вебера. Если высота падения капли достаточно большая, то скорость приведения тоже большая, и капля углубляется в жидкость, образуя воронку и брызги. Этот режим достаточно полно рассмотрен в [1].

## 6. Заключение

1. Разрушение капли на свободной поверхности происходит дискретно с уменьшением радиуса капли, при этом высота подъема капли увеличивается.

2. В промежутке между распадами капли происходит колебательное движение капли.
3. Разрыв поверхности капли при соприкосновении со свободной поверхностью происходит не мгновенно, а через определенный промежуток времени. Эти промежутки, как впрочем, и неупругое отражение от свободной поверхности нуждаются в дополнительном экспериментальном исследовании.

## Список литературы

- [1] Архипов В.А., Трофимов В.Ф. Образование вторичных капель при ударном взаимодействии капли с поверхностью жидкости // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 1. С. 55–62. eLIBRARY ID: 15175888
- [2] Чашечкин Ю.Д., Прохоров В.Е. Аэро-гидроакустика удара свободно падающей капли с поверхностью воды // ДАН РФ. 2010. Т. 434, № 1. С. 51–55. eLIBRARY ID: 15215509
- [3] Mahajan L.D. Liquid drops on the same liquid surface // Nature. 1930. V. 126, No. 3185. P. 761–767. DOI: 10.1038/126761c0
- [4] Hobbs P.V., Kezweeny A.J. Splashing of a water drop // Science. 1967. V. 155, No. 3766. P. 1112–1114. DOI: 10.1126/science.155.3766.1112
- [5] Соловьев А.Д. Слияние капель жидкости при соударениях // Физика облаков и искусственных воздействий. Тр. ЦАГИ. 1969. Вып. 89. С. 3–25.
- [6] Ogus H.N., Prosperetti A. Bubble entrainment by the impact of a drop on liquid surface // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 143–179. DOI: 10.1017/S0022112090002890
- [7] Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. The Hydrodynamics of Cavitating Flows. Backbone Publishing Company, USA. 2011.



## Jumping drops on the surface of the water

Terentiev A.G

Chuvash State University named after I.N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

The paper proposes a theoretical model for the bouncing of a water drop on a free surface. The motion of a drop in air is described by the usual equations connecting the forces of inertia, gravity, and Stokes (viscosity resistance). The drop is considered spherical with a given surface tension. Numerical calculations were carried out using the same algorithm, but with different initial conditions. Some conditions are set for the droplet disintegration, others for the droplet reflection from the free surface. It is shown that the disintegration of a drop occurs periodically with a decrease in the drop size and an increase in the drop rise height. In the interval between droplet decays, periodic reflection from the free surface occurs with a decrease in the rise height.

**Keywords:** drop, surface, surface tension

### References

- [1] Arkhipov V.A., Trofimov V.F. Formation of secondary drops during impact interaction of a drop with a liquid surface // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. V. 46, No. 1. Pp. 42–48.  
DOI: 10.1007/s10808-005-0006-8
- [2] Chashechkin Y.D., Prokhorov V.E. Aero- and hydroacoustics of the impact for a droplet freely falling onto the water surface // *Doklady Physics*. 2010. V. 55, No. 9. Pp. 460–464.  
DOI: 10.1134/S1028335810090090
- [3] Mahajan L.D. Liquid drops on the same liquid surface // *Nature*. 1930. V. 126, No. 3185. P. 761–767.  
DOI: 10.1038/126761c0
- [4] Hobbs P.V., Kezweeny A.J. Splashing of a water drop // *Science*. 1967. V. 155, No. 3766. P. 1112–1114.  
DOI: 10.1126/science.155.3766.1112
- [5] Soloviev A.D. [Merging of liquid droplets upon collisions] *Fizika oblakov i iskusstvennykh vozdeystvij. Trudy CAGI* [Physics of clouds and artificial influences. Proceedings of CAHI]. 1969. Issue 89. Pp. 3–25.
- [6] Ogus H.N., Prosperetti A. Bubble entrainment by the impact of a drop on liquid surface // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 212. P. 143–179.  
DOI: 10.1017/S0022112090002890
- [7] Terentiev A.G., Kirschner I.N., Uhlman J.S. *The Hydrodynamics of Cavitating Flows*. Backbone Publishing Company, USA. 2011.



## Групповая классификация цепочки нелинейных волновых уравнений третьего порядка

Бабков О.К., Мухаметова Г.З.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе приводятся результаты вычисления алгебр точечных симметрий для нелинейных волновых уравнений третьего порядка, связанных в цепочку преобразованиями Бэклунда. Методом Ли–Овсянникова [1–3] найдены основные алгебры точечных симметрий указанных уравнений, выявлены все возможные случаи их расширения и вычислены таблицы коммутаторов найденных алгебр.

**Ключевые слова:** цепочка дифференциальных уравнений, групповая классификация, допустимый оператор, алгебра Ли, таблица коммутаторов

Всюду и далее  $K(s)$  — некоторая достаточно гладкая функция одной переменной, отличная от линейной.

Рассматривается цепочка из четырех уравнений:

$$u_{tt} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} K(u), \quad u = u(t, x),$$

$$v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(v_x), \quad v = v(t, x),$$

$$w_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} K(w_{xx}), \quad w = w(t, x),$$

$$z_{tt} = K(z_{xxx}), \quad z = z(t, x),$$

связанных преобразованиями Бэклунда  $z_x = w$ ,  $w_x = v$ ,  $v_x = u$ , и проводится групповая классификация для каждого из этих четырех уравнений. Следует признать, что основным стимулом к решению данной задачи послужила приведенная в [4] групповая классификация цепочки нелинейных волновых уравнений второго порядка.

Отметим, что для случая линейной функции  $K(s)$  все уравнения цепочки превращаются в одно и то же линейное уравнение  $u_{tt} = \lambda u_{xxx}$

( $\lambda = \text{const} \neq 0$ ) с бесконечномерной алгеброй допустимых операторов:

$$\langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u, 3t\partial_t + 2x\partial_x, h(t, x)\partial_u \rangle, \\ h_{tt}(t, x) = \lambda h_{xxx}(t, x).$$

### Теорема 1. Уравнение

$$u_{tt} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} K(u), \quad u = u(t, x)$$

при произвольной непостоянной функции  $K = K(u)$  допускает 3-мерную алгебру операторов  $L_3 = \langle \partial_t, \partial_x, 3t\partial_t + 2x\partial_x \rangle$ . Таблица коммутаторов:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_1$			$2X_1$
$X_2$			$3X_2$
$X_3$	$-2X_1$	$-3X_2$	

Расширение этой алгебры возможно только в следующих случаях:

- $K(u) = K_1(au + b)^\lambda$ ,  $a \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0, 1, -1/2, -3$ ,  
 $u_{tt} = K_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} (au + b)^\lambda$ :

$$X_4 = -t\partial_t + d \frac{2}{\lambda - 1} \left( u + \frac{b}{a} \right) \partial_u;$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_1$			$2X_1$	
$X_2$			$3X_2$	$-X_2$
$X_3$	$-2X_1$	$-3X_2$		
$X_4$		$X_2$		

2.  $K(u) = K_1(au + b)^{-\frac{1}{2}}, u_{tt} = K_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{1}{\sqrt{au + b}}$ :

$$X_4 = -t\partial_t - \frac{4}{3} \left( u + \frac{b}{a} \right) \partial_u,$$

$$X_5 = x^2\partial_x - 4x \left( u + \frac{b}{a} \right) \partial_u;$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$			$2X_1$		$X_3 + 3X_4$
$X_2$			$3X_2$	$-X_2$	
$X_3$	$-2X_1$	$-3X_2$			$2X_5$
$X_4$		$X_2$			
$X_5$	$-X_3 - 3X_4$		$-2X_5$		

3.  $K(u) = K_1(au + b)^{-3}, u_{tt} = K_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} (au + b)^{-3}$ :

$$X_4 = -t\partial_t - \frac{4}{3} \left( u + \frac{b}{a} \right) \partial_u,$$

$$X_5 = t^2\partial_t + t \left( u + \frac{b}{a} \right) \partial_u;$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$			$2X_1$		
$X_2$			$3X_2$	$-X_2$	$-2X_4$
$X_3$	$-2X_1$	$-3X_2$			$3X_5$
$X_4$		$X_2$			$-X_5$
$X_5$		$2X_4$	$-3X_5$	$X_5$	

4.  $K(z) = K_1 e^{\lambda z}, u_{tt} = K_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\lambda u}$ :

$$X_4 = t\partial_t - \frac{2}{\lambda} \partial_u;$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_1$			$2X_1$	
$X_2$			$3X_2$	$X_2$
$X_3$	$-2X_1$	$-3X_2$		
$X_4$		$-X_2$		

5.  $K(z) = K_1 \ln(au + b), u_{tt} = K_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln(au + b)$ :

$$X_4 = x\partial_x - 3 \left( u + \frac{b}{a} \right) \partial_u;$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_1$			$2X_1$	$X_1$
$X_2$			$3X_2$	
$X_3$	$-2X_1$	$-3X_2$		
$X_4$	$-X_1$			

Других случаев расширения минимальной алгебры  $L_3$  нет.

**Теорема 2.** Уравнение

$$v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(v_x), \quad v = v(t, x)$$

при произвольной нелинейной функции  $K = K(z)$  допускает 5-мерную алгебру операторов

$$L_5 = \langle t\partial_v, \partial_t, \partial_x, \partial_v, 3t\partial_t + 2x\partial_x + 2v\partial_v \rangle.$$

Таблица коммутаторов этой алгебры имеет вид:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$		$-X_4$			$-X_1$
$X_2$	$X_4$				$3X_2$
$X_3$					$2X_4$
$X_4$					$2X_4$
$X_5$	$X_1$	$-3X_2$	$-2X_3$	$-2X_4$	

Расширение этой алгебры возможно в следующих случаях:

1.  $K(z) = K_1(az + b)^\lambda, \quad a \neq 0, \quad \lambda \neq 1, -3,$   
 $v_{tt} = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^3} (av_x + b)^\lambda:$

$$X_6 = a(\lambda - 1)t\partial_t - 2(av + bx)\partial_v;$$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$X_1$		$-X_4$	
$X_2$	$X_4$		
$X_3$			
$X_4$			
$X_5$	$X_1$	$-3X_2$	$-2X_3$
$X_6$	$a(\lambda + 1)X_1$	$-a(\lambda - 1)X_2$	$2bX_4$

	$X_4$	$X_5$	$X_6$
$X_1$		$-X_1$	$-a(\lambda + 1)X_1$
$X_2$		$3X_2$	$a(\lambda - 1)X_2$
$X_3$		$2X_4$	$-2bX_4$
$X_4$		$2X_4$	$-2aX_4$
$X_5$	$-2X_4$		
$X_6$	$2aX_4$		

2.  $K(z) = K_1(az + b)^{-3}, v_{tt} = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^3} (av_x + b)^{-3}$ :

$$X_6 = 4ax\partial_x + (av - 3bx)\partial_v,$$

$$X_7 = at^2\partial_t + t(av + bx)\partial_v;$$

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
X <sub>1</sub>		-X <sub>4</sub>		
X <sub>2</sub>	X <sub>4</sub>			
X <sub>3</sub>				
X <sub>4</sub>				
X <sub>5</sub>	X <sub>1</sub>	-3X <sub>2</sub>	-2X <sub>3</sub>	-2X <sub>4</sub>
X <sub>6</sub>	-2aX <sub>1</sub>	4aX <sub>2</sub>	2bX <sub>4</sub>	2aX <sub>4</sub>
X <sub>7</sub>		$\frac{1}{2}X_6$	-bX <sub>1</sub>	-aX <sub>1</sub>
	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	
X <sub>1</sub>	-X <sub>1</sub>	2aX <sub>1</sub>		
X <sub>2</sub>	3X <sub>2</sub>	-4aX <sub>2</sub>	$-\frac{1}{2}X_6$	
X <sub>3</sub>	2X <sub>4</sub>	-2bX <sub>4</sub>	bX <sub>1</sub>	
X <sub>4</sub>	2X <sub>4</sub>	-2aX <sub>4</sub>	aX <sub>1</sub>	
X <sub>5</sub>			3X <sub>7</sub>	
X <sub>6</sub>			-4aX <sub>7</sub>	
X <sub>7</sub>	-3X <sub>7</sub>	4aX <sub>7</sub>		

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>
X <sub>1</sub>				X <sub>6</sub>	X <sub>3</sub>		3X <sub>1</sub>
X <sub>2</sub>				X <sub>5</sub>		X <sub>3</sub>	2X <sub>2</sub>
X <sub>3</sub>							4X <sub>3</sub>
X <sub>4</sub>	-X <sub>6</sub>	-X <sub>5</sub>					-X <sub>4</sub>
X <sub>5</sub>	-X <sub>3</sub>						X <sub>5</sub>
X <sub>6</sub>		-X <sub>3</sub>					2X <sub>6</sub>
X <sub>7</sub>	-3X <sub>1</sub>	-2X <sub>2</sub>	-4X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	-X <sub>5</sub>	-2X <sub>6</sub>	

Расширение этой алгебры возможно в следующих случаях:

1.  $K(z) = K_1(az + b)^\lambda, a \neq 0, \lambda \neq 0, 1, -3,$   
 $w_{tt} = K_1 \frac{\partial}{\partial x} (aw_{xx} + b)^\lambda:$

3.  $K(z) = K_1 e^{\lambda z}, v_{tt} = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^3} e^{\lambda v_x}:$

$X_6 = \lambda t \partial_t - 2x \partial_v;$

$X_8 = (2\lambda + 1)t \partial_t + 2x \partial_x - \frac{2b}{a} x^2 \partial_w;$

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>
X <sub>1</sub>		-X <sub>4</sub>			-X <sub>1</sub>	$\lambda X_1$
X <sub>2</sub>	X <sub>4</sub>				3X <sub>2</sub>	$-\lambda X_2$
X <sub>3</sub>					2X <sub>4</sub>	2X <sub>4</sub>
X <sub>4</sub>					2X <sub>4</sub>	
X <sub>5</sub>	X <sub>1</sub>	-3X <sub>2</sub>	-2X <sub>3</sub>	-2X <sub>4</sub>		
X <sub>6</sub>	$-\lambda X_1$	$\lambda X_2$	-2X <sub>4</sub>			

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
X <sub>1</sub>				X <sub>6</sub>
X <sub>2</sub>				X <sub>5</sub>
X <sub>3</sub>				
X <sub>4</sub>	-X <sub>6</sub>	-X <sub>5</sub>		
X <sub>5</sub>	-X <sub>3</sub>			
X <sub>6</sub>		-X <sub>3</sub>		
X <sub>7</sub>	-3X <sub>1</sub>	-2X <sub>2</sub>	-4X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
X <sub>8</sub>	$-(2\lambda + 1)X_1$	$-2X_2 + \frac{4b}{a}X_6$		$(2\lambda + 3)X_4$

4.  $K(z) = K_1 \ln(az + b), v_{tt} = K_1 \frac{\partial^2}{\partial x^3} \ln(av_x + b):$

$X_6 = at \partial_t + ax \partial_x - bx \partial_v.$

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>
X <sub>1</sub>		-X <sub>4</sub>			-X <sub>1</sub>	-aX <sub>1</sub>
X <sub>2</sub>	X <sub>4</sub>				3X <sub>2</sub>	aX <sub>2</sub>
X <sub>3</sub>					2X <sub>4</sub>	aX <sub>3</sub> - bX <sub>4</sub>
X <sub>4</sub>					2X <sub>4</sub>	
X <sub>5</sub>	X <sub>1</sub>	-3X <sub>2</sub>	-2X <sub>3</sub>	-2X <sub>4</sub>		
X <sub>6</sub>	aX <sub>1</sub>	-aX <sub>2</sub>	-aX <sub>3</sub> + bX <sub>4</sub>			

	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>
X <sub>1</sub>	X <sub>3</sub>		3X <sub>1</sub>	$(2\lambda + 1)X_1$
X <sub>2</sub>		X <sub>3</sub>	2X <sub>2</sub>	$2X_2 - \frac{4b}{a}X_6$
X <sub>3</sub>			4X <sub>3</sub>	
X <sub>4</sub>			-X <sub>4</sub>	$-(2\lambda + 3)X_4$
X <sub>5</sub>			X <sub>5</sub>	$-(2\lambda + 1)X_5$
X <sub>6</sub>			2X <sub>6</sub>	-2X <sub>6</sub>
X <sub>7</sub>	-X <sub>5</sub>	-2X <sub>6</sub>		
X <sub>8</sub>	$(2\lambda + 1)X_5$	2X <sub>6</sub>		

Других случаев расширения минимальной алгебры L<sub>5</sub> нет.

**Теорема 3.** Уравнение

$w_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} K(w_{xx}), w = w(t, x),$

при произвольной нелинейной функции  $K = K(z)$  допускает 7-мерную алгебру операторов

$L_7 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_w, tx \partial_w, t \partial_w, x \partial_w, 3t \partial_t + 2x \partial_x + 4w \partial_v \rangle.$

Таблица коммутаторов:

2.  $K(z) = K_1(az + b)^{-3}, w_{tt} = K_1 \frac{\partial}{\partial x} (aw_{xx} + b)^{-3}:$

$X_8 = -5t \partial_t + 2x \partial_x - \frac{2b}{a} x^2 \partial_w,$

$X_9 = 4t^2 \partial_t + 2t \left( 2w + \frac{b}{a} x^2 \right) \partial_w;$

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$				$X_6$	$X_3$
$X_2$				$X_5$	
$X_3$					
$X_4$	$-X_6$	$-X_5$			
$X_5$	$-X_3$				
$X_6$		$-X_3$			
$X_7$	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	$X_4$	$-X_5$
$X_8$	$5X_1$	$-2X_2 + \frac{4b}{a}X_6$		$-3X_4$	$-5X_5$
$X_9$	$-X_7 + X_8$	$-\frac{4b}{a}X_4$	$-4X_5$		
	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	
$X_1$		$3X_1$	$-5X_1$	$X_7 - X_8$	
$X_2$	$X_3$	$2X_2$	$2X_2 - \frac{4b}{a}X_6$	$\frac{4b}{a}X_4$	
$X_3$		$4X_3$		$4X_5$	
$X_4$		$-X_4$	$3X_4$		
$X_5$		$X_5$	$5X_5$		
$X_6$		$2X_6$	$-2X_6$	$4X_4$	
$X_7$	$-2X_6$			$3X_9$	
$X_8$	$2X_6$			$-5X_9$	
$X_9$	$-4X_4$	$-3X_9$	$5X_9$		

3.  $K(z) = K_1 e^{\lambda z}$ ,  $w_{tt} = K_1 \frac{\partial}{\partial x} e^{\lambda w_{xx}}$ :

$X_8 = -\lambda t \partial_t + x^2 \partial_w$ .

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_1$				$X_6$
$X_2$				$X_5$
$X_3$				
$X_4$	$-X_6$	$-X_5$		
$X_5$	$-X_3$			
$X_6$		$-X_3$		
$X_7$	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	$X_4$
$X_8$	$\lambda X_1$	$-2X_6$		$-\lambda X_4$
	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_1$	$X_3$		$3X_1$	$-\lambda X_1$
$X_2$		$X_3$	$2X_2$	$2X_6$
$X_3$			$4X_3$	
$X_4$			$-X_4$	$\lambda X_4$
$X_5$			$X_5$	$\lambda X_5$
$X_6$			$2X_6$	
$X_7$	$-X_5$	$-2X_6$		
$X_8$	$-\lambda X_5$			

4.  $K(z) = K_1 \ln(az + b)$ ,  $w_{tt} = K_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln(aw_{xx} + b)$ :

$X_8 = t \partial_t + 2x \partial_x - \frac{2b}{a} x^2 \partial_w$ .

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$X_1$				$X_6$
$X_2$				$X_5$
$X_3$				
$X_4$	$-X_6$	$-X_5$		
$X_5$	$-X_3$			
$X_6$		$-X_3$		
$X_7$	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	$X_4$
$X_8$	$-X_1$	$-2X_2 + \frac{2b}{a}X_6$		$3X_4$
	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
$X_1$	$X_3$		$3X_1$	$X_1$
$X_2$		$X_3$	$2X_2$	$2X_2 - \frac{2b}{a}X_6$
$X_3$			$4X_3$	
$X_4$			$-X_4$	$-3X_4$
$X_5$			$X_5$	$-X_5$
$X_6$			$2X_6$	$-2X_6$
$X_7$	$-X_5$	$-2X_6$		
$X_8$	$X_5$	$2X_6$		

Других случаев расширения минимальной алгебры  $L_7$  нет.

**Теорема 4.** Уравнение

$z_{tt} = K(z_{xxx})$ ,  $z = z(t, x)$

при произвольной непостоянной функции  $K = K(z)$  допускает 9-мерную алгебру операторов

$L_9 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_z, x \partial_z, x^2 \partial_z, t \partial_z, tx \partial_z, tx^2 \partial_z, 3t \partial_t + 2x \partial_x + 6z \partial_z \rangle$ .

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$
$X_1$					
$X_2$				$X_3$	$2X_4$
$X_3$					
$X_4$		$-X_3$			
$X_5$		$-2X_4$			
$X_6$	$-X_3$				
$X_7$	$-X_4$	$-X_6$			
$X_8$	$-X_5$	$-2X_7$			
$X_9$	$-3X_1$	$-2X_2$	$-6X_3$	$-4X_4$	$-2X_5$
	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	
$X_1$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$3X_1$	
$X_2$		$X_6$	$2X_7$	$2X_2$	
$X_3$				$6X_3$	
$X_4$				$4X_4$	
$X_5$				$2X_5$	
$X_6$				$3X_6$	
$X_7$				$X_7$	
$X_8$				$-X_8$	
$X_9$	$-3X_6$	$-X_7$	$X_8$		

Расширение этой алгебры возможно в следующих случаях:

$$1. K(z) = K_1(az + b)^\lambda + K_0, \quad \lambda \neq 0, 1, -3, -\frac{1}{2}, \\ a \neq 0, \quad z_{tt} = K_1(az_{xxx} + b)^\lambda + K_0:$$

$$X_{10} = (\lambda - 1)t\partial_t - \left( \lambda K_0 t^2 - \frac{b}{3a} x^3 - 2az \right) \partial_z;$$

$$2. K(z) = K_1(az + b)^{-1/2} + K_0, \quad z_{tt} = K_1(az_{xxx} + \\ + b)^{-1/2} + K_0:$$

$$X_{10} = -3ax\partial_x + \left( \frac{3}{2}aK_0t^2 + bx^3 - 3az \right) \partial_z,$$

$$X_{11} = x^2\partial_x - \left( K_0xt^2 + \frac{b}{6a}x^4 - 2xz \right) \partial_z;$$

$$3. K(z) = K_1(az + b)^{-3} + K_0, \quad z_{tt} = K_1(az_{xxx} + b)^{-3} + K_0:$$

$$X_{10} = -8ax\partial_x + (9aK_0t^2 + bx^3 - 18az)\partial_z,$$

$$X_{11} = t^2\partial_t + \left( \frac{K_0}{2}t^3 + \frac{b}{6a}tx^3 + tz \right) \partial_z;$$

$$4. K(z) = K_1e^{\lambda z} + K_0, \quad z_{tt} = K_1e^{\lambda z_{xxx}} + K_0:$$

$$X_{10} = 3\lambda t\partial_t + (3\lambda K_0t^2 - x^3)\partial_z;$$

$$5. K(z) = K_1 \ln(az + b) + K_0, \quad z_{tt} = K_1 \ln(az_{xxx} + \\ + b) + K_0:$$

$$X_{10} = -2ax\partial_x + (3aK_1t^2 + bx^3)\partial_z.$$

Других случаев расширения минимальной алгебры  $L_9$  нет.

В последней теореме приведена только таблица коммутаторов основной алгебры допустимых операторов, остальные же таблицы коммутаторов не приводятся ввиду их значительного размера.

### Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962. 239 с.
- [2] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во НГУ, 1966. 132 с.
- [3] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [4] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. Boca Ration: CRC Press Inc., 1994.



## Group classification of third order nonlinear wave equations chain's

Babkov O.K., Mukhametova G.Z.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

The paper presents the results of point symmetries Lie algebras for third-order nonlinear wave equations calculating linked into a chain by Bäcklund transformations. Calculations are carried out by using Lie-Ovsyannikov method of group analysis. The basic algebras of point symmetries of the indicated equations are found, all possible cases of their extension are revealed, and the commutator tables of algebras found are calculated.

**Keywords:** differential equations's chain, group classification, admissible operator, Lie algebra, commutators table

### References

- [1] Ovsyannikov L.V. [Group properties of differential equations ] *Gruppovye svoystva differentsial'nykh uravnenij*. Novosibirsk: Sibir Branch AS USSR, 1962. 239 p.
- [2] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the theory of group properties of differential equations] *Lekcii po teorii gruppovykh svoystv differentsial'nykh uravnenij*. Novosibirsk: NSU, 1966. 132 p.
- [3] Ibragimov N.H. [Transformation groups in mathematical physics] *Gruppy preobrazovanij v matematicheskoj fizike*. M.: Science, 1983. 280 p.
- [4] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. Boca Ration: CRC Press Inc., 1994.

# Содержание

## Урманчиев С.Ф.

Аналитический обзор трудов конференции

«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения» ..... 133–143

## Механика жидкости и газа

### Насибуллаева Э.Ш., Урманчиев С.Ф.

Термокапиллярный дрейф капель и пузырьков в вязкой жидкости (обзор) ..... 144–158

### Гайнулина Э.Ф.

Влияние синерезиса водной пены на скорость распространения ударной волны ..... 159–166

### Топольников А.С.

Применение методов математического моделирования

при контроле и оптимизации нестационарного режима нефтяной скважины ..... 167–175

### Насибуллаева Э.Ш.

Определение числа членов при усечении рядов для численного решения

задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер ..... 176–182

## Механика твердого тела

### Насибуллаев И.Ш.

Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX

для моделирования статических задач упругости ..... 183–200

## Краткие сообщения

### Делев В.А.

Динамика дислокаций в доменной структуре нематического жидкого кристалла ..... 201–207

### Низамова А.Д., Валиев А.А.

Математическая модель вытеснения нефти водой в плоском канале ..... 208–211

### Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А.

Сопоставление численного и автомодельного решений

задачи Седова о точечном взрыве в газе ..... 212–216

### Сираева Д.Т., Юлмухаметова Ю.В.

Преобразования уравнений газовой динамики и базисных операторов

допускаемой 11-мерной алгебры Ли ..... 217–222

### Баширова К.И.

Об искажении проходящей и отраженной ударных волн

при взаимодействии со слоем гранулированной среды ..... 223–227

### Терентьев А.Г.

Пляшущие капли на воде ..... 228–231

### Бабков О.К., Мухаметова Г.З.

Групповая классификация цепочки нелинейных волновых уравнений третьего порядка ..... 232–237

# Contents

## Urmancheev S.F.

Analytical review of the proceedings of the conference  
"Multiphase Systems: Models, Experiment, Applications" ..... 133–143

## Liquid & Gas Mechanics

### Nasibullaeva E.Sh., Urmancheev S.F.

Thermocapillary migration of droplets and bubbles in a viscous liquid (review) ..... 144–158

### Gainullina E.F.

Influence of aqueous foam syneresis on the shock wave propagation velocity ..... 159–166

### Topolnikov A.S.

Application of mathematical modeling during monitoring and optimization  
of non-stationary regime of oil well ..... 167–175

### Nasibullaeva E.Sh.

Terms number determination at the series truncation for the numerical solution  
of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set ..... 176–182

## Solid Mechanics

### Nasibullayev I.Sh.

Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX  
for simulation of static elasticity problems ..... 183–200

## Brief Communications

### Delev V.A.

Dynamics of dislocations in the domain structure of the nematic liquid crystal ..... 201–207

### Nizamova A.D., Valiev A.A.

Mathematical model of oil displacement by water in a plane channel ..... 208–211

### Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A.

Comparison of the numerical and self-similar solutions  
of Sedov's problem on a point explosion in gas ..... 212–216

### Siraeva D.T., Yulmukhametova Y.V.

Transformations of gas dynamics equations and basis operators  
of a admitted 11-dimensional Lie algebra ..... 217–222

### Bashirova K.I.

On the distortion of transmitted and reflected shock waves  
when interacting with a layer of a granular medium ..... 223–227

### Terentiev A.G.

Jumping drops on the surface of the water ..... 228–231

### Babkov O.K., Mukhametova G.Z.

Group classification of third order nonlinear wave equations chain's ..... 232–237