ISSN: 2658–5782

Номер 4 Октябрь–Декабрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 4, с. 268–273

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.4.034
DOI: 10.21662/mfs2019.4.034
УДК

Получена: 2.12.2019
Принята: 25.12.2019

Цепочка вложенных инвариантных подмоделей конических движений[1]

Мукминов Т.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Уравнения механики сплошной среды инвариантны относительно группы Галилея, расширенной растяжением. Ее 11-мерная алгебра Ли имеет множество подалгебр, которые сведены в оптимальную систему неподобных подалгебр. Подалгебры из оптимальной системы образуют граф вложенных подалгебр. В графе выделяется множество цепочек подалгебр. Выбрана цепочка подалгебр, состоящих из операторов переносов по пространственной переменной и времени, вращения и равномерного растяжения по всем независимым переменным. Для подалгебр выбираются согласованные инварианты. На их основе строится цепочка инвариантных подмоделей в цилиндрической системе координат. Решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут являться решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей из рассматриваемой цепочки. Таким образом, получена цепочка вложенных инвариантных подмоделей на примере уравнений идеальной газовой динамики.

Ключевые слова: группа Галилея, алгебра Ли операторов,цепочка вложенных подалгебр, согласованные инварианты, инвариантные подмодели

1. Введение

Модели механики сплошной среды допускают группу Галилея, расширенную растяжением. Базис соответствующей 11-мерной алгебры Ли L_{11} [1] в декартовой системе координат состоит из следующих операторов:

1) переносов по пространству

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z;$$

2) галилеевых переносов

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,\ X_5 = t\partial_y + \partial_v,\ X_6 = t\partial_z + \partial_w;$$

3) вращений

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$$
$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$
$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u;$$

4) переноса по времени

$$X_{10} = \partial_t;$$

5) равномерного растяжения

$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$$

где t — время, $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{u} = (u, v, w)$ — координаты частицы и скорости.

Подалгебра алгебры L_{11} — это линейное подпространство, замкнутое относительно коммутатора

$$X, Y \in L_{11} \Rightarrow [X, Y] = XY - YX \in L_{11}.$$

С точностью до внутренних автоморфизмов подалгебры различных размерностей приведены

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-10071) и по госзаданию №0246-2019-0052.

в [2]. Это оптимальная система серий классов подобных подалгебр. Параметры серий являются инвариантами внутренних автоморфизмов.

В таблице оптимальной системы введены следующие обозначения. Подалгебры записаны в виде $k.n$, где k — размерность подалгебры; n — порядковый номер подалгебры в данной размерности.

По оптимальной системе построен граф вложенных подалгебр в виде таблицы [1]. Рассмотрим цепочку вложенных подалгебр из оптимальной системы, взятой из таблицы графа: $1.6 \subset 2.5 \subset 3.2 \subset 4.3$, где подалгебры заданы базисами из операторов дифференцирования

$$\begin{gathered}
1.6 = \{X_7 + X_{10}\}\,, \\
2.5 = \{X_7,\, X_{10}\}\,, \\
3.2 = \{X_7,\, X_{10},\, X_{11}\}\,, \\
4.3 = \{X_1,\, X_7,\, X_{10},\, X_{11}\},
\end{gathered}$$

которые допускаются уравнениями газовой динамики. Выберем согласованные инварианты этой цепочки. Инварианты подалгебры меньшей размерности должны содержать инварианты подалгебры большей размерности [3].

Уравнения газовой динамики имеют 4 независимые переменные t, $\vec{x}$ и 5 функций $\vec{u}$, p, ρ — всего 9 переменных. У подалгебры размерности k будет $9-k$ точечных инвариантов. Выбирают s, $0 \leqslant s < 4$, инвариантов в качестве новых независимых переменных (ранг подмодели). Если выражения для инвариантов зависят от исходных независимых переменных, то они должны входить в число новых независимых переменных. Из полученных выражений для инвариантов находят некоторое число функций. Функции, которые не определяются из выражений, являются функциями первоначально общего вида, т.е. зависят от t, $\vec{x}$. Число таких функций называется дефектом подмодели. В этом случае подмодель называется частично инвариантной [4]. В настоящей работе они не рассматриваются.

Таким образом, получено представление решения, которое подставляем в уравнения газовой динамики в удобной системе координат. Доказано, что после исключения функций общего вида получится система уравнений только для новых функций [4]. Если для цепочки подалгебр выбраны согласованные инварианты, то полученные с их помощью подмодели будут вложены друг в друга. Это значит, что всякое решение подмодели с меньшим числом независимых переменных будет точным решением подмодели с большим числом независимых переменных для подмоделей одного дефекта [3].

2. Построение инвариантных подмоделей

2.1. Выбор уравнения состояния

Для механики сплошной среды термодинамические параметры таковы: ρ — плотность; p — давление; T — температура; ε — удельная внутренняя энергия; S — энтропия. Они связаны тождеством

$$TdS = d\varepsilon + pdV,$$

где $V = \rho^{-1}$ — удельный объем.

Независимых параметров лишь 2 (аксиома термодинамики). Если p, ρ — независимые, то T, S, ε — функции от V, p.

Уравнения газовой динамики (законы сохранения импульса, массы и энергии)

$$\begin{gathered}
\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \\
\rho_t + \vec{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \\
\varepsilon_t + \vec{u}\cdot\nabla\varepsilon + p\rho^{-1}\nabla\cdot\vec{u} = 0
\end{gathered} \qquad (1)$$

замыкаются уравнением состояния.

Пусть $\varepsilon = \varepsilon(S, V)$ — уравнение состояния. Тогда из термодинамического тождества следует

$$\begin{gathered}
TdS = \varepsilon_S dS + \varepsilon_V dV + pdV, \\
T = \varepsilon_S, \;\; p = -\varepsilon_V.
\end{gathered}$$

В этом случае достаточно одного уравнения состояния.

Далее используем уравнение состояния вида:

$$\begin{gathered}
p = f(\rho, S), \;\; T = \varepsilon_S, \\
\varepsilon = -\int \frac{f(\rho, S)}{\rho^2} d\rho + G(S),
\end{gathered}$$

где $G(S)$ — произвольная функция, которая подлежит дополнительному измерению.

2.2. Переход к цилиндрической системе координат

Так как среди операторов цепочки подалгебр есть оператор вращения вокруг одной оси, удобно вычисление подмоделей цепочки подалгебр проводить в цилиндрических координатах:

$$\begin{gathered}
t, \;\; x, \;\; y = r\cos\theta, \;\; z = r\sin\theta, \;\; u = U, \\
v = V\cos\theta - W\sin\theta, \;\; w = V\sin\theta + W\cos\theta, \\
0 \leqslant r < \infty, \;\; 0 \leqslant \theta < 2\pi.
\end{gathered}$$

Обратная замена:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \ \ \theta = \arctan \frac{z}{y},$$
$$V = v \cos\theta + w \sin\theta = \frac{yv + zw}{\sqrt{y^2 + z^2}},$$
$$W = w \cos\theta - v \sin\theta = \frac{yw - zv}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Операторы цепочки подалгебр в цилиндрических координатах:

$$X_1 = \partial_x, \ \ X_4 = t\partial_x + \partial_U, \ \ X_7 = \partial_\theta,$$
$$X_{10} = \partial_t, \ \ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r.$$

Пусть $\vec{e}_x$, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ — ортонормированный базис в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = \vec{i} = \vec{e}_x,$$
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} = \cos\theta \vec{j} + \sin\theta \vec{k} = \vec{e}_r,$$
$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = r(-\sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k}) = r\vec{e}_\theta,$$
$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r,$$
$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta.$$

Перепишем оператор полного дифференцирования по t в виде:

$$D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla = \partial_t + U\partial_x + V\partial_r + \frac{1}{r}W\partial_\theta.$$

Из законов сохранения (1) и термодинамического тождества следует:

$$TDS = D\varepsilon + pD\rho^{-1} = -\frac{p\nabla \cdot \vec{u}}{\rho} + \frac{p\rho\nabla \cdot \vec{u}}{\rho^2} = 0,$$
$$DS = 0.$$

Оператор применяется к базисным векторам:

$$D\vec{e}_r = \frac{1}{r}W\vec{e}_\theta, \ \ D\vec{e}_\theta = -\frac{1}{r}W\vec{e}_r.$$

Уравнения системы (1) в цилиндрических координатах принимают вид:

$$\begin{gathered} DU + \rho^{-1}p_x = 0, \\ DV + \rho^{-1}p_r = r^{-1}W^2, \\ DW + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta = -r^{-1}VW, \\ D\rho + \rho(U_x + V_r + r^{-1}(V + W_\theta)) = 0, \\ DS = 0, \ \ p = f(\rho, S). \end{gathered} \tag{2}$$

2.3. Согласованные инварианты

Получим согласованные инварианты рассматриваемой цепочки, то есть функционально независимые инварианты подалгебры меньшей размерности должны содержать инварианты подалгебры большей размерности.

Инварианты подалгебры

$$\{X_1 = \partial_x, \ X_7 = \partial_\theta, \ X_{10} = \partial_t, \ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r\}$$

вычисляются из системы уравнений $X_i I = 0$. Видно, что I не зависит от x, θ, t, r. Независимые инварианты: U, V, W, p, ρ.

Для подалгебры $\{X_7, X_{10}, X_{11}\}$ инварианты не зависят от θ, t. Инвариант для X_{11} равен $\frac{x}{r} = \Phi$. Остальные инварианты: U, V, W, p, ρ.

Для подалгебры $\{X_7, X_{10}\}$ инварианты не зависят от θ и t. Согласованные инварианты таковы: r, Φ, U, V, W, p, ρ.

Для подалгебры $\{X_7 + X_{10}\}$ согласованные инварианты: $\tau = \theta - t$, r, Φ, U, V, W, p, ρ.

Таким образом, получена цепочка согласованных инвариантов:

$$\{U, V, W, p, \rho\} \subset \{\Phi, U, V, W, p, \rho\} \subset$$
$$\subset \{r, \Phi, U, V, W, p, \rho\} \subset \{\tau, r, \Phi, U, V, W, p, \rho\}.$$

2.4. Вложенные инвариантные подмодели

Для каждой подалгебры из выбранной цепочки построим инвариантную подмодель. Были найдены инварианты подалгебры 1.6:

$$\tau = \theta - t, \ \ r, \ \ \Phi = \frac{x}{r}, \ \ U, \ \ V, \ \ W, \ \ p, \ \ \rho.$$

Первые 3 инварианта выражены через исходные независимые переменные, поэтому их нужно взять за новые независимые переменные. Остальные инварианты назначим функциями от τ, r, Φ.

Представление инвариантного решения:

$$U = U(\tau, r, \Phi), \ \ V = V(\tau, r, \Phi), \ \ W = W(\tau, r, \Phi),$$
$$p = p(\tau, r, \Phi), \ \ \rho = \rho(\tau, r, \Phi).$$

Сделаем замену переменных t, τ, r, Φ в операторах дифференцирования:

$$\partial_t = \partial_t + \frac{\partial \tau}{\partial t}\partial_\tau = \partial_t - \partial_\tau,$$
$$\partial_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\partial_\Phi = \frac{1}{r}\partial_\Phi,$$
$$\partial_\theta = \frac{\partial \tau}{\partial \theta}\partial_\tau = \partial_\tau,$$
$$\partial_r = \frac{\partial r}{\partial r}\partial_r + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\partial_\Phi = \partial_r - \frac{x}{r^2}\partial_\Phi = \partial_r - \frac{\Phi}{r}\partial_\Phi.$$

Тогда оператор D примет вид:

$$D = \partial_t + \left(\frac{W}{r} - 1\right)\partial_\tau + V\partial_r + \frac{1}{r}\left(U - V\Phi\right)\partial_\Phi.$$

Из системы (2) следует:

$$\begin{gathered}
DU + \frac{1}{r\rho}p_\Phi = 0,\\
DV + \frac{1}{\rho}\left(p_r - \frac{\Phi}{r}p_\Phi\right) = \frac{1}{r}W^2,\\
DW + \frac{1}{r\rho}p_\tau = -\frac{1}{r}VW,\\
D\rho + \rho\left[V_r + \frac{1}{r}(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V + W_\tau)\right] = 0,\\
DS = 0, \quad p = f(\rho, S),
\end{gathered} \tag{3}$$

где можно считать

$$D = \left(\frac{W}{r} - 1\right)\partial_\tau + V\partial_r + \frac{1}{r}(U - V\Phi)\partial_\Phi.$$

Полученная система содержит только инварианты. Итак, построена инвариантная подмодель ранга 3 подалгебры 1.6.

Перейдем к подалгебре 2.5 с инвариантами r, Φ, U, V, W, p, ρ. Представление инвариантного решения имеет вид:

$$\begin{gathered}
U = U(r, \Phi),\ V = V(r, \Phi),\ W = W(r, \Phi),\\
p = p(r, \Phi),\ \rho = \rho(r, \Phi).
\end{gathered}$$

Исходная система (2) запишется так:

$$\begin{gathered}
DU + \frac{1}{r\rho}p_\Phi = 0,\\
DV + \frac{1}{\rho}\left(p_r - \frac{\Phi}{r}p_\Phi\right) = \frac{1}{r}W^2,\\
DW = -\frac{1}{r}VW,\\
D\rho + \rho\left[V_r + \frac{1}{r}(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V)\right] = 0,\\
DS = 0, \quad p = f(\rho, S),
\end{gathered} \tag{4}$$

где можно считать $D = V\partial_r + \frac{1}{r}(U - V\Phi)\partial_\Phi$.

Получена инвариантная подмодель ранга 2 подалгебры 2.5. Легко заметить, что подмодель могла быть построена по подмодели (3) подалгебры 1.6. Достаточно принять функции U, V, W, p и ρ независимыми от τ. Это следует из того, что были выбраны согласованные инварианты. Можно сделать вывод, что решения подмодели (4) подалгебры 2.5 будут частными решениями подмодели (3) подалгебры 1.6.

Аналогично строится инвариантная подмодель подалгебры 3.2. Среди инвариантов был найден лишь один, зависящий от исходных независимых переменных, поэтому инвариантная подмодель будет иметь ранг 1. Представление инвариантного решения

$$\begin{gathered}
U = U(\Phi),\ \ V = V(\Phi),\ \ W = W(\Phi),\\
p = p(\Phi),\ \ \rho = \rho(\Phi)
\end{gathered}$$

подставим в (2). Получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
D_1 U + \frac{1}{\rho}p_\Phi = 0,\\
D_1 V - \frac{\Phi}{\rho}p_\Phi = W^2,\\
D_1 W = -VW,\\
D_1\rho + \rho(U_\Phi - \Phi V_\Phi + V) = 0,\\
D_1 S = 0, \quad p = f(\rho, S),
\end{gathered} \tag{5}$$

где $D_1 = (U - \Phi V)\partial_\Phi$.

Все функции зависят только от Φ. Подмодель из обыкновенных дифференциальных уравнений при $U \neq \Phi V$ имеет интегралы:

$$\begin{gathered}
A\rho(U - \Phi V) = W^2,\\
U^2 + V^2 + W^2 + 2\int\frac{d\rho}{\rho} = B^2,\\
S = S_0,
\end{gathered}$$

где A, B и S_0 — постоянные, и сводится к системе конических движений [2]:

$$\begin{gathered}
\Phi U' + V' = \sigma A\rho,\\
\left[(U - \Phi V)^2 - f_\rho\right]U' + \Phi f_\rho V' = V f_\rho,
\end{gathered}$$

где $\sigma = \mathrm{sign}(U - \Phi V)$. При $U = \Phi V$ из уравнений системы (5) следует покой:

$$p = p_0,\ \ U = V = W = 0,\ \ p_0 = f(\rho, S).$$

Решения полученной подмодели будут являться частными решениями подмодели (4).

Подалгебра 4.3 не имеет инварианта, зависящего от исходных независимых переменных, поэтому представление инвариантного решения U, V, W, p, ρ — постоянные. Из (3) получим:

$$\begin{gathered}
W^2 = 0,\\
VW = 0,\\
\rho V = 0,\\
p = f(\rho, S).
\end{gathered} \tag{6}$$

Решения $U = U_0$, $V = W = 0$, $\rho = \rho_0 \neq 0$, $p = p_0 = f(\rho_0, S_0)$, $S = S_0$ являются инвариантными решениями ранга 0. Они являются тривиальными решениями системы (5).

3. Заключение

В настоящей работе рассмотрена цепочка вложенных подалгебр 11-мерной алгебры Ли для идеальной модели гидродинамического типа. Для подалгебр выбраны согласованные инварианты. На их основе построена цепочка инвариантных подмоделей и рассмотрены их решения. Проверено, что решения подмодели, построенной по подалгебре большей размерности, будут являться решениями подмоделей, построенных по подалгебрам меньших размерностей из рассматриваемой цепочки.

Дальнейшее исследование подалгебр больших размерностей относится к построению подмоделей для дифференциальных инвариантов (содержащих производные), поскольку точечных инвариантов (не содержащих производные) недостаточно, чтобы конструктивно построить подмодель. Такие подмодели будут частично инвариантными большого дефекта и требуют изучения совместности переопределенных систем.

Список литературы

[1] Мукминов Т.Ф., Хабиров С.В. Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 121–143.
DOI: 10.33048/semi.2019.16.006

[2] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ, 2013. 224 с.
https://elibrary.ru/item.asp?id=19444103

[3] Хабиров С.В. Иерархия подмоделей дифференциальных уравнений // СМЖ. 2013. Т. 54, № 6. С. 1396–1406.
https://elibrary.ru/item.asp?id=21295273

[4] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск.: НГТУ, 2012. 659 с.
https://elibrary.ru/item.asp?id=21714062

ISSN 2658–5782 14 (2019), **4**, 268–273

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.4.034
DOI: 10.21662/mfs2019.4.034

Received: 2.12.2019
Accepted: 25.12.2019

The chain of embedded invariant submodels for conic motions

Mukminov T.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa , Russia

The equations of continuum mechanics are invariant in relation to the Galilean group generalized by extention. Its 11-dimensional Lie algebra has many subalgebras, which form the optimal system of dissimilar subalgebras. Subalgebras from the optimal system form the graph of embedded subalgebras. There are many chains of subalgebras in the graph. We consider the chain of embedded subalgebras containing operators of space and time translation, the rotation and uniform extension of all independent variables for the models of the continuous medium mechanics. We choose concordant invariants for each subalgebra from the chain. The chain of invariant submodels is constructed in a cylindrical coordinates based on chosen invariants. It is proved that solutions of a submodel constructed on a subalgebra of higher dimension will be part of solutions of submodels constructed on subalgebra of smaller dimensions for the considered chain. Thus, the chain of embedded invariant submodels is constructed by the example of equations of ideal gas dynamics.

Keywords: Galilean group, Lie algebra, chain of embedded subalgebras, concordant invariants, invariant submodels

References

[1] Mukminov T.F., Khabirov S.V. [Graph of embedded subalgebras of 11-dimensional symmetry algebra for continuous medium]. *Sibirskie e'lektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2019. V. 16. Pp. 121–143. (In Russian)
DOI: 10.33048/semi.2019.16.006

[2] Khabirov S.V. [Analytical methods in gas dynamics] *Analiticheskie metody v gazovoj mexanike*. Ufa: BSU, 2013. P. 224 (in Russian)
https://elibrary.ru/item.asp?id=19444103

[3] Khabirov S.V. A hierarchy of submodels of differential equations. Siberian Mathematical Journal. 2013. V. 54, No. 6. Pp. 1110–1119.
DOI: 10.1134/S0037446613060189

[4] Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of symmetry analysis of differential equations ofcontinuum mechanics. Novosibirsk: NSTU, 2012. P. 659.
https://elibrary.ru/item.asp?id=21714062