

ISSN: 2658–5782

Номер 4

Октябрь–Декабрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Определение скорости и плотности жидкости внутри трубопровода на упругих опорах¹

Юлмухаметов А.А., Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода, провисающего над препятствием и находящегося под действием растягивающей силы. По обе стороны от провисающего участка труба лежит на упругих опорах. Транспортируемая по трубопроводу жидкость находится под давлением. Прямая задача была решена ранее, в настоящей статье решается обратная задача идентификации скорости и плотности транспортируемой жидкости по известным собственным частотам изгибных колебаний. Уравнение изгибных колебаний трубопровода описывается по модели Кирхгоффа. Характеристическое уравнение решается с помощью формул Феррари. Определяется общее решение. Удовлетворяя общее решение граничным условиям, получаем систему уравнений. Эта система дает частотное уравнение, которое решается уже численно на специально разработанной программе в математическом пакете Maple. Применяется метод последовательных приближений, уже после третьей итерации точность вычислений параметров скорости и плотности транспортируемой жидкости составляет примерно 10^{-3} . Таким образом, получено, что с увеличением частоты колебаний плотность жидкости внутри трубы уменьшается. Определено, что с увеличением собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметр скорости транспортируемой жидкости растет. Показано, что по двум низшим частотам изгибных колебаний трубопровода можно определить параметры скорости и плотности жидкости. Приведена зависимость массового расхода жидкости от первой собственной частоты колебаний трубы. Показано, что с увеличением собственных частот массовый расход уменьшается. Результаты исследования помогут развитию методов акустической диагностики и методов неразрушающего контроля и найдут техническое применение для контроля и диагностики состояния трубопроводных систем.

Ключевые слова: трубопровод, упругие опоры, изгибные колебания, собственные частоты, скорость и плотность жидкости

1. Введение

Значительное количество трудов посвящено изучению динамики и неустойчивостей трубопроводов. Несмотря на это, вопрос исследования трубопроводных систем является актуальным не только для нефтяных стран, таких, как Россия, но и для всего мира. Приведем обзор нескольких современных работ в данной области.

В [1] рассматриваются свободные и гармонические колебания трубопровода, возникающие при

транспортировке газосодержащей жидкости. Колебания происходят за счет неравномерного распределения по длине трубы скопления газа. Сам трубопровод рассматривается как балка на упругом основании, описываемая моделью Винклера, подверженная действию пульсационной нагрузки. Определяется спектр частот колебаний. Приведенное решение может быть использовано для прогноза долговечности трубы.

Работа [2] посвящена исследованию отложений парафина в трубопроводах, подвергаемых сезонной чистке. Разработана полуэмпирическая модель накопления отложений парафина, позволяющая рассчитывать распределение отложений по длине трубопровода, а также находить толщину от-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0088).

ложений на стенке перед проведением операции очистки.

В [3] исследуются частоты и формы собственных колебаний шарнирно-опертых по концам криволинейных участков стальных трубопроводов, поддерживающих стационарный поток жидкостей. Здесь определено, что с увеличением рабочего внутреннего давления растут и частоты свободных колебаний. Приведена численная оценка влияния внутреннего гидростатического давления на свободные колебания в зависимости от различных значений кривизны и толщины стенок трубопровода.

В работе [4] приводится точное решение задачи о совместных (связанных) сейсмических колебаниях подземного трубопровода и бесконечной упругой среды. На основании установленной теоремы о разделении граничных условий для волновых потенциалов на поверхности цилиндра предложен способ, существенно упрощающий решение внешней задачи для среды. Здесь также дается сравнение точного решения и решения, полученного в приближении одномерной деформации среды, предложенного ранее при формулировке связанных задач для трубопровода. Результаты сравнения показывают, что решения практически совпадают как при дозвуковом режиме (когда скорость сейсмической волны меньше стержневой скорости распространения волн в трубопроводе), так и в сверхзвуковом, при котором возможно появление резонанса.

Достаточно полный обзор с кратким анализом результатов теоретических исследований устойчивости и колебаний изотропных и композитных (ортотропная модель) цилиндрических оболочек конечной длины при взаимодействии с внутренним потоком жидкости приведен в работе [5]. Здесь сформулированы постановки различных линейных и нелинейных задач о потере устойчивости и закритическом деформировании несущих жидкость оболочек; построены общие и упрощенные расчетные модели, описывающие процессы взаимодействия оболочек с протекающей жидкостью. Предложены критерии, позволяющие устанавливать моменты наступления неустойчивости «квазистатического» (дивергентного) и динамического («флаттерного») видов. Проведен анализ влияния конструктивных особенностей жестко присоединенных к несущей оболочке масс и начальных несовершенств геометрического характера на потерю устойчивости. Рассмотрено влияние окружающей среды на значения критических скоростей движения жидкости, при которых реализуется потеря устойчивости. С использованием одночастотного асимптотического метода построены реше-

ния разрешающих уравнений несущих оболочек, соответствующие их самовозбуждаемым и вынужденным колебаниям. Изучены особенности динамической потери устойчивости и закритического деформирования оболочек при взаимодействии с пульсирующим потоком жидкости. Рассмотрены некоторые задачи о нестационарных процессах медленного прохождения системы «оболочка-протекающая жидкость» через гармонический и параметрический резонансы.

2. Постановка задачи

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода, провисающего над препятствием и находящегося под действием растягивающей силы. По обе стороны от провисающего участка труба лежит на упругих опорах. Транспортируемая по трубопроводу жидкость находится под давлением. По известному спектру частот требуется определить скорость и плотность транспортируемой жидкости.

Прямая задача идентификации собственных частот изгибных колебаний трубопровода по известным скоростному параметру, параметру плотности жидкости, коэффициентам упругости опор была изучена в [6], в настоящей работе решается обратная задача. Ранее уже проводились подобные исследования. Определение параметров упругости грунта, присоединенной массы грунта, давления жидкости по известным собственным частотам изгибных колебаний трубопровода проведено в работе [7]. В этой работе скорость транспортируемой жидкости не учитывалась.

Уравнение изгибных колебаний трубопровода по модели Кирхгоффа имеет вид [8, 9]:

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + (\rho_i F_i V^2 + P_i F_i - N) \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} + 2\rho_i F_i V \frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} + (\rho F + \rho_i F_i) \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq L).$$

Здесь E — модуль Юнга или модуль продольной упругости материала; ρ — плотность материала трубы; J — осевой момент инерции трубчатого сечения; F — площадь поперечного сечения трубопровода; ρ_i , P_i , V — плотность, давление и скорость течения транспортируемой жидкости; F_i — площадь сечения трубопровода «в свету»; N — усилие растяжения в трубопроводе; w_* — прогиб трубопровода; x — координата, направленная по оси трубопровода; t — время; L — длина трубопровода между опорами. Отсчитывая координату x от точки креп-

ления, запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} Q &= -c_1 w_*, \quad M = c_2 \frac{\partial w_*}{\partial x} \quad (x = 0), \\ Q &= c_3 w_*, \quad M = c_4 \frac{\partial w_*}{\partial x} \quad (x = L), \end{aligned} \quad (2)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — коэффициенты жесткости закрепления трубопровода; $M = EJ (\partial^2 w_*) / (\partial^2 x)$ — изгибающий момент; $Q = EJ (\partial^3 w_*) / (\partial^3 x)$ — перерезывающая сила.

Введя безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad w = \frac{w_*}{L}, \quad \tau = \frac{V_0 t}{L}, \quad V_0 = L^{-1} \sqrt{\frac{EJ}{(\rho F + \rho_i F_i)}}, \\ R &= \frac{(N - P_i F_i) L^2}{EJ}, \quad \alpha = \frac{V}{V_0}, \quad \beta = \frac{\rho_i F_i}{\rho F + \rho_i F_i}, \\ q &= 2\alpha\beta\Omega, \quad \Omega = \frac{\omega L}{V_0}, \quad r = -\Omega^2, \quad F_i = \pi R_i^2, \\ F &= \pi [(R_i + h)^2 - R_i^2], \quad J = \frac{\pi}{4} [(R_i + h)^4 - R_i^4], \\ \eta_1 &= \frac{c_1 L^3}{EJ}, \quad \eta_2 = \frac{c_2 L}{EJ}, \quad \eta_3 = \frac{c_3 L^3}{EJ}, \quad \eta_4 = \frac{c_4 L}{EJ}, \end{aligned}$$

и сделав подстановку $w = W(\xi) \exp(i\Omega\tau)$, из (1) получим уравнение, определяющее форму изгибных колебаний трубопровода:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + p \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + iq \frac{\partial W}{\partial \xi} + rW = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1). \quad (3)$$

$$D = \begin{vmatrix} k_1^3 + \eta_1 & k_2^3 + \eta_1 & k_3^3 + \eta_1 & k_4^3 + \eta_1 \\ k_1^2 - \eta_2 k_1 & k_2^2 - \eta_2 k_2 & k_3^2 - \eta_2 k_3 & k_4^2 - \eta_2 k_4 \\ (k_1^3 - \eta_3) \exp k_1 & (k_2^3 - \eta_3) \exp k_2 & (k_3^3 - \eta_3) \exp k_3 & (k_4^3 - \eta_3) \exp k_4 \\ (k_1^2 - \eta_4 k_1) \exp k_1 & (k_2^2 - \eta_4 k_2) \exp k_2 & (k_3^2 - \eta_4 k_3) \exp k_3 & (k_4^2 - \eta_4 k_4) \exp k_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, в рассматриваемую модель трубопровода, транспортирующего жидкость под давлением, входят параметры $R, \alpha, \beta, \eta_1 - \eta_4$, которые зависят от усилия растяжения в трубопроводе N , давления внутри трубопровода P_i , площади сечения трубопровода «в свету» F_i , скорости течения жидкости внутри трубопровода V , коэффициентов жесткости опор $c_1 - c_4$.

3. Решение обратной задачи

Обратная задача определения плотности и скорости жидкости заземленного по краям трубопровода уже рассматривалась в работе [10]. Здесь по двум частотам изгибных колебаний определяется скоростной параметр, параметр плотности или масса жидкости на единицу длины трубопровода и

Здесь ω — круговая частота; α — скоростной параметр; β — параметр плотности жидкости в трубопроводе; $\eta_1 - \eta_4$ — коэффициенты упругости опор.

С учетом введенных обозначений граничные условия (2) записываются как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^3}{\partial \xi^3} &= -\eta_1 W, \quad \frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} = \eta_2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (\xi = 0), \\ \frac{\partial W^3}{\partial \xi^3} &= \eta_3 W, \quad \frac{\partial W^2}{\partial \xi^2} = \eta_4 \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (\xi = 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Общее решение уравнения (3) будем определять в виде:

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp k_j \xi. \quad (5)$$

Здесь комплексные волновые параметры $k_j = k_j(\alpha, \beta, R, \Omega)$, $j = 1 \dots 4$ находятся из характеристического уравнения $k^4 + pk^2 + iqk + r = 0$, которое решается с помощью формул Феррари так же, как и в работе [6].

Удовлетворяя (5) граничным условиям (4), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных постоянных C_j ($j = 1 \dots 4$). Эта система определяет частотное уравнение

безразмерный массовый расход жидкости по трубопроводу. Задача была решена методом последовательных приближений. Аналогичным образом будем решать и поставленную задачу. Для этого запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} D_1 = D_1(\alpha, \beta, \Omega_1) = 0, \\ D_2 = D_2(\alpha, \beta, \Omega_2) = 0, \end{cases}$$

где $D = D(\alpha, \beta, \Omega_1)$ определяется из уравнения (6) при известных коэффициентах упругости опор $\eta_1 - \eta_4$. Решение этой системы уравнений определяется методом последовательных приближений в области однозначной зависимости скоростного параметра и параметра плотности жидкости от частоты колебаний трубопровода.

Таблица 1. Результаты расчета параметров α и β по известным частотам Ω_1 и Ω_2 при начальном приближении α_0 и β_0 для $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$ (количество итераций расчетной программы = 3)

Ω_1	Ω_2	α_0	β_0	α	β
22.462351	61.704894	0.2	0.2	0.091163	0.091163
22.461301	61.703873	0.2	0.5	0.099905	0.401724
22.460889	61.703558	0.2	0.6	0.099988	0.500944
22.459974	61.702968	0.2	0.8	0.100092	0.700070
22.458698	61.701431	0.25	0.6	0.149833	0.501476
22.455626	61.698451	0.3	0.6	0.199693	0.501732
22.451685	61.694618	0.35	0.6	0.249936	0.500359
22.446862	61.689938	0.4	0.6	0.299785	0.500728

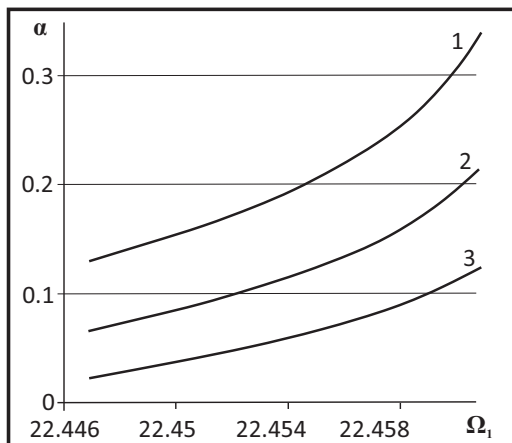


Рис. 1. Зависимость параметра скорости транспортируемой жидкости α от первой собственной частоты Ω_1 изгибных колебаний трубопровода при значениях коэффициентов упругости опор $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$ для разных значений Ω_2 : кривая 1 – 61.698451, 2 – 61.701431, 3 – 61.073558

Задавая начальное приближение α_0, β_0 , получим $D_1 = D_1(\alpha_0, \beta_0, \Omega_1) = u_1, D_2 = D_2(\alpha_0, \beta_0, \Omega_2) = u_2$. Поэтому можем записать

$$\begin{cases} \frac{\partial D_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_1}{\partial \beta} d\beta = -u_1, \\ \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_2}{\partial \beta} d\beta = -u_2. \end{cases}$$

Из последней системы определяются параметры $d\alpha$ и $d\beta$, далее $\alpha_0 = \alpha_0 + d\alpha, \beta_0 = \beta_0 + d\beta$. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие точности.

Результаты расчета параметров α и β колебаний трубопровода с упругими опорами для $R = 0, \eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$ приведены в табл. 1. Вычисления проводятся по вышеописанному методу на специально разработанной программе в среде

Таблица 2. Собственные частоты Ω_1 и Ω_2 при различных параметрах α и β , для $\eta_1 = \eta_3 = 0.5, \eta_2 = \eta_4 = 0$

α	β	Ω_1	Ω_2
0.1	0.1	22.462351	61.704894
0.1	0.4	22.461301	61.703873
0.1	0.5	22.460889	61.703558
0.1	0.7	22.459974	61.702968
0.15	0.5	22.458698	61.701431
0.2	0.5	22.455626	61.698451
0.25	0.5	22.451685	61.694618
0.3	0.5	22.446862	61.689938

программирования Maple. Для сравнения и оценки полученных результатов в табл. 2 приведен спектр частот прямой задачи, определенных при заданных параметрах α и β . Например, для значений $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.5$ в прямой задаче (табл. 2) получены собственные частоты $\Omega_1 = 22.460889$ и $\Omega_2 = 61.703558$. В обратной задаче для этих найденных частот с начальным приближением параметров $\alpha_0 = 0.2, \beta_0 = 0.6$ (табл. 1) после трех итераций вычислительная программа выдает результаты $\alpha = 0.099988$ и $\beta = 0.500944$. Таким образом, программа расчета собственных частот дает достаточно хорошие результаты. Погрешность вычислений параметров скорости и плотности транспортируемой жидкости составляет примерно $\Delta\alpha = |0.1 - 0.099988| \approx 10^{-5}, \Delta\beta = |0.5 - 0.500944| \approx 10^{-4}$. При анализе остальных результатов табл. 1 можно сделать вывод, что параметры α и β определяются с точностью 10^{-3} (для количества итераций равного 3). Очевидно, что с увеличением количества итераций точность решения обратной задачи возрастет.

Таким образом, результаты вычислений обратной задачи, приведенные в табл. 1, имеют хорошую сходимость. На рис. 1 представлена зависимость параметра скорости транспортируемой жидкости α

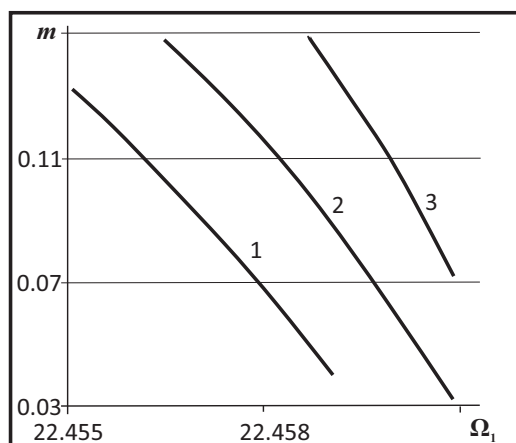


Рис. 3. Зависимость массового расхода m от частоты Ω_1 при $\eta_1 = \eta_3 = 0.5$, $\eta_2 = \eta_4 = 0$ для разных значений Ω_2 : кривая 1 – 61.698451, 2 – 61.701431, 3 – 61.073558

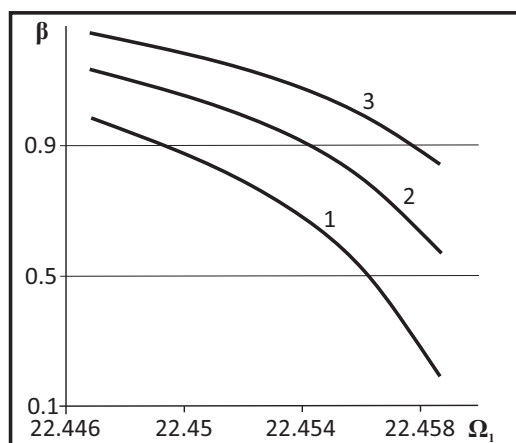


Рис. 2. Зависимость параметра плотности жидкости β от частоты Ω_1 при $\eta_1 = \eta_3 = 0.5$, $\eta_2 = \eta_4 = 0$ для разных значений Ω_2 : кривая 1 – 61.698451, 2 – 61.701431, 3 – 61.073558

от первой собственной частоты Ω_1 при различных значениях параметра Ω_2 . Показано, что с увеличением первой собственной частоты Ω_1 (при фиксированном значении второй собственной частоты Ω_2) параметр скорости жидкости α внутри трубопровода возрастает. На рис. 2 показано влияние собственных частот на плотность жидкости внутри трубопровода. Получено, что с увеличением первой частоты Ω_1 изгибных колебаний трубопровода плотность жидкости β внутри трубопровода падает, причем тем быстрее, чем меньше вторая частота Ω_2 изгибных колебаний.

Зная параметры скорости и плотности жидкости можно вычислить массовый расход по трубопроводу [10]:

$$m = \alpha\beta = \rho_i F_i VL / \sqrt{EJ (\rho F + \rho_i F_i)}.$$

На рис. 3 приведена зависимость массового расхода жидкости m от первой собственной частоты Ω_1 колебаний трубы при разных значениях частоты Ω_2 . Получено, что массовый расход m уменьшается с увеличением первой собственной частоты Ω_1 .

4. Заключение

Определено, что с увеличением частоты колебаний параметр плотности жидкости внутри трубы уменьшается. Показано, что с увеличением собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметр скорости транспортируемой жидкости растет. Получено, что по двум низшим частотам изгибных колебаний трубопровода можно определить параметры скорости и плотности жидкости. Показано, что с увеличением первой собственной частоты массовый расход уменьшается.

Список литературы

- [1] Бондаренко В.М., Травуш В.И. Колебания трубопроводов при транспортировании газосодержащих жидкостей // Academia. Архитектура и строительство. 2017. № 1. С. 101–103. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29093256>
- [2] Ван Вэньда, Хуан Цийу, Хуан Цзунь, Пан Цуань, Фу Цзунь, Ван Фенхуи. Исследование отложений парафина в трубопроводах, подвергаемых сезонной чистке // Химия и технология топлив и масел. 2014. № 1. С. 27–33. <https://elibrary.ru/item.asp?id=22458712>
- [3] Березнев А.В. Влияние внутреннего гидростатического давления на частоты свободных колебаний криволинейного участка трубопровода // Известия ВУЗ. Нефть и газ. 2011. № 3. С. 77–80. <https://elibrary.ru/item.asp?id=16453669>
- [4] Исраилов М. Ш. Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 57–66. <https://elibrary.ru/item.asp?id=25996903>
- [5] Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Устойчивость и нелинейные колебания замкнутых оболочек цилиндрической формы при взаимодействии с протекающей жидкостью (обзор) // Прикладная механика. 2015. Т. 51, № 1. С. 19–78. http://nbuv.gov.ua/UJRN/PMekh_2015_51_1_4
- [6] Хакимов А.Г., Юлмухаматов А.А. Изгибные колебания трубопровода на упругих опорах с движущейся жидкостью // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 10–16. DOI: 10.21662/mfs2019.1.002
- [7] Хакимов А.Г., Юлмухаматов А.А. Обратная задача изгибных колебаний трубопровода // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2018. № 1. С. 86–96. DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96
- [8] Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
- [9] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, Fizmatlit, 1998. P. 208.
- [10] Хакимов А.Г. Определение массового расхода жидкости в трубопроводе под давлением по собственным частотам изгибных колебаний // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2016. № 2. С. 49–57. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26538789>



Determination of the speed and density of the fluid inside the pipeline on elastic supports

Yulmukhametov A.A., Khakimov A.G.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

The natural frequencies of the bending vibrations of the pipeline are investigated. The pipe sags over the obstacle and is under the action of tensile force. Outside the sagging area, the pipe rests on elastic supports. The fluid transported through the pipeline is under pressure. The direct problem was solved earlier, in this article, the inverse problem of identifying the speed and density of the transported fluid by the known natural frequencies of bending vibrations is solved. The equation of bending vibrations of a pipeline is described by the Kirchhoff model. The characteristic equation is solved using Ferrari formulas. The general decision is determined. We substitute the general solution into the boundary conditions and obtain a system of equations. This system gives a frequency equation, which is solved numerically on a developed program in the Maple package. The method of successive approximations is applied, after the third iteration, the accuracy of calculating the parameters of the velocity and density of the liquid is approximately 10^{-3} . Thus, it was found that with an increase in the oscillation frequency, the density of the liquid inside the pipe decreases. It is determined that with increasing natural frequencies of pipe bending vibrations, the fluid velocity parameter increases. It is shown that the two lower frequencies of bending vibrations of the pipeline can be used to determine the parameters of the velocity and density of the liquid. The dependence of the mass flow rate of the liquid on the first natural frequency of the pipe oscillations is given. It is shown that with increasing frequency, the mass flow rate decreases. The research results will help the development of acoustic diagnostic methods and non-destructive testing methods and will find technical application for monitoring and diagnosing the state of pipeline systems.

Keywords: pipeline, elastic supports, bending vibrations, natural frequencies, fluid velocity and density

References

- [1] Bondarenko V.M., Travush V.I. [Oscillations of Pipelines during Transportation of Gas-Containing Liquids]. *Academia. Arhitektura i stroitel'stvo* [Academia. Architecture and Construction]. 2017. No. 1. Pp. 101–103 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=29093256>
- [2] Wang Wenda, Huang Qiyu, Huang Jun, Pang Quan, Fu Jun, Wang Fenghui. Study on Wax Deposition in Seasonally Pigged Pipelines. *Chemistry and Technology of Fuels and Oils*. 2014. V. 50, No. 1. Pp. 39–50.
DOI: 10.1007/s10553-014-0488-2
- [3] Bereznev A.V. [Influence of internal hydrostatic pressure on the frequency of free vibrations of a curved line part of a pipeline]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Neft' i gaz* [Oil and Gas Studies]. 2011. No. 3. Pp. 77–80 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=16453669>
- [4] Israilov M.Sh. Coupled Seismic Vibrations of a Pipeline in an Infinite Elastic Medium. *Mech. Solids*. 2016. V. 51, No. 1. Pp. 46–53.
DOI: 10.3103/S0025654416010052
- [5] Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review). *Int. Appl. Mech.* 2015. V. 51, No. 1. Pp. 12–63.
DOI: 10.1007/s10778-015-0672-z
- [6] Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. [Flexural vibrations of the pipeline on elastic supports with moving fluid]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 1. Pp. 10–16 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.002
- [7] Khakimov A.G., Yulmukhametov A.A. [The inverse problem of bending vibrations of a pipeline]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov* [Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products]. 2018. No. 1. Pp. 86–96 (in Russian).
DOI: 10.17122/ntj-oil-2018-1-86-96
- [8] Svetliczkij V.A. [Rod mechanics] *Mexanika sterzhnej*. V. 2. M.: Vysshaya shkola, 1987. P. 304 (in Russian).
- [9] Ilgamov M.A. *Static Problems of Hydroelasticity*. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998. P. 208.
- [10] Khakimov A.G. [Determination of the mass flow rate of liquids in a pipeline under pressure by the natural frequencies of flexural vibrations]. *Problemy sbora, podgotovki i transporta nefi i nefteproduktov* [Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products]. 2016. No. 2. Pp. 49–57 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=26538789>