

ISSN: 2658–5782

Номер 4

Октябрь–Декабрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Взаимодействие акустической волны с многослойной средой, содержащей слой пузырьковой жидкости¹

Агишева У.О., Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Дискретно-слоистые среды интересны для изучения, поскольку каждый слой своими свойствами может существенно отличаться от соседних, что может быть использовано в технологических процессах. Присутствие небольшого по объему количества пузырьков существенно увеличивает сжимаемость среды, при этом плотность пузырьковой среды сохраняется близкой к значению плотности несущей фазы. С прикладной точки зрения интересной является возможность полного поглощения энергии падающей волны за счет подбора комбинации свойств слоев (протяженности, объемного содержания дисперсной фазы и т.д.). В настоящей работе на основе уравнений механики дисперсных сред рассматривается отражение и прохождение акустических волн, проходящих под прямым углом через трехслойную среду в трубопроводе, содержащую слой пузырьковой жидкости. Из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны выписаны дисперсионные соотношения для каждого из возможных слоев; на их основе аналитически выведены зависимости амплитуды падающей и прошедшей волн от скорости распространения импульса. Получены коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред как в общем, так и в частных случаях для каждого слоя. Данные соотношения позволяют рассчитать возможные последствия при волновом воздействии на рассмотренные среды в случае возникновения чрезвычайных ситуаций на производстве и для их предотвращения.

Ключевые слова: акустическая волна, многослойная среда, пузырьки, дисперсионное уравнение, коэффициент отражения, коэффициент прохождения

1. Введение

В отечественной литературе можно найти достаточно большое количество работ, посвященных анализу распространения акустических волн в многофазных средах, а также в средах, имеющих дискретно-слоистую структуру. Отметим некоторые из работ, непосредственно являющиеся основой настоящей статьи. В одной из первых работ по данной тематике рассмотрен вопрос о распространении малых возмущений в жидкости с пузырьками газа в предположении m -скоростной и m -давленческой модели ($m \geq 2$) [1]. Получено дисперсионное уравнение и выявлено влияние мас-

сообмена (в случае паровых пузырьков), теплообмена, скольжения фаз, полидисперсности на скорость распространения и на затухание малых возмущений. В работе [2] исследовано распространение малых возмущений в двухфазной среде, газовой фазой которой представляет двухкомпонентную смесь паров жидкой фазы и некоего «инертного» газа, не участвующего в процессе массообмена между фазами. Рассмотрены случаи, когда газовая фаза является несущей и, наоборот, взвешенной фазой. Выявлено влияние тепломассообмена и скольжения фаз на скорость распространения и затухание малых возмущений. В [3] рассмотрена задача о распространении малых синусоидальных волн в жидкости, содержащей паровые пузырьки. Показано, что равновесное состояние двухфазной пузырьковой парожидкостной среды будет устойчивым только при определенном условии, налагаемом на объемное содержание и разме-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0052).

ры пузырьков. Проанализировано влияние частоты возмущений, теплообмена между фазами, поверхностного натяжения, объемного содержания и размера пузырьков на скорость распространения и коэффициент затухания.

В начале 2000-х гг. появилось несколько работ, в которых рассматривалось распространение волн в пузырьковых средах в двумерной постановке [4, 5]. В [4] рассмотрен случай распространения волнового сигнала в кусочно-неоднородной по объемному содержанию пузырьков в поперечном направлении области. Получены критерии усиления и ослабления волновых сигналов пузырьковыми экранами конечных размеров. В [5] изучена эволюция волн давления в трубе, заполненной газожидкостной средой, при ступенчатом распределении пузырьков по сечению трубы. Показано, что из-за появления поперечных течений при неравномерном распределении пузырьков происходит более интенсивное затухание импульсного давления по сравнению со случаем гомогенного распределения.

В работе [6] дан анализ основных публикаций журнала «Теплофизика высоких температур» за последние 50 лет по проблемам и особенностям изучения течений сплошной среды, содержащей дисперсную примесь в виде твердых частиц, капель или пузырей.

В работах Шагапова В.Ш. и Сарапуловой В.В. рассмотрены случаи «косого» падения акустического сигнала на границу раздела между парогазокапельной средой и воздухом [7] и пузырьковой и «чистой» жидкостями [8]. Определены критические углы падения, при которых также возможно полное отражение волны от границы раздела. Работы по распространению начального локализованного по поперечной координате волнового импульса в однородной пузырьковой смеси [9, 10] стали продолжением исследований из [4] и расширили ранее полученные результаты.

Настоящая работа является продолжением серии исследований, представленных в [11–16]. Представлены математические модели, определяющие отражение и прохождение акустической волны через многослойную среду. Используя выбранные уравнения и из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны выписаны дисперсионные соотношения для каждого из возможных слоев. На основе полученных дисперсионных соотношений аналитически выведены зависимости амплитуды падающей и прошедшей волн от скорости распространения волнового сигнала. Получены коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред как в общем, так и в частных случаях отдельно.

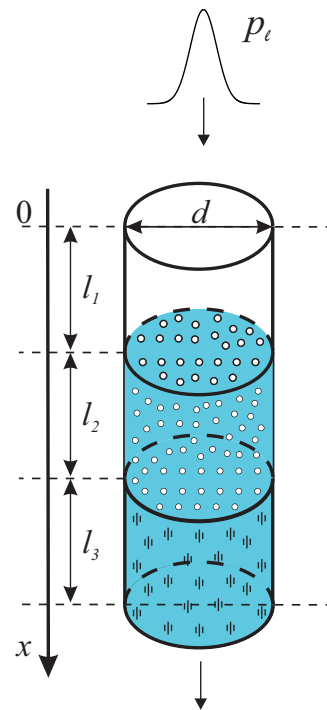


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области в общем случае

2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть вертикальный трубопровод содержит участок с многослойной средой, например, имеется пузырьковый слой между двумя слоями жидкости или слой между воздухом и водой. Давление во всех слоях одинаковое. Рассмотрим малые возмущения, инициируемые изменением давления на одной из границ трубопровода. Будем полагать, что длины волн λ в канале значительно больше, чем диаметр канала. Кроме того, эволюция волн (затухание акустических сигналов) происходит из-за проявления вязкости и теплопроводности в тонком слое вблизи поверхности стенок трубопровода. Это условие в случае гармонических волн, в частности, означает выполнение следующего неравенства $d \gg 4\sqrt{\nu^{(j)}}/\omega$, где d — внутренний диаметр трубопровода; $\nu^{(j)}$ — коэффициент температуропроводности ($j = T$) и кинематической вязкости ($j = \mu$) газа или жидкости, находящейся в трубопроводе. Течение в канале будем полагать одномерным (параметры течения скорость и давление зависят от времени и координаты z , отсчитываемой от входа трубопровода). Для этого, в свою очередь, необходимо выполнение условия: $\lambda > d$ ($\lambda = 2\pi C/\omega$; C — скорость звука в среде) [17].

Процесс эволюции возмущений давления в многослойной системе можно разбить на отдельные этапы (рис. 1):

- распространение сигнала на участке между началом трубопровода $z = 0$ до первой границы раздела $z = l_1$;
- отражение и прохождение через границу раздела между первым слоем и вторым ($z = l_1$);
- распространение сигнала по второму участку от $z = l_1$ до второй границы раздела $z = l_1 + l_2$;
- отражение и прохождение через границу раздела между вторым и третьим слоями ($z = l_1 + l_2$);
- распространение сигнала по третьему участку от $z = l_1 + l_2$ на расстоянии $z = l_3$.

2.1. Трубопровод, заполненный газом

Будем полагать, что при распространении возмущений в трубопроводе сжатие и растяжение газа происходит в адиабатическом режиме, а температурный перепад между газом и стенками обсадной колонны и насосно-компрессорной трубы реализуется в тонком пограничном слое вблизи стенки. При этих предположениях на основе первого начала термодинамики может быть получено следующее уравнение [18]:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \frac{1}{C_g^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \frac{4q}{d} \right), \quad (1)$$

$$q = \sqrt{\frac{v_g^{(T)}}{\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad C_g = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}},$$

$$\gamma = \frac{c_g}{c_g - R_g}, \quad v_g^{(T)} = \frac{\lambda_g}{\rho_{g0} c_g}.$$

Здесь p — возмущение давления; C_g — скорость звука в газе при адиабатическом режиме сжатия и растяжения; c_g , R_g , γ , λ_g — теплоемкость газа при постоянном давлении, приведенная газовая постоянная, показатель адиабаты газа, коэффициент теплопроводности, соответственно.

Уравнение неразрывности в более общем виде с учетом (1) и того, что в начальный момент времени $t_0 = -\infty$ среда покоилась ($p = 0$, $v_z = 0$), можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p + 4 \frac{\sqrt{v_g^{(T)}} (\gamma - 1)}{d \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{p(z, \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right) + \rho_{g0} C_g^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где ρ и v_z — возмущения плотности и скорости газа, ρ_0 — невозмущенное значение (здесь и в дальнейшем индексом (0) снизу снабжены невозмущенные значения параметров течения).

2.2. Трубопровод, заполненный жидкостью

В силу малых колебаний температуры при сжатии жидкости эффектами теплопередачи между флюидом и стенкой трубопровода можно пренебречь, и вместо уравнения (1) будем использовать [18]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_{\ell 0} C_\ell^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где C_ℓ — скорость звука в жидкости.

Кроме теплопередачи на распространение сигналов в трубопроводе оказывают влияние процессы диссипации энергии, связанные с наличием внутреннего трения (вязкости), которое проявляется лишь в тонком пограничном слое вблизи стенки трубопровода. Уравнение, описывающее распространение импульсов с учетом сил вязкого трения о стенки трубопровода, имеет вид:

$$\rho_{\ell 0} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{4\sigma}{d}, \quad (4)$$

где касательное напряжение σ на поверхности стенки может быть определено из соотношения [19]:

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\pi v_\ell^{(\mu)}}} \int_{-\infty}^t \frac{(\partial v_z / \partial \tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau, \quad v_\ell^{(\mu)} = \frac{\mu}{\rho_{\ell 0}}. \quad (5)$$

Уравнения (3), (4) с учетом (5) представляют систему интегродифференциальных уравнений для p и v_z на участках трубопровода, которые заполнены жидкостью.

2.3. Трубопровод, заполненный пузырьковой жидкостью

Поскольку пузырьковый слой имеет небольшую протяженность (максимальная длина до нескольких диаметров трубопровода), то для описания движения можно использовать одномерные уравнения, так как влияние границ на такой длине будет несущественно. Запишем систему макроскопических уравнений сохранения масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в односкоростном приближении [18]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \quad \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (i = \ell, g), \\ \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_\ell}{\partial z} &= 0, \quad \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g w}{a} - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ w &= \frac{da}{dt}, \quad \alpha_\ell + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \\ \rho_i &= \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_\ell, \end{aligned} \quad (6)$$

где a — радиус пузырьков; p_i — давления фаз; ρ_{i0} — истинные плотности фаз; α_i — объемные содержания фаз; q — интенсивность теплообмена; n — число пузырьков в единице объема; w — радиальная скорость пузырьков; v_z — осевая составляющая скорости. Нижними индексами $i = \ell, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [20], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R определяется из уравнения Релея–Ламба, а w_A — из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4v_\ell^{(u)} \frac{w_R}{a} = \frac{1}{\rho_\ell^0} (p_g - p_\ell - 2\frac{\sigma}{a}), \quad (7)$$

$$w_A = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0 C_\ell \alpha_g^{1/3}}.$$

Будем полагать, что жидкость является акустически сжимаемой, а газ калорически совершенным

$$p_\ell = p_0 + C_\ell^2 (\rho_\ell^0 - \rho_{\ell 0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R_g T_g.$$

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad k_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0},$$

где $T_0 = \text{const}$ — температура жидкости, Nu и Pe — числа Нуссельта и Пекле.

Из этой математической модели в частном случае при $\alpha_{g0} = 0$ следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство, в свою очередь, позволяет использовать сквозные методы расчета.

3. Условия на границе слоев

Решения уравнений из п. 2 в каждом из трех слоев (см. рис. 1) должны быть согласованы условиями равенства давлений и условием, следующим из законов сохранения массы. Первое уравнение, следующее из закона сохранения масс, запишется как:

$$\begin{cases} (v_z^{(1)} - v_z^{(2)}) \Big|_{z=l_1} = 0, \\ (v_z^{(2)} - v_z^{(3)}) \Big|_{z=l_1+l_2} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь и в дальнейшем верхними индексами в скобках (1), (2) и (3) снабжены возмущения давления p и скорости v_z , соответственно, на первом, втором и третьем участках.

Второе условие, выражающее равенство возмущений давления при прохождении сигнала через поврежденный участок, имеет вид:

$$\begin{cases} (p^{(1)} - p^{(2)}) \Big|_{z=l_1} = 0, \\ (p^{(2)} - p^{(3)}) \Big|_{z=l_1+l_2} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

4. Дисперсионные уравнения

Решение вышеприведенной системы уравнений будем искать в виде затухающей бегущей волны:

$$p = A_p e^{i(Kz - \omega t)}, \quad v_z = A_{v_z} e^{i(Kz - \omega t)}, \quad (10)$$

$$a = A_a e^{i(Kz - \omega t)}, \quad w = A_w e^{i(Kz - \omega t)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где $\omega > 0$ — круговая частота; $K = k + i\delta$ — волновой вектор. Действительная и мнимая части волнового вектора определяют скорость распространения и затухания гармонических волн, причем

$$C_p = \frac{\omega}{k}, \quad z_\delta = \delta^{-1},$$

где C_p — фазовая скорость; z_δ — характерное расстояние, на которое амплитуда волны уменьшается в e раз.

Из условия существования нетривиального решения вида (10) для системы (1) и (2) получим дисперсионное уравнение для газа:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_g^2} \left(1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_g^{(T)}}{-i\omega d^2}} \right) \times \left(1 + 2 \sqrt{\frac{4v_g^{(u)}}{-i\omega d^2}} \right). \quad (11)$$

Для системы (3) и (4) с учетом (5) получим дисперсионное уравнение для жидкости:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_\ell^2} \left(1 + 2 \sqrt{\frac{4v_\ell^{(u)}}{-i\omega d^2}} \right). \quad (12)$$

Для системы (6) и (7) получим дисперсионное уравнение для пузырьковой жидкости:

$$\frac{K^2}{\omega^2} = \frac{(1 - \alpha_{g0})^2}{C_\ell^2} + 3 \frac{\rho_{\ell 0}^0 \alpha_{g0} (1 - \alpha_{g0})}{\psi}, \quad (13)$$

где

$$\psi = \frac{3\gamma p_{g0}}{Q} - \frac{\rho_{\ell 0}^0 \omega^2 a_0^2}{\xi} - 4i\rho_{\ell 0}^0 v_{\ell}^{(\mu)} \omega - \frac{2\sigma}{a_0},$$

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \xi = 1 - i\omega t_A, \quad t_A = \frac{a_0}{\sqrt[3]{\alpha_{g0} C_{\ell}}},$$

$$Q = 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{k_0} H_{\text{air}} \text{kh}(y_g) + \frac{\gamma}{1 - k_0} H_v \text{kh}(z) \right) \times$$

$$\times \left(\frac{H_{\text{air}}}{k_0} + \frac{\gamma \text{kh}(z)}{(1 - k_0)\beta \text{shv}(y_{\ell})} \right)^{-1},$$

$$\text{kh}(x) = 3(x \text{cth}x - 1)x^{-2},$$

$$\text{sh} v(x) = 3(1 + x(A_0 x \text{th}(x(A_0 - 1)) - 1)) \times$$

$$\times (A_0 x - \text{th}(x(A_0 - 1)))^{-1} x^{-2}$$

или

$$\text{sh} v(x) = 3(1 + x)x^{-2},$$

$$A_0 = \alpha_{g0}^{-1/3}, \quad y_{\ell} = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{v_{\ell}^{(T)}}}, \quad z = \sqrt{-\frac{i\omega a_0^2}{D}},$$

$$\beta = (\gamma - 1)\eta H_v \chi^2, \quad \eta = \frac{\rho_{\ell 0}^0 c_{\ell}}{\rho_{g0}^0 c_g}, \quad \chi = \frac{c_g T_0}{L},$$

$$H_v = \frac{B_v}{B_0}, \quad H_{\text{air}} = \frac{B_{\text{air}}}{B_0}, \quad H = H_v - H_{\text{air}}.$$

5. Связь амплитуд давления и скорости на границе раздела сред

В предположении, что имеет место соотношение $A_p = bA_{v_z}$, на основе уравнений из предыдущего раздела выпишем уравнения для соотношения амплитуд скорости и давления в трубе. Данные соотношения позволяют без длительных и сложных расчетов определить амплитуду давления при изменении амплитуды скорости воздействия. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Из уравнений (1) и (2) с учетом (11) путем несложных преобразований при известном значении K/ω можно получить соотношение для зависимости амплитуд давления и скорости в газе

$$A_p = \rho_{g0} \left(\frac{1 + 2\sqrt{\frac{4v_g^{(\mu)}}{-i\omega d^2}} - C_g^2 \frac{K}{\omega}}{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_g^{(T)}}{-i\omega d^2}} - \frac{K}{\omega}} \right) A_{v_z}. \quad (14)$$

Если значение K/ω заранее неизвестно, то

уравнение (14) примет следующий вид:

$$A_p = \rho_{g0} C_g \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{\frac{4v_g^{(\mu)}}{-i\omega d^2}}}{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_g^{(T)}}{-i\omega d^2}}}} A_{v_z}.$$

Для случая слоя жидкости при известном значении K/ω соотношение амплитуд можно рассчитать из следующей формулы:

$$A_p = \rho_{\ell 0} \left(\frac{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(\mu)}}{-i\omega d^2}} - C_{\ell}^2 \frac{K}{\omega}}{1 - \frac{K}{\omega}} \right) A_{v_z}. \quad (15)$$

Если же значение K/ω неизвестно, то уравнения (15) преобразуется к виду:

$$A_p = \rho_{\ell 0} C_{\ell} \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(\mu)}}{-i\omega d^2}}} A_{v_z}.$$

Уравнение для пузырьковой жидкости при известном значении соотношения K/ω можно записать в следующем виде

$$A_{v_z} = \frac{K}{\omega \rho_{\ell 0} + \rho_{g0}} A_p. \quad (16)$$

6. Коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред в трубе

На основе уравнений из предыдущего параграфа выпишем уравнения для коэффициентов отражения и прохождения через границу раздела. Учитывая принятые условия (7) и (8), запишем уравнение на границе $z = l_1$ и $z = l_1 + l_2$ для гармонических волн. Будем полагать, что на участке $0 < z < l_1$ существуют две волны (падающая и отраженная); на участке $l_1 < z < l_2$ — две волны (проходящая и отраженная от второй границы), а на участке $l_2 < z$ — только одна волна (проходящая). Амплитуды возмущений давления и скорости относящиеся к падающей, отраженной и проходящей волнам снабдим верхними индексами (o), (r) и (s). Рассмотрим каждый случай отдельно.

6.1. Общий случай

Введем коэффициенты отражения и прохождения гармонических волн как

$$R = \frac{A_p^{(r)}}{A_p^{(o)}} \quad \text{и} \quad S = \frac{A_p^{(s)}}{A_p^{(o)}}.$$

Условия на границе раздела должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{cases} p^{(o)} + p^{(r)} = p^{(s)}, \\ v_z^{(o)} + v_z^{(r)} = v_z^{(s)}. \end{cases} \quad (17)$$

Предположим, что амплитуды A_p и A_{v_z} связаны соотношением $A_p = bA_{v_z}$, а K^I и K^{II} – волновые числа сред. Тогда, с учетом (10), получим систему для амплитуд давления p :

$$\begin{cases} p^{(o)} = A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)}, \\ p^{(r)} = A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)}, \\ p^{(s)} = A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} \end{cases} \quad (18)$$

и скорости v_z :

$$\begin{cases} v_z^{(o)} = A_{v_z}^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)} = \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)}, \\ v_z^{(r)} = A_{v_z}^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)} = -\frac{A_p^{(r)}}{b^I} e^{i(-K^I z - \omega t)}, \\ v_z^{(s)} = A_{v_z}^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} = \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)}. \end{cases} \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получим

$$\begin{cases} A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)} + A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)} = A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)}, \\ \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)} - \frac{A_p^{(r)}}{b^I} e^{i(-K^I z - \omega t)} = \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)}. \end{cases} \quad (20)$$

Из первого уравнения (20) выразим слагаемое $A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)}$

$$A_p^{(r)} e^{i(-K^I z - \omega t)} = A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} - A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)}$$

- из газа в пузырьковую жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{2\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) \sqrt{1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}}{K^{II} \rho_{g 0} C_g \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}} + \omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) \sqrt{1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из пузырьковой жидкости в газ:

$$\begin{cases} S = \frac{2K^{II} \rho_{g 0} C_g \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}{\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) \sqrt{1 + 2(\gamma - 1) \sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}} + K^{II} \rho_{g 0} C_g \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

и подставим во второе уравнение той же системы

$$\begin{aligned} \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)} - \frac{1}{b^I} \left(A_p^{(s)} e^{i(K^{II} z - \omega t)} - A_p^{(o)} e^{i(K^I z - \omega t)} \right) = \\ = \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)}. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые

$$2 \frac{A_p^{(o)}}{b^I} e^{i(K^I z - \omega t)} - \frac{A_p^{(s)}}{b^I} e^{i(K^{II} z - \omega t)} - \frac{A_p^{(s)}}{b^{II}} e^{i(K^{II} z - \omega t)} = 0.$$

Чтобы выполнялись условия из (17), необходимо $K^I z = K^{II} z$. Отсюда получим уравнение

$$\begin{aligned} 2 \frac{A_p^{(o)}}{b^I} - A_p^{(s)} \left(\frac{1}{b^I} + \frac{1}{b^{II}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \\ \frac{A_p^{(s)}}{A_p^{(o)}} \left(\frac{1}{b^I} + \frac{1}{b^{II}} \right) = \frac{2}{b^I} \quad \Rightarrow \\ \frac{A_p^{(s)}}{A_p^{(o)}} \left(\frac{b^I + b^{II}}{b^I b^{II}} \right) = \frac{2}{b^I}. \end{aligned}$$

Далее получим выражения для коэффициентов прохождения и отражения в общем виде:

$$\begin{cases} S = \frac{2b^{II}}{(b^I + b^{II})}, \\ R = S - 1 = \frac{2b^{II}}{(b^I + b^{II})} - 1 = \frac{2b^{II} - b^I - b^{II}}{(b^I + b^{II})} = \frac{b^{II} - b^I}{(b^I + b^{II})}. \end{cases} \quad (21)$$

6.2. Частные случаи

С учетом уравнению (21) получим выражения для коэффициентов прохождения и отражения в при прохождении волны:

- из жидкости в пузырьковую жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{2\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0})}{K^{II}\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}} + \omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0})}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из пузырьковой жидкости в жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{K^{II}\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}{\omega(\rho_{\ell 0} + \rho_{g 0}) + K^{II}\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(u)}}{-i\omega d^2}}}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из жидкости в газ:

$$\begin{cases} S = \frac{\rho_{g 0}C_g}{\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}} + \rho_{g 0}C_g}}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

- из газа в жидкость:

$$\begin{cases} S = \frac{\rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}}{\left(\rho_{g 0}C_g + \rho_{\ell 0}C_{\ell}\sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{\frac{4v_{\ell}^{(T)}}{-i\omega d^2}}}\right)}, \\ R = S - 1. \end{cases}$$

Данные соотношения позволяют определить амплитуду прошедшего и отразившегося сигнала в зависимости от интенсивности падающей волны.

7. Заключение

Представлены математические модели, определяющие отражение и прохождение акустической волны через многослойную среду. С использованием выбранных уравнений и из условия существования решения в виде затухающей бегущей волны выписаны дисперсионные соотношения для каждого из возможных слоев. На основе полученных дисперсионных соотношений аналитически выведены зависимости амплитуды падающей и прошедшей волн от скорости распространения волнового сигнала. Получены коэффициенты отражения и прохождения через границу раздела сред как в

общем, так и в частных случаях. Данные соотношения позволяют рассчитать возможные последствия при волновом воздействии на рассмотренные среды при возникновении чрезвычайных ситуаций на производстве и для их предотвращения.

Список литературы

- [1] Шагапов В.Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 18. № 1. С. 90–101. <https://sibran.ru/upload/iblock/bb5/bb5cd5e607fc878488eb4f4a6725a1f0.pdf>
- [2] Азаматов А.Ш., Шагапов В.Ш. Распространение малых возмущений в парогазожидкостной среде // Акустический журнал. 1981. Т. 27, № 2. С. 161–169. http://www.akzh.ru/pdf/1981_2_161-169.pdf
- [3] Вахитова Н.К., Шагапов В.Ш. О распространении малых возмущений в парожидкостных пузырьковых средах // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 25. № 5. С. 34–43. <https://sibran.ru/upload/iblock/71a/71a1de7a615a2b166abb82f311fe4a3c.pdf>
- [4] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. <https://elibrary.ru/item.asp?id=39274845>
- [5] Баязитова А.Р., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Волны давления в трубе, заполненной пузырьковой смесью с неоднородным распределением по сечению // Механика жидкости и газа. 2006. № 3. С. 67–78. <https://elibrary.ru/item.asp?id=9312066>
- [6] Варакин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 3. С. 421–455. <http://mi.mathnet.ru/tvt97>
- [7] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности отражения и преломления акустических волн на границе раздела между газом и дисперсной системой // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, № 5(333). С. 119–129. DOI: 10.15372/PMTF20150510
- [8] Шагапов В.Ш., Сарапулова В.В. Особенности преломления и отражения звука на границе пузырьковой жидкости // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 1. С. 40–48. http://www.akzh.ru/pdf/2015_1_40-48.pdf
- [9] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019). 022008. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008
- [10] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // Journal of Physics: Conf. Series. 1400(2019). 077045. DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045
- [11] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. и др. Особенности распространения звука в теплой воде с воздушными пузырьками // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 4. С. 912–921. <https://elibrary.ru/item.asp?id=35325382>
- [12] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при прямом их падении // Теплофизика высоких температур. Т. 57, № 2. 2019. С. 284–290. DOI: 10.1134/S0040364419010228

- [13] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкости при «косом» их падении // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57, № 3. С. 464–468.
DOI: [10.1134/S0040364419020194](https://doi.org/10.1134/S0040364419020194)
- [14] Agisheva U.O., Vdovenko I.I. and Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 1158(2019). 022007.
DOI: [10.1088/1742-6596/1158/2/022007](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022007)
- [15] Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 1268(2019). 012014.
DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012014](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012014)
- [16] Агишева У.О., Вдовенко И.И., Галимзянов М.Н. Влияние диффузии на акустические свойства пузырьковой жидкости // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 3. С. 165–175.
DOI: [10.21662/mfs2019.3.023](https://doi.org/10.21662/mfs2019.3.023)
- [17] Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука. 1973. 496 с.
- [18] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2. М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.
- [19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
- [20] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Проявление сжимаемости несущей фазы при распространении волны в пузырьковой среде // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1077–1081.



Interaction of an acoustic wave with a multilayer medium containing a bubble liquid layer

Agisheva U.O., Galimzyanov M.N.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

Discrete-layered media are interesting to research since properties of each layer can significantly differ from near by ones and this can be used in technological processes. The presence of a small number of bubbles significantly increases the compressibility of the medium while the density of the bubble medium remains close to the density of the carrier liquid. From the applied point of view it is interesting that the energy of the incident wave can be completely absorbed by combining of layer properties (length, volume content of the dispersed phase, etc.). In this work, based on the equations of mechanics of dispersed media, we consider the reflection and propagation of acoustic waves passing at right angles through a three-layer medium in a pipeline containing a layer of bubble fluid. From the condition for the existence of a solution in the form of a decaying traveling wave, dispersion relations are written for each of the possible layers. Based on them, the dependences of the amplitude of the incident and transmitted waves on the propagation velocity of the pulse are analytically derived. The coefficients of reflection and transmission through the interface are obtained both in the general case and in particular cases for each layer. These ratios make it possible to calculate the possible consequences of a wave action on the considered media in the event of emergencies at work and to prevent them.

Keywords: acoustic wave, multilayer medium, bubbles, dispersion equation, reflection coefficient, transmission coefficient

References

- [1] Shagapov V.Sh. Propagation of small disturbances in a liquid with bubbles // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1977. V. 18. No. 1. Pp. 77–87.
<https://sibran.ru/upload/iblock/bb5/bb5cd5e607fc878488eb4f4a6725a1f0.pdf>
- [2] Azamatov A.Sh., Shagapov V.Sh. Propagation of small disturbances in a vapor-liquid medium // *Soviet Physics. Acoustics*. 1981. V. 27. No. 2. Pp. 89–96.
http://www.akzh.ru/pdf/1981_2_161-169.pdf
- [3] Vakhitova N.K., Shagapov V.Sh. On the propagation of small perturbations in vapor-liquid bubble media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1984. V. 25. No. 5. Pp. 682–689.
<https://sibran.ru/upload/iblock/71a/71a1de7a615a2b166abb82f311fe4a3c.pdf>
- [4] Galimzyanov M.N., Gimaltdinov I.K. and Shagapov V.Sh. Two-dimensional pressure waves in a fluid with bubbles // *Fluid Dynamics*. 2002. V. 37, No. 2. Pp. 294–301.
DOI: 10.1023/A:1015818602291
- [5] Bayazitova A.R., Gimaltdinov I.K., Shagapov V.Sh. Pressure waves in a tube filled with a bubbly mixture with a nonuniform cross-sectional bubble distribution // *Fluid Dynamics*. 2006. No. 3. C. 381–390.
DOI: 10.1007/s10697-006-0054-7
- [6] Varaksin A.Y. Fluid dynamics and thermal physics of two-phase flows: problems and achievements // *High Temperature*. 2013. V. 51, No. 3. Pp. 377–407.
DOI: 10.1134/S0018151X13030073
- [7] Shagapov V.Sh. and Sarapulova V.V. Reflection and refraction of acoustic waves at the interface between a gas and a disperse systems // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. V. 56, No. 5. Pp. 838–847.
DOI: 10.1134/S0021894415050107
- [8] Shagapov V.Sh. and Sarapulova V.V. Characteristic features of rarefaction and reflection of sound at the boundary of a bubble liquid // *Acoustical Physics*. 2015. V. 61, No. 1. Pp. 37–44.
DOI: 10.1134/S1063771014060153
- [9] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Evolution of pressure waves acting on a bubble liquid through adjacent boundaries // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1158. 022008.
DOI: 10.1088/1742-6596/1158/2/022008
- [10] Agisheva U.O. and Galimzyanov M.N. Low-intensity pressure waves in a stratified bubbly liquid // *Journal of Physics: Conf. Series*. 2019. V. 1400. 077045.
DOI: 10.1088/1742-6596/1400/7/077045
- [11] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N., Vdovenko I.I. et al. Characteristic features of sound propagation in a warm bubble-laden water // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2018. V. 91, No. 4. Pp. 854–863.
DOI: 10.1007/s10891-018-1809-9

- [12] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the reection and refraction of acoustic waves at normal incidence on the interface between «pure» and bubbly liquids // High Temperature. 2019. V. 57, No. 2. Pp. 256–262. DOI: [10.1134/S0018151X1901022X](https://doi.org/10.1134/S0018151X1901022X)
- [13] Shagapov V.Sh., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Characteristics of the reection and refraction of acoustic waves at oblique incidence on the interface between «pure» and bubbly liquids // High Temperature. 2019. V. 57, No. 3. Pp. 425–429. DOI: [10.1134/S0018151X19020184](https://doi.org/10.1134/S0018151X19020184)
- [14] Agisheva U.O., Vdovenko I.I. and Galimzyanov M.N. Acoustic waves in a superheated liquid with a gas nuclei // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. V. 1158. 022007. DOI: [10.1088/1742-6596/1158/2/022007](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/2/022007)
- [15] Agisheva U.O., Galimzyanov M.N. and Vdovenko I.I. Acoustic properties of overheated liquid with gas nuclei during temperature increasing // Journal of Physics: Conf. Series. 1268(2019). 012014. DOI: [10.1088/1742-6596/1268/1/012014](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1268/1/012014)
- [16] Agisheva U.O., Vdovenko I.I., Galimzyanov M.N. The effect of diffusion on the acoustic properties of a bubble fluid // Multiphase Systems. 2019. V. 14. No. 3. Pp. 165–175 (in Russian). DOI: [10.21662/mfs2019.3.023](https://doi.org/10.21662/mfs2019.3.023)
- [17] Isakovich M.A. General Acoustics. Moscow: Nauka. 1973. 496 p (in Russian).
- [18] Nigmatulin R.I. Dynamics of Multiphase Media. New York: Hemisphere, 1991, vols. 1 and 2. P. 360 and P. 464.
- [19] Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit. Vol. 6. 2001. 736 p (in Russian).
- [20] Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh. and Vakhitova N.K. Effect of the compressibility of the carrier phase in wave propagation in a bubble medium // Doklady. Akad. Nauk SSSR. 1989. V. 304, No. 5. Pp. 1077–1081.